UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA PAULA DE MELO BRITO SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

Campina Grande - PB
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

ANA PAULA DE MELO BRITO SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de licenciada em matemática

Orientadora: Profª. Drª. Maria Isabelle Silva

Campina Grande-PB
2016

S586n Silva, Ana Paula de Melo Brito.
Números complexos e suas aplicações [manuscrito] / Ana Paula de Melo Brito Silva. - 2016.
35 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática".

1. Números complexos. 2. Plano de Argand-Gauss. 3. Operações. I. Título.

21. ed. CDD 512.7

ANA PAULA DE MELO BRITO SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à banca examinadora do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como exigência para obtenção do título de graduado.

BANCA EXAMINADORA:

Maria Isabelle Silva

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva

(Orientadora – / UEPB)

Walber Santiago Colaço

Prof. Me. Walber Santiago Colaço

(Examinador – / UEPB)

Kátia Suzana medeiros graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

(Examinador – / UEPB)

Este trabalho é dedicado a toda minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois sem ele eu não teria forças para essa longa jornada.

Agradeço a meus familiares, meu pai, minha mãe, meus irmãos, meu esposo e minha filha. Meus professores e aos meus colegas, em especial a Rosilda Kelly, Lidianne Tavares, Luana Araújo, Kathiana Maria, Niedja Natielle, Ivson Praxedes, Deleon Almeida e Adelmo que foram muito importantes para conclusão do curso.

Agradeço a minha professora orientadora Isabelle, que teve paciência e que me ajudou bastante á concluir este trabalho, agradeço também aos meus professores que durante muito tempo me ensinaram e que me mostraram o quanto estudar é bom.

Muito obrigada nunca será suficiente para demonstrar a grandeza do que recebi de vocês. Peço a Deus que os recompense à altura. E é a Ele que dirijo minha maior gratidão. Deus, mais do que me criar, deu propósito à minha vida.

Eu sei que da luta vem à vitória, e como dizia Francois Rabelais: “Conheço muitos que não puderam quando deviam porque não quiseram quando podiam”.

A matemática é a única ciência exata em
que nunca se sabe do que se está a falar
nem se aquilo que se diz é verdadeiro.

(Bertrand Russell)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e trataremos ainda das operações nele definidas. O conjunto $\mathbb{C}$ junto com essas operações se mostra um ambiente adequado em que questões que não são possíveis em outros conjuntos, são completamente consideradas nele. Isso certamente é verdadeiro quando do estudo de números complexos em somatórios binômias e Correntes alternadas.

PALAVRAS CHAVES: Números Complexos, Aplicações, Correntes alternadas.

ABSTRACT

We present the set of complex numbers and still treat the operations defined therein. The set with these operations shows a suitable environment in which issues that are not possible in other sets are fully considered it. This is certainly true when the study of complex numbers in summations binômias and alternating currents .

KEYWORDS : Complex Numbers , Applications , Alternating currents

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando estudamos o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, percebemos a necessidade de novos números ao tentarmos efetuar subtrações tais como $3-5$. Foi criado então o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros. Esse novo conjunto também se mostrou insuficiente para efetuar divisões como $\frac{3}{2}$. A partir dessa necessidade foi construído o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, e, a seguir, para superar outro obstáculo, construiu-se o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

Estamos mas uma vez em um ponto crítico. O conjunto dos reais não é suficiente para efetuarmos a radiciação de qualquer número, pois em $\mathbb{R}$ não existem raízes quadradas, quartas, sextas, etc. de números negativos. Para que esses resultados sejam possíveis, devemos ampliar mais uma vez o conceito de número.

Daí surge o conjunto dos números complexos cujos elementos devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração de raiz quadrada de um número negativo. Certamente que os números reais precisam ser elementos desse conjunto $\mathbb{C}$, e as operações de adição e multiplicação feitas sobre os números reais no conjunto $\mathbb{C}$ devem ser as mesmas apenas se estivermos com números reais. Note que se isso não fosse observado o conjunto $\mathbb{R}$ não seria subconjunto de $\mathbb{C}$.

Os números complexos só foram totalmente aceitos a partir do século XIX e inauguraram um extenso campo de estudos na matemática. Um exemplo disso são suas aplicações no estudo das equações algébricas.

Este trabalho pretende mostrar uma análise sobre os números complexos: História, definição, propriedades e aplicações por meio de resoluções de problemas. Busca-se através da história relacionar os números complexos com a evolução do pensamento matemático.

Procuramos ressaltar neste trabalho a importância do estudo dos números complexos, tendo em mente que ele faz parte dos conjuntos numéricos, que são o alicerce para compreensão matemática.

No capitulo 1, damos ênfase a história dos números complexos, onde citamos Cardano, Tartaglia,Rafael Bombeli, Euler,Gauss, Wessel, Argand e Hamilton que foram alguns importantes matemáticos que desenvolveram a teoria dos números complexos. No capitulo 2, mostramos os principais conceitos dos números complexos; tais como forma algébrica, representação geométrica, conjugado, operações e forma trigonométrica. O capitulo 3 é destinado à aplicação de números complexos, por meio de dois exercícios, no qual um deles se aplica a Complexos em somatórios binomiais e outro à física por meio de correntes alternadas.

CAPÍTULO 1

1.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O surgimento dos números Complexos nos mostra como um conceito matemático pode demorar a ser bem compreendido e aceito. Tais números surgiram naturalmente, desde a ocorrência das equações do segundo grau a 1700 a.c. porém, não foram as equações de segundo grau que levaram a aceitação dos números complexos e sim, as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a produção matemática de um problema concreto ou geométrico quando em sua resolução surgia uma raiz quadrada de um número negativo essas eram vistas como soluções inexistentes.

Segundo (EVES, 2004), o livro *Esteriometria* do grego Héron, publicado no primeiro século depois de Cristo, traz o primeiro registro de um número radical negativo. Depois de algum tempo, em aproximadamente 275 d.c. é descrito na *Arithmetica* de Diofanto(275 d.c.) o seguinte problema que exemplifica a solução de uma equação de segundo grau sem solução satisfatória.

Problema: Determinar os lados de um triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 unidades.

Solução: Tomando $a \ e \ b$ os comprimentos dos catetos temos:

$$\frac{ab}{2} = 7 \ e \ \ a^2 + b^2 = (12 - a - b)^2$$

Desenvolvendo a segunda equação temos,

$$12a + 12b = 72 + ab$$

Tomando $\frac{ab}{2} = 7 \Rightarrow ab = 14 \Rightarrow b = \frac{14}{a}$ temos,

$$6a^2 - 43a + 84 = 0 \ \ \Rightarrow a = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$$

Neste momento, Diofanto concluiu que só existiria solução se

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 > \frac{24}{336}.$$

Nestas condições é desnecessário buscar um sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

O interesse pelos números complexos surgiu na Europa, mas precisamente na Itália no século XVI. Lá, em meio uma disputa entre Cardano e Tartaglia pelo desenvolvimento da equação do 2° grau é que se percebeu que os números reais não contemplavam as soluções de tais equações, daí surgiram às primeiras reflexões da criação dos números complexos. Girolamo Cardano (1501 – 1576) matemático italiano em 1545 propôs em seu livro *Ars Magna*, o seguinte problema: “Dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40”. Resolvendo o problema, Cardano utilizou a igualdade $(a+bi).(a-bi)= a^2+\ b^2$ que levou a considerar as expressões $\left(5+\ \sqrt{-15}\right)$ e $(5-\sqrt{15})$ que são as soluções procuradas denominadas por números conjugados na forma $(a\ \pm bi)$, (GARBI,2006). Porém ele mesmo chegou a conclusão que o problema era impossível e as expressões encontradas não tinham nenhum significado.

De qualquer modo, o encontro dos matemáticos com os números complexos era inevitável na análise das equações de terceiro grau. Por volta de 1510 um matemático italiano chamado Scipione Del Fior encontrou a forma geral para resolver equações do tipo $x^3+px+q=0;$ mas morreu antes de publicar sua descoberta.

> Quando ele morreu em 1526, a única pessoa que conhecia seu trabalho era um aluno seu, Antônio Maria Fior de Veneza. Na época eram comuns desafios entre matemáticos e Antônio Fior querendo ganhar destaque desafiou Niccolo Fontana (1500-1557), o Tartaglia, um matemático italiano que começava a ganhar prestígio nos meios culturais da época. Tal desafio baseava-se na apresentação recíproca de questões que deveriam ser resolvidas pelos participantes. Tartaglia ao saber que seu oponente pretendia resolver equações de terceiro grau sentiu-se um pouco ameaçado, mesmo assim reuniu todos os seus esforços no sentido de suplantar seu adversário, o que conseguiu a 10 de fevereiro de 1535, onde além de resolver equações do tipo $x^3+px=q$ também encontrou a fórmula geral para as do tipo $x^3+px^2=q$. Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução cúbica. Em 1545, porém quando apareceu em Nuremberg a Ars Magna de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia da cúbica. (EVES, 2004)

Em sua obra Ars Magna, Cardano apresenta pela primeira vez a fórmula descoberta por Tartaglia na resolução das equações de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$.

Este fato foi considerado o início da história dos números complexos no período moderno. Porém, a fórmula apresentada por Cardano só se aplicava quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$. No chamado "caso irredutível", quando a equação possui 3 raízes reais, a aplicação do método de Cardano acarreta obrigatoriamente o uso de números complexos, embora as soluções da equação, que formam o resultado final, sejam reais!

Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, apresentou um problema, que abordaremos a seguir, o qual levou os matemáticos à descoberta dos números complexos.

Dada a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

(a) Mostre que $x = 4$ é solução da equação.

(b) Divida $x^3 - 15x - 4 = 0$ por $x - 4$.

(c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.

(d) Aplique a fórmula de Cardano e verifique que a solução apresentada pela fórmula é:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - 121}$$

Assim questões perturbadoras apareciam e não podiam ser descartadas, pois além da extração de raízes quadradas de números negativos também deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidos.

Conforme escreveu no seu livro L'Algebra(1572), Bombelli supôs a existência de expressões da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - b$ que possam ser consideradas, respectivamente, como $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - 121}$.

Substituindo essas expressões no problema no item (d), obtém-se $(a + \sqrt{-b}) + (a - b = 4)$.

Neste caso, as quantidades "não existentes" se anulam e obtemos $a = 2$. Com este resultado, pode-se voltar a equação $(a - b^3 = 2 + \sqrt{-121})$ e deduzir que $b = 1$.

Ao retomar o estudo da equação do terceiro grau, Bombelli introduziu sua quantidade “piu di meno”, que corresponde a $\sqrt{-1}$, e sob forma de versos, ensinou as regras de operação com ela. Embora considerasse que os números complexos eram inúteis, Bombelli operou livremente com eles e em sua álgebra deduziu que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$.

Ainda neste mesmo período, os matemáticos Albert Girard (1590-1633), em 1629 passaram a escrever as raízes quadradas de números negativos na forma $a+b\sqrt{-1}$ e René Descartes (1596-1650), em 1637, escolheu chamar, a de parte real e b de parte imaginária. Vimos assim que os matemáticos começaram a utilizar os complexos, aplicando-lhes as regras usuais de cálculo com números reais embora declarando que esses números “não existiam”, eram “inúteis”, etc. A crença de que se deveria aplicar aos números complexos as mesmas regras do caçulo com números reais levou por vezes a enganos, a exemplo temos, já no século XVIII a afirmação de Euler (1707-1783), que $\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$, por analogia a regra $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, válida para números reais. Foi denominado “princípio da permanência das formas” a aplicação de regras usuais do cálculo algébrico a novos objetos algébricos, onde foi usado frequentemente em álgebra, as vezes com resultados satisfatório, as vezes insatisfatórios.

A partir da concepção de Bombelli, ainda passaram-se mais de dois séculos para que se conseguisse, através de Euller, saber como extrair raízes de números complexos.

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que toda equação da forma $a_k\, x^k + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_{0,} a_{1,\dots,} a_k$ números complexos tem exatamente k raízes complexas, se contarmos suas multiplicidades. Peter Rother (?,1617),matemático de Nutemberg, foi quem escreveu a primeira formulação deste teorema em sua *Arithmetica Philosophica*,de 1600, ele afirma que uma equação tem no máximo tantas raízes quanto seu grau. Além de Rother, um dos primeiros matemáticos a se dedicarem a este teorema foi um jovem Albert Girard (1595-1632) cujo livro L’Invention Nouvelle em Algèbre, de 1629, diz que uma equação algébrica completa de grau n (isto é, que não há coeficientes nulos) possui n raízes. Pode ser percebida uma mudança dos matemáticos em relação aos números complexos nas palavras de Girard: “Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis(raízes complexas). Eu respondo: para três coisas – para validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções”.

Em 1749, Euler mostrou que, se $a+b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, $a-b\sqrt{-1}$ também será. Mesmo assim, como a maioria ate então, Euler ainda era reticente ao trabalhar com os números complexos.

A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, na qual Gauss inventou o termo “números complexos”. Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano.

Finalmente, em 1837, Hamilton(Sir Willian Rowan Hamilton, 1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.

CAPÍTULO 2

2.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo definiremos o conjunto dos números complexos, trataremos ainda das operações nele definidas.

Uma forma de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1937, segundo o qual o conjunto dos números complexos é o conjunto dos pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

Adição: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a, b) \rightsquigarrow a + b$

Multiplicação: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a . b) \rightsquigarrow a . b$

As operações de soma e produto de números reais assim definidas satisfazem as seguintes propriedades fundamentais:

1) A adição e a multiplicação são *associativas*, isto é, se *a, b* e *c* são números reais, então

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad (ab)c = a(bc).$$

2) A adição e a multiplicação são *comutativas*, isto é, se *a* e *b* são números reais,

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad ab = ba.$$

3) A multiplicação é *distributiva* relativamente à adição, isto é, se a, b e c são números reais,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

4) Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições

$$a + 0 = a, \qquad a1 = a,$$

para todo real *a*. estes são os neutros da adição e multiplicação, respectivamente.

5) A todo real *a* corresponde um único número real (-*a*), e se *a* ≠ 0, um único número real $\frac{1}{a}$ tais que

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{e} \qquad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

O motivo pelo qual essas propriedades são consideradas fundamentais é que a partir delas podemos inferir todas as outras regras de operações aritméticas sobre os números reais. Por exemplo, de (4) decorre que $(-1)1 = -1$ e de (3), (4) e (5) decorre que $a + a0 = a(1+0) = a1 = a$, isto é, $a0 = 0$.

A célebre "regra dos sinais" $(-1)(-1) = 1$ pode também ser deduzida das propriedades acima. Basta observar que

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + (-1).1$$

$$= (-1)\{(-1) + 1\} = (-1)0 = 0$$

e, portanto,

$$(-1)(-1) + (-1) + 1 = 1,$$

donde

$$(-1)(-1) = 1.$$

Decorre daí que o quadrado $a^2 = aa$ de um número real a nunca é negativo. Em outras palavras, o conjunto dos números reais não é suficiente para efetuarmos a radiciação, pois em IR não existem raízes quadradas, quartas , sextas, etc. de números negativos. Para que esses resultados sejam possíveis, devemos ampliar mais uma vez o conceito de número.

Os números complexos nascem desta insuficiência. Queremos dispor de um conjunto de objetos, o qual chamaremos números complexos, que possam ser somados e multiplicados e nos quais seja possível extrair a raiz quadrada de um número negativo. É claro que queremos também que os reais sejam objetos deste conjunto e que as operações de adição e multiplicação, quando feitas sobre os reais, deem o mesmo resultado que as operações que já conhecemos.

Existem diversas maneiras de definir o conjunto dos números complexos. Adotaremos a seguinte:

Os *números complexos* constituem um conjunto, denotado por $\mathbb{C}$, onde estão definidas operações de adição e de multiplicação com as propriedades (1), (2), (3), (4) e (5). Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:

a) Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não-real, denominado unidade imaginária, que satisfaz a seguinte condição:

$i^2 = i.i = -1.$

b) Número complexo é todo número da forma $a + bi$ tal que a e b são números reais quaisquer e i é a unidade imaginária.

A expressão $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, é denominada forma algébrica do número complexo, em que a e b são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do complexo.

As operações de adição e multiplicação estão assim definidas no conjunto dos números complexos:

- Adição:
  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

- Multiplicação:
  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Usando as propriedades de (1) a (5), podemos operar com complexos de maneira comparável à que operamos com reais, com o cuidado de tomar $i^2 = -1$. Por exemplo,

$$(5 + 3i) + (8 + 5i) = 5 + 8 + (3 + 5)i = 13 + 8i\ ,$$

$$(7 + 2i)(4 + 3i) = 7(4 + 3i) + 2i(4 + 3i) = 28 + 21i + 8i + 6i^2$$

$$= 28 - 6 + (21 + 8)i = 22 + 29i.$$

Observe que de (b) decorre que os complexos da forma $a + 0i$ são os números reais. Além disso, sendo $a + bi = c + di$, concluímos pela unicidade de *b* que $a = c$ e $b = d$, isto é, se números complexos são iguais, então suas partes reais e imaginárias são iguais. Convém usar uma letra $z = a + bi$ para indicar um número complexo.

Da definição adotada decorre que podemos pensar no número complexo $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano cujas coordenadas são a e b, ou ainda como o *vetor* (isto é, o segmento orientado) de origem na origem 0 do sistema de coordenadas e extremidade(a, b), isto é, complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{0z}$(figura1).

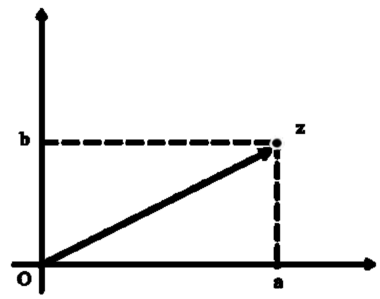

Figura 1 representação geométrica de um número complexo

Figura 1

No primeiro caso, o ponto (a, b) é chamado de *imagem* do complexo $z = a + bi$ e, no último caso, os números *a* e *b* são chamados *componentes* do vetor Oz.

Vamos ver como se interpretam as operações de soma e produto quando consideramos nos complexos como vetores do plano. Usando as propriedades de (1) a (5), conseguiremos:

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Assim podemos dizer que, a soma de dois números complexos é representada por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Isto significa, como nos mostra a figura 2, que a soma é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído sobre vetores dados.

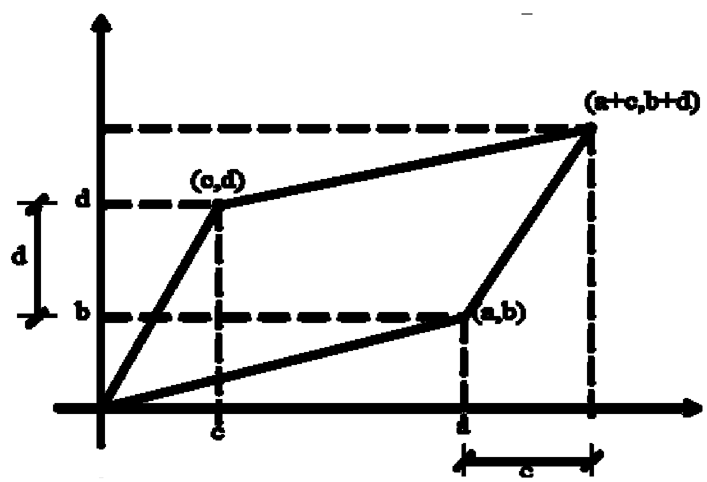

Figura 2 representação de operações com números complexos

É também interessante interpretar a diferença de dois complexos z_1 e z_2. Observando a figura 3, temos,

$$\overrightarrow{0z_1} + \overrightarrow{0z_1z_2} = \overrightarrow{0z_2} \qquad ou \qquad \overrightarrow{z_1z_2} = \overrightarrow{0z_2} - \overrightarrow{0z_1},$$

isto é, o vetor que representa a diferença $z_2 - z_1$ é o vetor z_1z_2.

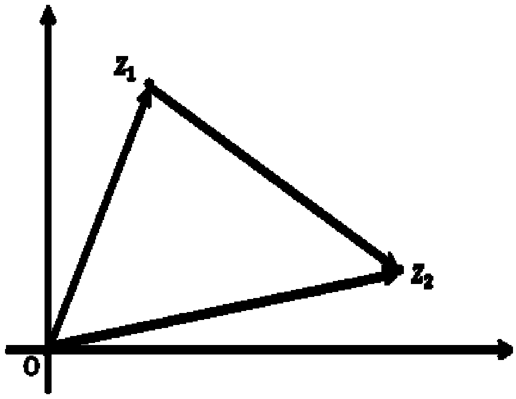

Figura 3 subtração de números complexos

2.2 - MÓDULOS E CONJUGADOS

O *conjugado* de um número complexo $z = (a,b) = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = (a,b) = a - bi$. Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z relativamente ao eixo Ox da (figura 4).

Dado um número $z = a + bi$, chama-se o $\textit{módulo}$ de z o número real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância de 0 a z, ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo z, como podemos ver claramente pelo Teorema de Pitágoras.

Observe que uma relação entre os dois conceitos acima é obtida do seguinte modo:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2;$$

Ou seja, o produto de um complexo z por seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z.

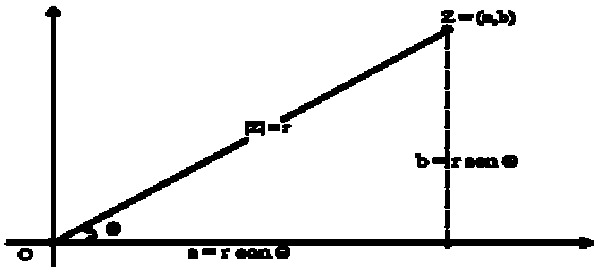

Figura 4 módulo de um número complexo

Agora vamos determinar o problema $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$. A solução é simples, dada por:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

Isto é,

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Por exemplo, se $z = 1 + 3i$, temos

$$\frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i}{1+9} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i.$$

Da mesma forma que para números reais, são dados dois complexos z_1 e $z_2 \neq 0$, definimos o *quociente* z_1/z_2 como sendo o produto $z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)$. Efetuamos a divisão multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador.

Por exemplo, se $z = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + 5i$, obtemos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1+5i} = \frac{(3+2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$$

$$= \frac{3+10+2i-15i}{1+25} = \frac{13-13i}{26} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Teorema 1: Se z_1 e z_2 são números complexos, então

a) $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

b) $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

$Demonstração$. Façamos $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$.

$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(bc + ad),$

$\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - i(bc + ad).$

Por outro lado, $\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ e, portanto,

$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - i(bc + ad) = \overline{z_1 z_2}$

o que demonstra (a).

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, logo,

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

O que demonstra (b).

Teorema 2:

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Demonstração:

$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2$

$= |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$.

Como módulos são positivos ou nulos, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da expressão acima e obter $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

2.2Plano de Argand-Gauss

O plano cartesiano é chamado plano complexo ou plano de Argand-Gauss quando o eixo das abscissas (eixo $0x$) é o eixo das ordenadas (eixo $0y$), o eixo imaginário.

Assim, um número complexo $z = a + bi$ é representado graficamente neste plano complexo pelo ponto de coordenadas (a, b) e esse ponto é denominado *afixo* ou *imagem do número complexo*.

1.1.1 Argumento de um número complexo

Dado um número complexo não nulo $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, consideremos no plano de Argand Gauss os pontos $O(0,0), P(a,b)$ e ângulo cujos lados são o semi eixo positivo $\overrightarrow{0x}$ e a semi reta $\overrightarrow{OP}$.

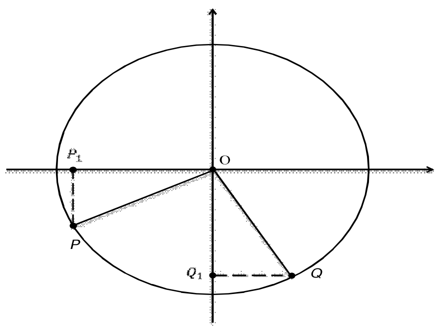

Figura 5 argumento de um número complexo

Medindo o ângulo $P\hat{O}x$,no sentido anti horário, a partir do semi eixo positivo Ox, obtém-se a medida φ, com $0 \leq \varphi < 2\pi \; ou \; 0^{o} \leq \varphi < 360^{o}$, que chamamos de **argumento** do número complexo z.

1.1.2 Forma trigonométrica de um número Complexo

Sabemos que um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (a, b) ou como um vetor $\overrightarrow{0z}$ de origem 0 e extremidade(a, b). A representação $z = a + bi$ da ênfase as coordenadas cartesianas do ponto z. Uma representação que dá ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{0z}$ é obtido do seguinte modo:

Indiquemos por $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ o comprimento de $\overrightarrow{0z}$ que suporemos diferente de zero, e por θ o ângulo positivo $x0z$.

Já vimos em trigonometria que:

$$cos\theta = \frac{a}{r} \quad sen\theta = \frac{b}{r},$$

Essas igualdades levam a,

$$z = a + bi = rcos\theta + rsen\theta i = r(cos\theta + isen\theta).$$

$$= r(cos\theta + isen\theta),$$

Onde os elementos geométricos r *e* θ do vetor $\overrightarrow{0z}$ estão destacados. Portanto a representação $\boldsymbol{z = r(cos\theta + isen\theta)}$ é chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar do complexo* z.

Uma observação importante é que se substituirmos θ na expressão acima por $\theta + 2k\pi$, onde k é um inteiro positivo,negativo ou nulo, o complexo z não se altera. Em muitos casos é conveniente usar esta expressão mais geral:

$$\boldsymbol{z = r\big(cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi)\big)}$$

e dizer que os valores de $\theta + 2k\pi$ são os argumentos de z.

Por exemplo, se $z = 1 + i\sqrt{3}$, temos

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$

e, portanto,

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $cos\theta = \frac{1}{2}$ *e* $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos que $\theta = \pi/3$, donde

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}\right),$$

Que também pode ser escrita como

$$z = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\right).$$

1.1.3 Consequências da forma trigonométrica

A forma trigonométrica dos complexos nos permite obter uma interpretação geométrica da multiplicação de complexos, que veremos agora.

Faremos primeiro a seguinte observação. Se x é um número qualquer, então

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -senx,$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = +cosx.$$

Como x e $\frac{x}{2}$ estão sempre em quadrantes adjacentes, obteremos os sinais indicados.

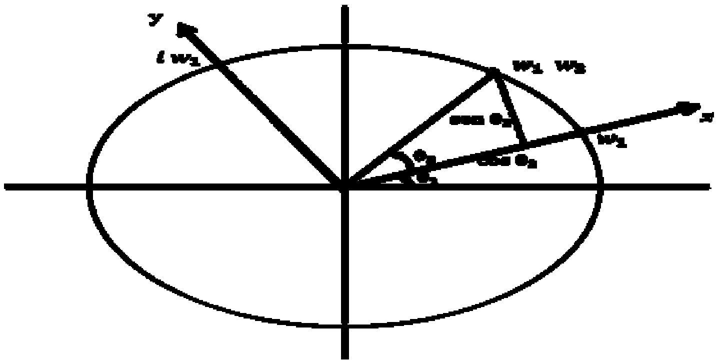

Figura 6 consequência da fórmula trigonometrica

Iremos de início interpretar geometricamente a multiplicação de dois complexos unitários, isto é, de módulo 1. Sabemos que, um complexo unitário $w_1 = cos\theta_1 + isen\theta_1$ é representado por um ponto do círculo unitário S^1. Como

$$iw_1 = i(cos\theta_1 + isen\theta_1) = -sen\theta_1 + icos\theta_1$$
$$= cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

Concluímos que multiplicar w_1 por i significa efetuar no ponto w_1 uma relação positiva de $\frac{\pi}{2}$. Seja agora $w_2 = cos\theta_2 + isen\theta_2$ um outro ponto do círculo unitário. Então

$$w_1 w_2 = (cos\theta_2 + isen\theta + 2)w_1 = cos\theta_2 w_1 + sen\theta_2 iw_1,$$

Isto é, o vetor que representa $w_1 w_2$ é a soma (diagonal do paralelogramo) dos vetores perpendiculares $cos\theta_2 w_1$ e $sen\theta_2 iw_1$. Tomando o sistema de coordenadas $x0y$ cujo eixo $0x$ coincide com $0w_1$, obteremos que o ângulo de w_1 com $w_1 w_2$ é θ_2.

Concluímos daí que multiplicar dois complexos unitários w_1 e w_2 significa, geometricamente, dar a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

No caso dos complexos não serem unitários, escreveremos $z_1 = r_1 w_1, z_2 = r_2 w_2$ com $|w_1| = |w_2| = 1$, e o produto será simplesmente:

$$z_1 z_2 = r_1 w_1 r_2 w_2 = r_1 r_2 w_1 w_2.$$

Assim dizendo, efetua-se o produto dos complexos unitários correspondentes como acima e multiplica-se o resultado pelo número real $r_1 r_2$.

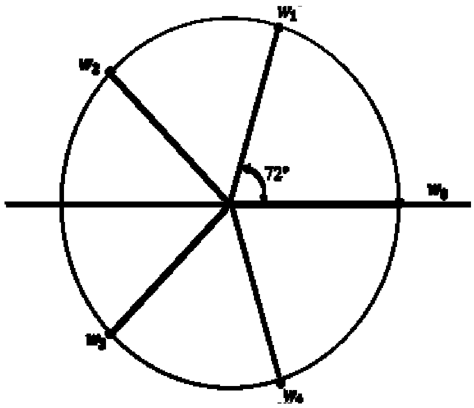

Figura 7 teorema fundamental da trigonometria

A importância da interpretação que acabamos de apresentar é a seguinte proposição, que esta pode ser considerada como o teorema fundamental da Trigonometria.

Teorema 2. (Fórmula de adição da Trigonometria) $Se\ x\ e\ y\ são\ reais\ quaisquer$:

$$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny$$
$$sen(x+y) = senxcosy + senycosx$$

Demonstração: Se x e y satisfazem a condição

$$0 \leq x < 2\pi, \qquad 0 \leq y < 2\pi,$$

Façamos

$$w_1 = cosx + isenx, \qquad w_2 = cosy + yseny.$$

Pela interpretação geométrica do produto, $w_1 w_2$ é obtido de w_1 dando-lhe uma rotação positiva de ângulo y. Portanto,

$$w_1 w_2 = cos(x+y) + isen(x+y).$$

Por outro lado,

$$w_1 w_2 = (cosx + isenx)(cosy + iseny) =$$
$$= (cosxcosy - senxseny) + i(senxcosy + senycosx).$$

Fazendo a igualdade das partes reais e imaginárias de (3) e (4), obtemos

$$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny, sen(x+y) = senxcosy + senycosx,$$

O que demonstra o teorema.

Se x e y são quaisquer, achamos números inteiros k e l tais que

$0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi,$ $\qquad$ $0 \leq x + 2l\pi = y < 2\pi.$

Por definição,

$$cosx = cosx',\ senx = senx', cosy = cosy' e\ seny = seny'$$

Além disso, é imediato que

$$cos(x+y) = cos(x'+y') \text{ e } \quad sen(x+y) = sen(x'+y')$$

Como as relações estão demonstradas para x' e y', segue-se que elas são verdadeiras para x e y.

Do teorema fundamental da Trigonometria decorre um grande número de identidades trigonométricas. De todo modo não há necessidade de memorizar outras identidades além das fundamentais, que são:

$$cos^2x + sen^2x = 1,$$
$$\frac{senx}{cosx} = tgx, se\ cosx \neq 0,$$
$$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny,$$
$$sen(x+y) = senxcosy + senycosx,$$

Todo o resto podendo ser deduzido daí.

Uma outra consequência imediata da interpretação geométrica do produto dos complexos é a seguinte expressão conhecida como $fórmula\ de\ De\ Moivre$:

$$(cosx + isenx)^n = cos(nx) + isen(nx),$$

Onde n é um inteiro positivo. Geometricamente, a fórmula acima significa que multiplicar o complexo unitário $cosx + isenx$ por se próprio n vezes equivale a dar-lhe n rotações sucessivas de ângulo x.

Uma das facilidades da fórmula de De Moivre é permitir a determinação de $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$ sem o uso de fórmula de adição.

Por exemplo, Calculemos o $cos3x$,

$$\begin{aligned} cos3x + isen3x &= (cosx + isenx)^3 \\ &= cos^3x + 3cos^2xsenx + 3cosxi^2sen^2x + i^3sen^3x \\ &= cos^3x + 3cos^2xisenx \\ &= cos^3x - 3cosxsen^2x + i(3\cos^2 xsenx - sen^3x). \end{aligned}$$

Fazendo a igualdade das partes reais e imaginária temos:

$$cos3x = cos^3x - 3cosxsen^2x,$$

$$sen3x = 3cos^2xsenx - sen^3x$$

A fórmula de De Moivre também é útil na determinação de raízes dos números complexos. Por exemplo, vamos achar as raízes cúbicas de $-i$ e interpreta-lá geometricamente.

Escrevendo z na forma trigonométrica temos:

$$z = -i$$

$$a = 0$$

$$b = -1$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{-1} = 1$$

$$\left.\begin{array}{c} cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ sen\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Portanto:

$$z = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right)$$

Usando a segunda fórmula de De Moivre, segue:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + isen\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{1} = 1$

Como $n = 3$, então k poderá ser $0{,}1\ ou\ 2$. Assim temos:

- Para $k = 0;$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- Para $k = 1;$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- Para $k = 2;$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Observe que $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

Assim, as raízes cúbicas de $-i$ são:

$$w_0 = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} = 0 + i.1 = i$$

$$w_1 = 1\left(cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6}\right) = cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = 1\left(cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6}\right) = cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

.

Daí podemos concluir que todo número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas, as quais têm todas o mesmo módulo $\left(\sqrt[n]{|z|}\right)$ e argumentos formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

CAPÍTULO 3

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo, trataremos de duas aplicações envolvendo números complexos.

Aplicação 1: Números Complexos em Somatórios Binomiais.

Algo intrigante que podemos retirar das propriedades de números complexos é sua propriedade de potência. Em ciclos de 4 potência o número $\boldsymbol{i}$ se repete.

$i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = \cdots = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots = -i$

Vamos usar esse fato para nosso benefício.

Do desenvolvimento binomial de Newton temos:

$(1 + x)^n = 1 + \ C_n^1.x + \ C_n^2.x^2 + \cdots \ C_n^n.x^n$

A partir daí podemos tirar alguns resultados bastantes úteis:

Fazendo $x = 1$ na expressão acima, temos o conhecido Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal:

$$(1 + 1)^n = 1 + \ C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Fazendo $x = -1$: $\quad (1 - 1)^n = 1 - C_n^1 = C_n^2 + - \cdots + (-1)^n.C_n^n = 0$

Utilizando os resultados acima é possível provar :

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$$

Ou seja, foi obtido facilmente, com conceitos básicos a soma binomial de combinações de $\boldsymbol{n}$ tomadas em números pares (bem como os ímpares).

Será que sabemos calcular a seguinte soma?

$$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots$$

Utilizando resultados já encontrados seria interessante termos o valor para $\boldsymbol{x}$ que mude sua potência em ciclos diferentes de dois. Bom, conforme foi dito, o número complexo $\boldsymbol{i}$ muda sua potência em ciclos de quatro. Vejamos como isso pode nos ajudar:

$(1+X)^n = 1 + C_n^1.X + C_n^2.X^2 + \cdots C_n^n.X^n$

Fazendo $x = i$

$(1+i)^n = 1C_n^1.i + C_n^2.i^2 + C_n^3.i^3 = \cdots$

$= (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \cdots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \cdots$

Da expressão acima tiramos dois resultados úteis:

$R(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - + \cdots)$

$Im(1+i)^n = (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \cdots)$

Uma vez que:

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}.cos\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2^n}.sen\frac{n\pi}{4}\right)$,temos:

$$\left\{\begin{matrix} Re(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}.cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ Im(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}.sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{matrix}\right\}$$

E com isso temos mais duas somas binomiais importantes:

$\{(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 \mp \cdots) = 2^{\frac{n}{2}}.cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$\{(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + - \cdots) = 2^{\frac{n}{2}}.sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Ora, uma vez que conhecemos:

$\{(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 \mp \cdots) = 2^{\frac{n}{2}}.cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots = 2^{n-1}$

Somando ambas as expressões, chegamos ao resultado:

$1 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \cdots = 2^{n-1} + 2^{\frac{n-1}{2}}.cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Aplicação 2: Aplicando Números Complexo à Física

Em circuitos de corrente alternada, como por exemplo, as instalações residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = R.i$, estudada na física, e que se utiliza de números reais, torna-se:

$\boldsymbol{U = Z.i}$ em que:

$\boldsymbol{U}$ é a tensão, $\boldsymbol{Z}$ é a impedância e $\boldsymbol{i}$ é a corrente elétrica, e essas grandezas passam a ser representadas através de números complexos. Para que não haja confusão entre $\boldsymbol{i}$ símbolo da corrente elétrica e $\boldsymbol{i}$ unidade imaginária, utiliza-se $\boldsymbol{j}$ como unidade imaginária**,** na representação algébrica $a + bj$. Além disso usamos a notação $|W| < \theta$ para a forma trigonométrica $|W|(cos\theta + isen\theta)$, do número complexo W.

Com base nesse texto vamos resolver o problema a seguir:

Uma fonte de tensão de calor eficaz $220^o < 0^o$ alimenta uma carga de impedância $Z = (10 + 10j)ohm$. Vamos obter a corrente elétrica fornecida pela fonte.

Temos: $U = Z.i \Rightarrow i = \frac{U}{Z}$.

Para efetuarmos essa divisão é preferível ter $U e\ Z$ na forma trigonométrica, já temos:

$|U| < \theta$

$U = 220^o < 0^o \Rightarrow U = 220^o(cos0^o + jsen0^o)$

E agora precisamos obter a forma trigonométrica de Z.

$Z = 10 + 10j \Rightarrow |Z| = \sqrt{10^2 + 10^2} \Rightarrow |Z| = 10\sqrt{2}$

$$cos\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo $\theta = 45°$, então,

$Z = 10 = 10j = 10\sqrt{2}(cos45° + jsen45°)$

Como:

$|U| < \theta$, temos $10\sqrt{2} < 45°$

Assim:

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220^{\circ}(cos0^{\circ} + jsen0^{\circ})}{10\sqrt{2}(cos45^{\circ} + jsen45^{\circ})} = \frac{220}{10\sqrt{2}}[cos(0^{\circ} - 45^{\circ}) + jsen(0^{\circ} - 45^{\circ})]$$

$$i = 11\sqrt{2}[cos(-45^{\circ}) + jsen(-45^{\circ})]$$

$$i = 11\sqrt{2}(cos45^{\circ} - jsen45^{\circ})$$

$$i = 11\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \Rightarrow i = 11 - 11j \; ou \; 11\sqrt{2} \sphericalangle 45^{\circ}$$

Vale lembrar ao leitor que para entender esse último exemplo, faz-se necessário um certo conhecimento a respeito do assunto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos evidenciar as referencias históricas e aplicativas acerca dos Números Complexos para promover e despertar interesses a respeito do tema. Ao analisar a evolução da descoberta dos números complexos constatou-se a importância do contexto histórico na compreensão da origem, fases da pesquisa, descoberta e aplicações desses números.

Fica evidente que o presente trabalho não esgota esse tema. A partir da continuidade do estudo dos números complexos novas descobertas e aplicações surgirão, contribuindo assim para a evolução da matemática.

Termina-se este na esperança que o mesmo tenha sido interessante, bem como de fácil compreensão, e que leve o leitor a pesquisar ainda mais sobre o assunto para ampliar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS

ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 14724: 2011. Rio de Janeiro, 2011.

Bucchi, Paulo, 1944- Curso Prático de Matemática/ Paulo Bucchi- São Paulo: Moderna,1998.

DANTE, Luis Roberto. Matemática: contexto e aplicação. Volume 3. São Paulo,Editora ática,2004.

MACHADO, Antônio dos Santos, 1948 – Matemática na escola do 2°grau/ Antônio dos Santos Machado. – São Paulo: Atual, 1996.

MORGADO, Augusto César et alii. Trigonometria e números complexos. Rio de Janeiro, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1992

PAIVA, Manoel Rodrigues,1950-Matemática/Manoel Rodrigues Paiva – São Paulo; Moderna 1995.

http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc01.htm

http://www.mundoeducacao.com/matematica/conjunto-dos-numeros-complexos.htm

http://www.matematicadidatica.com.br/PlanoComplexoArgandGauss.aspx

http://www.matematica.br/historia/complexos.html