UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTONIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

Victor Emmanoel César de Araújo

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E A INVARIÂNCIA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

PATOS
2017

Victor Emmanoel César de Araújo

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E A INVARIÂNCIA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Física, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

Patos

2017

SIB - UEPB - Campus VII

A663p Araújo, Victor Emmanoel César de

O Princípio da Relatividade e a Invariância das Equações de Maxwell [manuscrito] / Victor Emmanoel César de Araújo. - 2017.

47 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.

“Orientação: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira, CCEA”.

1. Princípio da Relatividade. 2. Eletromagnetismo. 3. Equações de Maxwell. I. Título.

21. ed. CDD: 530.11

Victor Emmanoel César de Araújo

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E A INVARIÂNCIA DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 15 de agosto de 2018

BANCA EXAMINADORA

Marcelo da Silva Vieira

Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Rodrigo César Fonseca da Silva

Prof. Dr. Rodrigo César Fonseca da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Pedro Carlos de Assis Jr

Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”
(Carl Friedrich Gauss).

AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus pelo dom da vida e pela sabedoria.

À meus pais pela liberdade de seguir os estudos que sempre escolhi e a todos os meus familiares que sempre me incentivaram a não desistir.

À minha namorada Camilla Alencar pelo incentivo incondicional durante todo o processo de desenvolvimento desse trabalho.

À meu orientador Marcelo da Silva Vieira pela boa vontade de me permitir trabalhar com ele. Nunca irei esquecer da ajuda sempre disponível para resolver todos os problemas do trabalho e claro, pela ideia fundamental que foi a base desse TCC. Sem ele, essa monografia não seria possível. Aqui também cabe agradecer ao professor Rodrigo Fonseca pela disposição de contribuir com ideias sempre pertinentes.

Agradeço enormemente a Soraya Monteiro, minha colega de turma, amiga e parceira nas correções textuais desse trabalho. Sem sua boa vontade, eu estaria em uma situação completamente diferente com o que diz respeito a entrega deste trabalho.

Também a Jardeson Allef e Saullo Soares pela ajuda essencial nas revisões de tantos cálculos que fazem parte desse trabalho. Agradeço também a Geovane Júnior, que foi o auxílio fundamental no uso do latex.

E por fim, aos meus amigos e colegas de turma Natália Érika, Teodósio Carducci, Daniele Vidal, Géssica Martins, Jonas Souza e Mateus Patricio que sempre me trataram bem e nunca negaram ajuda alguma.

RESUMO

Um dos princípios fundamentais da natureza é o Pincípio da Relatividade, que diz que as leis da natureza se manifestam igualmente para quaisquer observadores. As leis da Mecânica Clássica, por exemplo, são invariantes para quaisquer observadores inerciais, e por isso é impossível destinguir a situação de repouso para movimento retilineo e uniforme na Mecânica Clássica. Neste trabalho vamos aplicar o Princípio da Relatividade ao Eletromagnetismo Clássico, relacionando dois observadores inerciais que têm movimento relativo entre si. Dado um Referencial Inercial S' que se afasta com velocidade relativística constante v de outro Referencial Inercial S, verifica-se matematicamente que as Equações de Maxwell são as mesmas para observadores em referenciais inerciais diferentes. Aplicamos as regras de transformação para referenciais inerciais que tínhamos até então, no caso as Transformações de Galileu, verificamos matematicamente que não seriam suficientes para descrever as quatro Equações de Maxwell em outro referencial inercial com velocidade relativística. Assim foi necessário propor novas transformações que satisfizessem a universalidade das leis físicas, o que terminou resultando nas transformações que hoje conhecemos como as Transformações de Lorentz.

Palavras Chave: Princípio da Relatividade; Eletromagnetismo; Equações de Maxwell.

ABSTRACT

One of the fundamental principles of nature is the Pinnacle of Relativity, which says that the laws of nature manifest themselves equally to any observers. The laws of Classical Mechanics, for example, are invariant for any inertial observer, and so it is impossible to distinguish the rest state for straight and uniform motion in Classical Mechanics. In this work we will apply the Principle of Relativity to Classical Electromagnetism, relating two inertial observers that have relative motion between them. Given an inertial frame S 'that moves away with constant relativistic velocity v of another inertial frame S, it is mathematically verified that the Maxwell equations are the same for observers in different inertial frames. We applied the transformation rules for inertial frames that we had until then, in the case of Galileo's transformations, and mathematically verified that they would not be sufficient to describe Maxwell's four equations in another inertial frame with relativistic velocity. Thus it was necessary to propose new transformations that would satisfy the universality of the physical laws, which ended up resulting in the transformations that we know today as the transformations of Lorentz.

Keywords: Principle of Relativity; Electromagnetism; Maxwell's Equations.

Sumário

INTRODUÇÃO

Nesse trabalho iremos demonstrar como o Eletromagnetismo se torna válido para o Princípio da Relatividade. Queremos saber como podemos definir as Transformações de Lorentz e quais as suas consequências, demonstrando como elas "traduzem" as Equações de Maxwell de um Referencial Inercial S com coordenadas (x, y, z, t) para outro Referencial Inercial S' de coordenadas (x', y', z', t') que se afasta do primeiro, com velocidade constante próxima à da luz. Sistema inercial é definido como um sistema no qual é válida a primeira lei de Newton, "pode-se dizer que um **sistema inercial é um sistema no qual um corpo não tem aceleração se nenhuma força age sobre ele**"(RAYMOND e JEWETT, 2012, v. 1, p. 282, grifo do autor).

Nos séculos XVII e XVIII, já era conhecido que na Mecânica Clássica, onde o princípio da relatividade Newtoniana afirmava que as leis da mecânica são as mesmas em todos os sistemas inerciais de referência, tínhamos as Transformações de Galileu que determinavam como podíamos transformar as leis da mecânica para dois observadores em sistemas inerciais diferentes. Então por que não usarmos as Transformações de Galileu para resolver o problema? Não é possível tornar compatível o Eletromagnetismo com o Princípio da Relatividade, usando as Transformações de Galileu.

Mostraremos que as transformações não são coerentes para o Eletromagnetismo e por isso foi necessário propormos novas transformações e assim chegarmos até ao que conhecemos hoje como as Tansformações de Lorentz. Partimos exclusivamente do Princípio da Relatividade que nos diz que "As leis físicas são as mesmas para quaisquer observadores inerciais", e começamos a manipular as Equações de Maxwell.

Com o Eletromagnetismo comprovado através de vários experimentos laboratoriais, ficou claro que seriam necessárias novas transformações que determinassem de forma correta as coordenadas (x', y', z', t') do Referencial S', e assim, escrever as leis de forma invariante; por isso, descartamos as Transformações de Galileu. Aqui iremos determinar matematicamente, como compatibilizar duas teorias que a princípio são distintas.

Determinamos todas as variáveis necessárias para sanar os problemas surgidos das Transformações de Galileu usadas nas Equações de Maxwell. Mostramos também, de forma simples, as consequências das Transformações de Lorentz: O espaço-tempo; os Quadrivetores (quadrivelocidade, quadrimomento, entre outros); como os campos se transformam e como escrevemos a Força Eletromagnética.

Capítulo 1

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E O ELETROMAGNETISMO

Um grande problema que os físicos da época tentavam resolver, foi tornar as equações de Maxwell invariantes para referenciais inerciais que tinham movimento relativo entre si. Como tinhamos as Tranformações de Galileu na Mecânca Clássica, sendo as regras de tranformação que determinavam como as leis físicas podiam ser transcritas de um Referencial Inercial S para outro Referencial Inercial S', aplicava-se essas mesmas regras para o Eletromagnetismo. Neste problema especificamente, surgiam incoerências que resultavam em dois pontos:

1. As quações de Maxwell estão erradas e se matem as Transformações de Galileu

   ou

2. Mantem-se as Equações de Maxwell e se corrige as Tranformações de Galileu

Como as quatro equações, que regiam a eletricidade, magnetismo e óptica, tinham várias comprovações em laboratório, ficou claro que seria necessário novas tranformações.

Chegando ao ano de 1904, o físico holandês Hendrik Antoon Lorentz, conseguiu determinar as quatros tranformações necessárias para "traduzir"as leis que regem o Eletromagnetismo e com isso unificar de uma vez o Princípio da Relatividade de Einstein com a teoria Eletromagnética.

1.1 O Eletromagnetismo é Incompatível com as Transformações de Galileu

As leis fundamentais que regem os fenômenos Elétricos e Magnéticos, são as Equações de Maxwell. São leis tão fundamentais para o Eletromagnetismo quanto as leis de Newton são para a Mecânica Clássica. Foram denominadas assim, em homenagem ao físico teórico escocês, James Clerk Maxwell.

A lei de Gauss estabelece que o fluxo elétrico total através de uma superfície fechada é igual a carga líquida dentro dessa superfície. Já a lei de Gauss para o magnetismo, nos diz que o fluxo Magnético resultante através de uma superfície fechada é nulo, ou em outras palavras, não existe monopólo Magnético. A lei de indução de Faraday, define que um campo Elétrico oscilante no tempo, induz um campo Magnético oscilante no tempo.

E por último, temos a lei de Ampère-Maxwell, que formula que um campo Magnético oscilante no tempo é determinado pela corrente resultante e pela variação do campo Elétrico no tempo.

Vamos tomar as Equações de Maxwell no sistema de unidades Gaussianas com o intuito de facilitar nossos cálculos.

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = 4\pi\rho \text{ (lei de Gauss)},$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \text{ (lei de Gauss para o magnetismo)},$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \text{ (lei de Faraday)},$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \text{ (lei de Ampère-Maxwell)}.$$

Onde:

ρ é a densidade de carga total,

c é a velocidade da luz no vácuo,

J é a densidade de corrente.

Logo, se considerarmos as Equações de Maxwell no Referencial S, os campos Elétrico e Magnético ficam definidos como:

Para o divergente do campo Elétrico

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \tag{1.1}$$

Para o divergente do campo Magnético

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \tag{1.2}$$

Para o rotacional do campo Elétrico

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{1.5}$$

Para o rotacional do campo Magnético

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}J_x+\frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\frac{4\pi}{c}J_y+\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{4\pi}{c}J_z+\frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t}. \tag{1.8}$$

Começamos a aplicar as Tranformções de Galileu nas Equações de Maxwell para comprovar que não conseguimos determina-las no Referencial S'.

Tomando as Transformações de Galileu que são definidas como[1]

$$x' = x - vt,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = t.$$

Usando a Regra da Cadeia[3] para derivadas parcias, encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'},$$

Substituímos essas derivadas no rotacional e divergente dos campos Elétrico e Magnético, que ficam reescritos assim:

Para o divergente do campo Elétrico

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho'. \tag{1.9}$$

Para o divergente do campo Magnético

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0. \tag{1.10}$$

Para o rotacional do campo Elétrico

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - v\frac{\partial B_x}{\partial x'}. \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial t'} - v\frac{\partial B_y}{\partial x'}. \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial t'} - v\frac{\partial B_z}{\partial x'}. \tag{1.13}$$

Para o rotacional do campo Magnético

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'}J_x - \frac{1}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial t'} - v\frac{\partial D_x}{\partial x'}. \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial H_z}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c'} J_y - \frac{1}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial t'} - v\frac{\partial D_y}{\partial x'}. \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'} J_z - \frac{1}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial t'} - v\frac{\partial D_z}{\partial x'}. \tag{1.16}$$

Por comparação entre as equações 1.9 e 1.10 do Referencial S' com as equações 1.1 e 1.2 do Referencial S, encontramos:

$D'_x = D_x$, $D'_y = D_y$, $D'_z = D_z$

e

$B'_x = B_x$, $B'_y = B_y$, $B'_z = B_z$.

Agora resolvemos a equação 1.11 isolando $\frac{\partial B_x}{\partial x'}$ da equação 1.10 e substituimos na equação 1.11. Portanto, encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} = -\frac{\partial B_y}{\partial y'} - \frac{\partial B_z}{\partial z'},$$

Substituindo essa última expressão na equação 1.11, temos:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + v\frac{\partial B_y}{\partial y'} + v\frac{\partial B_z}{\partial z'}.$$

Organizando os termos da equação acima, encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial y'}(E_z - vB_y) - \frac{\partial}{\partial z'}(E_y + vB_z) = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'}.$$

Por fim, comparando a equação acima com a equação 1.3

$E'_z = E_z - vB_y$,

$E'_y = E_y + vB_z$,

$c' = c$,

$B'_x = B_x$.

Partindo das relações constitutivas dos campos Elétrico e Magnético na matéria no sistema Gaussiano de unidades, temos:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} + 4\pi\overrightarrow{P}$$

e

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} - 4\pi\overrightarrow{M}.$$

Supondo que estejamos no vácuo, a Polarização $\overrightarrow{P}$ que é definida como o momento de dipolo Elétrico por unidade de volume, é igual a zero. De mesmo modo, a Magnetização $\overrightarrow{M}$ que é o momento do dipolo Magnético por unidade de volume, também é igual a zero.[1]

Assim:

$$\overrightarrow{P} = 0$$

e

$$\overrightarrow{M} = 0.$$

Logo, aplicando o Princípio da Relatividade para as Relações Constitutivas na matéria, teremos:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'} = \overrightarrow{E'}.$$

E assim obtemos

$$D'_y = E'_y \Rightarrow D'_y = E_y + vB_z \Rightarrow E_y = E_y + vB_z \Rightarrow vB_z = 0.$$

Dessa última equação implica duas alternativas:

1. A velocidade entre os dois referenciais é nula (não é verdade, já que no início do problemas admitimos uma velocidade v entre os Referenciais S e S') ou

2. O campo Magnético é nulo (o que também não é verdade e não nos é interessante. Não faz sentido tratar de todas as Equações de Maxwell se não temos campos Elétrico e Magnético).

Assim, logo de início, notamos que não nos satisfaz aplicar as Tranformações de Galileu para o Eletromagnetismo. Apenas essa incoerência já nos é suficiente para mostrar a incompatibilidade das Equações de Maxwell com as Transformações de Galileu.

1.2 Novas Transformações

Como ficou claro na seção anterior, não conseguimos determinar as Equações de Maxwell no Referêncial S' usando as Transformações de Galilleu e por causa disso, precisamos buscar novas transformações.

Inicialmente, vamos propor tranformações do tipo:

$$t' = A_{00}t + A_{01}x, \tag{1.17}$$

$$x' = A_{10}t + A_{11}x, \tag{1.18}$$

$$y' = y, \tag{1.19}$$

$$z' = z. \tag{1.20}$$

Usando a Regra da Cadeia[3] para derivadas parciais nas equações acima, encontramos de forma genérica

$$\frac{\partial}{\partial t} = A_{00}\frac{\partial}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial}{\partial x'}, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = A_{01}\frac{\partial}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial}{\partial x'}, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \tag{1.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}. \tag{1.24}$$

Onde A_{00}, A_{01}, A_{10}, e A_{11} são constantes a se determinar.

Substituímos as transformações das derivadas dadas pelas equações 1.21, 1.22, 1.23 e 1.24 nas Equações de Maxwell do Referencial S e encontramos:

$$A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho, \tag{1.25}$$

$$A_{01}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0, \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'}, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - A_{01}\frac{\partial E_z}{\partial t'} - A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{A_{00}}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial x'}, \tag{1.28}$$

$$A_{01}\frac{\partial E_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial x'}, \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'}J_x + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial x'}, \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - A_{01}\frac{\partial H_z}{\partial t'} - A_{11}\frac{\partial H_z}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c'}J_y + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial x'}, \tag{1.31}$$

$$A_{01}\frac{\partial H_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'}J_z + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial x'}. \tag{1.32}$$

1.3 Condições de Invariância

Agora vamos aplicar as condições de invariância nas derivadas acima e encontrar as variáveis no Referancial S', isto é, vamos aplicar o próprio Princípio da Relatividade.

Assim, a equação 1.25 e 1.26 tem que ser do tipo

$$\frac{\partial D'_x}{\partial x'} + \frac{\partial D'_y}{\partial y'} + \frac{\partial D'_z}{\partial z'} = 4\pi\rho',$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0.$$

E as equações 1.27, 1.28 e 1.29, respectivamente

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B'_x}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B'_y}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial B'_z}{\partial t'}.$$

E assim sucessivamente para todas as equações encontradas na seção 1.2
Para resolvermos a equação 1.25, isolamos $\dfrac{\partial D_x}{\partial t'}$ na equação 1.30

Assim, temos:

$$\frac{\partial D_x}{\partial t'} = \frac{c'}{A_{00}}\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{c'}{A_{00}}\frac{\partial H_y}{\partial z'} - \frac{4\pi}{A_{00}}J_x - \frac{A_{10}}{A_{00}}\frac{\partial D_x}{\partial x'}. \quad (1.33)$$

Substituindo a equação 1.33 na equação 1.25, obtemos:

$$c'\frac{A_{01}}{A_{00}}\frac{\partial H_z}{\partial y'} - c'\frac{A_{01}}{A_{00}}\frac{\partial H_y}{\partial z'} - 4\pi\frac{A_{01}}{A_{00}}J_x - \frac{A_{10}A_{01}}{A_{00}}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + A_{11}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho. \quad (1.34)$$

Multiplicando os dois lados da equação acima por A_{00}, encontramos:

$$c'A_{01}\frac{\partial H_z}{\partial y'} - c'A_{01}\frac{\partial H_y}{\partial z'} - 4\pi A_{01}J_x - A_{10}A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + A_{11}A_{00}\frac{\partial D_x}{\partial x'} + A_{00}\frac{\partial D_y}{\partial y'} + A_{00}\frac{\partial D_z}{\partial z'} = 4\pi\rho A_{00}. \quad (1.35)$$

Organizamos a expressão acima, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}A_{00}D_x - A_{10}A_{01}D_x) + \frac{\partial}{\partial y'}(c'A_{01}H_z + A_{00}D_y) + \frac{\partial}{\partial z'}(A_{00}D_z - c'A_{10}H_y) = 4\pi\,(A_{00}\rho + A_{01}J_x). \tag{1.36}$$

Comparando a equação 1.36 com a equação 1.1, temos:

$$D'_x = (A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10})D_x,$$

$$D'_y = A_{00}D_y + c'A_{01}H_z,$$

$$D'_z = A_{00}D_z - c'A_{01}H_y,$$

$$\rho' = A_{00}\rho + A_{01}J_x.$$

Para resolvermos a equação 1.26, primeiro isolamos $\dfrac{\partial B_x}{\partial t'}$ na equação 1.27 e obtemos a seguinte equação:

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t'} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)\frac{c'}{A_{00}},$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t'} = -\frac{c'}{A_{00}}\frac{\partial E_z}{\partial y'} + \frac{c'}{A_{00}}\frac{\partial E_y}{\partial z'} - \frac{A_{10}}{A_{00}}\frac{\partial B_x}{\partial x'}. \tag{1.37}$$

Substituímos a equação 1.37 na equação 1.26 e encontramos a seguinte expressão:

$$-c'\frac{A_{01}}{A_{00}}\frac{\partial E_z}{\partial y'} + c'\frac{A_{01}}{A_{00}}\frac{\partial E_y}{\partial z'} - \frac{A_{01}A_{10}}{A_{00}}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + A_{11}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0.$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por A_{00}, teremos:

$$-c'\,A_{01}\frac{\partial E_z}{\partial y'} + c'\,A_{01}\frac{\partial E_y}{\partial z'} - A_{10}A_{01}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + A_{00}A_{11}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + A_{00}\frac{\partial B_y}{\partial y'} + A_{00}\frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0.$$

Unindo os termos em comum da equação acima, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x'}(A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01})B_x + \frac{\partial}{\partial y'}(A_{00}B_y - c'A_{01}E_z) + \frac{\partial}{\partial z'}(A_{00}B_z + c'A_{01}E_y) = 0. \quad (1.38)$$

E por fim, comparando a equação 1.38 com a equação 1.2, temos:
$B'_x = (A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01})B_x,$

$B'_y = A_{00}B_y - c'A_{01}E_z,$

$B'_z = A_{00}B_z + c'A_{01}E_y.$

Para resolvermos a equação 1.27 primeiro multiplicamos a equação 1.27 por A_{11} e a equação 1.26 por $\frac{A_{10}}{c'}$ e encontramos:

$$A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial y'} - A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{A_{00}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'} - \frac{A_{10}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'},$$

$$\frac{A_{10}A_{01}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{A_{10}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial z'} = 0.$$

Arrumando as equações acima:

$$\frac{A_{00}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial y'} - A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{A_{00}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'}, \quad (1.39)$$

$$\frac{A_{10}A_{11}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial z'} = -\frac{A_{10}A_{01}}{c'}\frac{\partial B_x}{\partial t'}. \quad (1.40)$$

Se fizermos a equação 1.39 menos a equação 1.40, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c'}B_y\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c'}B_z\right) = -\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01})B_x. \quad (1.41)$$

Onde, comparando a equação 1.41 com a equação 1.3 enconrtamos:

$E'_z = \left(A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c'}B_y\right),$

$$E'_y = \left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c'}B_z\right),$$

$$B'_x = (A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10})B_x,$$

$$c' = c.$$

Obtemos um resultado bastante importante. Quando determinamos c' = c, provamos o segundo postulado da Relatividade que nos diz: A velocidade da luz é absoluta, tem o mesmo valor no vácuo para qualquer referencial inercial.

Para a equação 1.28

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - A_{10}\frac{\partial E_z}{\partial t'} - A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial x'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial x'}.$$

Apenas reorganizamos os termos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - A_{11}\frac{\partial E_z}{\partial x'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial x'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_y}{\partial t'} + A_{10}\frac{\partial E_z}{\partial t'}.$$

Unindo os termos em comum

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}(A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c'}B_y) = -\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}B_y - c'A_{10}E_z). \qquad (1.42)$$

Comparando-se a equação 1.42 com a equação 1.4, temos:

$$E'_x = E_x,$$

$$E'_z = A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c'}B_y,$$

$$B'_y = A_{00}B_y - c'A_{01}E_z,$$

$$c' = c.$$

Para a equação 1.29, que está escrita como:

$$A_{01}\frac{\partial E_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial x'}.$$

Reorganizamos a expressão acima, encontramos

$$A_{11}\frac{\partial E_y}{\partial x'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial B_z}{\partial t'} - A_{01}\frac{\partial E_y}{\partial t'}.$$

Unindo os termos em comum, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c'}B_z\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = -\frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}B_z + c'A_{01}E_y). \tag{1.43}$$

Onde, comparando a equação 1.43 com a equação 1.5 econtramos:

$$E'_y = \left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c'}B_z\right),$$

$$E'_x = E_x,$$

$$B'_z = (A_{00}B_z + c'A_{01}E_y),$$

$$c' = c.$$

Na equação 1.30, temos:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'}J_x + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial x'}.$$

Para resolvermos a equação acima, primeiro isolamos $\frac{\partial D_x}{\partial x'}$ na equação 1.25 para encontrarmos:

$$A_{11}\frac{\partial D_x}{\partial x'} = 4\pi\rho - A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial t'} - \frac{\partial D_y}{\partial y'} - \frac{\partial D_z}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'} = \frac{1}{A_{11}}\left(4\pi\rho - A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial t'} - \frac{\partial D_y}{\partial y'} - \frac{\partial D_z}{\partial z'}\right). \tag{1.44}$$

Substituindo a equação 1.44 na equação 1.30, temos:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'}J_x + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\left[\frac{1}{A_{11}}\left(4\pi\rho - A_{01}\frac{\partial D_x}{\partial t'} - \frac{\partial D_y}{\partial y'} - \frac{\partial D_z}{\partial z'}\right)\right],$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} = \frac{4\pi}{c'}J_x + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_x}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{cA_{11}}4\pi\rho - \frac{A_{10}A_{01}}{c'A_{11}}\frac{\partial D_x}{\partial t'} - \frac{A_{10}}{c'A_{11}}\frac{\partial D_y}{\partial y'} - \frac{A_{10}}{c'A_{11}}\frac{\partial D_z}{\partial z'}.$$

Multiplicando a equaçõa acima por A_{11} e unindo os termos em comum:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{A_{10}}{c'}D_y + A_{11}H_z\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c'}D_z\right) = \frac{4\pi}{c}\left(A_{11}J_x + A_{10}\rho\right) + \frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}\left(A_{00}A_{11} - A_{10}A_{01}\right)D_x. \tag{1.45}$$

Comparando a equação 1.45 com a equação 1.6 teremos:

$$H'_z = \left(A_{11}H_z + \frac{A_{10}}{c'}D_y\right),$$

$$H'_y = \left(A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c'}D_z\right),$$

$$J'_x = \left(A_{11}J_x + A_{10}\rho\right),$$

$$D'_x = \left(A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10}\right)D_x,$$

$$c' = c.$$

Na equação 1.31, temos:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - A_{01}\frac{\partial H_z}{\partial t'} - A_{11}\frac{\partial H_z}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c'}J_y + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial x'}.$$

Reorganizando os termos

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - A_{11}\frac{\partial H_z}{\partial x'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial x'} = \frac{4\pi}{c'}J_y + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_y}{\partial t'} + A_{01}\frac{\partial H_z}{\partial t'}.$$

Unindo os termos em comum, obtemos

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\left(A_{11}H_z + \frac{A_{10}}{c'}D_y\right) = \frac{4\pi}{c'}J_y + \frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}\left(A_{00}D_y + c'A_{01}H_z\right). \tag{1.46}$$

Comparando a equação 1.46 com a equação 1.7, teremos:

$H'_x = H_x,$

$H'_z = \left(A_{11}H_z + \frac{A_{10}}{c'}D_y\right),$

$J'_y = J_y,$

$D'_y = \left(A_{00}D_y + c'A_{01}H_z\right),$

$c' = c.$

Para a equação 1.32, temos:

$$A_{01}\frac{\partial H_y}{\partial t'} + A_{11}\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'}J_z + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial t'} + \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial x'}.$$

Reorganizando os termos da expressão acima, obtemos:

$$A_{11}\frac{\partial H_y}{\partial x'} - \frac{A_{10}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'}J_z + \frac{A_{00}}{c'}\frac{\partial D_z}{\partial t'} - A_{01}\frac{\partial H_y}{\partial t'}.$$

Unindo os termos em comum, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c'}D_z\right) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} = \frac{4\pi}{c'}J_z + \frac{1}{c'}\frac{\partial}{\partial t'}(A_{00}D_z - c'A_{01}H_y). \tag{1.47}$$

Onde, se compararmos a equação 1.47 com a equação 1.8, teremos:

$H'_y = \left(A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c'}D_z\right),$

$H'_x = H_x,$

$$J'_z = J_z,$$

$$D'_z = (A_{00}D_z - c'A_{01}H_y).$$

Quadro-resumo com todas as transformações e coordenadas dos Referenciais S e S'.

Tabela 1.1: Tabela com todas as transformações e coordenadas.

Referencial S	Referencial S'
x	$x' = A_{10}t + A_{11}x$
y	$y' = y$
z	$z' = z$
t	$t' = A_{00}t + A_{01}x$
c	$c' = c$
E_x	$E'_x = E_x$
E_y	$E'_y = \left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c}B_z\right)$
E_z	$E'_z = \left(A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c}B_y\right)$
D_x	$D'_x = (A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10})\,D_x$
D_y	$D'_y = (A_{00}D_y + cA_{01}H_z)$
D_z	$D'_z = (A_{00}D_z - cA_{01}H_y)$
B_x	$B'_x = (A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10})B_x$
B_y	$B'_y = A_{00}B_y - cA_{01}E_z$
B_z	$B'_z = (A_{00}B_z + cA_{01}E_y)$
H_x	$H'_x = H_x$
H_y	$H'_y = \left(A_{11}H_y - \frac{A_{10}}{c}D_z\right)$
H_z	$H'_z = \left(A_{11}H_z + \frac{A_{10}}{c}D_y\right)$
ρ	$\rho' = A_{00}\rho + A_{01}J_x$
J_x	$J'_x = (A_{11}J_x + A_{10}\rho)$
J_y	$J'_y = J_y$
J_z	$J'_z = J_z$

1.4 Determinando as Transformações de Lorentz

Nessa seção vamos nos focar em como determinar as constantes das Transformações propostas para o Referencial S'. Novamente recorremos às Relações Constitutivas dos campos Elétrico e Magnético no sistema de unidades Gaussianas.

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} + 4\pi\overrightarrow{P}$$

e

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} - 4\pi\overrightarrow{M}.$$

Onde $\overrightarrow{P}$ é a Polarização e $\overrightarrow{M}$ a Magnetização que já foram explicadas na seção 1.1. Agora, suponha que estejamos no vácuo, logo:

$$\overrightarrow{P} = 0$$

e

$$\overrightarrow{M} = 0.$$

Aplicando o Princípio da Relatividade para as Relações Constitutivas:

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'} = \overrightarrow{E'}$$

e

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{H'} = \overrightarrow{B'}.$$

Assim, temos:

$$D_x = E_x \text{ ou } D'_x = E_x.'$$

Com isso, chegamos à:

$$(A_{11}A_{00} - A_{10}A_{01})D_x = E_x,$$

$$(A_{11}A_{00} - A_{10}A_{01})D_x = D_x,$$

$$A_{11}A_{00} - A_{10}A_{01} = 1.$$

Para $D'_y = E'_y$ e $H_z = B_z$, temos:

$$(A_{00}D_y + cA_{01}H_z) = \left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c}B_z\right),$$

$$(A_{00}E_y + cA_{01}B_z) = \left(A_{11}E_y + \frac{A_{10}}{c}B_z\right).$$

Assim temos:

$$A_{00} = A_{11} \text{ e } cA_{01} = \frac{A_{10}}{c} \Rightarrow A_{01} = \frac{A_{10}}{c^2}.$$

Para $D'_z = E'_z$ e $H_y = B_y$, temos:

$$A_{00}D_z - cA_{10}H_y = A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c}B_y,$$

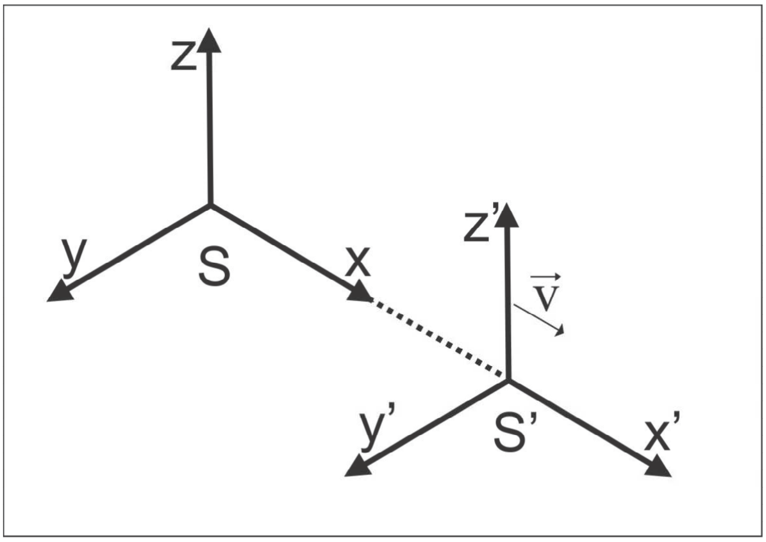
$$A_{00}E_z - cA_{10}B_y = A_{11}E_z - \frac{A_{10}}{c}B_y.$$

E assim, obtemos:

$$A_{00} = A_{11} \text{ e } cA_{10} = \frac{A_{10}}{c} \Rightarrow A_{01} = \frac{A_{10}}{c^2}.$$

Agora vamos analisar o seguinte esquema:

Figura 1.1: Referencial S' se afastando do Referencial S com velocidade constante v na direção do eixo x.



Fonte: Autoria Própria.

Inicialmente em t = t' = 0, os dois referenciais são coincidentes. Após um intervalo de tempo t, eles estão a uma distância $x = vt$.

Analisando o esquema acima e imaginando a ocorrência de um evento (que pode ser a explosão de uma bombinha) no Referencial S', observando a partir do Referencial S podemos determinar a variação da posição do evento que ocorre nos dois referenciais.

No Referencial S:

$$\Delta x = v\Delta t, \tag{1.48}$$

No Referencial S':

$$\Delta x' = 0. \tag{1.49}$$

Isso ocorre porque o evento acompanha o deslocamento do Referencial S', ele avança no tempo junto com o Referencial. Logo, não há variação da posição no Referencial S'.

Calculando a variação da posição da equação 1.18 e substituindo as equações encontradas acima

$$\Delta x' = A_{10}\Delta t + A_{11}\Delta x \Rightarrow A_{10}\Delta t + A_{11}v\Delta t = 0.$$

Dividindo tudo por Δt

$$A_{10} + A_{11}v = 0 \text{ ou ainda } A_{10} = -A_{11}v.$$

Agora, temos quatro equações que são definidas como:

$$A_{11}A_{00} - A_{10}A_{01} = 1 \tag{1.50}$$

$$A_{00} = A_{11} \tag{1.51}$$

$$A_{01} = \frac{A_{10}}{c^2} \tag{1.52}$$

$$A_{10} = -A_{11}v \tag{1.53}$$

Substituimos A_{00} por A_{11} na equação 1.50 e encontramos:

$$(A_{11})^2 - A_{10}A_{01} = 1. \tag{1.54}$$

Substituindo a equação 1.52 na equação 1.54, teremos:

$$(A_{11})^2 - \frac{(A_{10})^2}{c^2} = 1. \tag{1.55}$$

Tomamos a equação 1.53 e substituímos na equação 1.55:

$$(A_{11})^2 - \frac{v^2(A_{11})^2}{c^2} = 1.$$

Colocamos $(A_{11})^2$ em evidência.

$$(A_{11})^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1,$$

$$(A_{11})^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

$$A_{11} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{1.56}$$

Pela equação 1.51 temos que:

$$A_{00} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{1.57}$$

Podemos substituir A_{11} na equação 1.53, para determinarmos A_{10}.

$$A_{10} = -vA_{11},$$

$$A_{10} = -v\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}},$$

$$A_{10} = \frac{-v}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{1.58}$$

E por fim, conseguimos determinar A_{01}, pela equação 1.52.

$$A_{01} = \frac{A_{10}}{c^2},$$

$$A_{01} = \frac{\frac{-v}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}}{c^2},$$

$$A_{01} = \frac{-v}{c^2\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}. \tag{1.59}$$

Assim as novas transformações ficam definidas como:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} t - \frac{v}{c^2\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} x,$$

$$x' = \frac{-v}{c^2\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} t + \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} x,$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

Definindo que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$ onde $\beta = \frac{v}{c}$, teremos:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{1.60}$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right), \tag{1.61}$$

$$y' = y, \tag{1.62}$$

$$z' = z. \tag{1.63}$$

Quadro-resumo com todas as transformações e coordenadas dos Referenciais S e S', já com a substituição dos valores das constantes das transformações propostas.

Tabela 1.2: Tabela com todas as transformações e coordenadas.

Referencial S	Referencial S'
x	$x' = \gamma\,(x - vt)$
y	$y' = y$
z	$z' = z$
t	$t' = \gamma\,(t - v/c^2 x)$
c	$c' = c$
E_x	$E'_x = E_x$
E_y	$E'_y = \gamma(v)E_y - v/c\gamma(v)B_z$
E_z	$E'_z = \gamma(v)E_z + v/c\gamma(v)B_y$
D_x	$D'_x = (\gamma(v)^2 - v^2/c^2\gamma(v)^2)\,D_x$
D_y	$D'_y = \gamma(v)D_y - v/c\gamma(v)H_z$
D_z	$D'_z = \gamma(v)D_z + v/c\gamma(v)H_y)$
B_x	$B'_x = (\gamma(v)^2 - v^2/c^2\gamma(v)^2)B_x$
B'_y	$\gamma(v)B_y + v/c\gamma(v)E_z$
B_z	$B'_z = \gamma(v)B_z - v/c\gamma(v)E_y$
H_x	$H'_x = H_x$
H'_y	$\gamma(v)H_y + v/c\gamma(v)D_z$
H_z	$H'_z = \gamma(v)H_z - v/c\gamma(v)D_y$
ρ	$\rho' = \gamma(v)\rho - v/c^2\gamma(v)J_x$
J_x	$J'_x = \gamma(v)J_x - v\gamma(v)\rho$
J_y	$J'_y = J_y$
J_z	$J'_z = J_z$

Capítulo 2

CONSEQUÊNCIAS DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

2.1 Quadrivetores

"As transformações de Lorentz assumem um aspecto mais simples quando expressas em termos de quantidaddes"(GRIFFITHS, 2001, P. 348).

$$x^0 = ct,\ \beta = \frac{v}{c}.$$

E seguimos essa notação para as coordenadas (x, y, z), que assumem as notações:

$$x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

Com essas considerações, as transformações ficam reescritas assim

$$x'^0 = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right),$$

$$x'^1 = \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right),$$

$$x'^2 = x^2,$$

$$x'^3 = x^3.$$

que podemos escreve-las na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Simplicando a matriz para uma única função em que o β e o γ operem entre 0 e 3, chegamos a seguinte expressão:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \tag{2.2}$$

Onde Λ é a **matriz de Transformação de Lorentz** da equação 2.1, em que o μ indica a linha e o ν a coluna da matriz. A vantagem dessa notação mais simplificada e genérica é que podemos aplica-la para qualquer movimento relativo, e não apenas para movimentos orientados no eixo x.

Assim como na geometria analítica, que temos um vetor composto por três componentes (x, y, z) que pode ser transformado para qualquer outro vetor dentro do mesmo espaço, aqui podemos definir um **quadrivetor** que será composto por quatro componentes (x^0, x^1, x^2, x^3) que pode se tranformar da mesma maneira sob a Transformações de Lorentz.

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \tag{2.3}$$

Como no espaço tridimensional, aqui também temos um produto escalar entre quadrivetores, com um detalhe: os componentes com índice 0 têm sinal negativo. Portanto:

$$-x^0 b^0 + x^1 b^1 + x^2 b^2 + x^3 b^3. \tag{2.4}$$

Esse é o produto escalar quadrimensional, que é invariante sob as Transformações de Lorentz, assim como o produto escalar tridimensional é invarente para rotações.

2.2 O Intervalo Invariante

Suponhamos que um determinado evento A ocorra em $(x^0_A, x^1_A, x^2_A, x^3_A)$ e o evento B em $(x^0_B, x^1_B, x^2_B, x^3_B)$, logo a diferença

$$\Delta x^\mu \equiv x^\mu_A - x^\mu_B. \tag{2.5}$$

É o **quadrivetor deslocamento.** O produto escalar do quadrivetor deslocamento com ele mesmo, é uma grandeza chamada de Intervalo entre dois eventos:

$$I \equiv (\Delta x)_\mu (\Delta x)^\mu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = -c^2t^2 + d^2. \tag{2.6}$$

Onde t é a diferença de tempo entre os dois eventos e d a distância espacial. Quando há uma tranformação entre dois sistemas em movimento, o tempo é alterado assim como a distância, mas o Intervalo I é o mesmo.

Dependendo dos eventos analisados, o Intervalo pode ser de três tipos (GRIFFITHS, 2001):

1. Com I negativo, dizemos que o intervalo é do tipo temporal. Como d = 0, ou seja, os eventos acontecendo no mesmo local, esse é o sinal que obtemos.

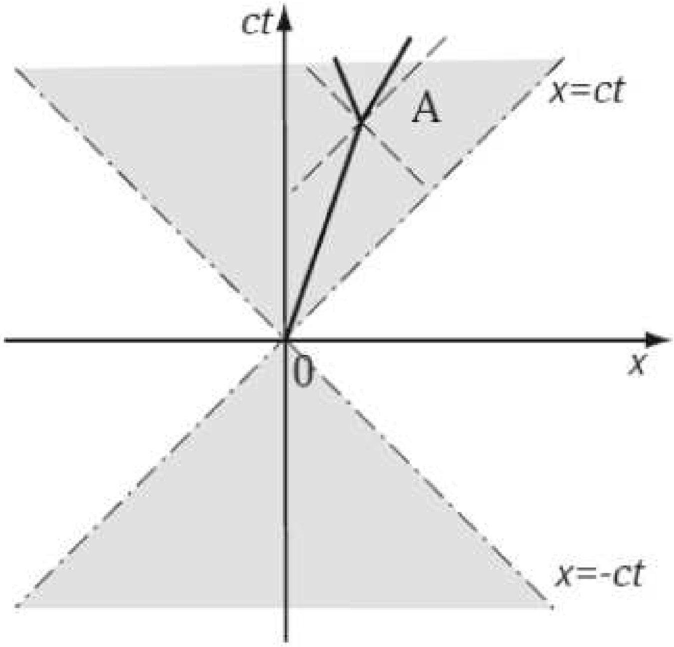
2. Com I positivo, dizemos que o intervalo é do tipo espacial. Com t = 0, ou seja, os dois eventos acontecendo ao mesmo tempo, esse é o sinal que obtemos.

3. Com I igual a zero, dizemos que o intervalo é do tipo luminoso, pois essa é uma relação que vale apenas quando os dois eventos então ligados por um sinal que viaja à velocidade da luz.

2.3 Diagramas Espaço-Tempo

Quando estudamos o movimento de uma partícula qualquer, no espaço euclidiano, traçamos um gráfico do espaço versus o tempo, com o eixo vertical sendo a posição e o horizontal o tempo. Nesse caso, conseguimos determinar a velocidade pela inclinação da curva que representa o movimento dessa partícula. No caso da Relatividade, o gráfico é construído ao contrário: usamos o tempo na vertical e o espaço no eixo horizontal. Assim, se formos contruir um gráfico que representa um foton viajando à velocidade da luz, traçamos uma linha com 45° e se for um foquete com velocidade normal, será uma linha com inclinação c/v. Damos o nome para esses gráficos de Diagramas de Minkowski.

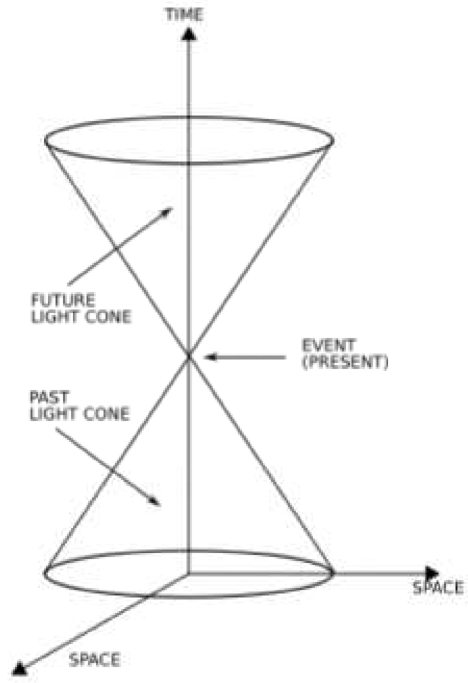
Figura 2.1: Cunha de luz ilustrando um evento A.



Fonte: Google Imagens.

A trajetória de uma partícula no diagrama de Minkowski chama-se de linha do universo. Como nada pode viajar mais rápido do que a luz, a linha de universo de qualquer objeto não pode ter inclinação menor que 1. Assim o movimento fica restrito à região delimitada pelas duas linha a 45°. Dizemos que tudo a sua frente é o seu futuro (lugar onde todos os pontos são acessíveis a você). Do mesmo modo, a região idêntica para trás é o seu passado, já que representa todos os pontos que você pode ter vindo. E todo o resto do gráfico, representa seu presente, já que você não pode chegar lá e nem veio de lá. Se extendermos o raciocínio, incluindo o eixo y, determinaremos um cone, que damos o nome de Cone de Luz do Futuro e Cone de Luz do Passado.

Figura 2.2: Cone de luz ilustrando o passado, o presente e o futuro.



Fonte: Google Imagens.

A inclinação da linha que faz a ligação entre dois eventos em um diagrama de Minkoswki determina se será um intervalo invariante do tipo temporal ou espacial ou luminoso. Para isso basta que a inclinação seja maior que 1, menor que 1 ou igual a 1, respectivamente.

2.4 Lei de Coulumb e Força Eletromagnética

Nessa seção, vamos tentar compreender como os campos Elétrico e Magnético são definidos no Referencial S'.

Primeiramente, iremos determinar o campo Elétrico E.
$\overrightarrow{E} = \frac{q}{r^2}\widehat{r} = \frac{q}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$

$$\overrightarrow{E} = q\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}.$$

Como $\overrightarrow{r} = x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z} \;\Rightarrow\; r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Logo, encontramos:

$$\overrightarrow{E} = q\frac{x\widehat{x} + y\widehat{y} + z\widehat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Disso, podemos encontrar as componentes do campo Elétrico que são definidas como:

$$E_x = \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{2.7}$$

$$E_y = \frac{qy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \tag{2.8}$$

$$E_z = \frac{qz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{2.9}$$

E ainda temos

$$B_x = 0 \;;\; B_y = 0 \;;\; B_z = 0.$$

Aplicando o Princípio da Relatividade, teremos:

$$\overrightarrow{E} = E\left(\overrightarrow{r}, t\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{E'} = E'\left(\overrightarrow{r'}, t'\right).$$

Agora tomamos as Transformações Inversas para a posição e o tempo.

$$x = \gamma(x' + vt'),$$

$$t = \gamma\left(t' - \frac{v}{c^2}x\right).$$

E substituímos nas equações 2.7, 2.8 e 2.9.

Como $E'_x = E_x$, temos:

$$E'_x = \frac{q\gamma(x' + vt')}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}. \tag{2.10}$$

Para a componente y, fazemos $E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right)$ e como $B_z = 0$, logo:

$$E'_y = \frac{\gamma q y'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}. \tag{2.11}$$

Para a componente z, primeiro tomamos $E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{v}{c}B_y\right)$ e como $B_y = 0$, logo:

$$E'_z = \frac{\gamma q z'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}. \tag{2.12}$$

Iremos ver como o campo Magnético se transforma.
Primeiro determinamos a componente x do campo Magnético.
Como:

$$B_x = B'_x = 0. \tag{2.13}$$

Fica fácil para determinarmos.
Agora para a componente y.
Como $B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c}E_z\right)$ mas, $B_y = 0$ e $E'_z = \gamma E_z$, chegamos a:

$$B'_y = \gamma\frac{v}{c}\frac{E'_z}{\gamma} \Rightarrow B'_y = \frac{v}{c}E'_z.$$

E ainda substituimos E'_z que é igual a $\frac{\gamma q z'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}$.
Para encontrarmos:

$$B'_y = \frac{v}{c}\frac{\gamma q z'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}. \tag{2.14}$$

Vamos determinar a componente z utilizando o mesmo passo a passo anterior.

Como $B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c}E_y\right)$ mas, como $B_z = 0$ e $E'_y = -\gamma E_z$, encontramos:

$$B'_z = -\gamma\frac{v}{c}\frac{E'_y}{\gamma} \Rightarrow B'_z = -\frac{v}{c}E'_y.$$

E ainda temos $E'_y = \dfrac{\gamma q y'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}$.

E por fim, encontramos:

$$B'_z = -\frac{v}{c}\frac{\gamma q y'}{[\gamma^2(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2) + y'^2 + z'^2]^{3/2}}. \tag{2.15}$$

Após determinar como os campos se transformam, vamos encontrar a força Eletromagnética.

O quadrivetor posição é escrito como:

$$X^\mu = (ct, x, y, z). \tag{2.16}$$

E suas componentes podem ser escritas como:

$$x' = \gamma(u)\left(x - \frac{u}{c}ct\right), \tag{2.17}$$

$$ct' = \gamma(u)\left(ct - \frac{u}{c}x\right), \tag{2.18}$$

$$y' = y, \tag{2.19}$$

$$z' = z. \tag{2.20}$$

Como o quadrivetor velocidade pode ser definido como o quadrivetor posição dividido pelo tempo própio (que é o tempo do referencial em repouso), temos:

$$V^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}. \tag{2.21}$$

Se o tempo próprio é definido como:

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dS'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{2.22}$$

Para o repouso teremos $dt' = d\tau$, portanto:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2,$$

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2},$$

$$d\tau^2 = dt^2\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

$$d\tau^2 = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

$$d\tau = dt\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{2.23}$$

$$d\tau = \gamma(v)dt. \tag{2.24}$$

Logo, substituindo a equação 2.24 na equação 2.21, teremos:

$$V^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right),$$

$$V^\mu = \gamma(v)\left(c\frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

$$V^\mu = \gamma(v)(c, V_x, V_y, V_z).$$

Vamos tomar o quadrimomento que pode ser difinido como:

$$\rho^\mu = mV^\mu \text{ ou } \rho^\mu = (\rho_0, \overrightarrow{\rho})$$

Mas, o quadrimomento pode ser escrito como:

$$\rho^{\mu} = (\gamma(u)mc, \gamma m\overrightarrow{v}) \,. \tag{2.25}$$

Ainda podemos escrever as partes temporal e espacial do quadrimomento da seguinte forma:

$$\rho'_0 = \gamma(u)\left(\rho_0 - \frac{u}{c}\rho_1\right), \tag{2.26}$$

$$\rho'_1 = \gamma(u)\left(\rho_1 - \frac{u}{c}\rho_0\right), \tag{2.27}$$

$$\rho'_2 = \rho_2, \tag{2.28}$$

$$\rho'_3 = \rho_3. \tag{2.29}$$

Pela segunda lei de Newton, temos:

$$\frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt} = \overrightarrow{F}.$$

E como:

$$\rho'_x = \gamma(u)\left(\rho_x - \frac{u}{c}\frac{e}{c}\right),$$

$$\rho'_y = \rho_y,$$

$$\rho'_z = \rho_z.$$

onde $\frac{e}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \rho_0$, que por definição é a energia relativística.

Aplicando o Princípio da Relatividade para a segunda lei de Newton, temos:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt} \Leftrightarrow \overrightarrow{F'} = \frac{d\overrightarrow{\rho'}}{dt'}.$$

Portanto:

$$\frac{d\rho'_x}{dt'} = \gamma(u)\left(\frac{d\rho_x}{dt'} - \frac{u}{c^2}\frac{de}{dt'}\right) = \overrightarrow{F'_x},$$

$$\frac{d\rho'_y}{dt'} = \frac{d\rho_y}{dt'} = \overrightarrow{F'_y},$$

$$\frac{d\rho'_z}{dt'} = \frac{d\rho_z}{dt'} = \overrightarrow{F'_z}.$$

Como também devemos transformar o tempo.

$$t' = \gamma(u)\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \Rightarrow dt' = \gamma(u)\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right).$$

Logo:

$$F'_x = \gamma(u)\left[\frac{d\rho_x}{\gamma(u)\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)} - \frac{u}{c^2}\frac{de}{\gamma(u)\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)}\right], \tag{2.30}$$

e

$$F'_{y,z} = \frac{d\rho_{y,z}}{\gamma(u)\left(dt - \frac{u}{c^2}dx\right)}. \tag{2.31}$$

Dividindo o numerador e o denominador das equações 2.30 e 2.31 por dt e teremos:

$$F'_x = \left(\frac{\frac{d\rho_x}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} - \frac{\frac{u}{c^2}\frac{de}{dt}}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}\right), \tag{2.32}$$

$$F'_{y,z} = \frac{\frac{d\rho_{y,z}}{dt}}{\gamma(u)\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}. \tag{2.33}$$

Organizando as equações encontradas das componentes da força.

$$F'_x = \frac{1}{1 - \frac{u}{c^2}V_x}\left(F_x - \frac{u}{c^2}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{V}\right),$$

$$F'_{y,z} = F_{y,z}\frac{\sqrt{1 - \frac{u^3}{c^2}}}{\left(1 - \frac{u}{c^2}V_x\right)}.$$

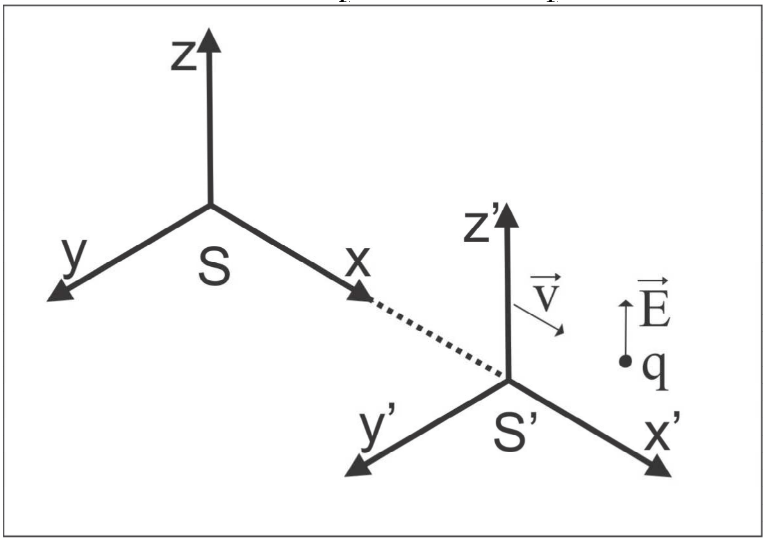
Para determinamar as transformações inversas, apenas invertemos o sinal de u, portanto:

$$F_x = \frac{1}{1+\dfrac{u}{c^2}V'_x}\left(F'_x + \frac{u}{c^2}\overrightarrow{F'}\cdot\overrightarrow{V'}\right),$$

$$F_{y,z} = F'_{y,z}\frac{\sqrt{1-\dfrac{u^3}{c^2}}}{\left(1+\dfrac{u}{c^2}V'_x\right)}.$$

Agora analisamos o esquema seguinte:

Figura 2.3: Referencial S e S' com uma partícula em repouso sob um campo elétrico E.



Fonte: Autoria Própria.

Em S', q está em repouso e temos $\overrightarrow{E'} = (E'_x, E'_y, E'_z)$ e $B' = 0$.
Se temos, $F' = qE'$, logo:

$$F'_x = qE'_x,\ F'_y = qE'_y \text{ e } F'_z = qE'_z.$$

Para F'_x, temos:

$$\frac{1}{1-\dfrac{u}{c^2}V_x}\left(F_x - \frac{u}{c^2}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{V}\right) = qE'_x. \tag{2.34}$$

Para $F_{y,z}$

$$F'_{y,z}\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{u}{c^2}V'_x\right)}=qE'_{y,z}. \tag{2.35}$$

Como temos $V_x = u$, $V_y = 0$ e $V_z = 0$. Portanto, as equações 2.34 e 2.35 ficam reescritas como:

$$\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(F_x-\frac{u^2}{c^2}F_x\right)=qE'_x \tag{2.36}$$

e

$$F'_{y,z}\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}=qE'_{y,z}. \tag{2.37}$$

Mas, se $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma\left(E_y-\frac{u}{c}B_z\right)$ e $E'_z = \gamma\left(E_z+\frac{u}{c}B_y\right)$
Temos para F_x

$$F_x = qE_x, \tag{2.38}$$

Para F_y

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}F_y=q\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(E_y-\frac{u}{c}B_z\right)\ \Rightarrow\ F_y=qE_y-q\frac{u}{c}B_z, \tag{2.39}$$

E para F_z

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}F_z=q\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(E_z+\frac{u}{c}B_y\right)\ \Rightarrow\ F_z=qE_z+q\frac{u}{c}B_y. \tag{2.40}$$

Como

$$u\widehat{x}\times(B_x\widehat{x}+B_y\widehat{y}+B_z\widehat{z})=uB_y(\widehat{x}\times\widehat{y})+uB_z(\widehat{x}\times\widehat{z})=uB_y\widehat{z}-uB_z\widehat{y}$$

Logo, a força Eletromagnética pode ser escrita como:

$$\overrightarrow{F}=q\overrightarrow{E}+\frac{q}{c}\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{B}. \tag{2.41}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, mostramos todos os passos necessários para o desenvolvimento das regras de transformações que ficaram conhecidas como Transformações de Lorentz e suas consequências de como conhecemos o espaço e o tempo, que não são mais entidades separadas, com o tempo absoluto, mas um único elemento: espaço-tempo(esse sim será absoluto), em que ambos são relativos, ou seja, podem assumir valores diferentes em referenciais diferentes. O tempo e o espaço no Referencial S pode ser (e talvez será) diferente do que se é observado em S'.

Como ficou claro, conseguimos compatibilizar o Eletromagnetismo com o Princípio da Relatividade de forma coesa, propondo novas transformações de coordenadas que resultaram no que conhecemos como as Transformações de Lorentz. Mas não sem antes testar as regras de transformações que tínhamos até então, no caso, as Transformações de Galileu.

O trabalho aqui desenvolvido foi de importância relevante para entendermos como conseguimos chegar em tal “dicionário” que nos permite traduzir todas as informações, sejam elas a posição, a velocidade de uma partícula qualquer, os campos, e etc., contidas no Referencial Inercial S para o Referencial Inercial S', que são necessárias para a compreensão da universalidade das leis da física.

Referências Bibliográficas

[1] GRIFFITHS, David.J. **Elotrodinâmica.** Pearson, 3ª edição, São Paulo, 2001.

[2] TIPLER, Paul.A.; LLEWELLYN, Ralph.A. **Física Moderna.**, LTC editora, 3ª edição, Rio de Janeiro, 2001.

[3] MUNEM, Mustafa A. **Cálculo.** Ed. Guanabara Dois, 2ª edição, Rio de Janeiro, 1983.

[4] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica - vol. 4.** Editora Blucher, 1ª edição, São Paulo, 1998.

[5] RAYMOND, Serway A.; JEWETT, John W. Jr. **Princípios de Física vol. 1: Mecânica Clássica.** Editora Cengage Learning, Tradução da 3ª edição Norte-americana, São Paulo, 2012.

[6] RAYMOND, Serway A.; JEWETT, John W. Jr. **Princípios de Física vol. 3: Eletromagnetismo.** Editora Cengage Learning, Tradução da 3ª edição Norte-americana, São Paulo, 2012.

[7] STEWART, James. **Cálculo - vol. 2.** Editora Cengage Learning, Tradução da 6ª edição Norte-americana, São Paulo, 2009.

[8] GREENE, Brian. **O Universo Elegante: Supercordas, Dimensões Ocultas e a Busca da Teoria Definitiva.** Editora Companhia das Letras, 1ª edição, São Paulo, 2001.