UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIELE DA SILVA PEREIRA

A DERIVADA E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2017

DANIELE DA SILVA PEREIRA

A DERIVADA E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientadora: Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos.

CAMPINA GRANDE - PB

2017

P436d Pereira, Daniele da Silva.
A Derivada e algumas de suas aplicações [manuscrito] : / Daniele da Silva Pereira. - 2017.
54 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Derivada. 2. Testes da Derivada. 3. Derivadas sucessivas.

21. ed. CDD 510

DANIELE DA SILVA PEREIRA

A DERIVADA E ALGUMAS DE SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientadora: Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos.

Aprovado em: 15/12/2017

BANCA EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana R Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A Deus minha rocha inabalável e meu refúgio, a minha mãe, meu pai, minhas irmãs, sobrinhos, noivo e a toda minha família, pelo amor e companheirismo,

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradecer é uma palavra pequena em relação ao tamanho da satisfação e tudo que sinto no meu coração, em finalmente poder concluir o curso que Deus escolheu para mim, digo isto, pois em fevereiro de 2013 quando pensava que não iria cursar o ensino superior, Deus através do meu coordenador do Grupo de Oração Sal e Luz me falava que havia guardado um lugar especial para mim, e com uns dias depois, recebi a notícia que havia sido aprovada, obrigada Senhor por todos os cuidados e por me amar tanto, e a Virgem Maria por sua intercessão.

Aos meus pais Maria Claudenir da Silva Pereira e Dorgival Pereira da Silva, que me educaram, e que não mediram esforços para sempre me dar o que há de melhor e que estavam nas suas condições, as minhas irmãs Carla, Débora, Cácia e Deise Cristina, obrigada pelo apoio, por me dar forças, coragem, e por me ajudarem sempre quando mais preciso, todas vocês são um presente especial de Deus na minha vida, não podendo deixar de fora meus sobrinhos a quem amo tanto Camila, Pedro Emanuel, Paulo Miguel, Arthur Yan e Ana Luíza, como também a minha tia Claudineide e meu Padrinho Leonides que me ajudaram a chegar até aqui.

A você Laudemir de Oliveira Ramos que iniciou como meu namorado e hoje é meu noivo, agradeço por ter caminhado comigo durante toda esta jornada, por todas as madrugadas de estudos que me fez companhia mesmo que pelo celular e por toda ajuda, você é uma das provas do carinho de Deus para comigo, desculpe-me pelo estresse, pela ausência nos momentos que foram especiais que não pode estar presente, amo muito você.

Aos meus professores desde a educação básica na pessoa de José Alexandre da Silva que fora um dos professores que sempre acreditou no meu potencial e também foi um dos meus modelos de profissional, e aos meus amigos em especial a minha amiga Yasmim Gladys quem me anunciou o resultado do vestibular, e também a Rafaelly Tainá de Souza Trindade (*in memoriam)* que esteve comigo desde as séries iniciais ao ensino médio sinto saudades.

Aos meus docentes da Universidade Estadual da Paraíba, agradeço a todos por estarem sempre disponíveis para nós discentes, que Deus os abençoe sempre, em especial à minha querida Orientadora Joselma Soares dos Santos que é uma mãe de tão amorosa, gentil, humilde, dentre tantas outras qualidades, obrigada por toda atenção e dedicação.

Ao Grupo de Pesquisa em Tecnologia Digital e Aquisição do Conhecimento (TDAC) na pessoa da Coordenadora Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita, agradeço por todos os ensinamentos, e também em especial ao meu amigo Lucas Henrique

Viana, que caminhamos juntos nas belas aventuras dos projetos de Iniciação Científica e eventos que participamos, foram muitos momentos compartilhados.

Aos meus amigos do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, na pessoa de Camila Rochana e Sintia Daniely que moraram comigo durante todo esse tempo, Amanda Beatriz, Dayse, Ernanda, Franklin, Pedro Victor e Renan Isnere, obrigada por me deixarem fazer parte da vida de vocês, por todo apoio e compartilha de conhecimentos.

As Professoras que fizeram parte da banca examinadora, a Profª. Ms. Kátia Suzana Medeiros Graciano e a Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas, obrigada pela disponibilidade e pelas contribuições.

Por fim agradeço a todos que sempre acreditaram em mim, que Deus concretizem os vossos sonhos.

“Mas os que esperam no Senhor renovarão as forças, subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; caminharão, e não se fatigarão.” Isaías 40: 31.

RESUMO

É muito importante sabermos que o desenvolvimento do Cálculo teve suas ideias bases por volta de 2000 anos antes de Newton e Leibniz, que mais tarde formalizaram o Cálculo Diferencial e Integral, com matemáticos bastantes conhecidos são eles, Arquimedes, Zeno e Eudoxo mas, neste trabalho iremos nos restringir ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial feito por Newton e Leibniz. Newton relacionava o cálculo com o movimento, já para Leibniz com a diferença infinitamente pequena de dois valores consecutivos de uma variável y, ele por sua vez, foi feliz na escolha da notação, pois é a mais utilizada até então. Neste trabalho, estudamos um pouco do Cálculo Diferencial, mais precisamente, a definição de derivada, suas propriedades e alguns resultados, dentre eles os Testes da Derivada para determinação de máximo e mínimo, com o principal objetivo de aplicar estes conceitos na resolução de problemas em diferentes áreas, em particular, estudamos algumas aplicações na Física, na Engenharia Civil, na Matemática Financeira, Geometria e Taxa de Variação.

Palavras-Chave: Derivada. Testes da Derivada. Aplicações.

ABSTRACT

It is very important to know that the development of Calculus had its basic ideas about 2000 years before Newton and Leibniz, who later formalized the Differential and Integral Calculus, with well-known mathematicians, Archimedes, Zeno and Eudoxo, but in this work we will restrict ourselves to the development of the Differential Calculus made by Newton and Leibniz. Newton related the calculation with motion, for Leibniz with the infinitely small difference of two consecutive values of a variable y, he in turn was happy in the choice of notation, since it is the most used until then. In this work, we study a bit of Differential Calculus, more precisely, the definition of derivative, its properties and some results, among them the Derivative Tests for maximum and minimum determination, with the main objective of applying these concepts in solving problems in different areas, in particular, we studied some applications in Physics, Civil Engineering, Financial Mathematics, Geometry and Variation Rate.

Keywords: Derived. Derivative Testing. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação gráfico de dx e dy 17
Figura 2 – Inclinação da reta s 18
Figura 3 – Variação da reta secante 19
Figura 4 – Gráfico de uma função $y = f(x)$ 34
Figura 5 – Bombeando Petróleo de uma Perfuração para uma Refinaria 43
Figura 6 – Representação dos pastos 48
Figura 7 – Caixa de papelão 51

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11
1. DERIVADA 16
1. 1 Definição de Derivada 16
1.2 Regras de Derivação 20
1.2.1 Derivada de uma Função Constante 21
1.2.2 Derivada de uma Função Potência 21
1.2.3 Derivada do Produto de uma Constante por uma Função 22
1.2.4 Derivada da Soma ou da Diferença 23
1.2.5 Derivada de um Produto 24
1.2.6 Derivada de um Quociente 26
1.2.7 Derivada da Função Composta (REGRA DA CADEIA) 27
1.3 Derivadas Sucessivas 29
2. ALGUNS CRITÉRIOS PARA DETERMINAR O MÁXIMO E O MÍNIMO DE FUNÇÕES USANDO A DERIVADA 32
2.1 Máximos e Mínimos 32
2.2 Critérios para Determinar os Extremos de uma Função 34
3. APLICAÇÕES DE DERIVADAS 38
3.1 Aplicações de Derivadas na Física 38
3.2 Aplicação de Derivadas na resolução de Problemas de Otimização 41
3.2.1 Aplicação da Derivada na Engenharia Civil 41
3.2.2 Aplicação da Derivada na Matemática Financeira 45
3.2.3 Aplicações da Derivada na Geometria 47
3.3 Aplicação da Derivada na Taxa de Variação 51
CONCLUSÃO 52
APÊNDICE – ALGUNS RESULTADOS UTILIZADOS .... Erro! Indicador não definido.
REFERÊNCIAS 53

INTRODUÇÃO

O cálculo teve suas ideias iniciais por volta de 2000 anos antes de Newton e Leibniz formalizarem o cálculo Diferencial e Integral, com matemáticos bastantes conhecidos são eles, Arquimedes (287-212 a.C.) que nasceu na colônia grega de Siracusa, na Sicília, Zeno (495 – 435 a.C.) e Eudoxo (408-355 a.C.). No momento iremos nos restringir ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial feito por Newton e Leibniz.

Isaac Newton nasceu prematuro no dia de Natal de 1642, em uma aldeia de Woolsthorpe, na Inglaterra, seu pai morrera antes de seu nascimento, sua mãe casa-se novamente quando o mesmo tinha três anos. Foi educado pela avó, um tio recém-formado em Cambridge, ao notar a capacidade do desenvolvimento do sobrinho em matemática de maneira extraordinária, induziu a mãe do menino a matriculá-lo em Cambridge. Em 1661 Newton ingressou no Trinity College, embora inicialmente não tenha apresentado um grande interesse pela matemática, mas sim pela química que durou por toda sua vida. Mesmo assim, no início de seu primeiro ano estudou um exemplar de Euclides, leu *Clavis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes de* Schooten, a *Óptica* de Kepler, as obras de Viète, *Arithmetica infinitorum* de Wallis, como também teve aulas de Barrow sobre *"Lucasion professor"*, dentre tantas outras obras que Newton veio a conhecer (Boyer, 1996), o que fez com que despertasse no mesmo a simpatia pelo cálculo.

Devido a uma epidemia a Universidade veio a fechar, assim que Newton terminou sua graduação, levando-o a voltar para sua aldeia onde ficou durantes os anos de 1665 e 1666 (Ávila, 2006), período do seu florescimento, quando começou a fazer suas contribuições e suas primeiras descobertas que lhe deram reconhecimento até os dias de hoje, sendo elas, o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravidade e a natureza das cores.

As pesquisas de Newton só foram publicadas muito depois de suas descobertas, devido a receio de críticas, por partes de outros cientistas. Em 1669 foi denominado professor em Cambridge (Boyer, 1996), o qual lhe proporcionou grandes incentivos e reconhecimentos por parte de seus colegas de trabalhos, em suas pesquisas.

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu 1646 em Leipzig na Alemanha, como seu pai e seu avô materno lecionavam em universidade, isto lhe favoreceu a uma vida acadêmica brilhante, desde cedo demostrou gosto pelos estudos, passava horas na biblioteca de seu pai, aos quinze anos entrou na Universidade e aos dezessete adquiriu o grau de bacharel. Estudou Direito, Filosofia, Teologia e Matemática na Universidade. Já estando apto a receber o título de doutor aos vinte anos, mas lhe foi recusado, uma vez que sua idade tenha sido considerada precoce.

Deixando sua terra natal Leipzig, recebeu seu grau de doutor pela Universidade de Altdorf em Nüremberg, onde lhe propuseram o cargo de professor, no entanto, Leibniz recusou, segundo Boyer (1969) e Ávila (2006).

Posteriormente Leibniz ingressou no serviço diplomático, no qual serviu inicialmente para o eleito de Mainz, em seguida para família de Brunswick, e encerrou nos Hanoverianos, com quem permaneceu quarenta anos. Em 1673 seguiu em missão política para Londres, onde adquiriu um exemplar das *Lectiones geometricae* de Barrow. Quando Leibniz retorna a Londrez em 1676, traz consigo uma máquina de calcular, que durante muito tempo de sua vida dedicou-se ao aperfeiçoamento da mesma. Leibniz do contrário de Newton, não tinha receio em divulgar suas pesquisas, isso fez com que os seus estudos embora mais recentes do que os de Newton se propagassem de maneira mais rápida, (Boyer 1969).

Isaac Newton

Fonte: http://philosophyofscienceportal.blogspot.com.br/search?q=newton

O cálculo fluxional de Newton foi o estudo realizado por ele em 1665 (Maciel, 2012), no qual descreve a solução para encontrar a tangente de uma curva dada através de uma equação $f \;\; x, y \;\; = 0$, Newton relacionava o cálculo com o movimento. “As variáveis x e y eram denotadas como *fluentes*, isto é, grandezas que variam ou “*fluem*”, com o passar do tempo. Podendo considerá-las funções do tempo” (Ávila, 2006, pg. 188). Ao considerar um ponto $P(x, y)$ genérico, móvel pertencente a curva exibida pela equação, o deslocamento de P sobre a curva faz com que o valor de x e y variem, podendo este deslocamento ser representado pelas projeções sobre o eixo, e a velocidade de cada variável nada mais é que a derivada, que eram chamadas de *fluxões* de x e y, representadas em símbolos por x e y. Desse modo x e y seriam as variações destas variáveis em um determinado tempo. Considerando um incremento de tempo “infinitamente pequeno”, representado por "0", x e y se movem através de um incremento “infinitesimais” x_0 e y_0, respectivamente. Com isso, não devemos ter unicamente $f\ x, y\ = 0$, como também $f\ x + x_0, y + y_0\ = 0$.

O que Newton quis demonstrar $\frac{x}{y}$ é o que temos hoje $\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$.

Um exemplo fornecido pelo próprio Newton. Empregando a equação

$$f\ x, y\ = x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Considerando a relação entre fluentes, $f(x, a, y)$, determinar a relação entre as fluxões (ou seja, encontrar a inclinação da reta tangente no ponto P). Inicialmente Newton multiplicou a equação por uma progressão $3, 2, 1, 0$ sendo uma equação cúbica, ou seja, uma equação do terceiro grau em x resultando em $3x^2x - 2axx + ayx$. Em seguida utilizando da mesma equação, mas desta vez como sendo do terceiro grau em y fazendo os devidos cálculos por meio da mesma progressão, obteve $axy - 3y^2y$. Posteriormente ele somou as duas equações e igualou a zero que resultou na equação desejada,

$$3x^2x - 2axx + ayx + axy - 3y^2y = 0.$$

Por fim Newton fez a divisão,

$$\frac{y}{x} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay},$$

Atualmente, é simplesmente $\frac{dy}{dx} = \frac{-f_x}{f_y}$.

O método de Newton (Maciel, 2012), é justificado pela ideia de *momento* (ou seja, um *infinitésimo*) da quantidade de fluente. Newton define, *momento* como sendo um incremento infinitamente pequeno que sofrem por um fluente como x, em um infinito pequeno intervalo de tempo o (nada mais é que dt). A posição de um determinado fluente x é dada por x_0. Ele desprezou os termos que continha 0 como fator, por serem “infinitamente pequenos”, assim resta a equação com as coordenadas x e y do ponto fornecedor da curva e suas fluxões x e y. Com isso, o momento de x passa a ser $x + x_0$ e o momento de y passa a ser $y + y_0$ (Observe que, o momento de x, resultado por x_0, é atualmente $(dx/dt) \cdot dt$, ou seja, dx).

Seja a equação da curva de terceiro grau $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Substituindo x por $x + xo$ e y por $y + yo$, obtém-se:

$$x^3 + 3x^2\ xo\ + 3x\ xo\ ^2 + \ xo\ ^3 - ax^2 - 2ax\ xo\ - a\ xo\ ^2 + axy + ay\ xo$$
$$+ a\ xo\ \ yo\ + ax\ yo\ - y^3 - 3y^2\ yo\ - 3y\ yo\ ^2 - \ yo\ ^3 = 0$$

E mais, como $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividido por 0 e desprezando os termos que contém 0, obtém-se

$$3x^2x - 2axx + ayx + axy - 3y^2y = 0$$

Esta relação pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{y}{x}=\frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}=\frac{dy}{dx}.$$

Gottfrid Wilhelm Leibniz

Fonte: http://www.editorialinfinito.com.ve/biografia_06.html

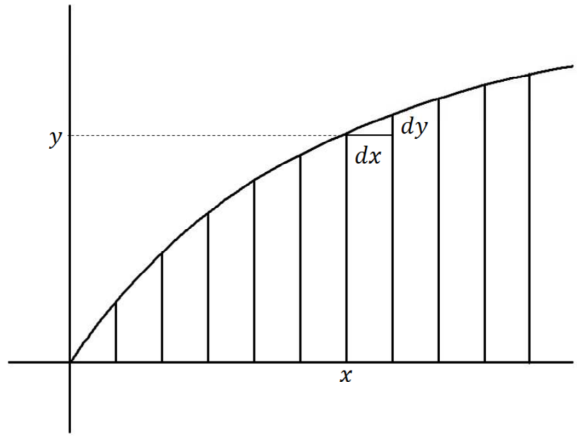
Leibniz entorno de 1676 chega ao mesmo resultado de Newton (Boyer, 1996), no entanto Leibniz tinha uma preocupação, no que diz respeito a notação uma vez que a mesma facilita no desenvolvimento do pensamento, particularmente acertou na sua escolha, já que é a mais utilizada até então. Apesar de que inicialmente fizesse uso da seguinte notação x/d e y/d em indicar o abaixamento de grau, dentre tantas outras notações, por exemplo, *omn,* mais tarde y e depois $y\,dx$, o sinal de integral como sendo a letra s (para soma) aumentada, depois de várias tentativas fixou em dx e dy.

Leibniz inventara uma nova forma de determinação da tangente e rapidamente publicou muitas técnicas, a exemplos de: o uso de coeficientes indeterminados, a determinação dos contornos, a integração das funções racionais mediante frações parciais, como também a conhecida "regra de Leibniz" (Maciel, 2012 e Boyer, 1996).

As publicações de Leibniz logo se espalharam por todos os matemáticos da Europa continental, que não desenvolveu apenas as notações do Cálculo Diferencial, mas também em 1675 através dos estudos dos indizíveis de Cavaliere, apresentou o que se conhece por Cálculo Integral (MACIEL. 2012).

A ideia de Leibniz do cálculo a *diferencial*, que nada mais era que a diferença infinitamente pequena de dois valores consecutivos de uma variável y. Para as diferenciais das variáveis x e y, ele usou a notação dx e dy, respectivamente. A interpretação gráfica de acordo com Maciel (2012), dy é a diferença infinitamente pequena entre duas ordenadas y, no caso de dx a diferença infinitamente pequena entre duas abscissas x, portanto, dx é a distância entre duas ordenadas y consecutivas.

Figura 1: Representação gráfico de dx e dy



Fonte: Elaborada pela autora com base em Maciel (2012).

Uma vez que essas diferenciais são "infinitamente pequenas", é possível fazer uma comparação entre si, ou seja, a razão dy: dx é finita. No que diz respeito a quantidades finitas ordinárias as diferenciais podem ser desconsideradas, isto é, $x + dx = x$. Portanto $adx + dydx = adx$. Para Leibniz as diferenças (diferenciais) menores em x e y, eram respectivamente dx e dy, logo dxy é a menor diferença (diferencial) em xy e é $\ x + dx \quad y + dy \quad - xy$. Para as operações com variáveis, isto é generalizado fornecendo as regras básicas de derivação (MACIEL, 2012).

O cálculo de Leibniz, na formação original é mais complexa do que a de Newton. Todavia sua formalização, fora uma conquista bem-sucedida. As notações dx, dy, e ds para elementos "infinitesimais" tem uma grande comodidade de "sugerir" os seus respectivos resultados.

Tendo visto um pouco sobre do desenvolvimento da História do Cálculo Diferencial, este trabalho tem como objetivo principal o estudo das derivadas e de algumas de suas aplicações. Para isto, o mesmo foi dividido em 3 capítulos, no primeiro capítulo temos uma revisão da definição de derivadas e suas propriedades, além das regras de derivação, no segundo temos alguns resultados também relacionados a derivadas para determinar máximo e mínimo de funções, resultados estes necessários para a continuação deste trabalho, finalmente, no terceiro capítulo apresentamos algumas aplicações de derivada, e para isto utilizamos os conceitos estudados nos capítulos anteriores, além de outros conceitos de outras áreas, visto que trabalhamos com as aplicações não apenas em matemática, mas em diversas áreas.

1. DERIVADA

Neste capítulo iremos definir a derivada e apresentar algumas propriedades e resultados sobre a mesma.

1. 1 Definição de Derivada

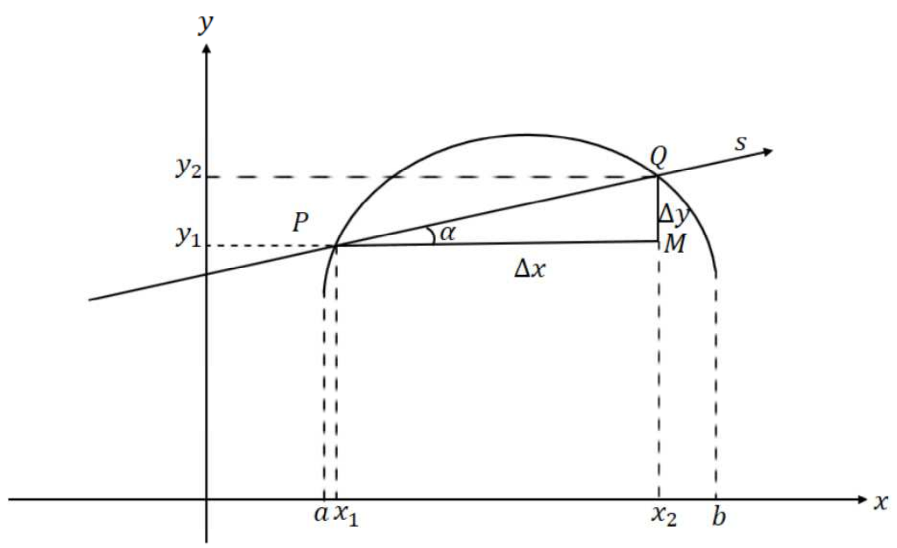
Nesta seção iremos definir a derivada. Para isto, inicialmente, iremos definir a inclinação de uma curva $y = f\ \ x$ para, em seguida, encontrar a equação da reta tangente à curva num ponto dado, e a partir daí definir a derivada.

As ideias que usaremos foram introduzidas no século XVIII por Newton e Leibniz.

Seja $y = f\ \ x$ uma curva definida no intervalo a, b, como na figura 2. Sejam *P*(x_1, y_1) e *Q*(x_2, y_2) dois pontos distintos da curva $y = f\ \ x$. Seja s a reta secante que passa pelos pontos *P* e *Q*. Considerando o triângulo retângulo PMQ, na figura 2, temos por definição que a inclinação da reta s (ou coeficiente angular de s), satisfaz a igualdade.

$$\text{tg} \propto = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}.$$

Figura 2: Inclinação da reta s

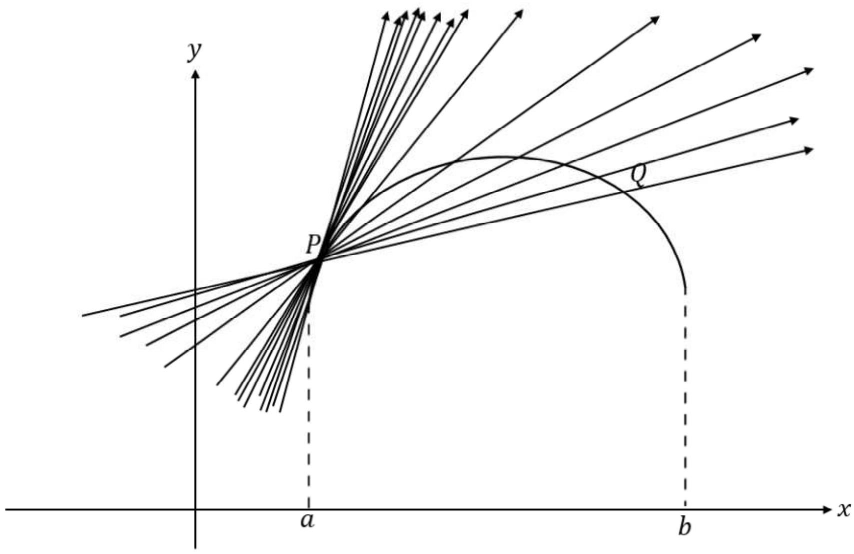


Fonte: Elaborada pela autora com base em Flemming e Gonçalves (2006).

Suponhamos agora que, mantendo *P* fixo, *Q* se mova sobre a curva em direção a *P*. Diante disto, a inclinação da reta secante s irá variar. Notemos que, à medida que *Q* vai se aproximando cada vez mais de *P*, a inclinação da secante varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante (ver figura 3)

Esse valor limite é chamado inclinação de reta tangente à curva no ponto *P*, ou também inclinação da curva em *P*.

Figura 3: Variação da reta secante



Fonte: Elaborada pela autora com base em Flemming e Gonçalves (2006).

Assim, podemos definir a inclinação da reta tangente, usando limite.

Definição 1.1.1: Dada uma curva $\boldsymbol{y = f(x)}$, seja $\boldsymbol{P(x_1, y_1)}$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva no ponto $\boldsymbol{P}$ é dada por:

$$m(x_1) = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad (1)$$

quando o limite existe.

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ podemos reescrever o limite (1) na forma

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Desta forma, conhecendo a inclinação da reta tangente à curva no ponto *P*, podemos encontrar a equação da reta tangente à curva em *P*.

Definição 1.1.2: Se a função $f(x)$ é continua em x_1, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

(i) A reta que passa por P tendo inclinação.

$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite existe. Neste caso, usando a definição de equação de reta (ver apêndice A), temos a equação

$$y - f(x_1) = m(x - x_1).$$

(ii) A reta $x = x_1$ se $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ for infinito.

Exemplo 1.1.1: Determinar a equação da reta tangente à curva $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 6}$, no ponto $\boldsymbol{x = 2}$.

Solução:

O ponto da curva $f(x) = x^2 - 3x + 6$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = P(2,4)$, pois $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 6 = 4$.

Agora encontremos a inclinação da curva $f(x) = x^2 - 3x + 6$ no ponto $P(2,4)$. Para isso, encontraremos primeiro a inclinação da curva num ponto (x_1, y_1). Temos, pela Definição 1.1.2, que

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

e como $f(x) = x^2 - 3x + 6$, segue que

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - 3(x_1 + \Delta x) + 6 - (x_1^2 - 3x_1 + 6)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 3x_1 - 3\Delta x + 6 - x_1^2 + 3x_1 - 6}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 3)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x - 3).$$

Usando as propriedades de limite, obtemos

$$m(x_1) = 2x_1 - 3,$$

consequentemente, $m(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.

Mas, por definição, sabemos que a equação da reta é dada por:

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

Logo, a equação da reta tangente à curva no ponto $P(2,4)$ é

$$y - 4 = 1(x - 2),$$

ou ainda,

$$y - 4 = x - 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0.$$

Finalmente, iremos definir a derivada de uma função.

Definição 1.1.3: A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x_1, denotada por $f'(x_1)$ é definida pelo limite

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

Também podemos escrever

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Observe que, conforme vimos anteriormente, a derivada nos dá exatamente a inclinação (ou coeficiente angular) da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

Logo, geometricamente, a derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto x_1, representa a inclinação da curva neste ponto.

Definição 1.1.4: A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$ ou y', tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se este limite existir.

Notações:

$$y' = f'(x), D_x f(x), D_x y \text{ ou } \frac{df}{dx}.$$

IMPORTANTE: Dizemos que uma função é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 1.1.2: Determine a derivada de $f(x) = 3x^2 - 1$ no ponto $x = 4$.

Solução:

Usando a definição de derivada, temos,

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(4+\Delta x)^2 - 1 - (3 \cdot 4^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \Delta x + \Delta x^2) - 1 - (3 \cdot 16 - 1)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x^2 - 1 - (48 - 1)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 \cdot 16 + 3 \cdot 8 \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x^2 - 48}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{48 + 24 \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x^2 - 48}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{24 \cdot \Delta x + 3 \cdot \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(24 + 3 \cdot \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} (24 + 3 \cdot \Delta x).$$

Logo, $f'(4) = 24$.

Teorema 1.1.1: Toda função derivável num ponto x_1 é contínua nesse ponto, isto é, se $f(x)$ é uma função derivável em x_1, então

i) $f(x_1)$ existe.

ii) $\lim_{x \to x_1} f(x)$ existe.

iii) $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$.

Prova: (Flemming e Gonçalves, 2006, pág. 126)

1.2 Regras de Derivação

Nesta seção estudaremos algumas regras de derivação, que permitem determinar as derivadas das funções de forma mais direta, sem necessariamente aplicarmos o uso da definição por meio de limite. Para isto, iremos trabalhar com funções deriváveis, isto é, funções onde a derivada existe em todos os pontos de seu domínio.

1.2.1 Derivada de uma Função Constante

Proposição 1.2.1: Seja c uma constante e $f(x) = c$ para todo x, então $f'(x) = 0$.

Prova: De fato, seja $f(x) = c$, aplicando a definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} 0.$$

Portanto, usando as propriedades de limite, concluímos que:

$f'(x) = 0$, para todo x, como queríamos mostrar.

Exemplo 1.2.1: Calcule a derivada de $f(x) = 8$.

Solução: Como a função é constante, pela Proposição 1.2.1, temos que,

$$f'(x) = 0.$$

1.2.2 Derivada de uma Função Potência

Proposição 1.2.2: Se n é um número inteiro positivo e $f(x) = x^n$, então $f(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Prova: Seja $f(x) = x^n$. Usando a definição de derivada temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Daí,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \qquad (1)$$

Desenvolvendo o $(x + \Delta x)^n$ pelo Binômio de Newton, temos:

$$(x + \Delta x)^n = \binom{n}{0} x^n \Delta x^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 \Delta x^n$$

Resolvendo o Binômio de Newton:

$$(x+\Delta x)^n=\frac{n!}{0!\,(n-0)!}\cdot x^n\Delta x^0+\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot x^{n-1}\Delta x^1+\frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot x^{n-2}\Delta x^2+\cdots$$
$$+\frac{n!}{n!\,(n-n)!}\cdot x^0\Delta x^n$$

$$\Rightarrow\ (x+\Delta x)^n=\frac{n!}{0!\,(n)!}x^n\Delta x^0+\frac{n\cdot(n-1)!}{1!\,(n-1)!}\cdot x^{n-1}\Delta x^1+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!}\cdot x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+\cdots+\frac{n!}{n!\,(0)!}\cdot x^0\Delta x^n$$

$$\Rightarrow\ (x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n}{2!}\cdot x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n.$$

Agora, substituindo a última igualdade na equação (1), obtemos:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n}{2!}\cdot x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n\right)-x^n}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n}{2!}\cdot x^{n-2}\Delta x^2+\cdots+\Delta x^n}{\Delta x}$$

Pondo Δx em evidência, obtemos:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(nx^{n-1}+\frac{n}{2!}\cdot x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n}{2!}\cdot x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right)$$

Aplicando as propriedades de limite, concluímos que para todo x,

$$f'(x)=nx^{n-1}, \text{ como queríamos mostrar.}$$

Observação 1.2.1: Demonstramos a regra da potência quando o expoente n é um número inteiro positivo. Mas, esta regra é válida para qualquer expoente n real.

Exemplo 1.2.2: Calcule a derivada da função $f(x)=x^{15}$.

Solução: Como a função é potência, usando a Proposição 1.2.2, temos que

$$f'(x)=15x^{14}.$$

1.2.3 Derivada do Produto de uma Constante por uma Função

Proposição 1.2.3: Seja f uma função, c uma constante e g a função definida por $g(x)=cf(x)$. Se $f'(x)$ existe, então

$$g'(x)=cf'(x).$$

Prova: Por hipótese, como $f'(x)$ existe, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Usando a definição para calcular a derivada de g, temos:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Mas, $g(x) = cf(x)$, daí,

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} c\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right).$$

Aplicando as propriedades de limite, temos que

$$g'(x) = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Logo,

$$g'(x) = cf'(x),$$

Como queríamos mostrar.

Exemplo 1.2.3: Determine a derivada da função $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-3}$.

Solução: Usando a Proposição 1.2.3, temos que,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-3)x^{-3-1}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{-4}.$$

1.2.4 Derivada da Soma ou da Diferença

Proposição 1.2.4: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) + g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Prova: Por hipótese, como $f'(x)$ e $g'(x)$ existem,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ e } g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Usando a definição para calcular a derivada de h,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Mas, $h(x) = f(x) + g(x)$, daí

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}.$$

Aplicando as propriedades de limite,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Logo,

$h'(x) = f'(x) + g'(x)$, como queríamos mostrar.

Observação 1.2.1: O processo da derivada da diferença é análogo. Logo, a derivada da soma (ou da diferença) de duas funções é a soma (ou diferença) das derivadas, quando elas existirem.

Exemplo1.2.4: Determine a derivada da função $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$.

Solução: Usando a Proposição 1.2.4, temos que,

$$f'(x) = 3 \cdot 2x + 6.$$

Logo,

$$f'(x) = 6x + 6.$$

1.2.5 Derivada de um Produto

Proposição 1.2.5: Sejam f e g duas funções e h a função definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Prova: Por hipótese, como $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ e } g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Usando a definição, a derivada de h é dada por

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Agora subtraindo e somando a expressão $f(x+\Delta x) \cdot g(x)$ no numerador, obtemos:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) \cdot g(x) + f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \frac{g(x)\,[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right].$$

Aplicando as propriedades de limites,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x+\Delta x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

$$\Rightarrow h'(x) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Mas, como f e g são deriváveis e sabemos que toda função derivável em x_1 é contínua neste ponto. Daí,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Portanto,

$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$, como queríamos mostrar.

Deste modo a derivada do produto de duas funções é primeira função sem derivar vezes a derivada da segunda função, mais a segunda função sem derivar multiplicado pela derivada da primeira função.

Exemplo 1.2.5: Determine a derivada da função $f(x) = (2x+1) \cdot (3x^2+6)$.

Solução: Usando a Proposição 1.2.5, tem-se

$$f'(x) = 2 \cdot (3x^2+6) + (2x+1) \cdot (6x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12 + 12x^2 + 6x.$$

Logo,

$$f'(x) = 18x^2 + 6x + 12.$$

1.2.6 Derivada de um Quociente

Proposição 1.2.6: Sejam $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ duas funções e $\boldsymbol{h}$ a função definida por $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}$, onde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$. Se $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$ existem, então

$$h'(x) = \frac{f(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot f'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Prova: Por hipótese, como $f'(x)$ e $g'(x)$ existem, então.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ e } g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Usando a definição de derivada,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)}\right].$$

Agora subtraindo e somando a expressão $f(x) \cdot g(x)$ no numerador do último limite dado acima, obtemos:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x) \cdot g(x)}\right].$$

Aplicando as propriedades de limites,

$$h'(x) = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x)}$$

Mas, como f e g são deriváveis e sabemos que toda função derivável em x_1 é contínua neste ponto. Daí,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$$

Portanto,

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

Por fim,

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2},$$ como queríamos mostrar.

Sendo assim a derivada do quociente de duas funções é obtido da seguinte forma, tendo no numerador a derivada da primeira função multiplicado pela segunda função sem derivar, menos a primeira função sem derivar vezes a derivada da segunda função, e no denominador o quadrado da segunda função sem derivar.

Exemplo 1.2.6: Determine a derivada da função $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$.

Solução: Usando a Proposição1.2.6, temos

$$f'(x) = \frac{2(3x-1) - (2x+4)3}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x - 2 - 6x - 12}{(3x-1)^2}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{-14}{(3x-1)^2}.$$

1.2.7 Derivada da Função Composta (REGRA DA CADEIA)

Agora iremos apresentar a regra da cadeia, que nos dá a derivada da função composta $g \circ f$ em termos das derivadas de f e g, onde f e g são funções deriváveis com $y = g(u)$ e $u = f(x)$, para todo x tal que $f(x)$ está no domínio de g e podemos escrever

$$y = g(u) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Proposição 1.2.7: Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g(f(x))$ tem derivada que é dada por.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

Prova Parcial: Vamos fazer a demonstração supondo que existe um intervalo aberto I contendo x, tal que

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0 \text{ sempre que } (x + \Delta x) \in I \text{ e } \Delta x \neq 0. \qquad (1)$$

Isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas. Por exemplo, se f for uma função constante, a condição apresentada não é satisfeita, visto que se $f(x) = c$, com c constante, temos $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$. Porém, neste caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $f(x) = c$, temos por definição que

$$f'(x) = 0 \text{ e } y = g(f(x)) = g(c) \text{ é constante.}$$

Assim, $y'(x) = 0 = g'(u) \cdot f'(x)$.

Então provemos que $y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$ quando $f(x)$ satisfaz a condição (1).

Como $y(x) = g(f(x))$, pela definição de derivada, temos:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}, \text{ se este limite existir.}$$

Vamos considerar primeiro o quociente

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x}.$$

Seja $\Delta u = f(x + \Delta u) - f(x)$, temos $f(x + \Delta u) = f(x) + \Delta u$. Então Δu depende de Δx e $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, daí

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(f(x) + \Delta u) - g(f(x))}{\Delta x}.$$

E como $u = f(x)$, temos:

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta x}.$$

Para a condição (1), $\Delta u \neq 0$ em um intervalo aberto contendo x. Assim, podemos dividir e multiplicar o 2º membro do último quociente por Δu, de onde obtemos que

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Mas, $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$, assim

$$\frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Aplicando o limite, em ambos os membros da última igualdade, obtemos.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(f(x+\Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u) - g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Portanto,

$$y'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$$, como queríamos mostrar.

Exemplo 1.2.7: Determine a derivada da função $f(x) = 10(3x^2 + 7x - 3)^{10}$.

Solução: Podemos reescrever esta função da seguinte forma $f(x) = g(u) = 10u^{10}$, onde $u(x) = 3x^2 + 7x - 3$. Assim, pela regra da cadeia: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, e usando as propriedades vistas anteriormente, temos que

$$f'(x) = 10 \cdot 10u^9 \cdot (6x + 7).$$

Logo,

$$f'(x) = 100(3x^2 + 7x - 3)^9 \cdot (6x + 7).$$

1.3 Derivadas Sucessivas

Nesta seção iremos definir derivadas sucessivas. Para isto, considerando f uma função derivável definida num certo intervalo. A sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto, pensar na derivada da função f'.

Definição 1.3.1: Seja f uma função derivável. Se f' também for derivável, então a sua derivada é chamada *derivada segunda de* f e é representada por $f''(x)$ (lê-se *f*-duas linhas de x) ou $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (lê-se *derivada segunda* de f em relação a x).

Observação 1.3.1: A derivada de ordem n ou $n - ésima$ derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$ é obtida derivando-se a derivada de ordem $n - 1$ de f.

Exemplo 1.3.1: Dada a função real definida por $f(x) = 3x^4 - 2x$, determinar as derivadas sucessivas de f até a ordem 5.

Solução:

Calculando $f'(x)$, temos

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 2.$$

Calculando $f''(x)$, temos

$$f''\ x\ = 2 \cdot 12x^2$$
$$\Rightarrow f''\ x\ = 24x^2$$

Calculando $f'''\ x\ $, temos

$$f'''\ x\ = 2 \cdot 24x^1$$
$$\Rightarrow f'''\ x\ = 48x.$$

Calculando $f^4(x)$, temos

$$f^4(x) = 1 \cdot 48x^0$$
$$\Rightarrow f^4 = 48.$$

Calculando $f^5(x)$, temos

$$f^5(x) = 0$$

2.4 Tabela das Derivadas: A partir das proposições estudadas anteriormente e outras não apresentada temos a tabela geral das derivadas. Nesta tabela u e v são funções deriváveis de x e c, α e a são constantes.

1. $y = c \Rightarrow y' = 0$	2. $y = x \Rightarrow y' = 1$
3. $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$	4. $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$
5. $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	6. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
7. $y = u^\alpha\ \ \alpha \neq 0\ \ \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$	8. $y = a^u\ \ a > 0, a \neq 1\ \ \Rightarrow y' = a^u \cdot lna \cdot u'$
9. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$	10. $y = log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} log_a e$
11. $y = lnu \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$	12. $y = u^v \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot lnu \cdot v'(u > 0)$
13. $y = sen\, u \Rightarrow y' = cos\, u \cdot u'$	14. $y = cos\, u \Rightarrow y' = -sen\, u \cdot u'$
15. $y = tgu \Rightarrow y' = sec^2 u \cdot u'$	16. $y = cotgu \Rightarrow y' = -cossec^2 u \cdot u'$
17. $y = sec\, u \Rightarrow y' = sec\, u \cdot tgu \cdot u'$	18. $y = cosec\, u \Rightarrow y' = -cosec\, u \cdot cotgu \cdot u'$
19. $y = arc\ sen\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	20. $y = arc\ cos\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21. $y = arc\ tg\, u\ \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$	22. $y = arc\ cotg\, u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
23. $y = arc\ sec\, u,\ \ u\ \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\ \sqrt{u^2-1}},\ \ u\ > 1$	
24. $y = arc\ cosec\, u,\ \ u\ \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\ \sqrt{u^2-1}},\ \ u\ > 1$	

25. $y = senh\,u \Rightarrow y' = cosh\,u \cdot u'$	26. $y = cosh\,u \Rightarrow y' = senh\,u \cdot u'$
27. $y = tgh\,u \Rightarrow y' = sech^2 u \cdot u'$	28. $y = cotgh\,u \Rightarrow y' = -cosech^2 u \cdot u'$
29. $y = sech\,u \Rightarrow y' = -sech\,u \cdot tgh\,u$	
30. $y = cosech\,u \Rightarrow y' = -cosech\,u \cdot cotgh\,u \cdot u'$	
31. $y = argsenh\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	32. $y = argcosh\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}, u > 1$
33. $y = arg\,tgh\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2},\ u < 1$	
34. $y = arg\,cotgh\,u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2},\ u > 1$	
35. $y = arg\,sech\,u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}, 0 < u < 1$	
36. $y = arg\,cosech\,u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{1+u^2}}, u \neq 0$	

2. ALGUNS CRITÉRIOS PARA DETERMINAR O MÁXIMO E O MÍNIMO DE FUNÇÕES USANDO A DERIVADA

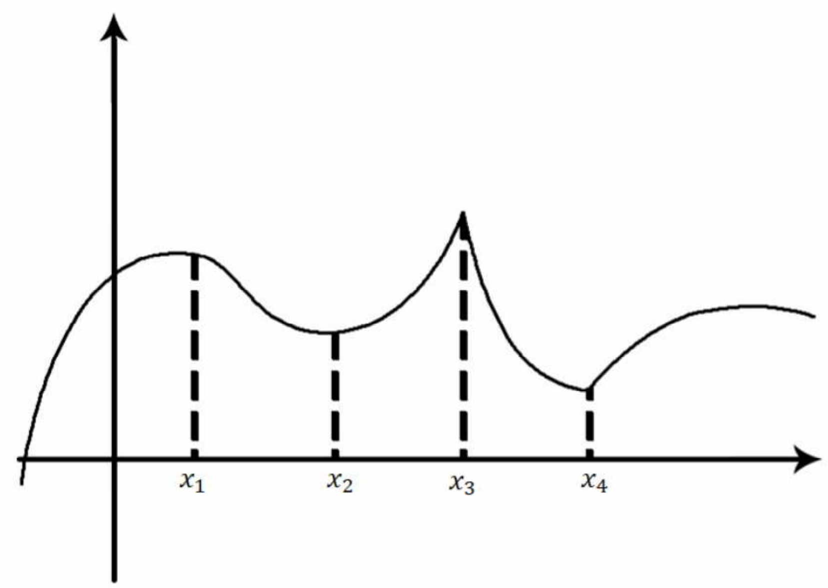
Neste Capítulo, usaremos a definição de derivadas e os resultados estudados para determinar Máximos e Mínimos de funções, para isto, estudaremos os Testes da Derivada.

2.1 Máximos e Mínimos

Nesta sessão iremos definir Máximo e Mínimo de uma função e apresentar alguns resultados com objetivo de estudar algumas aplicações de derivada.

Inicialmente, observe o gráfico a seguir da função $y = f(x)$ (figura 4), onde assinalamos pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.

Figura 4: Gráfico de uma função $y = f(x)$



Fonte: Elaborada pela autora com base em Flemming e Gonçalves (2006).

Esses pontos são chamados *pontos extremos* da função. Já os valores $f\ x_1$ e $f(x_3)$ são chamados *máximos relativos* enquanto que $f\ x_2$ e $f(x_4)$ são chamados *mínimos relativos.*

Ao fixamos, por exemplo, o intervalo $I = \ x_2, x_4$, temos que $f\ x_3$ é chamado de máximo absoluto de f em I, e $f\ x_4$ é chamado de mínimo absoluto.

A seguir, iremos formalizar estas definições.

Definição 2.1.1: Uma função f tem um máximo relativo em c, se existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição 2.1.2: Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Proposição 2.1.1: Suponhamos que $f(x)$ exista para todo os valores de $x \in \ a, b\ $ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'\ c\ = 0$.

Prova: (Flemming e Gonçalves, 2006, pág. 195)

Observação 2.1.1: Geometricamente, se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente horizontal no ponto $x = c$.

Definição 2.1.3: O ponto $c \in D(f)$ tal que $f'\ c\ = 0$ ou $f'\ c\ $ não existe, é chamado ponto crítico de f.

Exemplo 2.1.1: Determinar os pontos críticos da função real dada por

$$y = \frac{x}{x^2-4}.$$

Solução: Pela Definição 2.1.3, os pontos críticos da função são os valores de x tais que $f'\ x\ = 0$ ou $f'(x)$ não exista. Calculando a derivada da função f, obtemos

$$f'\ x\ = \frac{1\ x^2-4\ - x \cdot 2x}{\ x^2-4\ ^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{\ x^2-4\ ^2} = \frac{-x^2-4}{\ x^2-4\ ^2},$$

Note que:

i. $f'\ x\ = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-4}{\ x^2-4\ ^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$, e esta equação não admite solução no conjunto dos números reais, ou seja, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'\ x\ = 0$.

ii. $f'(x)$ não existe, se $x^2 - 4 = 0$, isto é, se $x = 2$ e $x = -2$.

Logo $x = 2$ e $x = -2$ são os pontos críticos da função dada.

IMPORTANTE: Conforme vimos nas definições de máximo e mínimo e na última proposição, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um ponto crítico.

Podemos observar que uma função definida num dado intervalo pode admitir diversos pontos extremos relativos. Dentre eles, o maior e o menor são chamadas respectivamente de Máximo Absoluto e Mínimo Absoluto da função neste intervalo.

Proposição 2.1.2: Seja $f\colon\ a,b\ \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado a,b . Então f assume máximo e mínimo absoluto em a,b . Isto significa que existem pontos x_1 e x_2 em a,b tais que $f\ x_1\ = \max\ f\ x\ ,\ x \in\ a,b$ e $f\ x_2\ = \min\ f\ x\ ,\ x \in\ a,b$.

Prova: (Maciel, 2005, pág. 148)

Para analisar o máximo e o mínimo absoluto de uma função quando o intervalo não for especificado usam-se as definições a seguir.

Definição 2.1.4: Dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Definição 2.1.5: Dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função f, se $c \in D(f)$ e $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

Exemplo 2.1.2: O número $x_0 = 0$ é um máximo absoluto para a função $f\ x\ = -x^2$, pois

$$f\ x\ \leq f\ 0\ , \forall x \in D(f).$$

Mas, considerando agora a função $f\ x\ = x^2$, temos que o número $x_0 = 0$ é um mínimo absoluto, pois

$$f\ x\ \geq f\ 0\ = 0^2 = 0, \forall x \in D(f).$$

2.2 Critérios para Determinar os Extremos de uma Função

Nesta seção iremos apresentar os critérios para determinar o máximo e mínimo de funções, mais conhecidos como Teste da Derivada 1ª e Teste da Derivada 2ª.

Teorema 2.2.1 (Critério da derivada primeira para determinação de extremos): Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a,b) exceto possivelmente num ponto c.

(i) Se $f'\ x\ > 0$ para todo $x < c$ e $f'\ x\ < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(ii) Se $f'\ x\ < 0$ para todo $x < c$ e $f'\ x\ > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

Prova: (Flemming e Gonçalves, 2006, pág. 202)

Teorema 2.2.2 (Critério da derivada segunda para determinação de extremos): Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'\ c\ = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

(i) Se $f''\ c\ < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f''\ c\ > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Prova: Temos por hipótese que:

- f é derivável em (a, b);
- c é um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c)$= 0;
- f'' existe em (a, b);

i) Como f'' existe em (a, b) e $f''\ c\ < 0$. Usando a definição de derivada (Definição 1.1.3), temos

$$f''\ c\ = \lim_{x \to c} \frac{f'\ x\ - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, como utilizando o seguinte resultado:

“ Se $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e é negativo(positivo), existe um intervalo aberto contendo a tal que $f\ x\ < 0$ ($f\ x\ > 0$) para todo $x \neq a$ no intervalo”.

Como $\lim_{x \to c} \frac{f'\ x\ - f'(c)}{x - c}$ existe e é negativo, existe um intervalo aberto I, contendo o ponto c tal que:

$$\frac{f'\ x\ - f'(c)}{x - c} < 0, \forall x \in I. \qquad \text{(I)}$$

Note que podemos escrever $I = I_1 \cup I_2 \cup \{c\}$, onde $I_1 = \{x \in I : x < c\}$, $I_2 = \{x \in I : x > c\}$ e $c \in I$.

Então, no intervalo I_1, podemos observar que c é o extremo direito. E, no intervalo I_2, c é o extremo esquerdo.

Assim, se $x \in I_1$, $x < c \Rightarrow x - c < 0$, então segue de (I) que $f'\ x\ - f'\ c\ > 0$. Mas, $f'\ c\ = 0$, daí $f'\ x\ > 0$.

Por outro lado, se $x \in I_2$, $x > c \Rightarrow x - c > 0$, então segue novamente de (I) que $f'(x) - f'(c) < 0$. E, sendo $f'(c) = 0$, segue que $f'(x) < 0$.

Como $f'(x) > 0$, $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$, $\forall x > c$, pelo Teste da Derivada 1ª(Teorema 2.2.1), f tem um máximo relativo em c, como queríamos mostrar.

ii) A demonstração é análoga a de i).

Observação 2.2.1: Os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 também são conhecidos, respectivamente como "Teste da Derivada 1ª" e "Teste da Derivada 2ª" para determinação de máximo e mínimo.

Exemplo 2.2.1: Determinar os máximos e mínimos das funções reais $f(x) = 4 - 3x + 3x^2$ no intervalo [0,3].

Solução: Temos que f é derivável em [0,3], pois é uma função polinomial, e

$$f'(x) = -3 + 6x$$

Como f é derivável em [0,3], para encontrar os pontos críticos de f, basta encontrar os valores de $x \in [0,3]$ tais que $f'(x) = 0$.

Note que se $f'(x) = 0$, temos

$$-3 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ é ponto crítico.}$$

Verificando se este ponto é de máximo ou de mínimo. Para isto, apliquemos o Teste da Derivada Segunda. Temos $f''(x) = 6 > 0$, logo f tem um valor mínimo em $x = \frac{1}{2}$, e como

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4},$$

temos que $\frac{13}{4}$ é um valor mínimo de f em $(0,3)$.

Além disso, calculando o valor de f nos extremos do intervalo $[0,3]$, obtemos

$$f(0) = 4$$

e

$$f(3) = 4 - 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 4 - 9 + 27 = 22,$$

Logo no ponto $x = 3$ f assume o valor máximo que é 22.

Portanto $(3,22)$ é ponto máximo e $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$ é ponto mínimo em [0,3].

Ou seja, 22 é valor máximo de f e $\frac{13}{4}$ é valor mínimo de f.

3. APLICAÇÕES DE DERIVADAS

Neste Capítulo iremos utilizar as definições e resultados estudados nos Capítulos 1 e 2, para mostrar algumas aplicações da derivada em diversas áreas.

3.1 Aplicações de Derivadas na Física

Nesta seção, iremos apresentar aplicações da derivada na física, em particular, no cálculo de velocidade e aceleração instantânea.

Os conceitos de velocidade e aceleração são comuns a todas as pessoas no seu cotidiano, para medirmos a distância percorrida em um determinado espaço de tempo, seja em qualquer meio de transporte, a cada instante o velocímetro marca a velocidade do transporte. Ao acelerar ou frear, a velocidade é alterada de maneira perceptível.

Vejamos agora uma maneira de encontrarmos a velocidade e aceleração por meio de limites, e consequentemente pela definição de derivadas.

3.1.1 Velocidade

Suponha que um corpo se mova em linha reta e que $s = s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Definimos *velocidade média* nesse intervalo de tempo como o quociente

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Isso é, a velocidade média é o quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo.

De modo geral, a velocidade média nada nos diz a respeito da velocidade do corpo no instante t. Para obtermos a *velocidade instantânea* do corpo no instante t, calculamos sua velocidade média em instantes de tempo Δt cada vez menores. Assim, podemos observar que a velocidade instantânea, ou velocidade no instante t, é o limite das velocidades médias quando Δt se aproxima de zero, isto é,

$$v\ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Mas, se lembrarmos da definição de derivada, vista no capítulo anterior, o limite acima é a derivada da função $s = s(t)$ em relação a t. Logo,

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

3.1.2 Aceleração

O conceito de aceleração é introduzido de maneira análoga ao de velocidade. Por definição, a *aceleração média* no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é dado por:

$$a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Observe que ela mede a variação da velocidade do corpo por unidade de tempo no intervalo de tempo Δt. Desta forma, para obtermos a aceleração do corpo no instante t, tomamos sua aceleração média em intervalos de tempo Δt, cada vez menores. Assim a *aceleração instantânea* é o limite

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Novamente, por definição de derivada, podemos observar que este limite é a derivada de $v(t)$ em relação a t. Logo,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

3.1.3 Exemplo

Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante t é dada por $f(t) = 16t + t^2$, $0 \leq t \leq 8$, onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

a) Achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b+h]$, $0 \leq b < 8$.

b) Achar a velocidade média durante o intervalo $[3; 3,1]$.

c) Determinar a velocidade do corpo num instante qualquer t.

d) Achar a velocidade do corpo no instante $t = 3$.

e) Determinar a aceleração no instante t.

Soluções:

a) Temos que, $f(t) = 16t + t^2$, $0 \leq t \leq 8$, representa o espaço percorrido pelo corpo. E por definição, a velocidade média é dada por:

$$v_m = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Devemos achar a velocidade média durante o intervalo de tempo $[b, b+h]$, $0 \leq b < 8$. Desse modo,

$$v_m = \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

$$\Longrightarrow v_m = \frac{16\ b+h\ +(b+h)^2-(16b-b^2)}{h}$$

$$\Longrightarrow v_m = \frac{16b+16h+b^2+2bh+h^2-16b-b^2}{h}$$

$$\Longrightarrow v_m = \frac{16h+2bh+h^2}{h}$$

$$\Longrightarrow v_m = \frac{h\ 16+2b+h}{h}.$$

Logo, a velocidade média é dada por

$$v_m = 16 + 2b + h\ m/s;\ \text{com}\ \ 0 \leq b < 8.$$

b) Temos que o intervalo dado é da forma $b, b+h$, com $b = 3$ e $b + h = 3{,}1 \Rightarrow h = 0{,}1$.

Daí, como pelo item (a),

$$v_m = 16 + 2b + h. \qquad (1)$$

Substituindo $b = 3$ e $h = 0{,}1$ em (1), obtemos:

$$v_m = 16 + 2 \cdot 3 + 0{,}1 = 22{,}1\ m/s.$$

Logo, a velocidade média no intervalo $3;3,1$, é $v_m = 22{,}1\ m/seg$

c) Por definição, $v\ t\ = f'(t)$, daí, como $f\ t\ = 16t + t^2$, temos que a velocidade do corpo num instante t qualquer é

$$v(t) = \ 16 + 2t\ \ m/s.$$

d) Como, pelo item (c) $v\ t\ = 16 + 2t$, temos,

$$v\ 3\ = 16 + 2 \cdot 3\ \Rightarrow v\ 3\ = 22m/s.$$

Logo, a velocidade no instante $t = 3$ é $22m/s$.

e) Por definição, temos que,

$$a\ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Daí,

$$a\ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16+2\ t+\Delta t\ -16-2t}{\Delta t}$$

$$a\ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{16+2t+2\Delta t-16-2t}{\Delta t}$$

$$a\ t\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\Delta t}{\Delta t}$$

$$a\ t\ = 2m/seg^2.$$

Observação: Neste item também podemos usar o fato de que,

$$a\ t\ = v'\ t \text{ ou } a\ t\ = f''(t)$$

Assim,

$$a\ t\ = 2\,m/seg^2$$

Ou seja, encontramos a aceleração no instante t, sem aplicarmos diretamente o cálculo do limite.

3.2 Aplicação de Derivadas na resolução de Problemas de Otimização

Nesta seção iremos utilizar os conceitos e resultados estudados no capítulo 1, sobre derivadas, para resolver alguns problemas práticos sobre máximos e mínimos em diversas áreas.

O primeiro passo na solução de um problema desse tipo é decidir precisamente o que você quer otimizar. Uma vez identificado esta grandeza, escolha uma letra para representá-la, e escreve-se a função que deverá ser analisada. Esta função poderá ser escrita em função de uma ou mais variável devemos procurar expressar uma das variáveis em função da outra.

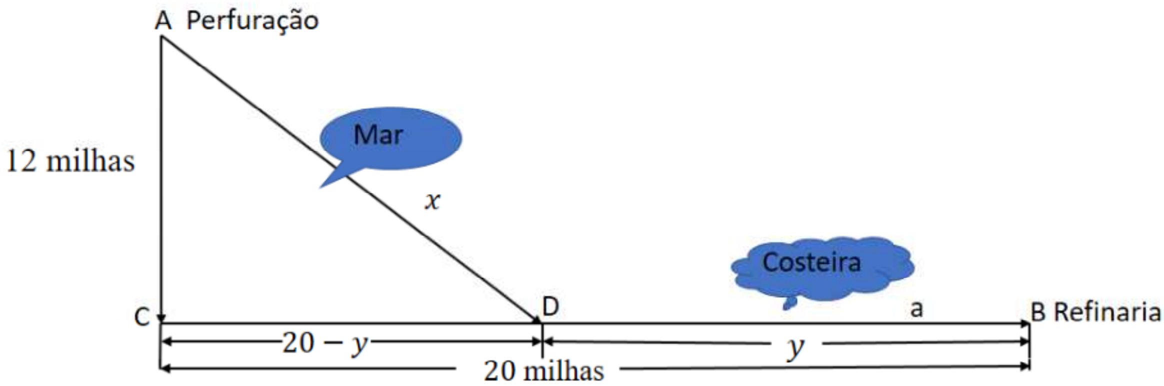
Uma vez que escrevemos a função e identificamos o intervalo apropriado, a parte difícil está feita, para conclusão basta aplicar as definições e resultados estudados para otimizar (calcular o máximo e mínimo) a função no intervalo especificado.

3.2.1 Aplicação da Derivada na Engenharia Civil

Nesta subseção iremos apresentar um problema relacionado com a engenharia civil, cujo objetivo é minimizar o desperdício de dutos utilizados por uma refinaria para o bombeamento de petróleo de uma perfuração.

Exemplo 3.2.1.1: Uma perfuração a 12 milhas da costa será conectada a uma refinaria costeira, 20 milhas da ilha de perfuração. Os dutos subaquáticos custam R$ 50.000,00 por milhas e os terrestres, R$ 30.000,00 por milhas. Qual é a combinação dos dois tipos de dutos que vai fornecer a conexão menos dispendiosa?

Figura 5: Bombeando Petróleo de uma Perfuração para uma Refinaria



Fonte: Elaborada pela autora.

Solução:

Queremos saber qual a combinação dos dois tipos de dutos que irá fornecer a conexão com menos desperdícios, isto é, uma combinação em que o custo seja mínimo. Para encontrarmos iremos atribuir o comprimento x para tubulação subaquática e o comprimento y para a tubulação terrestre, conforme figura apresentada. Pela figura dada, podemos observar que o triângulo ACD é reto em C, uma vez que a perfuração forma um ângulo de 90°C com o solo, com isso podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, e mais,

$$x^2 = 12^2 + (20 - y)^2 \Rightarrow x = \sqrt{144 + (20 - y)^2}. \qquad \text{(I)}$$

Como os dutos subaquáticos custam R$ 50.000,00 por milhas e os dutos terrestres R$ 30.000,00 por milhas, temos que o custo de toda tubulação é dada pela expressão:

$$C = 50.000x + 30.000y. \qquad \text{(II)}$$

Onde:

C = custo;

x = comprimento da tubulação subaquática;

y = combinação da tubulação terrestre;

Para expressarmos C em função de uma única variável, podemos substituir a equação (I) em (II), com isso obtemos,

$$C = 50.000\sqrt{144 + (20 - y)^2} + 30.000y, \qquad \text{(III)}$$

ou seja,

$$C(y) = 50.000\left(144 + (20 - y)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 30.000y.$$

Para que o desperdício seja o menor possível, temos que $C(y)$ deve ter um valor mínimo, no intervalo $0 \leq y \leq 20$. Para calcular este valor, usamos o Teste da Derivada 2ª (Teorema 2.2.2), e para isto, temos que determinar os pontos críticos de C.

Calculemos $C'(y)$. Fazendo $u = 144 + (20 - y)^2 = 144 + 400 - 40y + y^2$ e calculando a derivada de u, obtemos $u' = -40 + 2y$. Com isso, usando a Regra da Cadeia (Proposição 1.2.7), temos que

$$C'(y) = \frac{1}{2}50000 \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' + 30000$$

$$\Rightarrow C'(y) = 25000\left(144 + (20 - y)^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-40 + 2y) + 30.000.$$

E mais,

$$C'(y) = \frac{25000}{\sqrt{144 + (20-y)^2}}(-40 + 2y) + 30.000.$$

Note que $144 + (20 - y)^2 > 0$, para todo $0 \leq y \leq 20$, ou seja, $C'(y)$ existe para todo $0 \leq y \leq 20$. Assim, os pontos críticos, são os valores de y tais que $C'(y) = 0$. Isto é, os valores de y tais que,

$$\frac{25000}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}}(-40 + 2y) + 30.000 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{25000}{\sqrt{144 + (20-y)^2}}(-40 + 2y) = -30.000.$$

Dividindo ambos os membros da última equação por 1000, temos:

$$\frac{25}{\sqrt{144 + (20 - y)^2}}(-40 + 2y) = -30$$

$$\Rightarrow 25(-40 + 2y) = -30\sqrt{144 + (20 - y)^2}.$$

Elevando ambos os membros da última equação ao quadrado, obtemos:

$$(-1000 + 50y)^2 = (-30\sqrt{144 + (20 - y)^2})^2$$

$$\Rightarrow 1000000 - 2 \cdot 1000 \cdot 50y + 2500y^2 = 900\left(144 + (20 - y)^2\right)$$

$$\Rightarrow 1000000 - 100000y + 2500y^2 = 129600 + 900(400 - 40y + y^2)$$

$$\Rightarrow 1000000 - 100000y + 2500y^2 = 129600 + 360000 - 36000y + 900y^2$$

$$\Rightarrow 1000000 - 100000y + 2500y^2 = 489600 - 36000y + 900y^2.$$

Agora, organizando a equação trazendo tudo para o primeiro membro e realizando as devidas operações, obtemos

$$1600y^2 - 64000y + 510400 = 0.$$

Dividindo ambos os membros por 1600, chegamos a equação do segundo grau

$$y^2 - 40y + 319 = 0$$

Cuja solução dada pela fórmula de Báskara é,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Daí,

$$y = \frac{-(-40) \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 319}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1276}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{40 \pm \sqrt{324}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{40 \pm 18}{2}$$

Com isso temos que os pontos críticos são:

$$y_1 = \frac{40+18}{2} = 29 \text{ e } y_2 = \frac{40-18}{2} = 11.$$

Observemos que para $y_1 = 29$, não podemos utiliza-lo, uma vez que estamos trabalhando com comprimento e, devemos ter $20 - y > 0$, (ver figura 5), com isso, o ponto crítico a ser utilizado é $y_2 = 11$.

Agora calculemos $C''(y)$, como

$$C'(y) = \frac{25000}{\sqrt{144 + (20-y)^2}}(-40 + 2y) + 30.000$$

Obtemos:

$$C''(y) = \frac{-25000\left(\frac{1}{2}\left(144 + (20-y)^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-40+2y)\right)}{\left(\sqrt{144 + (20-y)^2}\right)^2}(-40 + 2y) + \frac{25000}{\sqrt{144 + (20-y)^2}}2$$

$$\Rightarrow C''(y) = \frac{-25000 \cdot (-20 + y)}{\sqrt{144 + (20-y)^2} \cdot (144 + (20-y)^2)} \cdot (-40 + 2y) + \frac{50000}{\sqrt{144 + (20-y)^2}}$$

Como o ponto crítico de C que nos serve é $y_2 = 11$, obtemos:

$$C''(11) = \frac{-25000\cdot(-20+11)}{\sqrt{144+(20-y)^2}\cdot(144+(20-y)^2)}\cdot(-40+22) + \frac{50000}{\sqrt{144+(20-11)^2}}$$

$$\Rightarrow C''(11) = \frac{-25000\cdot(-9)}{144+(-9)^2}\cdot(-18) + \frac{50000}{\sqrt{225}}$$

$$\Rightarrow C''(11) = \frac{-4050000}{3375} + \frac{50000}{15}$$

$$\Rightarrow C''(11) = 15000 + 3333{,}33 = 18333{,}33 > 0.$$

Portanto, pelo teste da Segunda Derivada, temos que para $y = 11$ a função atinge mínimo relativo.

Agora, calculemos o comprimento da tubulação subaquática para $y = 11$ por (I) temos:

$$x = \sqrt{144+(20-11)^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{144+(9)^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{144+81}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{225}$$

$$\Rightarrow x = 15.$$

Portanto, a combinação dos dutos que irá fornecer a conexão menos dispendiosa é $y = 11$ e $x = 15$, ou seja, 15 metros da tubulação subaquática e 11 metros da tubulação terrestre.

3.2.2 Aplicação da Derivada na Matemática Financeira

Nesta subseção iremos apresentar alguns problemas que envolvem alguns conceitos de matemática financeira, cujo objetivo é encontrar Custo Mínimo e/ou Lucro Máximo.

Exemplo 3.2.2.1: Suponha que o custo total $C(q)$ de produção q toneladas de um produto, em milhares de reais, é dado por

$$C(q) = 0{,}04q^3 - 2{,}3q^2 + 42q.$$

Suponha que a empresa possa vender tudo o que produz, determinar o lucro máximo que pode ser obtido, se cada tonelada do produto é vendida a um preço de 24 milhares de reais.

Solução:

Temos que a função do custo total $C(q)$ de produção q toneladas, é

$$C\ \ q\ \ = 0{,}04q^3 - 2{,}3q^2 + 42q. \qquad \text{(I)}$$

Sabemos que para o lucro máximo o custo deve ser mínimo.

Consideremos a função receita total dada pelo produto da quantidade q de toneladas vendidas pelo preço unitário de cada tonelada é,

$$R\ \ q\ \ = 24q. \qquad \text{(II)}$$

O lucro total dessa empresa é por definição a diferença entre a Receita e o Custo, isto é,

$$L\ \ q\ \ = R\ \ q\ \ - C(q). \qquad \text{(II)}$$

Ou seja, substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$L\ \ q\ \ = 24q - 0{,}04q^3 + 2{,}3q^2 - 42q$$

$$\Rightarrow L\ \ q\ \ = -0{,}04q^3 + 2{,}3q^2 - 18q. \qquad \text{(IV)}$$

Queremos que o lucro seja máximo, para isso, usaremos o Teste da Derivada 2°.

Derivando $L(q)$, temos:

$$L'\ \ q\ \ = -0{,}12q^2 + 4{,}6q - 18.$$

Fazendo $L'\ \ q\ \ = 0$ para encontrarmos os pontos críticos de $L(q)$, temos

$$-0{,}12q^2 + 4{,}6q - 18 = 0$$

Usando, a fórmula de Báskara para resolver esta equação do 2° grau,

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Temos,

$$q = \frac{-4{,}6 \pm \sqrt{4{,}6^2 - 4 \cdot (-0{,}12) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-0{,}12)}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-4{,}6 \pm \sqrt{21{,}16 - 8{,}64}}{-0{,}24}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-4{,}6 \pm 3{,}55}{-0{,}24}.$$

Portanto os pontos críticos de $L(q)$ são,

$$q_1 = \frac{-4{,}6 + 3{,}55}{-0{,}24} = 4{,}37 \text{ e } q_2 = \frac{-4{,}6 - 3{,}55}{-0{,}24} = 33{,}96.$$

Agora calculemos $L''(q)$, como $L'\ \ q\ \ = -0{,}12q^2 + 4{,}6q - 18$, obtemos:

$$L''\ \ q\ \ = -0{,}24q + 4{,}6.$$

Como os pontos críticos de $L(q)$ são $q_1 = 4{,}37$ e $q_2 = 33{,}96$.

Para $q_1 = 4{,}37$, obtemos:

$$L''(4{,}37) = -0{,}24 \cdot 4{,}37 + 4{,}6$$
$$\Rightarrow L''(4{,}37) = -1{,}0488 + 4{,}6$$
$$\Rightarrow L''(4{,}37) = 3{,}5512 > 0$$

E para $q_2 = 33{,}96$, obtemos:

$$L''(33{,}96) = -0{,}24 \cdot 33{,}96 + 4{,}6$$
$$\Rightarrow L''(33{,}96) = -8{,}1504 + 4{,}6$$
$$\Rightarrow L''(33{,}96) = -3{,}5504 < 0$$

Portanto pelo Teste da Derivada 2° para $q = 33{,}96$ a função atinge o máximo relativo.

Agora calculemos o lucro máximo através de (IV), com isso,

$$L(33{,}96) = -0{,}04(33{,}96)^3 + 2{,}3(33{,}96)^2 - 18(33{,}96)$$
$$L(33{,}96) = -0{,}04 \cdot 39165{,}44 + 2{,}3 \cdot 1153{,}28 - 611{,}28$$
$$L(33{,}96) = -1566{,}62 + 2652{,}54 - 611{,}28$$
$$L(33{,}96) = 474{,}64.$$

Logo o lucro máximo dessa empresa é R\$ $474{,}64$.

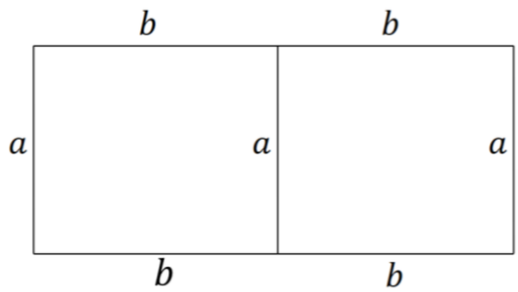
3.2.3 Aplicações da Derivada na Geometria

Nesta seção iremos usar os resultados estudados para resolver problemas de geometria, mais precisamente, problemas que envolvem Perímetro Mínimo e o Volume Máximo.

Exemplo 3.2.3.1: Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões a e b, com um lado comum a. Se cada pasto deve medir 400 m² de área, determinar as dimensões a e b, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.

Solução:

Figura 6: Representação dos pastos



Fonte: Elaborada pela autora.

Quando falamos em comprimento da cerca, estamos nos referindo ao perímetro, e queremos que este seja mínimo.

Sabemos que o perímetro é a soma da medida dos lados, e como o terreno tem um lado comum a, o perímetro deste terreno é dado por:

$$P = 3a + 4b. \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, a área do terreno que é retangular é dada por:

$$A = a \cdot b.$$

Mas como são dois terrenos, a área total é obtida pela seguinte fórmula,

$$A = a \cdot b + a \cdot b,$$

ou seja,

$$A = 2 \cdot a \cdot b.$$

E mais, como cada terreno deve medir 400 m² de área, temos:

$$2ab = 400 + 400$$

$$\Rightarrow ab = \frac{800}{2}$$

$$\Rightarrow ab = 400$$

$$\Rightarrow b = \frac{400}{a}. \qquad \text{(II)}$$

Para expressarmos P em função de uma única variável, podemos substituir a equação (II) em (I), de onde obtemos:

$$P(a) = 3a + 4\frac{400}{a}$$

$$\Rightarrow P(a) = 3a + \frac{1600}{a}.$$

Para que o comprimento seja mínimo, o valor de $P(a)$ deve ser o menor possível, como,

$$P(a) = 3a + \frac{1600}{a}.$$

Derivando $P(a)$ para encontrarmos os pontos críticos de P, tem-se:

$$P'(a) = 3 - \frac{1600}{a^2}.$$

Agora, fazendo $P'(a) = 0$, isto é:

$$3 - \frac{1600}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2 - 1600}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 1600 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 = 1600$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1600}{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{40\sqrt{3}}{3}.$$

Note que $P'(a)$ não existe se $a = 0$, mas como a representa um comprimento, devemos ter $a \neq 0$. Logo, o único ponto crítico de P é $a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Calculemos a derivada segunda de $P(a)$, como

$$P'(a) = 3 - \frac{1600}{a^2},$$

temos,

$$P''(a) = \frac{1600 \cdot 2a}{a^3}$$

$$\Rightarrow P''(a) = \frac{3200}{a^3}.$$

Usando o Teste da Derivada 2ª para encontrar o valor mínimo relativo, temos

$$P''\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3200}{\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow P''\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3200}{12316{,}8}$$

$$\Rightarrow P''\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right) = 0{,}26 > 0.$$

Logo para $a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ a função tem valor mínimo relativo.

Substituindo $a = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ em (II), temos:

$$b = \frac{400}{\frac{40\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Rightarrow b = 400 \cdot \frac{3}{40\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow b = 10\sqrt{3}.$$

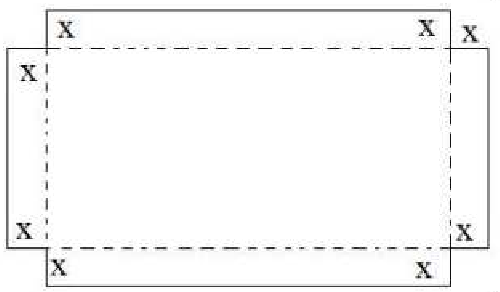
Portanto para que o comprimento seja mínimo as dimensões devem ser:

$$a = \frac{40\sqrt{3}}{3}m \text{ e } b = 10\sqrt{3}m.$$

3.2.3.2 Exemplo: Uma caixa sem tampa deve ser feita de papelão medindo 8cm por 15cm. Destaca-se quadrados iguais dos quatro cantos dobrando-se os lados. Qual é o tamanho dos quadrados para se obter uma caixa de volume máximo.

Solução: Seja x o comprimento dos lados dos quadrados (em cm) a serem cortados e seja V o volume (em cm³) da caixa resultante. Observe a figura 7.

Figura 7: Caixa de Papelão



Fonte: Elaborada pela autora.

Como estamos removendo quadrados de lados x de cada canto, a caixa terá dimensões $8 - 2x$ por $15 - 2x$ por x. Logo seu volume V será:

$$V = (8 - 2x)(15 - 2x)x = 120x - 46x^2 + 4x^3. \text{ (1)}$$

A variável x está sujeita a certas restrições. Como a largura da caixa mede $8cm$ então:

$$0 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

e desta forma reduzimos o nosso problema ao de encontrar o valor (ou valores) de x no intervalo $[0, 4]$ para os quais o volume dado pela função $V = 120x - 46x^2 + 4x^3$, é máximo. Temos que,

$$V'(x) = 120 - 92x + 12x^2 = 4(30 - 23x + 3x^2).$$

Calculemos os pontos críticos da função V, isto é, os valores de x tais que, $V'(x) = 0$. Mas,

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 30 - 23x + 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 6 \; ou \; x = \frac{5}{3}.$$

Logo, os pontos críticos são: $x = 6$ e $x = \frac{5}{3}$. Como $x = 6$ está fora do intervalo $[0, 4]$, então o valor máximo de V ocorre ou no extremo $x = \frac{5}{3}$. Mas, de (1), temos

$$V(0) = 0 \; e \; V(4) = 120.4 - 46.4^2 + 4.4^3 = 0.$$

Assim, o volume máximo $V_{max} = V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{27} cm^3$ ocorre quando cortamos quadrados com $\frac{5}{3} cm$ de lado.

3.3 Aplicação da Derivada na Taxa de Variação

Nesta seção iremos trabalhar com o problema de eficiência máxima do trabalhador. Neste tipo de problema o objetivo é maximizar a taxa de produção do trabalhador. Ou seja, a função a ser minimizada é a taxa de variação da primeira derivada da função de produção do trabalhador.

3.3.1 Exemplo: Um estudo de eficiência no turno da manhã em uma fábrica indica que um trabalhador médio, que começa às 08:00 h, terá produzido

$$Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$$

unidades t horas depois. A que horas durante a manhã o trabalhador atua com o máximo de eficiência?

Solução: A taxa de produção do trabalhador é a derivada da função de produção do trabalhador $Q(t)$, se representarmos esta taxa por P, temos

$$P(t) = Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12.$$

Considerando que o turno da manhã vai de 08:00 h até o meio dia, nosso objetivo é encontrar o máximo absoluto da função $P(t)$ no intervalo fechado $0 \leq t \leq 4$. Como $P(t)$ é dada por

$$P(t) = -3t^2 + 18t + 12.$$

Calculando $P'(t)$, obtemos:

$$P'(t) = -6t + 18.$$

Fazendo $P'(t) = 0$, para encontrarmos os pontos críticos de $P(t)$, tem-se:

$$-6t + 18 = 0$$

$$\Rightarrow -6t = -18$$

$$\Rightarrow t = \frac{-18}{-6}$$

$$\Rightarrow t = 3.$$

Logo $t = 3$ é ponto crítico de $P(t)$.

Agora calculemos $P''(t)$, uma vez que $P'(t) = -6t + 18$, daí:

$$P''\;\; t\;\; = -6.$$

Substituindo o ponto crítico $t = 3$ em $P''\;\; t\;\; = -6$, obtemos

$$P'\;\; 3\;\; = -6 < 0$$

Portanto Pelo Teste da Derivada 2ª a função $P(t)$ atinge máximo em $t = 3$, isto é, às 11:00 horas é quando o trabalhador atua com o máximo de eficiência. Calculemos sua produção neste instante, isto é,

$$P\;\; 3\;\; = -3 \cdot\;\; 3\;\; ^2 + 18 \cdot 12 + 12$$

$$P\;\; 3\;\; = -3 \cdot 9 + 54 + 12$$

$$P\;\; 3\;\; = 39.$$

Portanto, as 11:00 horas é quando o trabalhador atua com o máximo de eficiência, produzindo cerca de 39 unidades por hora.

CONCLUSÃO

O componente curricular de Cálculo Diferencial é considerando como umas das disciplinas que mais acarretam dúvidas sobre seu entendimento, sem falar que é uma das que mais reprovam, isto devido a tantos mitos que assolam a mesma, de que é “difícil”, “complicada”, “que não é para qualquer um”, dentre tantas outras coisas que são citadas pelos alunos. Para os discentes do curso de Licenciatura em Matemática não é diferente, uma vez que é um dos primeiros componentes ditos avançados, que os alunos se deparam, e muitas vezes não trazem consigo “bagagens” necessárias para seu estudo, consequentemente acabam não percebendo a beleza que existe no Cálculo Diferencial. Porém, é um dos conteúdos que mais tem aplicabilidade, até mesmo em problemas que estão no nosso cotidiano e que não nos damos conta que podemos resolvê-los com derivadas.

Espero que através deste breve estudo auxilie aos futuros discentes de Cálculo Diferencial a entenderem como se deu o seu desenvolvimento, como também a definição de derivada e suas propriedades básicas e algumas de suas aplicações que vão além das comentadas aqui, mas que são pouco discutidas aos alunos de Licenciatura em Matemática, que em sua maioria são presos as listas de exercícios e demonstrações que também se fazem necessário, mas não devem ser exclusividade, como foi dito a aplicações são muitas, sintam-se indagados a ir em buscas de conhecer outras aplicações.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise matemática para licenciatura**. 3° ed. rev. e ampl. São Paulo-SP. Editora: Edgard Blucher LTDA, 2006;

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. 2° ed. Tradução: Elza Gomide, São Paulo-SP. Editora: Edgard Blucher LTDA, 1974;

CLARK, Marcondes Rodrigues e LIMA, Osmundo Alves. **Cálculo de Funções de uma Variável Real.** 1° edição, Teresina: EDUFPI, 2012.

FLEMMING, Diva Marília, GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limites, derivadas, integrais**. 6° ed. rev. E ampl. São Paulo- SP. Editora:Pearson Prentice Hall, 2006.

IEZZI, Gelson, 1939. **Fundamentos da Matemática Elementar, 7: geometria analítica.** 5° edição, São Paulo. Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise.** V.1. 11. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

MACIEL, Aldo Bezerra, LIMA, Osmundo Alves. **Introdução à Análise Real**. Campina Grande: EDUEP, 2005.

MACIAL, Guilherme Pinheiro. **História do cálculo: Limites**. Brasília-DF. 2012; Disponível em <https://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1311/1/Guilherme%20Pinheiro%20Maciel.pdf> Acesso em 20 de novembro de 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. v. 1. Editora McGraw Hill.5.

APÊNDICE – ALGUNS RESULTADOS UTILIZADOS

Apresentaremos agora, alguns dos principais resultados e definições que forma utilizadas durante o trabalho.

A.1. Definição de Limite e suas Propriedades.

Definição A.1 (Limite): Intuitivamente, dizemos que uma função $f(x)$ tem limite L quando x tente para a, se é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de x, $x \neq a$ suficientemente próximos de a. Formalizando, temos que:

Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x aproxima-se de a é L e escrevemos,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre $0 < |x - a| < \delta$.

Proposição A.1: Se a, m e n são número reais, então:

$$\lim_{x \to a} (mx + n) = ma + n.$$

Proposição A.2: Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e c é um número real qualquer, então:

a) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$;
b) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$;
c) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$;
d) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$;
e) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ para qualquer inteiro positivo n;
f) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar;
g) $\lim_{x \to a} ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)]$ se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$;
h) $\lim_{x \to a} cos[f(x)] = cos[\lim_{x \to a} f(x)]$;
i) $\lim_{x \to a} sen[f(x)] = sen[\lim_{x \to a} f(x)]$;
j) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$.

A.2. Definição de Equação da Reta.

Definição (Equação de uma reta r passando por um ponto P): Seja $P(x_0, y_0)$ um ponto conhecido, a equação da reta r que passa por P é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde m representa o coeficiente angular de r e (x, y) representa um ponto qualquer pertencente a reta.

Observação: Se a reta r for perpendicular ao eixo x, sua equação é:

$$x = x_0.$$