UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Maurício Batista dos Santos

Introdução à Álgebra de Matrizes e propriedades usando Programa R

Campina Grande - PB

Dezembro, 2017

Maurício Batista dos Santos

Introdução à Álgebra de Matrizes e propriedades usando Programa R

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof.Dr.Edwirde Luiz Silva Camêlo

Campina Grande - PB

Dezembro, 2017

S237i Santos, Maurício Batista dos.

Introdução à álgebra de matrizes e propriedades usando Programa R [manuscrito] : / Mauricio Batista dos Santos. - 2017.

56 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Edwirde Luiz Silva Camêlo, Departamento de Matemática e Estatística - CCT."

1. Matrizes. 2. Recursos didáticos. 3. Software R.

21. ed. CDD 512.943 4

Maurício Batista dos Santos

Introdução à Álgebra de Matrizes e propriedades usando Programa R

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Trabalho aprovado em 11 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Edwirde Luiz Silva Camêlo
Universidade Estadual da Paraíba

Dr. Mácio Augusto de Albuquerque
Universidade Estadual da Paraíba

Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Júnior
Universidade Estadual da Paraíba

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a oportunidade e a força necessária para concluir, aos professores que compreenderam e me ajudaram nos momentos difíceis, meu orientador, Professor Dr. Edwirde Luiz Silva Camêlo, que muito contribuiu, aos meus pais que sempre estiveram comigo me dando forças, a minha esposa e os meus filhos com quem compartilhei todos os momentos, aos meus irmãos que torcem pela minha vitória, a meus amigos de classe que também me ajudaram quando necessitei, e a meu grande amigo Aderaldo que me deu apoio e cobertura durante toda essa caminhada.

“Estou a pensar...”
(O Tempo)

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar a importância do software R no cálculo das matrizes e suas operações para o Ensino Médio. Mostrar como este software pode auxiliar o professor por ser uma excelente ferramenta especialmente desenvolvido que permite uma simples manipulação, incluindo a visualização ou modificação dos dados brutos. As matrizes tem como objetivo básico organizar informações na forma de tabelas com linhas e colunas de tal forma que se possa interpretá-las à luz dos objetivos de certas situações. Assim, utilizar-se do programa estatístico R como ferramenta de trabalho facilitará a compreensão e aprendizagem dos conteúdos de matrizes em sala de aula com alunos do ensino médio, bem como apoio a didática utilizada pelo docente, tornando a aula mais dinâmica e atrativa. Visto que o uso de recursos tecnológicos como ferramenta de trabalho tem sua grande e crescente importância.

Palavras-chaves: Matrizes, propriedades, programa estatístico R.

Abstract

The objective of this work is to show the importance of software R in calculating matrices and their operations for high school. show how this software can help the teacher by being an excellent tool especially developed that allows a simple manipulation, including the visualization or modification of the raw data. Arrays have as basic objective to organize information in the form of tables with rows and columns in such a way that they can be interpreted in the light of the objectives of certain situations. Thus, using the statistical program R as a working tool will facilitate the understanding and learning of classroom contents in the classroom with high school students, as well as support for didactics used by the teacher, making the class more dynamic and attractive. Since the use of technological resources as a work tool has its great and growing importance.

Key-words: Matrices, properties, statistical program R.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Um pouco da história de matriz

As matrizes aparecem historicamente ligadas a solução de equações lineares. Em 1730 Maclaurin escreveu um tratado de álgebra que contem os primeiros resultados de determinantes, nome que foi introduzido por Gauss em 1801, que propôs a multiplicação de matrizes e o conceito de matriz inversa. Cauchy estudou os autovalores de uma matriz em 1826 e Cayley, em 1841, introduziu a notação atual dos determinantes com duas linhas verticais e, em 1858, apresentou a primeira definição geral de matrizes introduzindo as operações de soma, multiplicação e o cálculo geral da inversa pelo determinante. Em 1870 Jordan introduziu a forma canônica que leva seu nome e Frobenius, em 1878, o posto de uma matriz. O conceito de espaço nulo de uma matriz se deve a Sylvester, em 1884. A teoria de matrizes se completa com os trabalhos de Weierstrass e Kronecker em meados do século XX (PEÑA, 2002).

No início do século XIX, os vários sistemas numéricos usuais já haviam se incorporado à matemática, mas faltava a eles uma fundamentação lógica satisfatória. Por isso, a fim de se guiarem em suas manipulações algébricas com esses sistemas, os matemáticos da época simplesmente estendiam a todos as propriedades dos inteiros positivos.

Essa visão, embora conduzisse a muitos acertos e tivesse contribuído para o desenvolvimento da matemática, elegia as leis da álgebra clássica como as únicas válidas, o que era uma limitação muito grande. Por exemplo, por esse entendimento, era inconcebível uma operação algébrica que não fosse comutativa. Porém, perto da metade do século XIX, tal visão seria superada e uma nova era, de grande liberdade e desenvolvimento, se iniciaria para a álgebra. Vários matemáticos contribuíram para isso, mas o inglês Arthur Cayley (1821-1895), foi o criador das matrizes, uma das ferramentas mais importantes da matemática moderna. O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley, de 1855, embora o termo matriz já tivesse sido usado cinco anos antes, com o mesmo sentido, por Silvester (FELDMANN, 1962).

1.1 Uso de ferramenta inovadora: uma aprendizagem significativa

Aprender é o processo através do qual se adquire novas competências, habilidades ou conhecimento como resultado do estudo, mas para obtê-lo, se requer por parte do professor, a aplicação de ferramentas que sejam inovadoras e motivadoras de forma que o aluno alcance através destas uma aprendizagem significativa.

Portanto, o objetivo deste trabalho é utilizar o programa estatístico R no cálculo de matrizes e suas operações para alunos do ensino médio e superior, com estratégia didática que permita que os alunos obtenham aprendizagem significativa no conteúdo de álgebra de matrizes, focado nos conhecimentos teóricos que possuem.

2 Introdução ao *R*

O *R* (R Core Team, 2017) é um software estatístico, com ambiente integrado e com linguagem de programação especialmente desenvolvido para a análise de dados, cálculos estatísticos e representações gráficas.

É uma linguagem de programação muito simples, disponibilizada para diferentes plataformas (*Unix, MacOS, Windows*) e de fácil instalação. O melhor de tudo isso, é que se trata de um software gratuito e amplamente utilizado na pesquisa científica

Primeiro, para instalar o *R* deve-se fazer o *download* no site oficial http://cran.at.r-project.org/, de preferência a última versão estável, 3.4.0, clicando no *Windows* e depois clicando na base e, a partir daí, baixar o *R-3.4.0-win.exe*. E agora é só seguir os passos solicitados, em caso de dúvidas, pode consultar a instalação passo a passo em https://cran.r-project.org/doc/contrib/Itano-installation.pdf.

Após a instalação do *R*, instala-se o *RStudio*, que é um software livre de ambiente de desenvolvimento integrado ao *R*. É um ambiente mais amigável do que *R* para se trabalhar. Sua instalação também simples e recomenda-se baixar a versão mais estável. O download pode ser feito em https://www.rstudio.com.

O *RStudio*, apresenta algumas vantagens, são elas:

- Uma interface que permite uma simples manipulação, incluindo a visualização ou modificação dos dados brutos.
- Uma interface entre o usuário e dados que podem executar várias operações ou

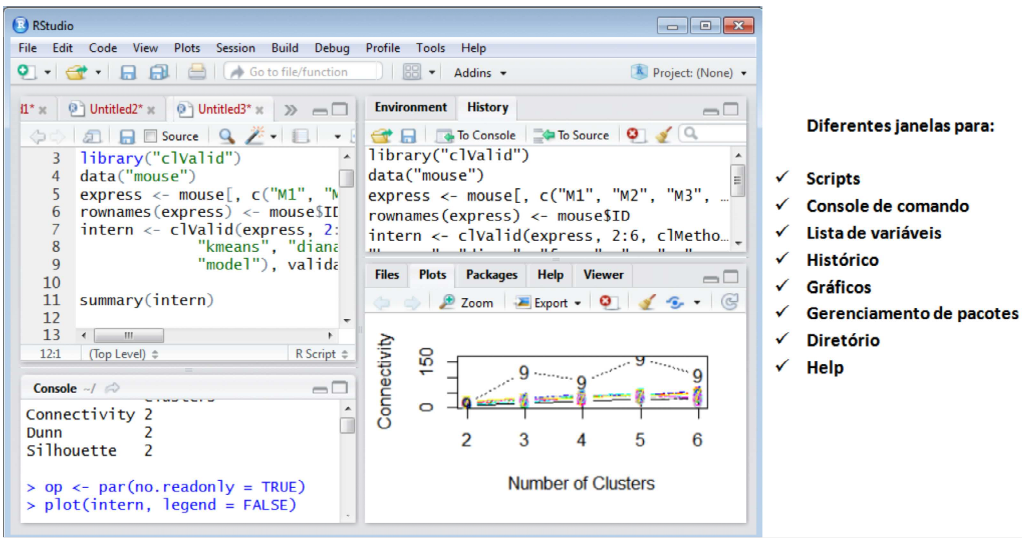


Figura 1 – Interface de usuário para *RStudio* aplicar vários testes para os dados (geralmente conjuntos de coordenadas no nosso caso), e que apresentam resultados de diversas maneiras (gráficos, tabelas, etc).

- Para evitar a multiplicação de aplicações de software para a obtenção de dados utilizados na estatística analisa.
- Para os dados 3D, os dispositivos gráficos devem permitir alguma interatividade. Uma vez que a tela é plana, é preciso observar e girar dados 3D de uma forma convencional.
- Para obter resultados e armazenar esses resultados sob a forma de gráficos e tabelas.
- Para se adaptar e converter os arquivos que foram tratados com outros softwares e arquivos de exportação.

Pode-se obter ajuda do próprio programa digitando o comando *help*(). Uma breve introdução ao uso do programa *R* pode ser encontrada em (Landeiro, 2011) no site https://cran.r-project.org/doc/contrib/Landeiro-Introducao.pdf. Outra opção é ler o manual *R for Beginners* (Paradis, 2005).

O *R*, em especial, é uma linguagem de programação criada em um ambiente pensado para análise estatística e gráfico de dados. É um software livre e pode ser manuseado facilmente pelo analista de dados. Para usar o *R* é necessário conhecer e digitar comandos. Em seguida será apresentado alguns tópicos importantes.

2.1 Objetos

Os objetos são caracterizados por seus atributos. O modo e duração são atributos de todos os objetos em *R*. Se os elementos são dados, eles podem ter quatro modos diferentes: numérico, caráter, complexo e lógica ($FALSE$ ou $TRUE$, alternativamente digitado como F ou T). O comprimento é o número de elementos do objeto e é devolvido digitando comprimento $lenght(objeto)$. Finalmente, a função *str* mostra a estrutura interna de um objeto no *R*.

```
>a<-777; b<-3+4i; c<-"CD"; d<-TRUE
>mode(a); mode(b); mode(c);  mode(d)
```

É possível verificar e coagir o modo de objetos usando as funções: *is.numeric, is.complex, is.character, is.logical, as.numeric, as.complex, as.character, as.logical.* O "*is*" antes dos modos significa uma pergunta, por exemplo o número dois é numérico?: *is.numeric*(2), a resposta será $TRUE$ (verdadeiro). E o "*as*" antes dos modos em algumas vezes significa transformar um modo, por exemplo, como caracter, as.character(3), embora o 3 seja um numérico se torna aqui como um caracter, e para identificar entre aspas, "3".

```
#SE workspace está vazio?
ls()
# Se seu diretório de trabalho é o desejado?
verifique que está vazio, com o comando:
dir()
#Salve-o usando o comando:
save.image()
```

2.2 Encontrando uma função no *R*

Através de algumas web site pode-se encontrar qualquer função no *R*. No quadro abaixo tem-se alguns prováveis links de ajuda e algumas das principais funções usando o R.

http://www.r-project.org	*R* web site
http://www.cran.r-project.org	Downloads
http://www.rseek.org	Buscador de função
http://www.cran.r-project.org/web/views	Pacotes organizado por tarefa
http://www.tolstoy.newcastle.edu.au/R/	listas de discussão sobre o *R*

Através do comando "*apropos*", é possível encontrar algumas funções que foram carregadas com os pacotes instalados. Também é possível pesquisar a documentação entre todos os pacotes instalados no R, usando o comando "*help.search*".

apropos("read")	Funções que se iniciam com *read*
apropos("mult")	Funções que se iniciam com *mult*
help.search(".matrix")	Funções que se iniciam com *matrix*
apropos(".test")	Busca as funções que terminam com .test

```
apropos(plot)
help.search(field="title","skew")
example(mean)
args(chisq.test)  # lembrar do argumento da função
```

2.3 Instalando pacotes no *R*

Pacotes são conjuntos de funcionalidades (funções,dados e exemplos) distribuídos em conjunto para realizar tarefas específicas. Por exemplo, o pacote *base* quando instalado automaticamente(deixa disponível para uso) um conjunto de ferramentas básicas no *R*. É necessário entender as diferenças entre baixar (*download*) o pacote do repositório e carregar no seu computador. Para baixar algum pacote disponível no repositório CRAN (Comprehensive R Archive Network) do *R* é necessário utilizar o comando *install.packages*("*pacote*"), também se pode instalar automaticamente através do menu do R Studio. O *R* possui diversos pacotes (http://www.r-project.org/).

2.4 Operações básicas em vetores e matrizes

É muito fácil realizar operações básicas no *R*. Na Tabela abaixo mostra alguns exemplos

```
> A<- 3 + 5 + 3; A
> B<- 3-8-7; B
> C<- 3*4
> D<- 9/7
> 2 + 6 # forma direta e o resultado
```

Logaritma	$log_{base}(x)$	$log_{10}(2)$	>log(2,base =10)=0.301
Raiz quadrada	>sqrt(x)	$\sqrt{4}$	>sqrt(4) =2
Logaritma	$\log_e(2)$	>log$(2, exp(1))$	>log$(2, base = exp(1)) = 0.693$
seno(x)	$seno(\pi/4)$	$sen(\pi/4)$	>sin$(pi/4) = 0,707$

O *R* tem uma sintaxe de expressão aritmética convencional com aritmética habitual e operadores condicionais

```
> help(Arithmetic)
> help(Comparison)
> help(Syntax)
```

Os operadores aritméticos e condicionais são

a + b	soma	a == b	a é igual a b?
a - b	subtração	a ! = b	a não é iqual a b?
a*b	multiplicação	a < b	a é menor que b?
a/b	divisão	a <= b	a é menor e igual a b?
a^b	potenciação	a > b	a é maior que b?
-a	negação	a >= b	a é maior ou igual que b?

```
a=c(0,2,3,4,5,6,7)
b=c(1,5,2,8,12,10,10)
a+b #somando os elementos de a com os de b
[1]  1  7  5 12 17 16 17
a<b #  Testando os correspondentes elementos
TRUE  TRUE FALSE  TRUE  TRUE  TRUE  TRUE
# Apenas o terceiro é maior que b
```

Na matriz aritmética teremos

```
x = matrix(1:9,nrow=3, ncol=3)
# 9 elementos de 1 a 9 em 3 linhas e 3 colunas
xl = matrix(c(1,2,3,4,5,6,7,8,9), ncol=3, byrow=TRUE)
# 3 colunas, leitura por linha
xc = matrix(c(1,2,3,4,5,6,7,8,9), ncol=3, byrow=TRUE)
# 3 colunas, leitura por colunas igual a x
```

Uma variável de tipo caracteres que mantém como valor uma cadeia de valores de dígitos pode ser manipulada por meio de funções especiais, vejamos algumas

- $paste(\cdots, sep =$ “”$)$. Concatena (junta) vetores depois de transformá-los em caracteres; o $sep =$ “” indica como as séries serão separadas (a definição padrão é um espaço em branco).

  ```
  >(nth<-paste0(1:5,c("ind","ind","ind",
  rep("Novo",2))))
  [1] "1ind"  "2ind"  "3ind"  "4Novo" "5Novo"
  ```

- $nchar()$. Retorna o número de caracteres que forma uma cadeia x

  ```
  >x<-c("a","b","c")
  >nchar(x)
     [1] 1 1 1
  ```

- $substr(x, start, stop)$. Extrai ou substitui em um vetor de caracteres. No exemplo abaixo, observe os caracteres de 2 a 5.

  ```
  > x <- c("AeeeeB", "CffffH", "HkkkkY", "a", "Jonas")
  > substr(x, 2, 5)
  [1] "eeee" "ffff" "kkkk" ""     "dwir"
  ```

- *strsplit(x, split, $\cdots$).* A palavra *split* significa dividido. Observa-se que divide a palavra considerada na letra E.

```
> x <- c("AaaEB", "CffEfH", "HkkkEY", "E", "Jonas")
> strsplit(x,"E")
[[1]]
[1] "Aaa" "B"
[[2]]
[1] "Cff" "fH"
[[3]]
[1] "Hkkk" "Y"
[[4]]
[1] ""
[[5]]
[1] "edwird"
```

- "*tolower*(x)". Reescreve o vetor não numérico em letras minúsculas.

```
> x <- c("AaaEB", "CffEfH", "HkkkEY", "E", "Jonas")
> tolower(x)
[1] "aaaeb"   "cffefh"  "hkkkey"  "e"    "Jonas"
```

- "*toupper*(x)". Reescreve o vetor não numérico em letras maiúsculas.

```
> toupper(x)
[1] "AAAEB"   "CFFEFH"  "HKKKEY"  "E"   "JONAS"
```

Vamos criar algumas frases criadas com objetivo de ilustrar estas funções no R

```
Nome<- "Jonas"
Pessoa<- paste(Nome, "Luiz Silva Camêlo")
Pessoa
End<-paste("Av. Baraúnas", 300, "s/n", "Bodocongó",
"Campina Grande-PB"
, sep=";")
End
nchar(End) # Número de caracter
s<-strsplit(End, split=";") # Elimina a pontuação ;
s
cat("O número de caracteres da frase é:",nchar(End),
```

```
"caracteres\n")
# O número de caracter da frase é: 48 caracteres
```

2.5 Operação de arredondamento e truncamento

O sistema utiliza basicamente 4 funções:

- $floor(x)$. Arredonda o valor passado no argumento para o próximo menor. $Floor$ = piso.
- $trunc(x)$. Trunca o valor eliminando a componente decimal
- *round(x, digits=0)*. Arredonda para o número inteiro mais próximo. o arredondamento vem efetuado ao número decimal considerado.
- $ceiling(x)$. Arredonda para o próximo superior. $Ceiling$ = teto.

Na Tabela 1 ilustra estes arredondamentos e truncamentos

Tabela 1 – Arredondamentos e truncamentos de valores

Valor	floor(x)	trumc(x)	round(x)	rond(x,3)	ceiling(x)
7.4955	7	7	7	7.495	8
-7.4955	-7	-7	-7	-7.295	-7
7.5	7	7	7	7.5	8
7.511	7	7	8	7.511	8
-7.511	-8	-7	-8	-7.511	-7

3 Introdução a matrizes

Uma matriz é uma tabela retangular de elementos. O elemento a_{ij} da matriz A ocupa a linha i e a coluna j da tabela. Diz-se que uma matriz com m filas e n colunas tem ordem e tamanho $m \times n$. Um elemento qualquer dessa matriz será representado pelo símbolo a_{ij}, no qual o índice i refere-se à linha em que se encontra tal elemento e o índice j refere-se à coluna em que se encontra o elemento.

Representa-se também a matriz $\mathbf{A}$ por $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Note que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 3.0.1. *Seja a matriz* $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Considerando $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = 4.$; elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 2.$; o elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = 2.$ e $a_{22} = 3.$ é o elemento que está na linha 2, coluna 2. As matrizes são indicadas por letras maiúsculas e seus elementos, por uma letra minúscula acompanhadas de dois índices, como vimos o **primeiro** indica a **linha** à qual o elemento pertence e o **segundo** indica a sua **coluna**.

As matrizes constituem um importante instrumento de cálculo, com aplicações em Matemática, Estatística, Informática entre outras ciências. Também no nosso dia-a-dia as matrizes podem ser utilizadas em diferentes situações.

3.1 Matrizes Especiais

Os principais tipos de matrizes especiais são (FONSECA, 2003):

1. Matriz Linha: É uma matriz formada por uma única linha, como por exemplo a matriz $\mathbf{M}_{1\times 3}$.

   Exemplo 3.1.1. $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$

2. Matriz Coluna: É uma matriz formada por uma única coluna, como por exemplo a matriz $\mathbf{M}_{3\times 1}$, podendo ser representada por $\mathbf{M}' = t(\mathbf{M})$. Sendo o símbolo t a transposta da matriz $\mathbf{M}$.

3. Matriz Nula: É uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

Exemplo 3.1.2. *Seja a matriz* $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Matriz Diagonal: Uma matriz diagonal é toda matriz quadrada em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos, considere um exemplo de uma matriz $\mathbf{A}_{3\times3}$.

Exemplo 3.1.3. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Matriz Identidade: É uma matriz diagonal em que, quando $i = j$, $a_{ij} = 1$, todos os elementos na diagonal são iguais a 1. Ela é representada por $\mathbf{I}$ e desempenha o papel de elemento neutro na multiplicação de matrizes - ou seja, verificaremos que a multiplicação de qualquer matriz por $\mathbf{I}$ resulta na matriz original (FONSECA, 2003). A matriz identidade de ordem m aparece a seguir

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

6. Matriz Inversa: Uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem n é dita inversível(ou invertível) se existir uma matriz $\mathbf{B}$ tal que: $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = I_{2\times2}$. Nesse caso, $\mathbf{B}$ é dita inversa de $\mathbf{A}$ e indicada por A^{-1}.

Exemplo 3.1.4. *A inversa de* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ *é* $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

O produto matricial de $\boldsymbol{A}$ *pela inversa de* $\boldsymbol{A}$ *seria*

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2\times2}$

3.2 Passos para a inversão de matrizes

Abaixo segue os passos (SARTORIS, 2000) para encontrar uma matriz inversa com objetivo de ilustra no programa R

a) Cálculo do determinante: é um escalar associado a uma matriz quadrada.

Exemplo 3.2.1.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad |\boldsymbol{A}| = det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para matrizes de ordens maiores, o cálculo do determinante requer o cálculo de menores e co-fatores

b) Manor do elemento a_{ij} é o determinante de submatriz obtida após a supressão do i-ésima linha e j-ésima coluna de **A**

Exemplo 3.2.2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad m_{ij} = |\boldsymbol{M}_{ij}| \Rightarrow m_{11} = /\boldsymbol{M}_{11}| = a_{22}$$

c) Co-fator é o menor multiplicado por $(-1)^i m_{ij}$. O $c_{ij} = (-1)^{i+J} m_{ij}$. Exemplo: $c_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22}$

d) Expansão de Laplace para cálculo de determinante de uma matriz quadrada. Tomando por base qualquer linha (ou coluna), calcula-se o determinante somando os produtos de cada elemento da linha (ou coluna) pelo respectivo co-fator.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} \end{aligned}$$

e) Matriz dos co-fatores é a matriz em que cada elemento de **A** é substituído pelo seu co-fator

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

f) Matriz adjunta é a transposta da matriz dos co-fatores

$$adj\mathbf{A} = \mathbf{C}$$

g) Matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} adj\mathbf{A}$$

7. Matriz Quadrada: É uma matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Considere a matriz **A** uma matriz quadrada de ordem n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos de **A** cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n + 1$ constituem a (diagonal secundária) de **A**. Se, por exemplo, **A** é quadrada de ordem 3, os elementos $a_{13}, a_{22} e a_{31}$ formam a diagonal secundária de A, conforme indicado abaixo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.3. *Seja a matriz* $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 12 \\ 0 & -3 & 7 & 20 \\ 8 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 67 \end{bmatrix}$.

Os ítens abaixo descreve as matrizes quadradas importantes (SARTORIS, 2000)

Matriz identidade $\mathbf{I}_m$

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_m = \mathbf{A}$$

Matriz diagonal :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Matriz escalar é a matriz diagonal, quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots , \lambda_n$.

Matriz idempotente é a matriz quadrada tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^3 = \cdots$$

Matriz nula :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 0 &= \mathbf{A} \\ \mathbf{A}.0 &= 0 \end{aligned}$$

Traço de uma matriz :

- $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i}^{m} a_{ii}$
- $\text{tr}(\text{c}\mathbf{A}) = \text{c}(\text{tr}(\mathbf{A}))$
- Se $\mathbf{A}$ é $m \times n$, então $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ são ambas matrizes quadradas, e $tr(AB) = tr(BA)$, segue que
- $\text{tr}(\mathbf{AB}\text{C}) = \text{tr}(\text{C}\mathbf{BA}) = \text{tr}(\mathbf{B}\text{C}\mathbf{A})$, deste que o produto existe

Através da matriz inversa é possível obter solução da equação do tipo

$$X.\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Sendo a matriz $\mathbf{A}$ invertível, tem-se que:

$$\begin{aligned} X.\mathbf{A} &= \mathbf{B} \\ X.\mathbf{A} &= (X.\mathbf{A}).\mathbf{A}^{-1} \\ X.\mathbf{A} &= \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1} \\ X(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1} \\ X.I_n &= \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1} \\ X &= \mathbf{B}.\mathbf{A}^{1} \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $X.\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow X = \mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}$

Ainda, considere a matriz $\mathbf{A}$ definida da seguinte forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Então, a inversa de $\mathbf{A}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}_{11}\ \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}$$

Seguindo, tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \ \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{22} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação de matriz do segundo membro de 3.1, tem-se

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{21} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{22}\ \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma quadrática : Suponha que $\mathbf{x}$ é um vetor coluna $(m \times 1)$ não nula e A uma matriz quadrada simétrica $(m \times n)$. Uma forma quadrática é um escalar definido como (SARTORIS, 2000):

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i, x_j$$

Exemplo 3.2.4.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{'}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{A}\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

pois: $\mathbf{A} = \mathbf{A}' \Rightarrow a_{21} = a_{12}$

Se:

- $\mathbf{x}^{'}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{A}$ é definida positiva, $x \neq 0$
- $x^{'}\mathbf{A}x \geq 0$, $\mathbf{A}$ é semidefinida positiva, $x \neq 0$
- $x^{'}\mathbf{A}x < 0$, $\mathbf{A}$ é definida negativa, $x \neq 0$
- $x^{'}\mathbf{A}x \leq 0$, $\mathbf{A}$ é semidefinida negativa, $x \neq 0$

Todas as matrizes de variância-covariância são definidas positivas

8. Matriz Transposta

   Dada uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, denomina-se matriz transposta de $\mathbf{A}$, indicada por$\mathbf{A}^t$, a matriz de ordem $m \times n$, cujas linhas são ordinariamente iguais às colunas de $\mathbf{A}$, em outras palavras dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ sua transposta é representada por $\mathbf{A}' = [a_{ji}]_{n\times m}$.

   $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

   Exemplo 3.2.5. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 23 \\ 10 & 2 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 2 \\ 23 & 21 \end{bmatrix}$

   A seguir, aparecem as principais propriedades da transposição:

   - Se $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, essa é uma matriz simétrica, e vice-versa
   - Realizando duas vezes a transposição, obtém-se a matriz original, $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
   - Distributividade em relação à adição, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
   - Permuta com a multiplicação por escala, $(k\mathbf{A})' = k\mathbf{A}'$

9. Matriz Simétrica

   Quando uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é igual à sua transposta $\mathbf{A}^t(\mathbf{A} = \mathbf{A}^t)$, dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica.

   Exemplo 3.2.6. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{A}^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

3.3 Adição de matrizes

Dadas duas matrizes, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{mxn}$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})_{mxn}$ a matriz soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é a matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})_{mxn}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ Para todo i e todo j, tal que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Em outras palavras, a matriz soma $\mathbf{C}$ é do mesmo tipo que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

Exemplo 3.3.1. *Sejam* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$

Somando elemento com elemento correspondente tem-se

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$$

3.4 Subtração de matrizes

Conside duas matrizes, $\mathbf{A}=(a_{ij})_{mxn}$ e $\mathbf{B}=(b_{ij})_{mxn}$. A matriz $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ é chamada **matriz diferença entre A e B** e indicada por $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

3.4.1 Equação matricial do tipo: X+B=A

Considere as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ do mesmo tipo $m\times n$. A matriz $\mathbf{X}$ tal que $\mathbf{X}+\mathbf{B}=\mathbf{A}$ é uma matriz do tipo $m\times n$ que satisfaz a igualdade $\mathbf{X}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$. Então pode-se escrever

$$\mathbf{X}+\mathbf{A} \;=\; \mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{X}=\mathbf{A}-\;\mathbf{B}$$

3.4.2 Propriedade de adição e subtração de matrizes

Sendo $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ matrizes de mesmo tipo e $\mathbf{O}$ a matriz nula, valem as seguintes propriedades para adição de matrizes:

- $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_1$ (comutativa)
- $(\mathbf{A}_1+\;\mathbf{A}_2)+\mathbf{A}_3=\mathbf{A}_1+(\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3)$ (associativa)
- $\mathbf{A}_1+(-\mathbf{A}_1)=O$ (oposto)
- $\mathbf{A}_1+O=\mathbf{A}_1$ (elemento neutro)

3.5 Multiplicação de matrizes por um escalar

O produto de uma matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $n\times m$ por um escalar c resulta em uma matriz $\mathbf{B}=c\mathbf{A}$ de mesma dimensão $n\times m$, tal que $b_{ij}=cA$, $\forall i,j$.

Exemplo 3.5.1.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}5+\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}2=\begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O produto de uma matriz $\mathbf{M}(n\times m)$ por um vetor $\mathrm{v}(m\times 1)$resulta em um vetor $\mathrm{y}(n\times 1)$, de forma que

$$y_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Segundo (SARTORIS, 2000) o produto de uma matriz $\mathbf{A}(n \times p)$ por uma matriz $\mathbf{B}(p \times m)$ é uma matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}(n \times m)$, tal que

$$c_{ij} \quad = \quad \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, i = 1, \cdots, n \quad \text{e} \quad j = 1, \cdots, m$$

O elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da linha i de $\mathbf{A}$ pelos correspondentes elementos da coluna j de $\mathbf{B}$. Desse modo, duas matrizes podem ser multiplicadas se, e somente se, o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

A pré-multiplicação de uma matriz $\mathbf{A}$ por uma matriz $\mathbf{D}$ tem o efeito de multiplicar cada linha de $\mathbf{A}$ pelo correspondente elemento de $\mathbf{D}$ (FILHO, 2007).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & d_{11}a_{13} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & d_{22}a_{23} \\ d_{33}a_{31} & d_{33}a_{32} & d_{33}a_{33} \end{bmatrix}$$

Por sua vez, a pós-multiplicação de uma matriz $\mathbf{A}$ por uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ faz com que cada coluna de $\mathbf{A}$ seja multiplicada pelo correspondente elemento de $\mathbf{D}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{C} = \ \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} & a_{13}d_{33} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} & a_{23}d_{33} \\ a_{31}d_{11} & a_{32}d_{22} & a_{33}d_{33} \end{bmatrix}$$

Pelas expressões anteriores, pode-se verificar que a multiplicação matricial não segue a lei comutativa, ou seja, geralmente $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. É desnecessário a implementação das matrizes acima no R.

3.6 Produto interno e produto externo (matrizes)

O produto escalar ou interno entre um vetor x$(n \times 1)$ e um vetor y$(n \times 1)$ é um escalar c obtido por

$$c \;=\; x^{'}y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_j$$

Por outro lado, o produto externo entre um vetor x$(n \times 1)$ e outro vetor y$(m \times 1)$resulta em uma matriz $\mathbf{P}(n \times m)$, de forma que

$$\mathbf{P} \;=\; x^{'}y$$

Com $m_{ij} = x_iy_j$, $i = 1, \cdots, n$ e $j = 1, \cdots, m$. Isto é

$$\begin{bmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

3.7 Diagonalização de uma matriz simétrica

Considere elementos os da matriz quadrada $\mathbf{H}$ definidos por h_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$, a matriz que satisfaz $h_{ij} = h_{ji}$ é chamada de matriz simétrica (Rodrigues, 2009)

Assumindo que $\mathbf{U}$ uma matriz simétrica 2×2 satisfaz a seguinte equação

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}\;\mathbf{U} \;=\; \Lambda$$

Em que $\mathbf{U}$ é uma matriz de dimensão 2×2 e λ é uma matriz diagonal também de mesma dimensão. Escrevendo $\mathbf{U}$ e Λ como

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Assim, $\mathbf{HU}$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{HU} = \begin{bmatrix} h_{11}u_{11} + h_{12}u_{21} & h_{11}u_{12} + h_{12}u_{22} \\ h_{21}u_{11} + h_{22}u_{21} & h_{21}u_{12} + h_{22}u_{22} \end{bmatrix}$$

Teremos então

$$\mathbf{U}\ \Lambda = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} & \lambda_2 u_{12} \\ \lambda_1 u_{21} & \lambda_2 u_{22} \end{bmatrix}$$

$$UA = \begin{bmatrix} h_{11}u_{11} + h_{12}u_{21} & h_{11}u_{12} + h_{12}u_{22} \\ h_{21}u_{11} + h_{22}u_{21} & h_{21}u_{12} + h_{22}u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} & \lambda_2 u_{12} \\ \lambda_1 u_{21} & \lambda_2 u_{22} \end{bmatrix}$$

Isto pode ser transformado em

$$\begin{bmatrix} h_{11} - \lambda_1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{21} - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_{11} - \lambda_2 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações são satisfeitas se u_{11} e u_{21} não são zero, assim teremos as Equações 3.1 e 3.2.

$$\frac{h_{11} - \lambda_1}{h_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{22} - \lambda_1} \tag{3.1}$$

$$\frac{h_{11} - \lambda_2}{h_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{22} - \lambda_2} \tag{3.2}$$

Ainda estas equações podem ser transformadas em

$$(h_{11} - \lambda_1)(h_{22} - \lambda_1) - h_{12}h_{21} = 0$$
$$(h_{11} - \lambda_2)(h_{22} - \lambda_2) - h_{12}h_{21} = 0$$

A Equação 3.3 na forma mais geral no contexto de **matrizes** tem a seguinte forma

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda_1 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} h_{11} - \lambda_2 & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

Às vezes podem ser escrito da seguinte maneira

$$|\mathbf{H} - \lambda^1 \mathbf{I} = 0$$

E, para λ_2

$$|\mathbf{H} - \lambda_2 \mathbf{I} \;=\; 0$$

Em que $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade, $|\mathbf{H} - \lambda_2 \mathbf{I}|$ é denominado o determinante de $(\mathbf{H} - \lambda_1 \mathbf{I})$. As Equações 3.3 e 3.3, tem como solução λ_1 e λ_2 da equação

$$(h_{11} - \lambda)(h_{22} - \lambda) - h_{12}h_{21} \;=\; 0$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$ a Equação 3.3 é transformada em

$$\lambda^2 + (h_{11} + h_{22})\lambda - h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \;=\; 0$$

O discriminate será então

$$\begin{aligned} D &= (h_{11} + h_{22})\lambda - 4(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) \\ &= (h_{11} + h_{22})^2 + 4h_{12}h_{21} \end{aligned}$$

Sendo H uma matriz simétrica e satisfazendo as igualdades $h_{12} = h_{21}$ e $h_{12}h_{21} \geq 0$. Obtém-se então que $D \geq 0$. Assim, ambos λ_1 e λ_2 são números reais.

Os autovalores e os autovetores associados dado pela Equação 3.1 satisfazem

$$U^{-1} \;=\; U^{'}$$

Em outras palavras, quando uma matriz inversa de $\mathbf{U}$ é requerida, a matriz transformada de $\mathbf{U}$ pode ser usada e sendo denominada matriz ortogonal. A diagonalização de uma matriz simétrica pode ser aplicada em vários cálculos.

Exemplo 3.7.1.

$$(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{U})^m \;=\; \Lambda^m$$

Em que $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U} = I$*, assim nos temos*

$$(\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{H}\ \boldsymbol{U})^m \;=\; \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{H}^m\boldsymbol{U} = \Lambda^m$$

Por tanto, podemos obter

$$\boldsymbol{H}^m = \boldsymbol{U}\Lambda^m \boldsymbol{U}^{-1}$$

Sendo λ *uma matriz diagonal,* Λ^m *pode ser escrito da seguinte forma*

$$\Lambda^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{bmatrix}$$

3.8 Posto de uma matriz

Segundo (FONSECA, 2003) o posto de uma matriz $\mathbf{A}$, denominado *posto*($\mathbf{A}$), é o número de pivós que ela possui. Pode-se observar que na forma escalonada o número de linhas de $\mathbf{A}$= número de pivôs + número de linhas com todos os elementos iguais a zero. O conceito de posto possui um papel importante na análise de sistemas de equações, relacionadas com a existência, ou não, de solução (ou soluções).

3.9 Partição de matrizes

Segundo (DANIEL, 2002) uma matriz particionada de pode subdividir-se em elementos que sejam a sua vez matrizes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \vdots & 4 & 5 \\ 2 & \vdots & 4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & \vdots & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ está particionada da seguinte forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

Em que se verifica que

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_3 = 0, \ \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se verificam as seguintes regras

- Inversas

  Se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

  Em que A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas não singular, e chamamos $\mathbf{B} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}A_{23})^{-1}$. Verifica-se que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B} & \mathbf{A}_{22}^{-1} + \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

  Como se observa na multiplicação direta.

- Determinantes

  Se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

  O determinante da matriz particionada será

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= |\mathbf{A}_{22}||\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}| \\ |\mathbf{A}| &= |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}| \end{aligned}$$

- Inversas da soma de matrizes

  Se **A** e **C** são matrizes não singular de dimensão $n \times m$, **B** de dimensão $n \times m$ e **D** de $m \times n$. Prova-se por multiplicação direta que:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$$

4 Matrizes e propriedades no R

Uma matriz é uma coleção de elementos de dados dispostos em um *layout* retangular bidimensional. Considere uma matriz **H** com 2 linhas e 3 colunas.

```
> H = matrix(
+ c(7, 7, 3, 2, 4, 2), # os elementos da matriz
+ nrow=2,              # número de linhas
+ ncol=3,              # número de colunas
+ byrow = TRUE)        # lendo os dados por linha
> H                    # "print" a matriz
      [,1]  [,2] [,3]
[1,]    2    4    3
[2,]    1    5    7
```

Pode-se separar alguns elementos da matriz usando a expressão $H[m, n]$. Por exemplo

```
H[2, 3]      # Elemento da 2 linha e 3 coluna
[1] 7
> H[ ,c(1,3)]  # primeira e terceira colunas
[,1] [,2]
[1,]    7    3
[2,]    2    2
> dimnames(H) = list(
    c("row1", "row2"),         # nomes das linhas
    c("col1", "col2", "col3")) # nomes das colunas
> H
col1 col2 col3
row1    7    7    3
row2    2    4    2
A<-H[ ,c(1,3)]
           col1 col3
     row1    7    3
     row2    2    2
```

Pode-se construir matrizes no R, usando os argumentos *ncol* e *nrow*. Veja o exemplo

```
> M<-matrix(1:18, ncol=6)
> M
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    4    7   10   13   16
[2,]    2    5    8   11   14   17
[3,]    3    6    9   12   15   18
> M<-matrix(1:18,nrow=6)
> M
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    7   13
[2,]    2    8   14
[3,]    3    9   15
[4,]    4   10   16
[5,]    5   11   17
[6,]    6   12   18
```

O argumento *byrow* pode ser "*TRUE*"ou "*FALSE*". Vejamos um exemplo, a sequência de números pode ser escrito por linha ou por colunas, respectivamente usando o $byrow = TRUE$ ou $byrow = FALSE$.

```
> M1<-matrix(1:18, ncol=6, byrow=TRUE)
> M1
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    2    3    4    5    6
[2,]    7    8    9   10   11   12
[3,]   13   14   15   16   17   18
> M1<-matrix(1:18, ncol=6, byrow=FALSE)
> M1
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]    1    4    7   10   13   16
[2,]    2    5    8   11   14   17
[3,]    3    6    9   12   15   18
```

As dimensões e a quantidade de elementos da matriz pode ser encontrado usando o seguinte comando

```
> dim(M)
[1] 3 6 # a dimensão da matriz M é 3 linhas e 6 colunas
> length(M)
[1] 18 # Número de elemento da matriz M
```

Pode-se também usar as funções *rep*() repetição, *cbind*() para juntas colunas para construir matrizes. Vejamos o exemplo:

```
> rep(2,3) # Repete o número 2 três vezes
[1] 2 2 2
> M2<-cbind(c(3,5,7), rep(2,3),1:3)
> M2
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    2    1
[2,]    5    2    2
[3,]    7    2    3
```

A função *cbind*() junta a coluna (3,5,7), com (2,2,2) e os três elementos (1,2,3).

Pode-se também acrescentar uma quarta linha na matriz M2 definida acima. Para isso usa-se o seguinte comando:

```
> M3<-rbind(M2, c(12,15,7))
> M3
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    2    1
[2,]    5    2    2
[3,]    7    2    3
[4,]   12   15    7
```

Observa-se que usando a função *rbind*() acrescentou a linha (12,15,7) na matriz M2.

4.1 Encontrando elementos ou partição de uma matriz no R

Conhecida uma matriz é possível encontrar elementos ou partes de uma matriz

```
> A<-matrix(c(10,14,4,2,6,5,7,0,8), ncol=3, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   10   14    4
[2,]    2    6    5
[3,]    7    0    8
> Aa<-A[1,3] # O elemento 1 linha e 3 coluna
> Aa
```

```
[1] 4
> Ab<-A[,3] # Todas as linhas 3 coluna
> Ac<-A[2,] # 2 linha todas as colunas
> Ac
[1] 2 6 5
> Ad<-A[c(1,3),] #1 e 2 linhas com todas as colunas
> Ad
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   10   14    4
[2,]    7    0    8
> Ae<-A[,c(2,3)] # 2 e 3 coluna, todas as linhas
> Ae
     [,1] [,2]
[1,]   14    4
[2,]    6    5
[3,]    0    8
> Af<-A[-1,] # eliminando a 1 linha
> Af
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    6    5
[2,]    7    0    8
> Ag<-A[,c(-2,-3)] # eliminado a 2 e 3 coluna
> Ag
[1] 10  2  7
> Ah<-A[c(1,2), c(2,3)]
> Ah
     [,1] [,2]
[1,]   14    4
[2,]    6    5
```

4.2 Propriedade de adição e subtração de matrizes no R

Para exemplificar estas propriedades no R, considere as matrizes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ abaixo

```
> A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
```

```
[2,]    3    4
> A2<-matrix(c(5,6,7,8),ncol=2, byrow=TRUE)
> A2
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    7    8
> A3<-matrix(c(9,10,11,12),ncol=2, byrow=TRUE)
> A3
     [,1] [,2]
[1,]    9   10
[2,]   11   12

> A1 + A2 # (Comutativa)
     [,1] [,2]
[1,]    6    8
[2,]   10   12
> A2 + A1
     [,1] [,2]
[1,]    6    8
[2,]   10   12

> A1 + ( A2 + A3)#(Associativa)
     [,1] [,2]
[1,]   15   18
[2,]   21   24
> (A1 + A2) + A3
     [,1] [,2]
[1,]   15   18
[2,]   21   24

>  A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> (- A1)
     [,1] [,2]
[1,]   -1   -2
[2,]   -3   -4
```

```
> A1 + (-A1) #oposto
     [,1] [,2]
[1,]    0    0
[2,]    0    0

>  A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
>  A2<-matrix(c(0,0,0,0),ncol=2, byrow=TRUE)
> A2
     [,1] [,2]
[1,]    0    0
[2,]    0    0

> A1 + A2   # elemento neutro
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
```

4.3 Multiplicação de matriz no R

O produto de uma matriz $\mathbf{A}$ de dimensão $n \times m$ por um escalar c resulta em uma matriz $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ de mesma dimensão $n \times m$, tal que $b_{ij} = c\mathbf{A}$, $\forall i, j$. Exemplo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo $c = 5$, o produto $c\mathbf{M}$ pode ser encontrado no R da seguinte forma

```
> M<- matrix(c(1,2,10,3,4,5), ncol=3, byrow=TRUE)
> c<-5
> c*M
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5   10   50
[2,]   15   20   25
```

Exemplo 4.3.1. *O produto de matriz por matriz*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}$$

No R seria

```
> A<-matrix(c(2,2,0,3,5,6), ncol=3, byrow=TRUE)
> B<-matrix(c(1,6,4,0,3,5), ncol=2, byrow=TRUE)
> C<- A%*% B
> C
     [,1] [,2]
[1,]   10   12
[2,]   41   48
```

Quanto ao produto interno e externo no R, tem-se

Exemplo 4.3.2. *O produto interno e externo de dois vetores*

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow K = x^{'}y = 5.1 + (-1)3 + 2.4 = 10 \quad (produto\, interno)$$

$$\boldsymbol{P} = xy^{'} = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.3 & 5.4 \\ -1.1 & -1.3 & -1.4 \\ 2.1 & 2.3 & 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 20 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

No R o produto de matriz seria

```
x<-matrix(c(5,-1,2), ncol=1)
y<-matrix(c(1,3,4), ncol=3)
x %*% y
```

O produto escalar seria

```
x<-matrix(c(5,-1,2), ncol=3)
y<-matrix(c(1,3,4), ncol=3)
sum(x*y)
[1] 10
```

Para efetuar uma multiplicação de matrizes no R, usa-se a notação: $\% * \%$ entre as matrizes. Observe um exemplo abaixo

Sejam $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ duas matrizes, vejamos o exemplo de como multiplicar essas matrizes.

```
A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> A2<-matrix(c(5,6,7,8),ncol=2, byrow=TRUE)
> A2
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    7    8
> A1%*%A2
     [,1] [,2]
[1,]   19   22
[2,]   43   50
```

4.3.1 Propriedade de multiplicação de matrizes no R

- Associativa

  $(\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_2).\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1.(\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3)$

- Distributiva a direita em relação à adição/subtração

  $(\mathbf{A}_1 \pm \mathbf{A}_2).\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1.\mathbf{A}_3 \pm \mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3$

- Distributiva a esquerda em relação à adição/subtração

  $\mathbf{A}_3.(\mathbf{A}_1 \pm \mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_3.\mathbf{A}_1 \pm \mathbf{A}_3.\mathbf{A}_2$

Exemplo 4.3.3. `> A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)    # (I)`

```
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> A2<-matrix(c(5,6,7,8),ncol=2, byrow=TRUE)
```

```
> A2
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    7    8
> A3<-matrix(c(9,10,11,12),ncol=2, byrow=TRUE)
> A3
     [,1] [,2]
[1,]    9   10
[2,]   11   12
> (A1 %*% A2)%*% A3
     [,1] [,2]
[1,]  413  454
[2,]  937 1030
> A1 %*% ( A2 %*% A3)
     [,1] [,2]
[1,]  413  454
[2,]  937 1030


> (A1 + A2)%*% A3  # (II)
     [,1] [,2]
[1,]  142  156
[2,]  222  244

> (A1 - A2)%*% A3
     [,1] [,2]
[1,]  -80  -88
[2,]  -80  -88

> A1 %*%  A2 + A3
     [,1] [,2]
[1,]   28   32
[2,]   54   62
> A1 %*%  A2 - A3
     [,1] [,2]
[1,]   10   12
[2,]   32   38

> A3 %*% ( A1 + A2)    #(III)
```

```
     [,1] [,2]
[1,]  154  192
[2,]  186  232
> A3 %*% ( A1 - A2)
     [,1] [,2]
[1,]  -76  -76
[2,]  -92  -92
```

```
> A3 %*%  A1 + A3 %*% A2
     [,1] [,2]
[1,]  154  192
[2,]  186  232
> A3 %*%  A1 - A3 %*% A2
     [,1] [,2]
[1,]  -76  -76
[2,]  -92  -92
```

4.4 Inversa e potência de matrizes no R

Sejam $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

O procedimento no R para encontrar a inversa matrizes $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ serão

```
> A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> A2<-matrix(c(5,6,7,8),ncol=2, byrow=TRUE)
> A2
     [,1] [,2]
[1,]    5    6
[2,]    7    8
> solve(A1)
     [,1] [,2]
[1,] -2.0  1.0
[2,]  1.5 -0.5
```

```
> solve(A2)
     [,1] [,2]
[1,] -4.0  3.0
[2,]  3.5 -2.5
```

A inversa de uma matriz quadrada $\mathbf{A}_1$ de ordem n é representada por $\mathbf{A}_1^{-1}$ e definida tal que $\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{I}_n$. Em que $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Assim, a lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa. Abaixo mostra tal procedimento no R

```
> A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> I<- A1 %*% solve(A1)
> I
     [,1]         [,2]
[1,]    1 1.110223e-16
[2,]    0 1.000000e+00
> round(I,0)
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

Operações com transposta e inversa

1. $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$

```
> A<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
> t(t(A))
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
```

2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

```
> A<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> solve(solve(A))
     [,1] [,2]
```

```
[1,]    1    2
[2,]    3    4
```

3. $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}^{'})^{-1}$

```
> t(solve(A))
     [,1] [,2]
[1,]   -2  1.5
[2,]    1 -0.5
> solve(t(A))
     [,1] [,2]
[1,]   -2  1.5
[2,]    1 -0.5
```

4. Se $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$, então $\mathbf{A}' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'$ e $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$

```
B<-matrix(c(5,2,1,4),ncol=2, byrow=TRUE)
C<-matrix(c(2,2,3,2),ncol=2, byrow=TRUE)
D<-matrix(c(7,1,3,5),ncol=2, byrow=TRUE)
A<- B %*% C %*% D
t(A)
tA<-t(D) %*% t(C) %*% t(B)
tA
```

De forma semelhante encontra-se o produto das inversas.

5. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{'} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

```
> A<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> B<-matrix(c(5,2,1,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> t(A+B)
     [,1] [,2]
[1,]    6    4
[2,]    4    8
> t(A) + t(B)
     [,1] [,2]
[1,]    6    4
[2,]    4    8
```

6. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$

```
> solve(A+B)
        [,1]    [,2]
[1,]  0.250 -0.1250
[2,] -0.125  0.1875
> SS<-solve(A) + solve(B)
> round(SS,2)
      [,1]  [,2]
[1,] -1.77  0.88
[2,]  1.44 -0.22
```

Claramente se observa que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$.

Cálculo da inversa usando o fórmula 3.1 no R

```
A<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
A
adjA<-matrix(c(4,-2,-3,1),ncol=2, byrow=TRUE)
adjA
Ainv<- (1/det(A)) * adjA
Ainv
A%*% Ainv
     [,1] [,2]
  [1,]    1    0
  [2,]    0    1

InvA<- function(){
  aa<-matrix(c(1,2,3,4), ncol=2)
  print("aa")
  print(aa)

  bb<-solve(aa)
  print("bb")
  print(bb)

  cc<-aa %*% bb
  print("cc")
  print(cc)

  dd<-bb %*% aa
  print("dd")
```

```
  print(dd)
}
>   print(dd)
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

O resultado como de esperar será uma matriz identidade I_2

4.4.0.1 Resolvendo equações simultâneas

Considere o seguinte sistema de equação

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 4 \\ -8x_1 + 5x_2 = -11 \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados pela primeira matriz do primeiro membro obtém

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15.5 \\ -27 \end{bmatrix}$$

```
> A<-matrix(c(-2,1,-8,5), ncol=2, byrow=TRUE)
> A
     [,1] [,2]
[1,]   -2    1
[2,]   -8    5
> B<-matrix(c(4,-11), ncol=1)
> B
     [,1]
[1,]    4
[2,]  -11
> Ai<-solve(A)
> Ai<-solve(A)
```

```
> XX<- Ai %*% B
> SS<-A %*% XX
> SolucaoSistema<- solve(A,B)
> SolucaoSistema
      [,1]
[1,] -15.5
[2,] -27.0
```

4.4.1 Potências com matrizes no R

Observe como calcular potências com matrizes no R. Sejam dois escalares $X = 2$ e $Y = 3$. Encontra a potência da matriz $\mathbf{A}^x$ e $\mathbf{A}^y$. O símbolo $**$ é equivalente a $\wedge$.

```
> A1<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
> A1**2
     [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    9   16
> A1**3
     [,1] [,2]
[1,]    1    8
[2,]   27   64
```

Algumas funções de matrizes são apresentadas abaixo.

t	transposta	t(H)
diag	diagonal	diag(A)
$\% * \%$	multiplicação	A $\% * \% A$
det	determinante	det(A)
solve	inversa	solve(A)
eigen	autovalores	eigen(A)$values
eigen	autovetores	eigen(A)$vectors
svd	decomposição de valores singulares	svd(A)
qr	descomposição QR	qr(A)
chol	decomposição Choleski	chol(A)

Exemplifica-se cada função de matriz no R

```
A<-matrix(c(1,2,3,4),ncol=2, byrow=TRUE)
A   # A matriz A
t(A)  # transposta de A
diag(A)  # diagonal principal de A
```

```
det(A) # determinante de A
solve(A) # Invsersa de A
eigen(A)  # Aurovalores e autovetores
svd(A)  # decomposição de valores singulares
```

4.5 Traço de matriz no R

Vamos a considerar duas matrizes **A** e **B** ambas de dimensão 3×3. Vamos provar algumas propriedades de traço de matriz.

```
> A<-matrix(1:9, ncol=3)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
> TracoA<- sum(diag(A))
> TracoA
[1] 15
> c<-10
> trcA<- c*TracoA
> trcA<- c*TracoA; trcA
[1] 150
> atrA<- sum(diag(c*A)); atrA
[1] 150
> B<-matrix(9:1, ncol=3)
> B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    9    6    3
[2,]    8    5    2
[3,]    7    4    1
> B<-matrix(9:1, ncol=3)
> B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    9    6    3
[2,]    8    5    2
[3,]    7    4    1
> trAB<- sum(diag(A%*%B))
> trAB
```

```
[1] 189
> trBA<- sum(diag(B%*%A))
> trBA
[1] 189
```

4.6 Diagonalização de uma matriz simétrica usando o R

A Equação 3.3 foi calculada por $\mathbf{A}_1$. Os diversos valores de matriz, autovalores e autovetores estão discriminados abaixo no R.

```
function() {
A<-matrix(c(-2,-8,-8,3), ncol=2)
print(A)
A1<- A %*% A %*% A %*% A %*% A
print(A1)
> A1
       [,1]   [,2]
[1,]   -352 -40888
[2,] -40888  25203
eigen1<-eigen(A1)
Lam<-eigen1$values
Vet<-eigen1$vectors
diag1<- diag(c(Lam[1]^5, Lam[2]^5))
print(diag1)

aaeigen<-Vet %*% diag1 %*% t(Vet)
aaeigen
print(aaeigen)
> det1<- det(A-Lam[1]*diag(2))
> det1
[1] 3053997559
> det2<-det(A-Lam[2] * diag(2))
> det2
[1] 924949651
}
```

4.7 Forma quadrática no R

Na Equação 3.1 tem-se a forma quadrática que será implementada no R. Será considerado uma matriz simétrica com objetivo de encontrar o contorno gerado pela forma quadrática. Fazendo a Equação 3.1 numa simplificada forma, como vista na Equação 4.1.

$$\mathbf{x}^{'}\mathbf{A}\mathbf{x} \;=\; \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$$

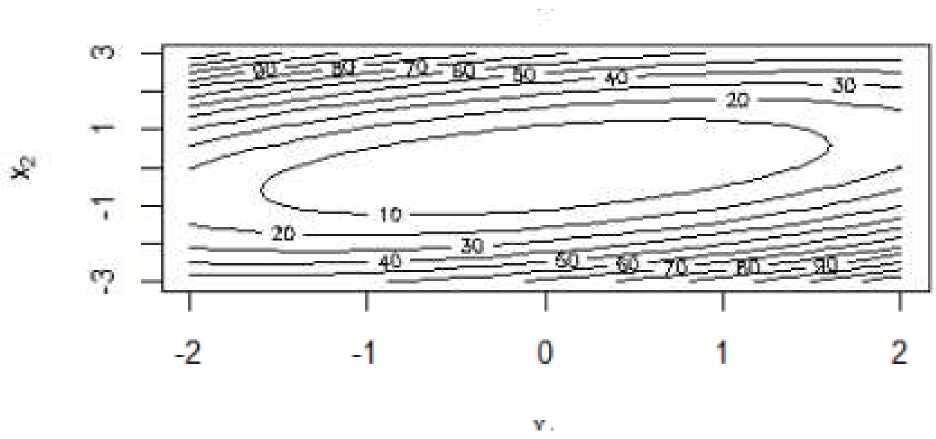
Exemplo 4.7.1. *Considere a matriz* $\boldsymbol{A}$ *definida por*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Implementado a forma quadrática no R, tem-se

```
> par(mfrow = c(1,1), mai = c(2, 1, 1.5, 0.1),
+       omi = c(0, 0, 0, 0))
>   # (2)
>   A <- matrix(c(5, -3 , -3, 8), ncol = 2)
>   print("A")
[1] "A"
>   print(A)
     [,1] [,2]
[1,]    5   -3
[2,]   -3    8
>   # (3)
>   n1 <- 24
>   xx1 <- seq(from = -2, to = 2, length = n1)
>   n2 <- 64
>   xx2 <- seq(from = -3, to = 3, length = n2)
>   # (4)
>   yym <- matrix(rep(0, length = n1 * n2), ncol = n2)
>   for(ii in 1:n1){
+     for(jj in 1:n2){
+       xx12 <- c(xx1[ii], xx2[jj])
+       yym[ii, jj] <- t(xx12) %*% aa %*% xx12
+     }
+   }
>   # (5)
>   contour(xx1, xx2, yym, xlab = expression(x[1]),
+           ylab = expression(x[2]), cex.axis = 0.95,
```

Figura 2 – Gráfico de uma função em forma quadrática



```
+           cex.lab = 0.9)
>   # (6)
>   eigen1 <- eigen(A)
>   # (7)
>   lam <- eigen1$values
>   print("lam")
[1] "lam"
>   print(lam)
[1] 9.854102 3.145898
>   uu <- eigen1$vectors
>   print("uu")
[1] "uu"
>   print(uu)
           [,1]       [,2]
[1,] -0.5257311 -0.8506508
[2,]  0.8506508 -0.5257311
```

Na Figura 2 mostra um gráfico de forma quadrática, em que λ_1 e λ_2 indicados por $lam1$ e $lam2$, respectivamente. Também no algoritmo acima encontram-se: a matriz **A**, os autovalores e os autovetores associados a cada autovalor.

4.8 Partição de matrizes no R

Particionando em 2×2, uma matriz $A4 \times 4$ temos

```
> A<-matrix(c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16), ncol=4)
> A
```

```
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    5    9   13
[2,]    2    6   10   14
[3,]    3    7   11   15
[4,]    4    8   12   16
> A11<-A[1:2,1:2]
> A11
     [,1] [,2]
[1,]    1    5
[2,]    2    6
> A12<-A[1:2,3:4]
> A12
     [,1] [,2]
[1,]    9   13
[2,]   10   14
> A21<-A[3:4,1:2]
> A21
     [,1] [,2]
[1,]    3    7
[2,]    4    8
> A22<-A[3:4,3:4]
> A22
     [,1] [,2]
[1,]   11   15
[2,]   12   16
```

Facilmente, pode-se encontrar o determinante, a inversa e a inversa da soma de duas matrizes.

5 Conclusão

O programa R é extremamente importante na análise de dados oriundos das mais variadas áreas e amplamente utilizado na Pesquisa Científica. Particularmente, o Software R é fundamental pela eficiência no estudo de matrizes, quando pretende-se explorar qualquer tipo de estudo relacionado às matrizes e suas operações para chegar aos resultados finais pretendidos.

É possível que no início do ensino de matrizes no R ocorra alguma dificuldade por parte do aluno, já que para o uso do programa é necessário ter conhecimento básico de informática. Por ser uma linguagem de fácil aprendizagem, logo, entende-se que com a prática, tal dificuldade seja solucionado.

Para uma aprendizagem significativa, esta aula prática utilizando o R deve ser paralela ou posterior a teoria de álgebra de matrizes, focado nos conhecimentos teóricos adquiridos pelo aluno.

Referências

DANIEL, P. *Regresión y Diseño de Experimentos*. [S.l.]: Alianza Editorial, 2002. Citado na página 33.

FELDMANN, R. W. Arthur cayley - founder of matrix theory. *The Mathematics Teacher*, v. 55, n. 6, p. 482–484, 1962. Citado na página 12.

FILHO, F. F. C. *Algoritmos Numéricos*. [S.l.]: LTC - Rio de Janeiro, 2007. Citado na página 29.

FONSECA, M. A. R. da. *Álgebra Linear Aplicada. A Finanças, Economia e Econometria*. [S.l.]: Manole, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 33.

PEÑA, D. *Análisis de datos multivariantes*. [S.l.]: McGraw-Hill: España, 2002. Citado na página 12.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2017. Disponível em: <https://www.R-project.org/>. Citado na página 14.

SARTORIS, A. a. *Manual de Econometria*. [S.l.]: Atlas, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 26 e 29.