UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA BEATRIZ MEDEIROS ARAÚJO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE – PARAÍBA

2017

AMANDA BEATRIZ MEDEIROS ARAÚJO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de graduação no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva.

CAMPINA GRANDE – PARAÍBA

2017

A659t Araújo, Amanda Beatriz Medeiros.
O Teorema de Pitágoras e algumas aplicações [manuscrito] : / Amanda Beatriz Medeiros Araujo. - 2017.
55 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Teorema de Pitágoras. 2. GeoGebra. 3. Geometria.

21. ed. CDD 516.22

AMANDA BEATRIZ MEDEIROS ARAÚJO

O TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de graduação no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovado em 12 / 12 / 2017.

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva (UEPB)

Orientador

Maria Isabelle Silva

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva (UEPB)

Examinadora

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (UEPB)

Examinadora

DEDICATÓRIA

Dedico, primeiramente, a Deus, que iluminou meus passos durante toda esta caminhada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram comigo me dando forças para continuar.

A todos os meus professores, que contribuíram para a construção do conhecimento que tenho hoje.

Ao meu esposo, que sempre me ensinou a ser confiante e nunca desistir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por toda a sabedoria concedida e por todas as bênçãos recaídas sobre a minha vida. Foi ele o responsável por motivar em meu coração o amor que tenho pela matemática e por me guiar durante toda esta jornada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram ao meu lado me incentivando e dando conselhos que foram essenciais para a realização deste trabalho. Sou grata por todo o afeto e consideração que todos sempre tiveram para comigo.

A todos os meus professores, que partilharam comigo o seu conhecimento e deixaram em mim uma parte do que são, o que foi de fundamental importância para a formação da pessoa que sou hoje. Mais do que conhecimento científico, vocês me passaram experiência de vida e me mostraram o que significa ser íntegra. Sou grata, especialmente, ao meu orientador, que sempre se mostrou ser um ótimo professor e amigo; que durante a realização do trabalho, sempre esteve disponível e disposto a me ajudar no que fosse necessário, contribuindo imensamente para a construção das ideias abordadas, sem falar nos conselhos, que certamente vou levar comigo tanto para a vida profissional como pessoal.

Ao meu esposo, que me mostrou que quando queremos conquistar algo, devemos enfrentar as batalhas que aparecem em nosso caminho com muita paciência e humildade, mas sempre com a certeza de que vamos conseguir alcançar nossos objetivos; reconhecendo que sem aqueles que estão ao nosso lado nos dando força, nada teria acontecido.

"Uma Geometria não pode ser mais verdadeira que outra: pode apenas ser mais conveniente".

(Poincaré)

RESUMO

Neste trabalho, fazemos um estudo sobre o surgimento e desenvolvimento do Teorema de Pitágoras, destacando as várias civilizações que, durante diversas épocas e de maneira independente, contribuíram para que tivéssemos uma solidez para esse resultado. Apresentamos a recíproca do Teorema de Pitágoras e mostramos a sua extensão para o espaço. Evidenciamos todas as definições e resultados pertinentes, pois acreditamos que essa construção situará o leitor de uma forma mais compreensível sobre os estudos realizados. No capítulo dedicado às aplicações, enfatizamos o estudo sobre as lúnulas de Hipócrates e os ternos pitagóricos. Todas as figuras do trabalho foram construídas utilizando o Geogebra.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Aplicações, Geogebra.

ABSTRACT

In this work, we study the emergence and development of the Pythagorean Theorem, highlighting the various civilizations that, at different times and independently, contributed to having a solidity for this result. We introduce the reciprocal of the Pythagorean Theorem and show its extension to space. We have shown all the relevant definitions and results, as we believe that this construction will put the reader in a more understandable way on the studies carried out. In the chapter devoted to applications, we emphasize the study of the lunulae of Hippocrates and the Pythagorean suits. All work figures were constructed using Geogebra.

Keywords: Pythagorean Theorem, Applications, Geogebra.

Lista de figuras

Sumário

Introdução

Durante os últimos séculos do segundo milênio a.C., houve uma enorme transição no que diz respeito ao predomínio econômico e político das civilizações em todo o mundo. O poder do Egito e da Babilônia dava lugar à ascensão dos povos hebreus, assírios, fenícios e gregos. Com isso, o homem passou a se indagar sobre algumas questões racionalistas e começou a procurar respostas fundamentadas na ciência. A matemática começava a tomar cara de ciência abstrata à medida em que os métodos demonstrativos iam surgindo e as experiências, tornando a dedução matemática cada vez mais explorada e discutida. Acredita-se que a geometria demonstrativa começou, de fato, com Tales de Mileto, ao decorrer da primeira metade do sexto século a.C.. Por essa questão, ele é creditado como o primeiro matemático a realizar descobertas matemáticas. Grande parte dos trabalhos matemáticos feitos durante os 300 primeiros anos da matemática grega sofreram uma certa desvalorização após os *Elementos de Euclides*, escritos por volta de 300 a.C.. Diferentemente com o que ocorre com a matemática antiga do Egito e da Babilônia, poucos são os manuscritos que evidenciam as pesquisas realizadas pelos gregos, o que dificulta uma melhor observação sobre o desenvolvimento da matemática grega.

A filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que as várias características do homem e da matéria se relacionavam com os números inteiros. Esse grupo de estudiosos tornou-se conhecido na Idade Média e constituíam a geometria, a música e a astronomia como artes liberais básicas. Como os ensinamentos da escola davam-se apenas de maneira oral e como todas as descobertas eram sempre atribuídas ao mestre, no caso Pitágoras, fica difícil saber exatamente quem foi o verdadeiro autor de cada descoberta.

É indiscutível que Pitágoras seja colocado como o mentor dos estudos sobre os lados de um triângulo retângulo, embora antigas civilizações, de maneira independente, já terem mostrado determinado conhecimento sobre o assunto, tais como os babilônicos, os indianos, os chineses e os subalsutras. Essa atribuição é devida a Pitágoras por ele ter conseguido realizar uma demonstração convincente para o resultado, o que deu mais solidez à sua descoberta. Temos o propósito de apresentar algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, um dos mais importantes teoremas da geometria plana e que pode ser enunciado da seguinte forma:

"A área de um quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo".

Não se têm trabalhos da época que comprovem a demonstração desse resultado, pois eles não costumavam escrever seus trabalhos, mas assim como eles conseguiram justificar o resultado para um triângulo retângulo isósceles utilizando comparações entre áreas, acredita-se que o mesmo fora feito com o caso mais geral, para um triângulo retângulo de lados quaisquer.

Para se ter uma ideia da quantidade de possíveis demonstrações para o Teorema de Pitágoras, basta ser citado o livro "*The Pythagorean Proposition*", publicado pelo professor Elisha Scott Loomis, o qual em sua segunda edição já continha nada mais nada menos que 370 demonstrações diferentes para o resultado, todas utilizando apenas argumentos geométricos e algébricos.

Em uma época bem antes do nascimento de Cristo, os egípcios já conheciam o fato de que qualquer triângulo com lados medindo 3, 4 e 5 é obrigatoriamente retângulo. Alguns fatos evidenciam que eles utilizavam esse conhecimento para construir ângulos retos durante o cotidiano da sociedade egípcia. Na remarcação das terras situadas às margens do rio Nilo, sempre que elas eram inundadas e tinham suas divisas destruídas pelas enchentes; na construção de paredes, obviamente sempre perpendiculares ao solo, e das coberturas das casas, sobretudo na elaboração das pirâmides, símbolo mais marcante do Egito. Com isso, percebemos que a geometria era quase sempre utilizada de modo a auxiliar na construção.

Por volta de 1900 a 1600 a.C., os babilônicos também já mostravam domínio sobre essa relação, durante o Primeiro Império Babilônico, território onde atualmente está situado o Iraque. Uma escrita muita famosa que evidencia esse domínio, encontra-se em uma das tábuas babilônicas:

"4 é o comprimento e 5 a diagonal. Qual a abertura? Seu tamanho não é conhecido. 4 vezes 4 é 16. 5 vezes 5 é 25. Se tomar 16 de 25, restam 9. O que vezes o que devo ter para obter 9? 3 vezes 3 é 9. 3 é a abertura".

Outra tábua revela uma curiosidade ainda maior: uma aproximação para o número irracional $\sqrt{2}$. Consiste em uma figura composta por um quadrado de lado 30 e suas diagonais, sobre as quais podemos observar os números 1,24,51,10 e 42,25,35. Ela é conhecida como tábua babilônica YBC 7289, conforme figura 1.

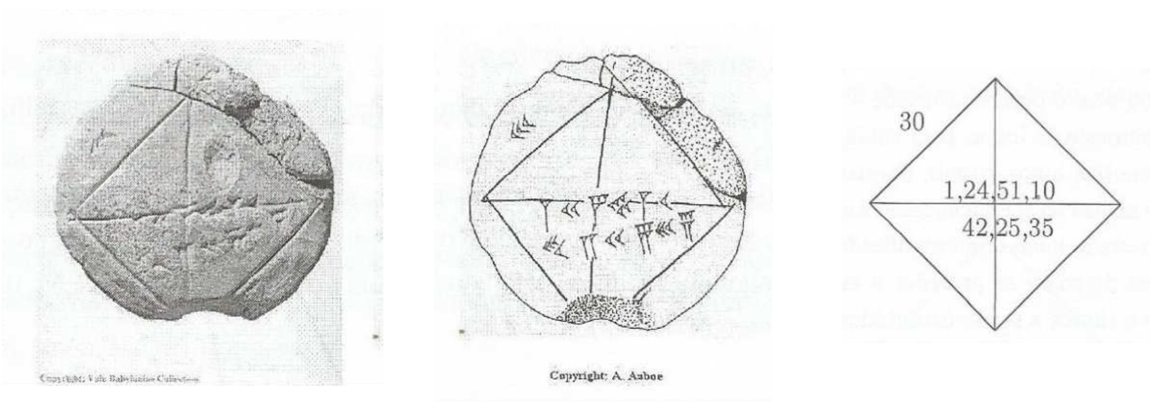

Figura 1: Foto, cópia e diagrama da tábua babilônica YBC 7289.

Como os mesopotâmicos usavam o sistema sexagesimal, ou seja, a base 60, convertendo tais números para o sistema decimal, obtemos:

$$1{,}24{,}51{,}10_{(60)} = 1 \times 60^{0} + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3}$$

$$1{,}24{,}51{,}10_{(60)} = 1 + 0{,}4 + 0{,}01416 + 0{,}00004629$$

$$1{,}24{,}51{,}10_{(60)} = 1{,}41420629.$$

Como se não bastasse, se multiplicarmos 30 por 1,24,51,10 iremos encontrar o número 42,25,35, correspondente a $30\sqrt{2}$.

Os subalsutras foram outros que utilizaram o Teorema de Pitágoras para obter êxito nas construções, destacadas por serem altares que deveriam conter medidas exatas para que fossem aceitas pelos deuses. Era como se fosse um ritual de sacrifício prestado entre os anos de 2000 e 1500 a.C.. O texto do documento Subalsutra de Baudhayana comprova isso:

"Uma corda esticada sobre a diagonal de um quadrado produz uma área que é duas vezes maior que a área do quadrado original".

Assim como os babilônicos, os subalsutras também conseguiram uma aproximação para o número irracional $\sqrt{2}$. Ela é apresentada no texto Apastamba e diz:

"Some a uma unidade sua terça parte e a quarta parte dessa terça parte, e subtraia a trigésima quarta parte dessa quarta parte de terça parte".

Com efeito, o texto acima nos remete à seguinte expressão:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{408} = \frac{408+136+34-1}{408} = \frac{577}{408} = 1{,}414215686.$$

Diferentemente dos gregos, mesmo com tantas aplicações satisfatórias, os subalsutras nunca mostraram preocupação em apresentar uma demonstração ou uma generalização para os seus estudos, pelo contrário, buscavam desenvolver suas habilidades matemáticas apenas para realizar atividades específicas.

Na China antiga, o método de calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo também parecia não ser um mistério. Essa construção encontrava-se no livro *Zhoubi suanjing*, que continha o tópico "diagrama da hipotenusa", acrescentado em uma edição comentada por *Zhao Shuang* por volta do século III d.C.. A figura que representa o diagrama da hipotenusa é composta por retângulos com lados medindo 3 e 4 traçados adjacentes aos lados de um quadrado de lado unitário, resultando em um quadrado maior de lado 7.

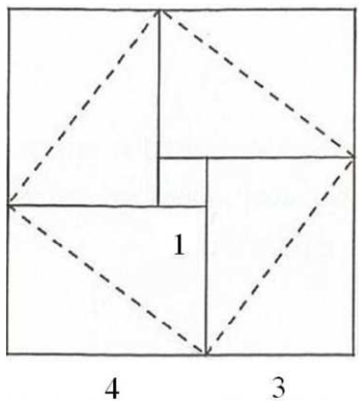

Figura 2: Diagrama da hipotenusa.

Traçando as diagonais desses retângulos, construímos outro quadrado intermediário, como no tracejado da figura acima. É fácil ver que sua área é dada por:

$$7 \text{ x } 7 - 4 \text{ x } \left(\frac{3 \text{ x } 4}{2}\right) = 49 - 4 \text{ x } 6 = 25.$$

Portanto, nada mais justo do que afirmar que o lado do quadrado intermediário vale 5 e, por conseguinte, que a hipotenusa dos triângulos retângulos formados mede exatamente 5 unidades.

Como pudemos perceber, os estudos sobre o Teorema de Pitágoras permeiam várias civilizações durante diversas épocas, de modo que vários povos conseguiram chegar à prova do resultado de maneira independente. A figura abaixo nos revela alguns registros de provas que percorreram o mundo e os tempos.

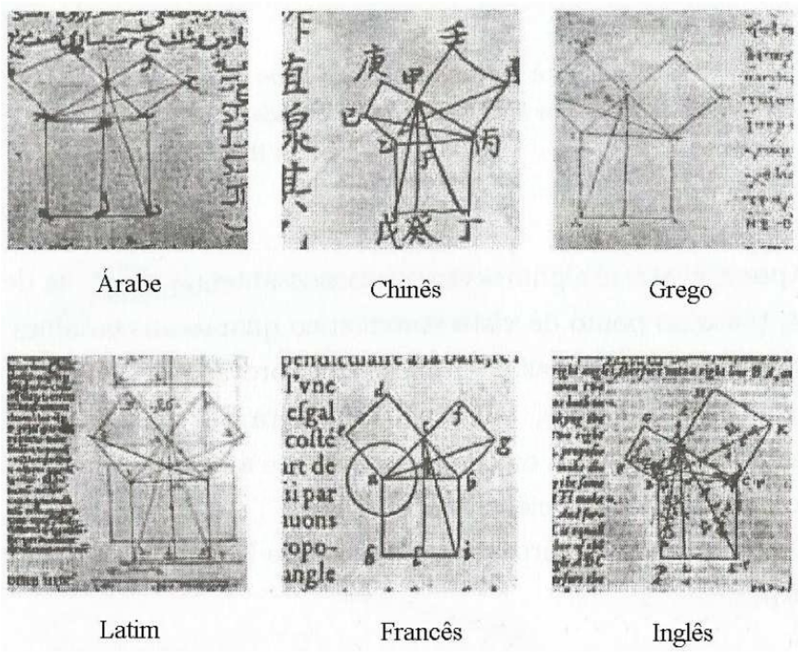

Figura 3: Registros de provas do Teorema de Pitágoras.

São várias demonstrações realizadas por povos das mais diferentes civilizações. Podemos observar que apesar de os registros apresentarem certa semelhança quanto aos traços das figuras, não é difícil verificar também que ambos possuíam as suas devidas particularidades, o que nos mostra uma vasta quantidade de pensamentos e reflexões por trás de cada uma das demonstrações, tornando o Teorema de Pitágoras um resultado ainda mais encantador e interessante de ser explorado. Enfatizamos as possibilidades para uma abordagem sobre esse conteúdo aplicada ao ensino básico, utilizando a história da matemática como uma ferramenta incentivadora para despertar nos alunos uma maior admiração pela matemática e proporcionar uma experiência de compreender como se dão a construção e o desenvolvimento dos saberes científicos.

A seguir, trazemos a bibliografia de quatro grandes matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento e as aplicações do Teorema de Pitágoras e das mais variadas áreas da matemática, sendo os seus estudos, fundamentais para a escrita deste trabalho.

Pitágoras

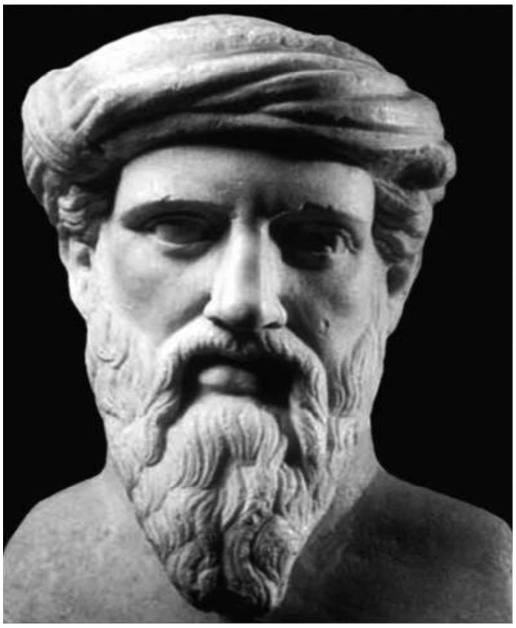

Figura 4: Pitágoras.

O grego matemático e filósofo Pitágoras nasceu na ilha de Samos, no mar Egeu, por volta de 570 a.C.. Desde jovem impressionava os mestres das melhores escolas de Samos. Aos 16 anos foi enviado para Mileto, para estudar com Tales, o maior sábio da época. Tales logo reconheceu que nada mais tinha que ensinar ao jovem, e passou a estudar as descobertas geométricas e matemáticas realizadas pelo excepcional aluno. Ainda com 18 anos de idade, Pitágoras já conhecia e dominava muitos conhecimentos matemáticos e filosóficos da época. Já adulto, em busca de novos conhecimentos, foi para a Síria, a Arábia, a Caldeia, a Pérsia, a Índia e o Egito; nesse último, onde se fixou e passou mais de 20 anos. Enquanto visitava o Egito, impressionado com as pirâmides, desenvolveu o famoso Teorema de Pitágoras.

Atribui-se também a ele o desenvolvimento da tábua de multiplicação, o sistema decimal e as proporções aritméticas. Sua influência nos estudos futuros da matemática foi enorme, pois foi um dos grandes construtores da base dos conhecimentos matemáticos, geométricos e filosóficos que temos atualmente.

Posteriormente, após ter sido expulso da Grécia, Pitágoras consegue fundar sua escola, onde lecionava aritmética, geometria, música, astronomia, religião e moral. Sua instituição tinha uma doutrina diferente, baseando-se na concepção de que todas as coisas eram números e o processo de libertação da alma seria resultante de um esforço basicamente intelectual. Várias propriedades interessantes e curiosas sobre os números foram descobertas pelos pitagóricos, tais como os números figurados e os números perfeitos. Pressionado pelo governo de Milos, Pitágoras foi forçado a fugir e cometer suicídio por volta do ano 500 a.C..

Hipócrates

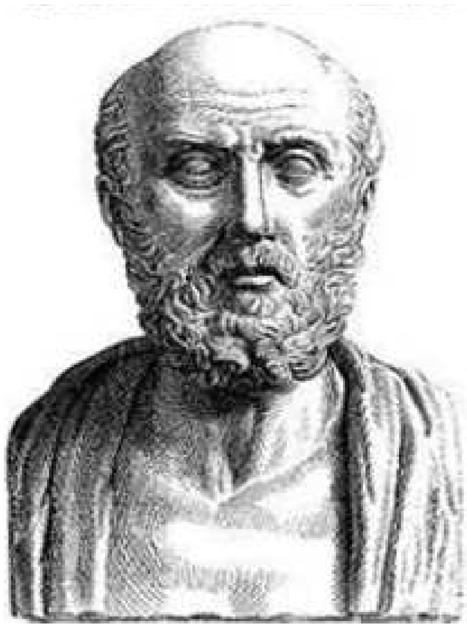

Figura 5: Hipócrates.

O grego matemático e astrônomo Hipócrates nasceu na ilha de Quios, no arquipélago de Dodecaneso, por volta de 470 a.C.. Hipócrates de Quios é o mais antigo matemático grego a respeito de quem se tem evidências concretas. Acredita-se que as ideias desenvolvidas por ele tiveram grande influência dos filósofos pitagóricos. Como sempre gostou de analisar as luas crescentes, passou a estudar sobre o comportamento das lúnulas.

Enquanto comerciante, Hipócrates seguia para Atenas quando perdeu todo o seu dinheiro em Bizâncio, envolvido em uma fraude. Esse incidente fez com que se voltasse para o estudo da geometria. Ele foi o primeiro a escrever um texto de matemática básica, denominado Elementos, no qual provavelmente apresentava postulados e teoremas de forma organizada e sistemática. Posteriormente, muitos matemáticos seguiram esse sistema em seus escritos; o mais famoso de todos foi Euclides de Alexandria.

As contribuições geométricas atribuídas a Hipócrates são importantes, destacando-se as investigações relacionadas aos três famosos problemas gregos. A saber: a trissecção do ângulo, que consistia em dividir um ângulo dado em três partes iguais; a duplicação do cubo, que consistia em encontrar o lado de um cubo cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado; a quadratura do círculo, que consistia em encontrar um quadrado de área igual à de um círculo dado. É verdade que ele não conseguiu resolver de fato esses problemas clássicos, mas suas ideias serviram de base para os estudos de outros matemáticos que, eventualmente, chegaram a uma solução usando outros métodos. Hipócrates veio a falecer por volta do ano 410 a.C..

Pólya

Figura 6: Pólya.

O austro-húngaro George Pólya nasceu em Budapeste em 1887, oriundo de uma família judaica de origem polaca. Apesar de seus pais serem catolicistas e ter sido batizado na igreja católica romana, mais tarde, tornou-se agnóstico. Licenciou-se em 1905, tendo sido considerado um dos quatro melhores alunos do seu ano, o que lhe permitiu ganhar uma bolsa de estudos na Universidade de Budapeste, onde começou a estudar Direito, seguindo os passos de seu pai. Insatisfeito, começou a estudar seguidamente uma vasta quantidade de áreas: Línguas e Literaturas, Latim, Física e Filosofia; até que finalmente passou a se interessar pela Matemática, concluindo o seu doutorado em 1912.

Pólya foi professor de matemática de 1914 a 1940 na universidade de Zürich, na Suíça. Logo em seguida, foi nomeado professor emérito da Stanford University, onde permaneceu lecionando o resto de sua vida e carreira. Ele trabalhou em uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo-se séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade.

Ele se destacou pela grande quantidade de publicações. Ainda no início de sua carreira, escreveu, juntamente com Gábor Szegő, dois livros que trabalhavam a resolução de problemas. A partir de então, começou a pesquisar sobre os métodos de resolução de problemas. Um fato curioso é que enquanto fazia o seu pós-doutorado em Paris, foi chamado pelo seu país para a guerra, mas recusou-se a prestar serviço militar, situação que o obrigou a retornar à Hungria somente após o término da Segunda Guerra Mundial. Pólya faleceu em 1985 em Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos.

Dedekind

Figura 7: Dedekind.

O alemão Julius Richard Dedekind nasceu em Braunschweig em 1831, oriundo de uma família de professores. Aos 7 anos de idade, ele entrou para o colégio Martino-Catharineum, onde começou a desenvolver seu interesse pela matemática. E mesmo antes de ingressar na faculdade, já estudava conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e fundamentos da Análise, entrando para a faculdade de Göttingen, em 1850.

Enquanto estudante em Göttingen, participou de um curso ministrado por Gauss e desenvolveu seus estudos tendo o próprio Gauss como orientador, recebendo o título de doutor em 1852. Logo depois, em 1854, Dedekind começou a lecionar probabilidade e geometria na mesma faculdade. Um ano depois, em 1855, com a morte de Gauss, Dirichlet passou a orientá-lo no aprofundamento dos seus conhecimentos em teoria dos números, teoria potencial, integrais definidas e equações diferenciais parciais. Dedekind viveu uma vida de professor universitário de uma maneira que satisfazia todos os seus anseios, encontrando tempo e tranquilidade suficientes para se dedicar ao trabalho científico.

Em 1872, publicou sua maior obra, *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, que tratava dos cortes de Dedekind. Seu intuito era compreender o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue das grandezas representadas pelos números racionais. Essa reflexão o levou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento não se deve à propriedade da ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta, a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto sobre o próprio segmento. Essa construção nos leva à definição de um número irracional. Dedekind faleceu em 1916 em Braunschweig, na Alemanha.

1 Congruências e semelhanças de triângulos

Antes de qualquer demonstração de fato do Teorema de Pitágoras, tivemos a preocupação de apresentar todas as definições e resultados pertinentes à realização das demonstrações. São resultados que vão desde a definição de triângulo até as proposições que destacam os casos de congruência e semelhança de triângulos. Todos esses resultados podem ser encontrados em [1], mas buscamos reescrevê-los de uma forma mais clara e lúdica para uma melhor interpretação do leitor desse texto. Acreditamos que essa construção torna mais clara a compreensão do teorema principal do trabalho.

Na geometria plana, muitas figuras são construídas a partir de segmentos de reta. A mais simples dessas figuras é conhecida como triângulo e é formada por três pontos não colineares, ou seja, que não pertencem a uma mesma reta e os segmentos determinados por esses três pontos. Tais pontos são chamados vértices do triângulo e os segmentos, lados do triângulo.

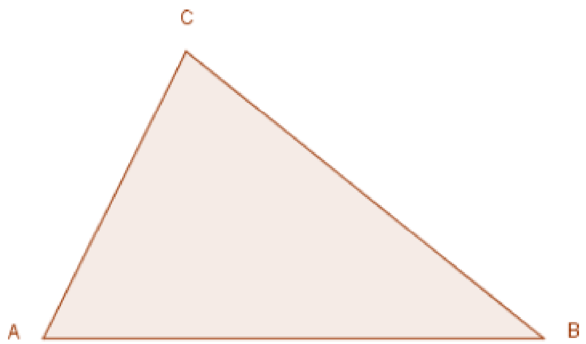

Figura 1.1: Triângulo.

Lema 1.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Trace uma reta paralela a AB passando pelo ponto C, como mostra a figura 1.2. Indique as medidas dos ângulos formados por a, b e c.

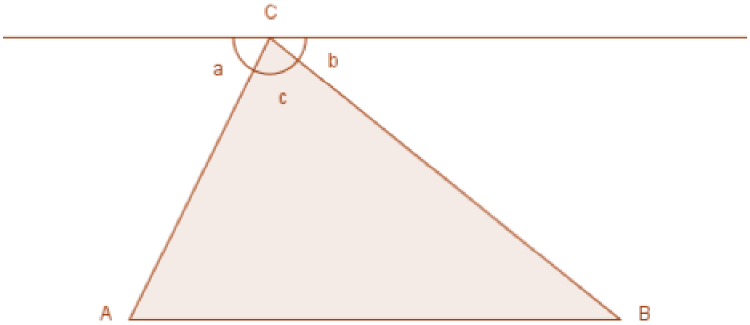

Figura 1.2: Ângulos a, b e c formados.

Perceba que $\hat{A} = a$ e $\hat{B} = b$, pois os mesmos são ângulos alternos internos visto que os segmentos AC e BC são transversais às paralelas destacadas, ou seja, são congruentes entre si. Também fica claro que os ângulos a, b e c fomentam um ângulo raso, por isso temos que $a + b + c = 180°$. Daí,

$$a + b + c = 180°$$

$$\hat{A} + \hat{B} + c = 180°$$

Portanto, fica provado que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°.

■

1.1 Congruência de triângulos

Definição 1.1. (Congruência). *Dizemos que dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal maneira que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Para indicarmos as congruências, marcamos tracinhos para os lados e arquinhos para os ângulos, tal como figura 1.3. Assim, número igual de tracinhos indica lados congruentes e número igual de arquinhos indica ângulos congruentes.

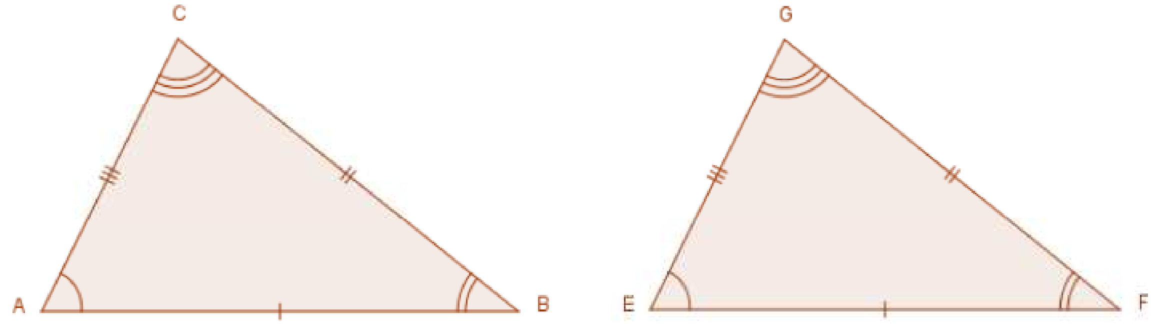

Figura 1.3: Triângulos ABC e EFG.

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes de modo que a correspondência biunívoca estabelecida fora A ↔ E, B ↔ F e C ↔ G, então são satisfeitas as seis relações abaixo:

$$AB = EF \qquad BC = FG \qquad AC = EG$$

$$\hat{A} = \hat{E} \qquad \hat{B} = \hat{F} \qquad \hat{C} = \hat{G}$$

A diante, apresentaremos um postulado que é suficiente para mostramos a congruência de dois triângulos. Salientamos, apenas, que como o resultado trata-se de um postulado, então iremos nos convencer da sua veracidade sem a necessidade de demonstração.

Postulado 1.1. (Caso lado, ângulo, lado - LAL). *Sejam ABC e EFG dois triângulos em que* $AB = EF$, $\hat{A} = \hat{E}$ *e* $AC = EG$, *então os triângulos são congruentes.*

A figura 1.4 ilustra essa congruência e nos leva à seguinte implicação, a qual indica que para verificarmos a congruência dos três pares de lados e dos três pares de ângulos correspondentes, basta que tenhamos em dois triângulos ABC e EFG, as relações AB = EF, $\hat{A} = \hat{E}$ e AC = EG.

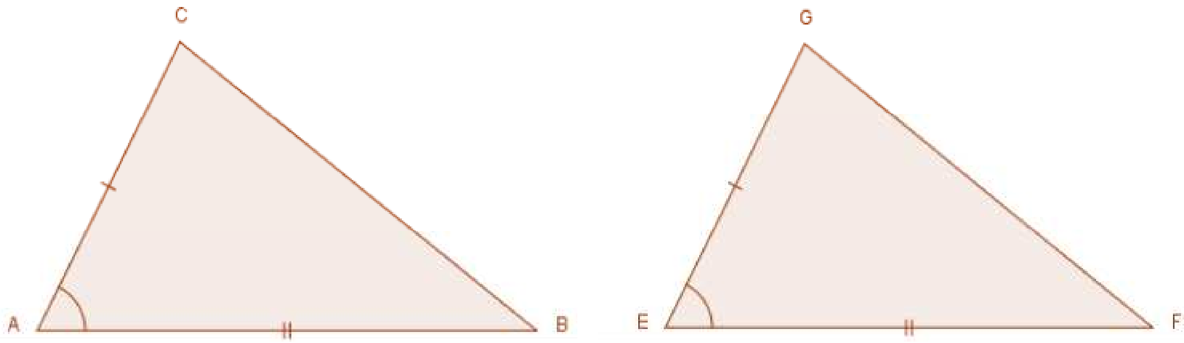

Figura 1.4: Dois triângulos ABC e EFG congruentes.

Proposição 1.1. (Caso ângulo, lado, ângulo - ALA). *Sejam ABC e EFG dois triângulos em que $\hat{A} = \hat{E}$, $AB = EF$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG tais que $\hat{A} = \hat{E}$, AB = EF e $\hat{B} = \hat{F}$, como propõe a hipótese da proposição.

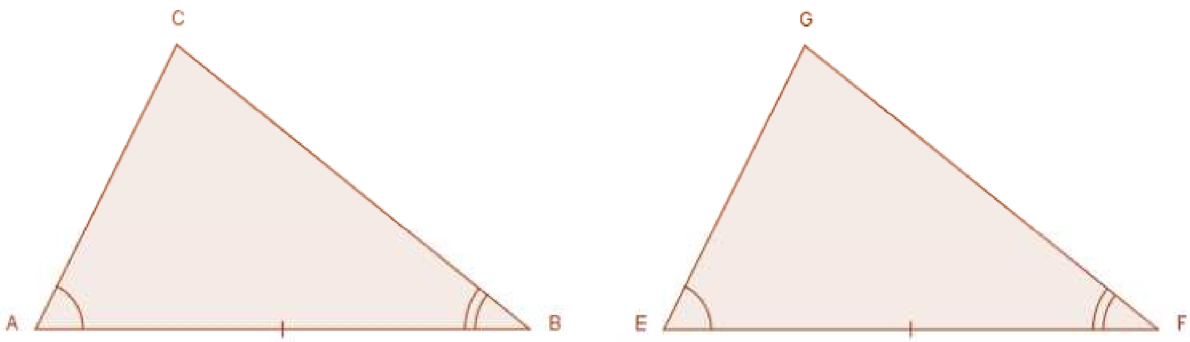

Figura 1.5: Triângulos ABC e EFG.

No triângulo ABC, seja D o ponto pertencente à semirreta S_{AC} tal que AD = EG e trace o segmento DB.

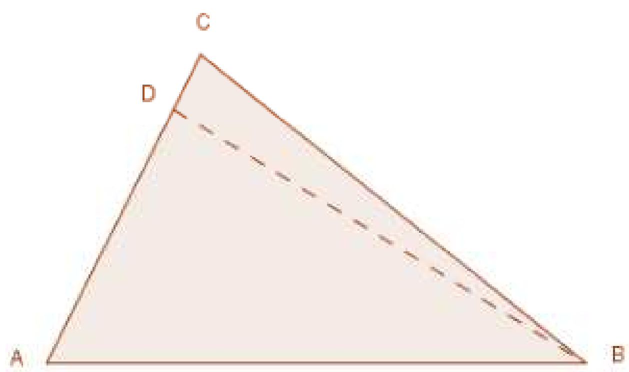

Figura 1.6: Segmento DB tracejado.

Com isso, fomentamos o triângulo ABD. Devemos compará-lo com o triângulo EFG. Note que AD = EG (por construção), $\hat{A} = \hat{E}$ e AB = EF (ambos por hipótese), o que nos diz que os triângulos ABD e EFG são congruentes, pelo postulado 1.1. Por isso, o ângulo $A\hat{B}D = \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\hat{F} = A\hat{B}C$. Logo, temos que $A\hat{B}D = A\hat{B}C$ e em consequência disso, os lados DB e CB coincidem, bem como os pontos D e C. Portanto, os triângulos ABD e ABC coincidem. Ora, como já provamos que os triângulos ABD e EFG são congruentes, então fica claro a congruência entre os triângulos ABC e EFG. ■

Proposição 1.2. (Caso lado, lado, lado - LLL). *Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG tais que AB = EF, BC = FG e AC = EG, conforme figura 1.7. Mas antes de provarmos a congruência entre os mesmos, vejamos as seguintes definições e um lema, cuja demonstração é deixada a cargo do leitor.

Definição 1.2. (Semiplano). *Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a ela. O conjunto formado por todos os pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m é denominado semiplano determinado por m contendo A, o qual é indicado por* P_{mA}.

Definição 1.3. (Triângulo isósceles). *Dizemos que um triângulo é isósceles quando possui dois lados iguais. Tais lados são chamados de laterais e o terceiro lado do triângulo é a base.*

Lema 1.2. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.*

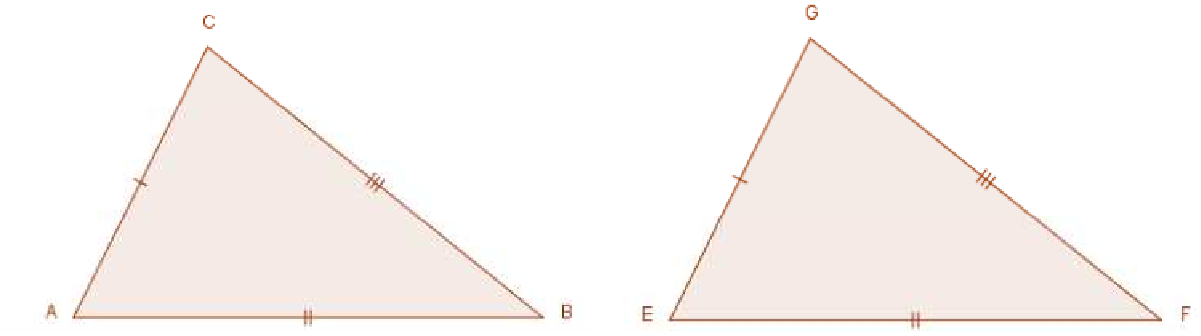

Figura 1.7: Triângulos ABC e EFG.

Retornemos à nossa demonstração. A reta que contém AB determina dois semiplanos, um que contém e outro não contém o ponto C. No semiplano que não contém o ponto C, construa um ângulo de mesma medida do ângulo Ê. Sobre o ângulo construído, marque o ponto D tal que AD = EG e trace o segmento DB. Como AB = EF (por hipótese), DÂB = Ê (por construção) e AD = EG (por construção), então pelo postulado 1.1, os triângulos ABD e EFG são congruentes. Agora, tracemos o segmento CD.

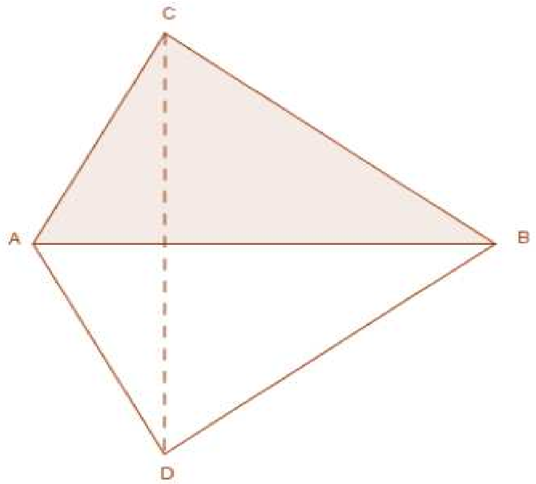

Figura 1.8: Novo triângulo ABD e segmento CD tracejado.

Dessa congruência, temos que DB = GF, mas já tínhamos que GF = BC, então DB = BC. Também construímos AD = EG, porém EG = AC de acordo com a hipótese da proposição, então AD = AC. Sendo assim, os triângulos ADC e BDC são isósceles de base DC. Com isso, segue-se que $A\hat{D}C = A\hat{C}D$ e $C\hat{D}B = D\hat{C}B$, o que nos diz que os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{C}B$ são iguais. Portanto, pelo postulado 1.1, os triângulos ABD e ABC são congruentes. Ora, como já provamos a congruência entre os triângulos ABD e EFG, resta-nos concluir que os triângulos ABC e EFG são congruentes. ■

Definição 1.4. (Triângulo retângulo). *Dizemos que um triângulo é retângulo quando possui um ângulo reto. Chamamos de hipotenusa ao lado oposto ao ângulo reto e de catetos, aos outros dois lados.*

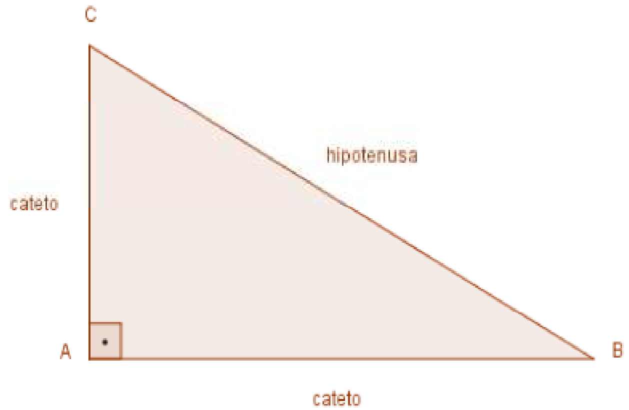

Figura 1.9: Triângulo retângulo ABC.

Proposição 1.3. (Congruência de triângulos retângulos). *Sejam ABC e EFG dois triângulos retângulos. Se ao menos uma das* condições *abaixo for satisfeita, então os triângulos são congruentes.*

(1) Cateto e ângulo oposto congruentes

(2) Cateto e hipotenusa congruentes

(3) Hipotenusa e ângulo agudo congruentes

Demonstração. (1) Considere os triângulos retângulos ABC e EFG que possuem, respectivamente, ângulos retos nos vértices A e E. Admitamos que os triângulos possuam AB = EF e $\hat{C} = \hat{G}$, como mostra a figura 1.10.

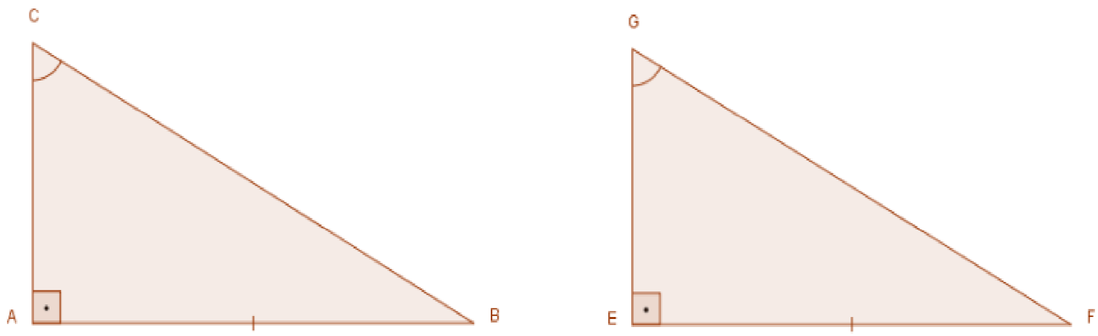

Figura 1.10: Triângulos retângulos ABC e EFG.

Na semirreta S_{AC}, marque o ponto D de tal maneira que AD = EG e trace o segmento DB. Como AD = EG (por construção), Â = Ê (pois são retos) e AB = EF (por hipótese), então pelo postulado 1.1, os triângulos ABD e EFG são congruentes.

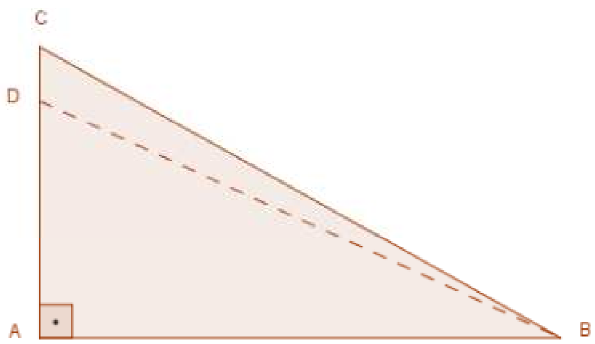

Figura 1.11: Segmento DB tracejado.

Dessa congruência, segue-se que $A\hat{D}B = \hat{G}$. Mas já tínhamos que $A\hat{C}B = \hat{G}$ (por hipótese), o que nos diz que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Logo, os pontos C e D coincidem e, consequentemente, coincidem também os triângulos ABD e ABC. Ora, uma vez que os triângulos ABD e EFG foram congruentes, então os triângulos ABC e EFG também o são.

■

(2) Considere os triângulos retângulos ABC e EFG que possuem, respectivamente, ângulos retos nos vértices A e E. Admitamos que os triângulos possuam CB = GF e AB = EF, como mostra a figura 1.12.

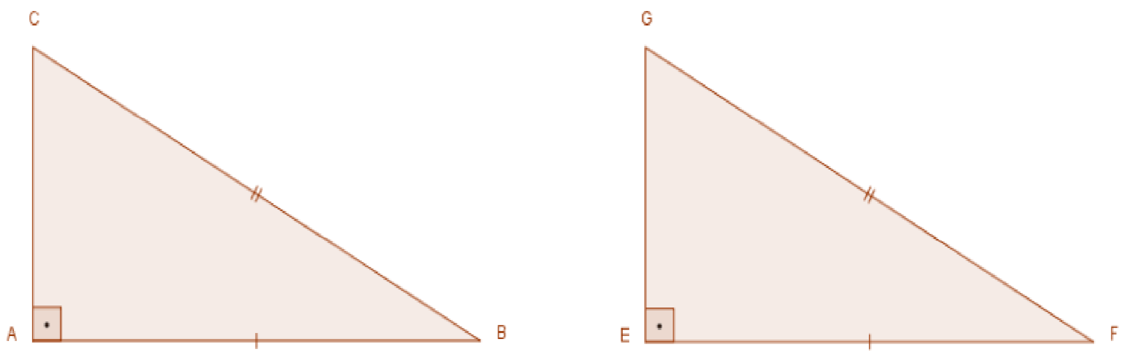

Figura 1.12: Triângulos retângulos ABC e EFG.

Na semirreta S_{AC}, marque um ponto D de modo que AD = EG e trace o segmento DB. Como AD = EG (por construção), $\hat{A} = \hat{E}$ (pois são retos) e AB = EF (por hipótese), então pelo postulado 1.1, os triângulos ABD e EFG são congruentes.

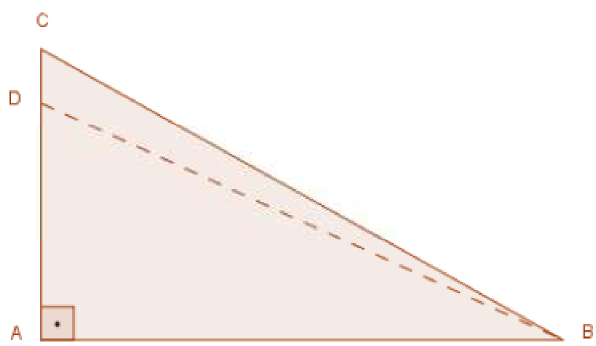

Figura 1.13: Segmento DB tracejado.

Dessa congruência, segue-se que DB = GF. Mas já tínhamos que CB = GF (por hipótese), o que nos diz que DB = CB. Logo, os pontos D e C coincidem e, consequentemente, coincidem também os triângulos ABD e ABC. Ora, uma vez que os triângulos ABD e EFG foram congruentes, então os triângulos ABC e EFG também o são.

■

(3) Considere os triângulos retângulos ABC e EFG que possuem, respectivamente, ângulos retos nos vértices A e E. Admitamos que os triângulos possuam CB = GF e $\hat{B} = \hat{F}$, como mostra a figura 1.14.

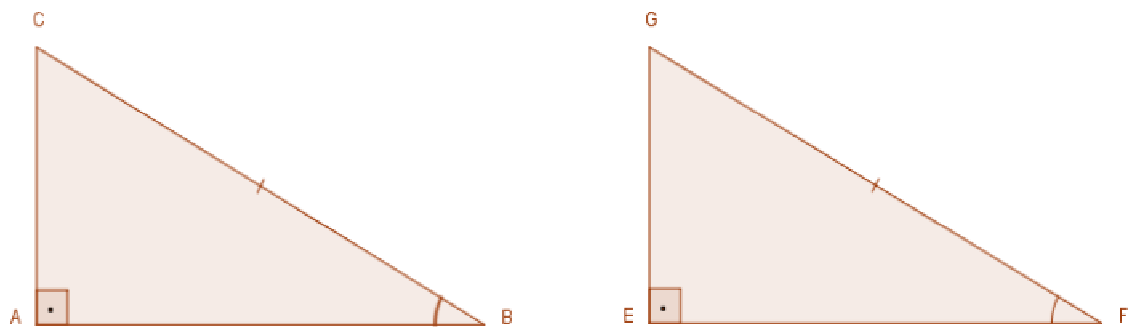

Figura 1.14: Triângulos retângulos ABC e EFG.

Na semirreta S_{BA}, marque o ponto D de modo que DB = EF e trace o segmento CD. Como DB = EF (por construção), $\hat{B} = \hat{F}$ (por hipótese) e CB = GF (por hipótese), então pelo postulado 1.1, os triângulos DBC e EFG são congruentes.

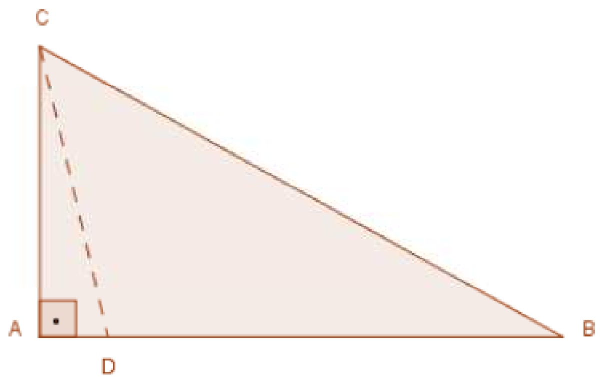

Figura 1.15: Segmento CD tracejado.

Dessa congruência, segue-se que $C\hat{D}B = \hat{E}$ e dado que o ângulo $\hat{E}$ = 90° (pois é reto), não nos resta outra alternativa a não ser concluir que $C\hat{D}B = 90°$. Logo, os pontos A e D coincidem e, consequentemente, coincidem também os triângulos DBC e ABC. Ora, uma vez que os triângulos DBC e EFG foram congruentes, então os triângulos ABC e EFG também o são.

■

1.2 Semelhança de triângulos

Definição 1.5. (Semelhança). *Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de tal maneira que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e seus lados correspondentes sejam proporcionais.*

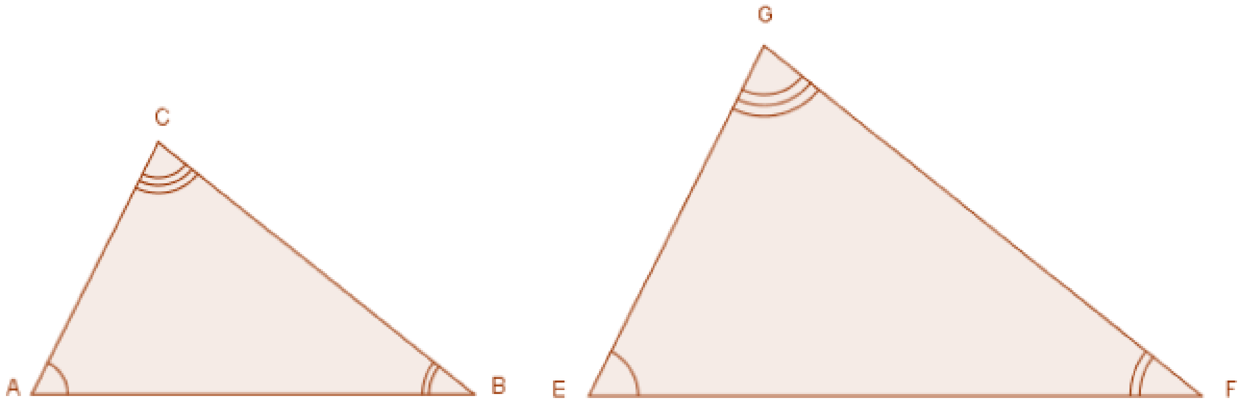

Figura 1.16: Triângulos ABC e EFG.

Se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes de modo que a correspondência biunívoca estabelecida fora A ↔ E, B ↔ F e C ↔ G, então são satisfeitas as seis relações abaixo:

$$\hat{A} = \hat{E} \qquad \hat{B} = \hat{F} \qquad \hat{C} = \hat{G}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}.$$

Chamamos de razão de proporcionalidade ao quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos. Note que dois triângulos congruentes são também semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um, bem como, dois triângulos semelhantes com razão de proporcionalidade igual a um são congruentes.

Proposição 1.4. *Sejam ABC e EFG dois triângulos em que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.*

Antes da demonstração da proposição, devemos ficar a cabo do seguinte lema, cuja prova ficará a cargo do leitor.

Lema 1.3. *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os dois outros lados, então ela os divide sob a mesma razão.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG tais que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, como propõe a hipótese da proposição. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em180°, então a igualdade entre os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{E}$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{F}$ implica a congruência entre os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{G}$. Basta provarmos que os lados correspondentes são proporcionais.

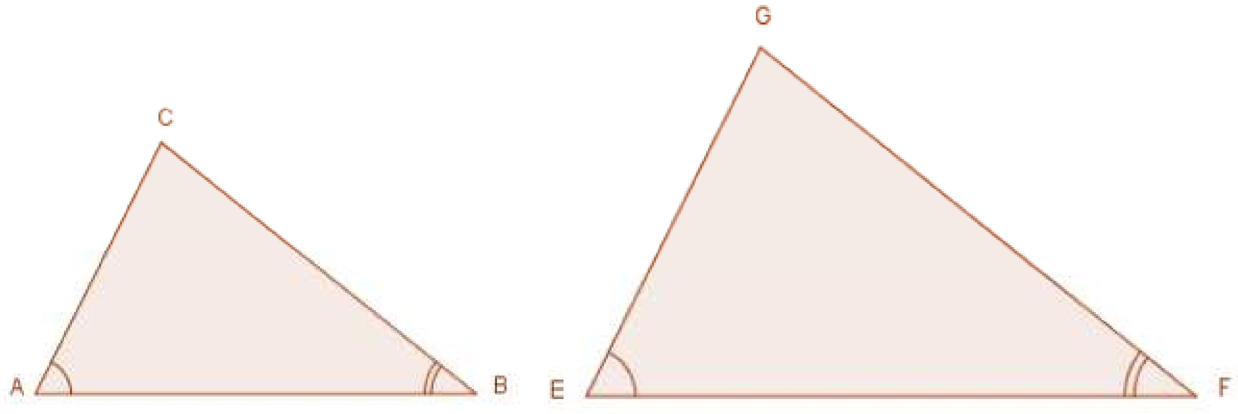

Figura 1.17: Triângulos ABC e EFG.

Na semirreta S_{EF}, marque o ponto H de modo que AB = EH e trace, passando pelo ponto H, uma reta paralela ao lado GF. Chame de J ao ponto de interseção dessa reta com o lado EG. Perceba que os ângulos correspondentes $E\hat{H}J$ e $\hat{F}$ são congruentes, pois a reta que passa por EF é transversal às paralelas JH e GF.

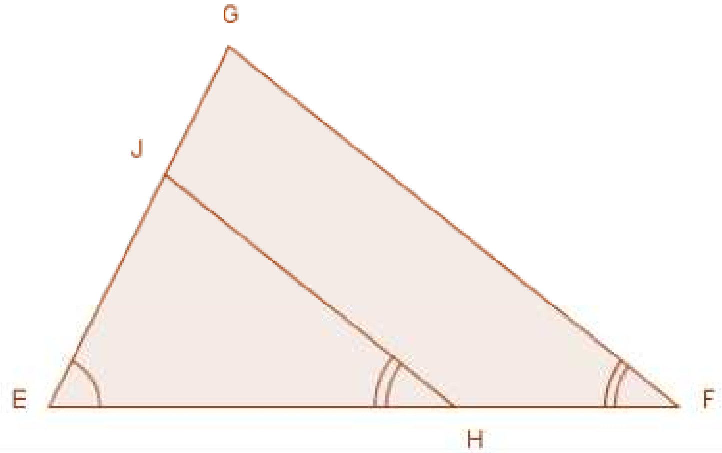

Figura 1.18: Segmento JH traçado.

Com isso, fomentamos um novo triângulo EHJ, que é congruente ao triângulo ABC, pela proposição 1.1, pois Â = Ê (por hipótese), AB = EH (por construção) e $\hat{B} = \hat{F} = E\hat{H}J$ (por hipótese). Em consequência disso, segue-se que AC = EJ e fazendo uso do lema 1.3, obtemos:

$$\frac{\overline{EJ}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}. \tag{1}$$

Mais uma vez, devemos nos concentrar no triângulo EFG considerado inicialmente. Na semirreta S_{GE}, marque o ponto K de modo que KG = AC e trace, passando pelo ponto K, uma reta paralela ao lado EF. Chame de L ao ponto de interseção dessa reta com o lado GF. Perceba que os ângulos $G\hat{K}L$ e $\hat{E}$ são congruentes, assim como os ângulos correspondentes $G\hat{L}K$ e $\hat{F}$, pois a reta que passa por GF é transversal às paralelas KL e EF.

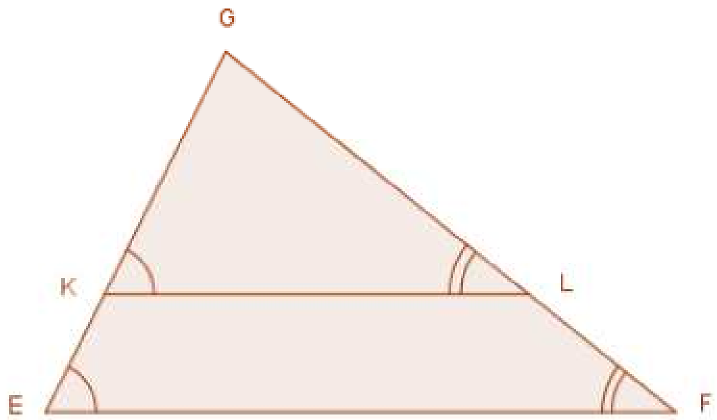

Figura 1.19: Segmento KL traçado.

Com isso, fomentamos um novo triângulo KLG, que é congruente ao triângulo ABC, pela proposição 1.1, pois $\hat{C} = \hat{G}$, AC = KG (por construção) e Â = Ê = $G\hat{K}L$ (por hipótese). Em consequência disso, segue-se que CB = GL e fazendo uso do lema 1.3, obtemos:

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{GL}}{\overline{GF}} \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}. \tag{2}$$

De (1) e (2), concluímos a seguinte proporcionalidade e fica, portanto, justificada a semelhança existente entre os triângulos ABC e EFG.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}. \qquad \blacksquare$$

Proposição 1.5. *Sejam ABC e EFG dois triângulos em que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG tais que $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, como propõe a hipótese da proposição. Construamos o triângulo HIJ tal que HI = EF, $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$, conforme a figura 1.20.

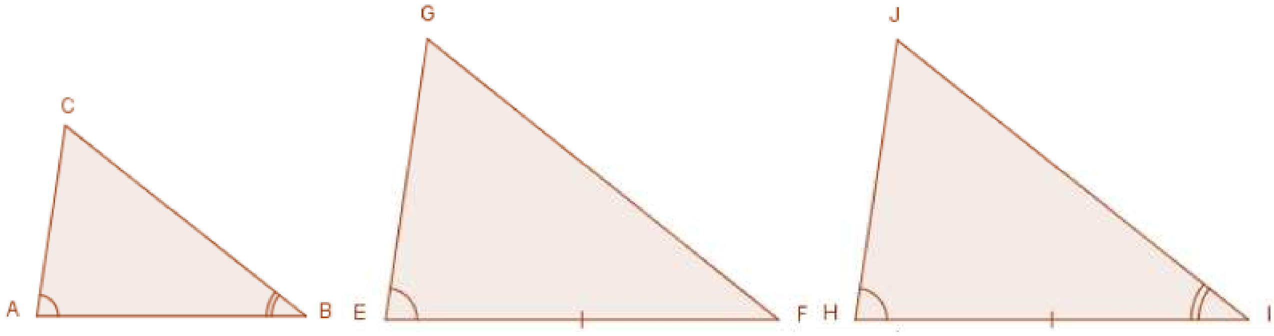

Figura 1.20: Triângulos ABC, EFG e HIJ.

Com base na proposição 1.4, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes, haja vista que $\hat{H} = \hat{A}$ e $\hat{I} = \hat{B}$ (por construção). Sendo assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Ora, como HI = EF (por construção) e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ (por hipótese), então HJ = EG. Além disso, $\hat{A} = \hat{E} = \hat{H}$, o que nos diz que são congruentes os triângulos EFG e HIJ, pelo postulado 1.1. Portanto, o fato de termos provado a semelhança entre os triângulos ABC e HIJ garante a semelhança entre os triângulos ABC e EFG.

■

Proposição 1.6. *Sejam ABC e EFG dois triângulos em que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Considere os triângulos ABC e EFG tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$, como propõe a hipótese da proposição. Construamos o triângulo HIJ tal que $\hat{H} = \hat{A}$, HI = EF e HJ = EG, conforme a figura 1.21.

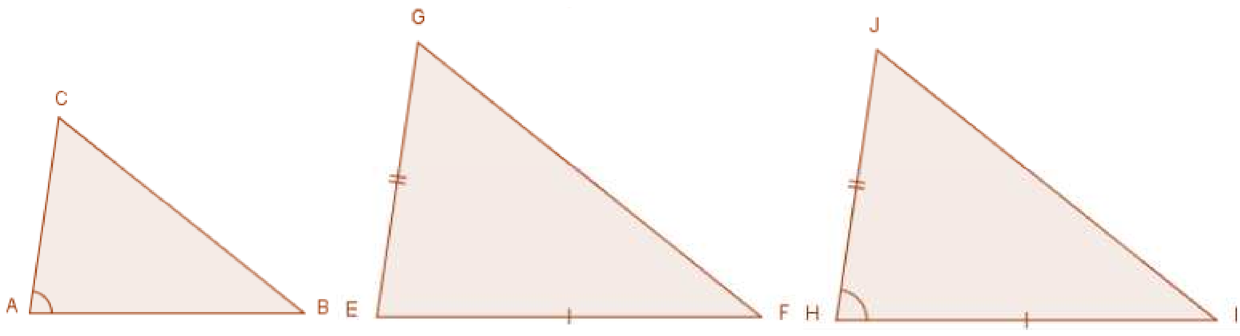

Figura 1.21: Triângulos ABC, EFG e HIJ.

Como HI = EF e HJ = EG (por construção) e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$ (por hipótese), então $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}$. Além disso, $\hat{H} = \hat{A}$, o que nos diz que os triângulos ABC e HIJ são semelhantes, com base na proposição 1.5. Sendo assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{JI}}$. Ora, como HI = EF (por construção) e $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{GF}}$ (por hipótese), então JI = GF. Por isso, são congruentes os triângulos EFG e HIJ, pela proposição 1.2. Portanto, o fato de termos provado a semelhança entre os triângulos ABC e HIJ garante a semelhança entre os triângulos ABC e EFG. ■

Uma vez apresentados e demonstrados todos esses relevantes resultados, podemos adentrar de fato no principal teorema do trabalho, o Teorema de Pitágoras.

2 O Teorema de Pitágoras

A seguir, apresentamos algumas das principais demonstrações do Teorema de Pitágoras, as quais podem ser encontradas em [3]. Como já mostramos, são provas que contemplam tanto um ponto de vista matemático quanto dos detalhes históricos envolvidos. De um modo geral, as provas do Teorema de Pitágoras se dividem em três tipos: por dissecção, por áreas e por similaridade.

As demonstrações realizadas por dissecção estão ligadas ao fato de os ângulos agudos de um triângulo retângulo serem complementares, isto é, têm soma igual a 90 graus. Já as justificativas que utilizam áreas dependem fundamentalmente dos resultados de áreas de paralelogramos e triângulos. Finalmente, as provas por similaridade dependem das relações de proporcionalidade entre figuras semelhantes.

2.1 Algumas demonstrações

Teorema 2.1. (Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração 1. Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa CB com lados medindo a, b e c, conforme a figura 2.1. Considere m e n como sendo, respectivamente, as projeções dos catetos b e c sobre a hipotenusa e chame de h a altura AD relativa ao lado BC. Com isso, formamos dois ângulos retos: $C\hat{D}A$ e $A\hat{D}B$.

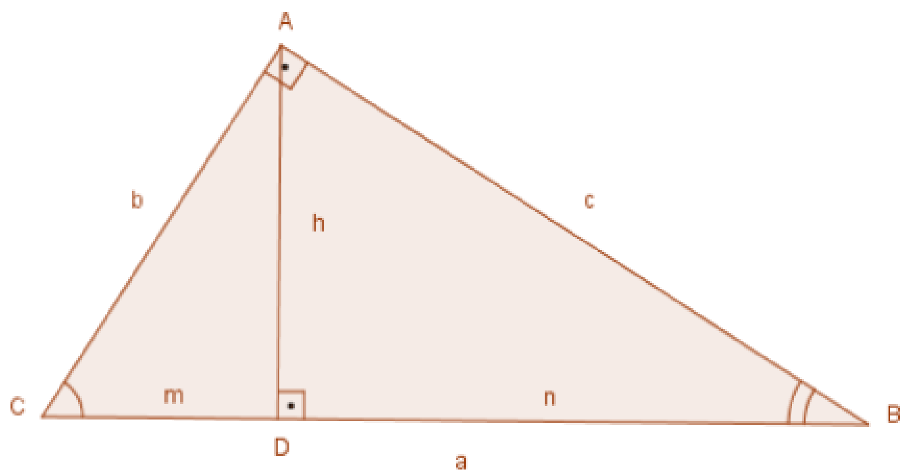

Figura 2.1: Triângulo retângulo ABC de hipotenusa CB.

Feito isso, surgiram dois novos triângulos CDA e ADB, ambos retângulos.

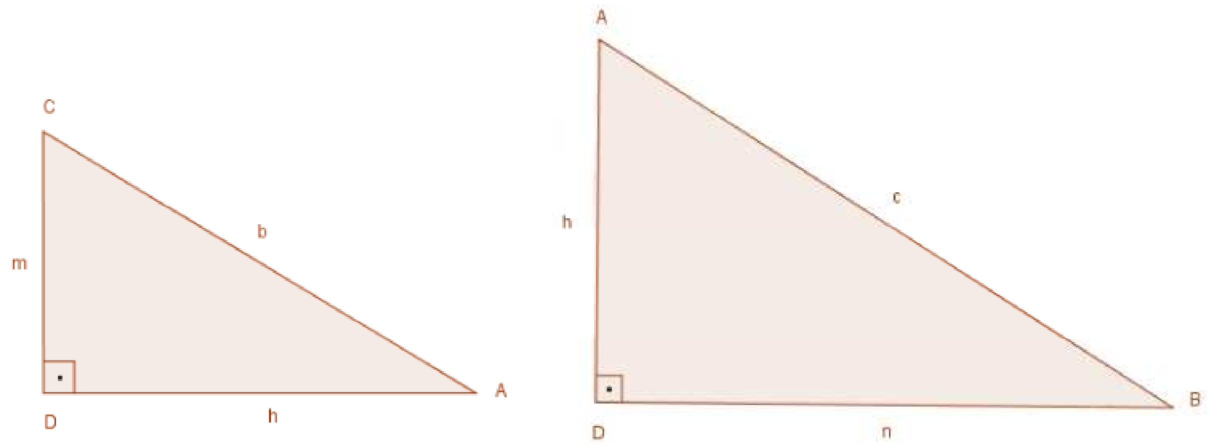

Figura 2.2: Novos triângulos retângulos CDA e ADB.

Na figura 2.1, observamos que $D\hat{C}A + C\hat{A}D = 90°$ e $C\hat{A}D + D\hat{A}B = 90°$, o que nos diz que $D\hat{C}A = D\hat{A}B$. Por isso e por $C\hat{D}A = A\hat{D}B = 90°$, temos que os triângulos DAC e DBA são semelhantes, pela proposição 1.4. Dessa semelhança, concluímos que $C\hat{A}D = A\hat{B}D$. Por outro lado, também observamos que $A\hat{B}C = A\hat{B}D$ (ver figura 2.1), o que nos diz que $C\hat{A}D = A\hat{B}C$. Por isso e por $C\hat{D}A = C\hat{A}B = 90°$, temos que os triângulos DAC e ABC são semelhantes, pela proposição 1.4. Agora, como a semelhança de triângulos é transitiva, então fica clara a semelhança entre os triângulos DBA e ABC, ou seja, conseguimos mostrar que todos os triângulos são semelhantes entre si e podemos desfrutar da proporcionalidade existente entre seus respectivos lados.

Portanto, da semelhança entre os triângulos DAC e ABC, segue o seguinte:

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = am \tag{1}$$

E da semelhança entre os triângulos DBA e ABC:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = an \tag{2}$$

Somando (1) e (2) e observando que m + n = a, obtemos:

$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, o que finaliza a demonstração.

Além disso, podemos concluir outra importante relação em um triângulo retângulo: o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela. De fato, da semelhança entre os triângulos DAC e ABC, segue-se que:

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{c} \Rightarrow bc = ah. \qquad \blacksquare$$

Demonstração 2. Seja ABCD um quadrado de lado k e considere, em cada um dos lados do quadrado, os segmentos b e c de sorte que b + c = k. Prossigamos fracionando o nosso quadrado original em quatro novos triângulos retângulos mais um quadrado menor, conforme figura 2.3. Chame de a o lado do quadrado menor.

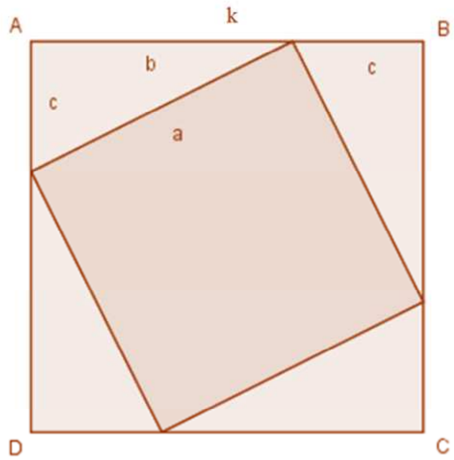

Figura 2.3: Quadrado ABCD – primeira divisão.

É fácil ver que esses quatro triângulos são todos congruentes entre si e têm b como medida da base e c como medida da altura. Logo, cada um dos triângulos tem como área comum $\frac{bc}{2}$.

Por outro lado, temos que a área do quadrado ABCD é igual à soma das áreas dos quatro triângulos construídos mais a área do quadrado menor. Assim,

$$k^2 = \frac{4bc}{2} + a^2 = a^2 + 2bc. \tag{1}$$

Podemos dividir o quadrado ABCD de outra maneira, como mostra a figura 2.4.

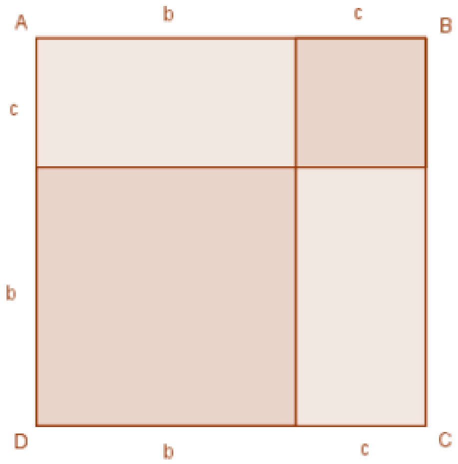

Figura 2.4: Quadrado ABCD – segunda divisão.

Com essa nova divisão, construímos dois novos quadrados (um de lado b e outro de lado c) e dois novos retângulos com lados medindo b e c. Dessa forma, conseguimos obter a área do quadrado ABCD como soma das áreas dos dois novos quadrados mais as áreas dos dois novos retângulos.

$$k^2 = b^2 + c^2 + 2bc. \tag{2}$$

Comparando as expressões (1) e (2), conseguimos:

$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$, o que conclui nossa demonstração. ■

A seguir é apresentada uma adaptação da demonstração do Teorema de Pitágoras feita por George Pólya. Para compreendemo-la melhor, precisamos ficar a cabo de uma consequência muito importante da semelhança de triângulos (para falar a verdade, semelhança de figuras planas quaisquer), a qual segue em forma de um corolário.

Corolário 2.1. *A razão entre as áreas de duas figuras planas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.*

Demonstração 3. Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa CB com lados medindo a, b e c. Construa sobre os seus lados figuras semelhantes F_1, F_2 e F_3 de modo que área(F_1) = área(F_2) + área(F_3), conforme a figura 2.5.

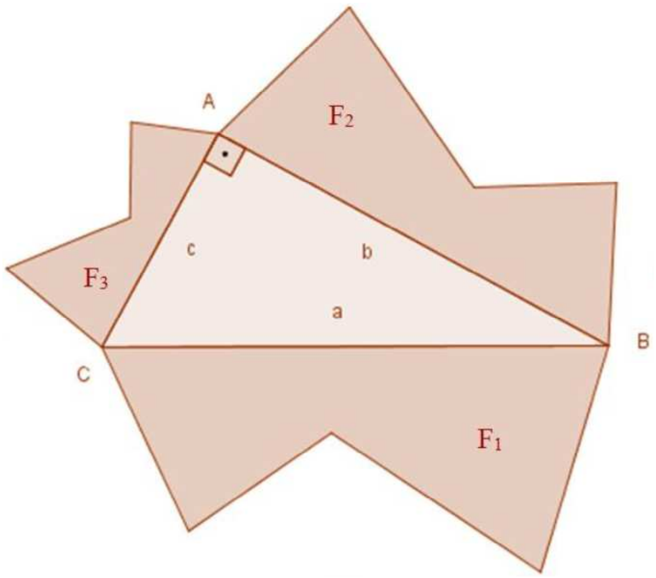

Figura 2.5: Figuras semelhantes F_1, F_2 e F_3.

Como as figuras F_1, F_2 e F_3 são semelhantes e os seus lados correspondentes são a, b e c, então:

$$\frac{b}{a} \rightarrow \text{razão de proporcionalidade entre } F_2 \text{ e } F_1$$

$$\frac{c}{a} \rightarrow \text{razão de proporcionalidade entre } F_3 \text{ e } F_1.$$

Com base no corolário 2.1, podemos estabelecer o seguinte:

$$\frac{\text{área}(F_2)}{\text{área}(F_1)} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ e } \frac{\text{área}(F_3)}{\text{área}(F_1)} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}.$$

Somando as expressões acima e usando o fato de área(F_1) = área(F_2) + área(F_3), vem que:

$$\frac{\text{área}(F_2)}{\text{área}(F_1)} + \frac{\text{área}(F_3)}{\text{área}(F_1)} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\text{área}(F_2) + \text{área}(F_3)}{\text{área}(F_1)} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\text{área}(F_1)}{\text{área}(F_1)} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2. \qquad \blacksquare$$

Ou seja, mostramos que podemos considerar figuras semelhantes quaisquer sobre os lados de um triângulo retângulo, sendo suficiente apenas a condição de suas áreas se complementarem para ser satisfeito o Teorema de Pitágoras.

2.2 Recíproca do Teorema de Pitágoras

Uma vez demonstrado o Teorema de Pitágoras, eis que surge a seguinte pergunta: dado um triângulo de lados a, b e c tais que $a^2 = b^2 + c^2$, será que esse triângulo é retângulo de hipotenusa a? Para responder a essa pergunta, vejamos o seguinte teorema, o qual trata da recíproca do Teorema de Pitágoras, justificando que tal resultado é uma proposição bicondicional.

Teorema 2.2. (Recíproca do Teorema de Pitágoras). *Se um triângulo de lados a, b e c é tal que $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo de hipotenusa a.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo de lados a, b e c tal que $a^2 = b^2 + c^2$, como propõe a hipótese do teorema. Faremos a demonstração de duas maneiras distintas: uma usando congruência de triângulos e outra, fazendo algumas considerações sobre a medida do ângulo Â.

Primeira maneira. Construa um triângulo retângulo cujos catetos meçam exatamente b e c (ver figura 2.6).

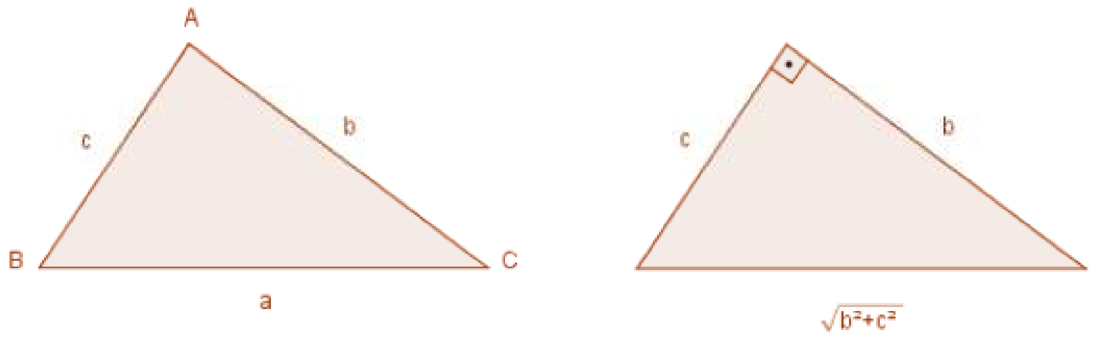

Figura 2.6: Triângulo retângulo de catetos b e c.

De acordo com o Teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse novo triângulo será igual a $\sqrt{b^2 + c^2}$. Assim, esse triângulo - que é retângulo - tem lados medindo a, b e c. Mas, pela proposição 1.2, podemos afirmar que ele é congruente ao triângulo ABC, pois possuem seus três lados correspondentes congruentes. Portanto, os ângulos correspondentes nos dois triângulos também são congruentes, o que nos diz que o ângulo formado entre os lados b e c, no triângulo ABC, é reto. Consequentemente, o triângulo ABC é de fato retângulo e sua hipotenusa mede exatamente a. ■

Segunda maneira. Façamos algumas considerações sobre a medida do ângulo Â.

Se $\hat{A} < 90°$, então a projeção ortogonal de C sobre o lado AB resulta em um ponto D que pertence a esse segmento. Chame $\overline{AD} = x$ e $\overline{CD} = h$.

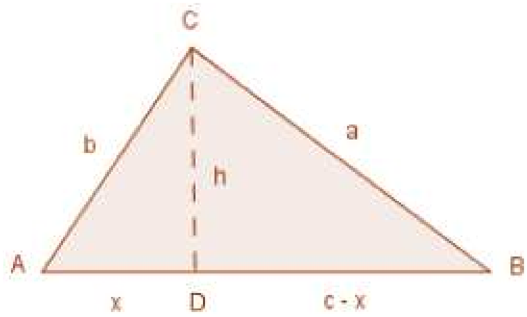

Figura 2.7: Triângulo ABC.

Como o triângulo ADC é retângulo, então $b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$.

Como o triângulo BDC é retângulo, então:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2, \text{ pois } cx \geq 0.$$

Se $\hat{A} > 90°$, então a projeção ortogonal de C sobre a reta que contém AB resulta em um ponto D que não pertence a esse segmento. Chame $\overline{DA} = x$ e $\overline{CD} = h$.

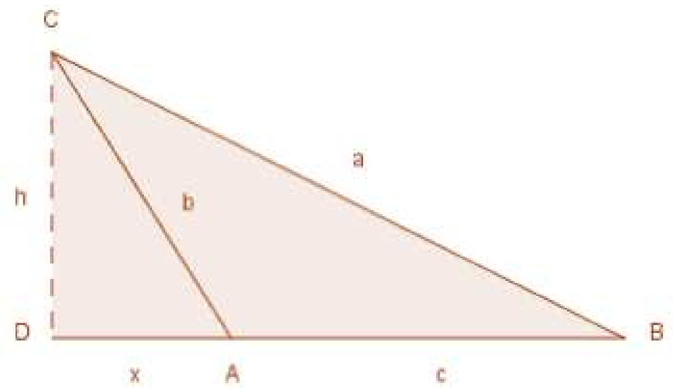

Figura 2.8: Triângulo ABC.

Como o triângulo ADC é retângulo, então $b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$.

Como o triângulo BDC é retângulo, então:

$$a^2 = h^2 + (x + c)^2$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + x^2 + 2cx + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2, \text{ pois } cx \geq 0.$$

Ora, em nenhum dos dois casos considerados, conseguimos obter $a^2 = b^2 + c^2$. Dessa forma, resta-nos apenas concluir que Â = 90°, o que nos leva a crer que o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa a. ■

2.3 Ternos pitagóricos

Já sabemos que um triângulo de lados 2, 5 e $\sqrt{29}$ é retângulo, pois:

$$\left(\sqrt{29}\right)^2 = 2^2 + 5^2.$$

Desde a antiguidade até os tempos atuais, um fato muito intrigante é a busca por triângulos retângulos cujos lados sejam representados por números inteiros positivos. É sabido que o famoso triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas quem se arisca afirmar que o triângulo de lados 372, 925 e 997 é retângulo? Esse é o triângulo retângulo de maior perímetro com lados menores que 1000. Com base nisso, nossa curiosidade nos leva à seguinte pergunta: como encontrar triângulos retângulos cujos lados sejam dados por números inteiros positivos? Vamos tentar encontrar uma solução para essa pergunta.

Definição 3.1. (Ternos pitagóricos). *Dados a, b e c inteiros positivos, com a > b e a > c, dizemos que (b, c, a) é um terno pitagórico se* $a^2 = b^2 + c^2$.

É fácil ver que (6, 8, 10) e (5, 12, 13) são exemplos de ternos pitagóricos. Dizemos que um terno pitagórico (b, c, a) é primitivo quando b e c forem primos entre si, isto é, quando o máximo divisor comum entre b e c for 1. Logo, (8, 15, 17) é um exemplo de terno pitagórico primitivo, haja vista que 8 e 15 são primos entre si. Naturalmente, todo terno da forma (3k, 4k, 5k) é pitagórico e não primitivo, para algum k inteiro maior que 1. De fato,

$$(5k)^2 = (3k)^2 + (4k)^2$$

$$25k^2 = 9k^2 + 16k^2$$

$$25k^2 = 25k^2$$

Quer quebrar um pouco a cabeça? Tente encontrar um terno pitagórico primitivo diferente de (3, 4, 5), (8, 15, 17) e (5, 12, 13).

Viu como dá trabalho? Por isso, vamos encontrar uma fórmula para gerar ternos pitagóricos. Sendo m e n inteiros positivos com m > n, suponha:

$$b = m^2 - n^2, \ \ c = 2mn \ \text{ e } \ a = m^2 + n^2.$$

Observe que o terno (b, c, a) é pitagórico, pois:

$$b^2 + c^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = a^2.$$

Dessa forma, para quaisquer m e n inteiros positivos, o terno (b, c, a) é pitagórico. Por exemplo, para m = 10 e n = 9:

$$b = 10^2 - 9^2 = 100 - 81 = 19, \ \ c = 2.10.9 = 180 \ \text{ e } \ a = 10^2 + 9^2 = 181.$$

Daí,

$$b^2 + c^2 = 19^2 + 180^2 = 361 + 32400 = 32761 = 181^2 = a^2.$$

Assim, o terno pitagórico associado será (19, 180, 181), que coincidentemente é primitivo, pois 19 e 180 são primos entre si. Entretanto isso não aconteceu por acaso, mas sim pelo fato de tomarmos m e n primos entre si. Vejamos um caso em que m e n não sejam primos entre si. Por exemplo, para m = 9 e n = 6:

$$b = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45, \ \ c = 2.9.6 = 108 \ \text{ e } \ a = 9^2 + 6^2 = 117.$$

Daí,

$$b^2 + c^2 = 45^2 + 108^2 = 2025 + 11664 = 13689 = 117^2 = a^2.$$

Assim, o terno pitagórico associado será (45, 108, 117), o qual não é primitivo, pois 45 e 108 não são primos entre si. Além disso, sempre que tomarmos m e n com mesma paridade, isto é, ambos pares ou ambos ímpares, encontraremos ternos pitagóricos não primitivos, visto que todos os termos de cada terno serão pares. Finalmente, veremos um exemplo em que m e n têm mesma paridade. Para m = 7 e n = 3, temos:

$$b = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 = 40,\ \ c = 2.7.3 = 42\ \text{ e }\ a = 7^2 + 3^2 = 58.$$

Daí,

$$b^2 + c^2 = 40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 = 58^2 = a^2.$$

Assim, o terno pitagórico associado será (40, 42, 58), o qual não é primitivo, pois todos os termos do terno são pares, o que implica que 40 e 42 não são primos entre si.

O esquema abaixo resume isso melhor.

$$\begin{cases} \text{m e n de mesma paridade} \rightarrow \text{Terno pitagórico não primitivo} \\ \\ \text{m e n de paridades distintas} \begin{cases} \text{m e n primos entre si} \rightarrow \text{Terno pitagórico primitivo} \\ \text{m e n não primos entre si} \rightarrow \text{Terno pitagórico não primitivo} \end{cases} \end{cases}$$

3 Aplicações do Teorema de Pitágoras

Este capítulo é dedicado às aplicações do Teorema de Pitágoras. Veremos que vários matemáticos estudaram as aplicações desse resultado e de certa forma contribuíram para o seu desenvolvimento. Alguns problemas mais clássicos envolvem a geometria espacial, como o cálculo da altura de um tetraedro regular e a fórmula para determinar a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo. Por outro lado, são abordadas algumas aplicações mais sofisticadas do Teorema de Pitágoras, como o problema das lúnulas de Hipócrates e o problema que relaciona as faces de um tetraedro com um triedro trirretangular. Por fim, apresentamos uma questão retirada de um livro didático que mostra como podemos utilizar tal resultado em algumas situações em nosso cotidiano de modo a facilitar nossa vida.

Há outras aplicações do Teorema de Pitágoras que podemos sugerir para o deleite do leitor, também bastante clássicas e que nos permite deduzir várias fórmulas matemáticas importantes. São aplicações com as quais, vez por outra, deparamo-nos, mas que em pouquíssimas vezes temos a oportunidade de compreender melhor como se dá sua construção. Dentre elas, enfatizamos: os casos de inscrição e circunscrição de polígonos regulares, o cálculo das diagonais do quadrado e do cubo, a fórmula para determinar a distância entre dois pontos, a relação fundamental da trigonometria e o cálculo do valor absoluto de um número complexo.

Proposição 3.1. *Determinar a altura de um tetraedro regular.*

Demonstração. Seja ABCD um tetraedro regular de aresta a. Devemos calcular a distância entre a face BCD e o vértice A. Como nosso poliedro é regular, então todas as suas faces são triângulos equiláteros cujos ângulos internos medem 60° e a projeção do ponto A sobre a base BCD coincide exatamente com seu centro. Chame de P a essa projeção.

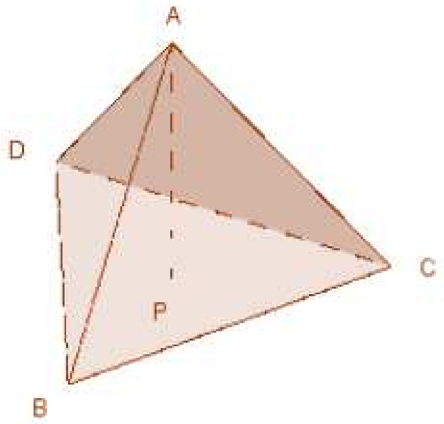

Figura 3.1: Tetraedro regular.

Tome o ponto médio M da aresta BC, trace a altura DM (perpendicular a BC) e construa o triângulo retângulo DMC.

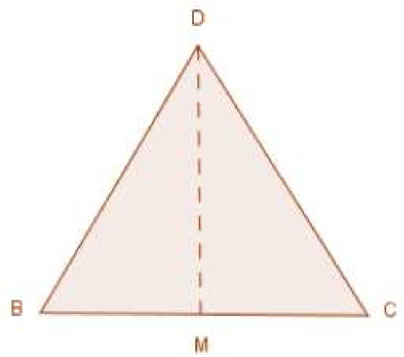

Figura 3.2: Triângulo retângulo DMC.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, conseguimos encontrar uma fórmula para calcular a altura de um triângulo equilátero.

$$\overline{DC}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{MC}^2 \Rightarrow a^2 = \overline{DM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \overline{DM}^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \overline{DM}^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \overline{DM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Prosseguimos traçando o segmento PC e construindo mais um triângulo retângulo, conforme figura 3.3.

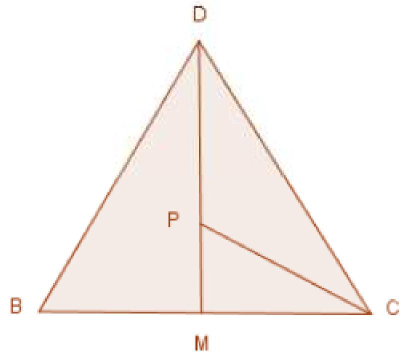

Figura 3.3: Triângulo retângulo PMC.

Note que os triângulos PMC e CMD são semelhantes, pela proposição 1.4, pois $P\hat{M}C = C\hat{M}D = 90^{o}$ e $P\hat{C}M = C\hat{D}M = 30^{o}$ (pois DP e CP são bissetrizes, ou seja, dividem o ângulo ao meio). Da proporcionalidade entre os lados correspondentes, segue-se:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{\overline{PM}}{\frac{a}{2}} = \frac{\overline{PC}}{a} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{\overline{PC}}{2}.$$

Por outro lado, como $P\hat{D}C = P\hat{C}D = 30^{o}$, então o triângulo DPC é isósceles e, consequentemente, $\overline{DP} = \overline{PC}$. Daí,

$$\overline{DM} = \overline{DP} + \overline{PM} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = \overline{DP} + \frac{\overline{DP}}{2} \Rightarrow a\sqrt{3} = 2\overline{DP} + \overline{DP} \Rightarrow \overline{DP} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Finalmente, focando no triângulo ADP, vem que:

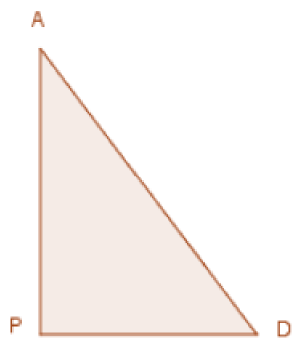

Figura 3.4: Triângulo retângulo APD.

$$\overline{AD}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{AP}^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \overline{AP}^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{3} + \overline{AP}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AP}^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto, a altura de um tetraedro regular de aresta a é dada por $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. ■

3.1 Lúnulas de Hipócrates

Definição 3.1. *Chamamos de lúnula ao complemento de um círculo em outro, de modo que ambos se intersectem e nenhum seja subconjunto do outro. Em outras palavras, lúnula é a região limitada por dois arcos circulares de raios distintos.*

Proposição 3.2. (Lúnulas de Hipócrates). *Em um triângulo retângulo, a soma das áreas das lúnulas formadas sobre os catetos desse triângulo é igual à área do mesmo.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa CB e considere as lúnulas E e D formadas sobre os catetos desse triângulo, como na figura 3.5. Devemos mostrar que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo ABC.

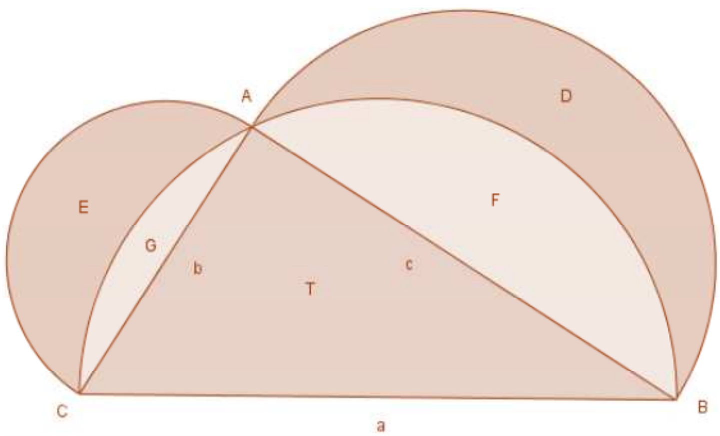

Figura 3.5: Triângulo retângulo ABC e lúnulas E e D.

Para obtermos essas lúnulas, traçamos os semicírculos de diâmetros CA e AB sobre os catetos do triângulo ABC. Em seguida, traçamos o semicírculo de diâmetro CB, o qual certamente passa pelo ponto A haja vista que o ângulo Â é reto. Finalmente, fazemos a diferença entre os dois semicírculos menores e o semicírculo de maior diâmetro. Chamemos, ainda, de T o triângulo ABC e de G e F os segmentos circulares fomentados.

A área do semicírculo de diâmetro CB é dada por:

$$\text{área(G)} + \text{área(T)} + \text{área(F)} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}. \tag{1}$$

A área do semicírculo de diâmetro CA é dada por:

$$\text{área(E)} + \text{área(G)} = \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi b^2}{8}. \tag{2}$$

E a área do semicírculo de diâmetro AB é dada por:

$$\text{área(F)} + \text{área(D)} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi c^2}{8}. \tag{3}$$

Somando as expressões (2) e (3) e usando o fato de o triângulo ABC ser retângulo, segue-se que:

$$\text{área(E)} + \text{área(G)} + \text{área(F)} + \text{área(D)} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{8} = \frac{\pi a^2}{8}. \tag{4}$$

Por outro lado, na terceira demonstração do Teorema de Pitágoras apresentada, mostramos que as áreas de quaisquer figuras semelhantes formadas sobre os lados de um triângulo retângulo são complementares. Portanto, nada mais justo do que afirmar que as áreas dos semicírculos construídos são complementares (semicírculos são sempre semelhantes).

De fato, comparando as expressões (1) e (4), concluímos que:

$$\text{área(G)} + \text{área(T)} + \text{área(F)} = \text{área(E)} + \text{área(G)} + \text{área(F)} + \text{área(D)}$$

$$\text{área(T)} = \text{área(E)} + \text{área(D)}. \qquad \blacksquare$$

3.2 O Teorema de Pitágoras no espaço

A seguir, veremos duas aplicações que consistem na extensão do Teorema de Pitágoras para o espaço.

Proposição 3.3. *Em um paralelepípedo retângulo, a medida da sua diagonal é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das suas dimensões.*

Demonstração. Seja ABCDEFGH um paralelepípedo retângulo com dimensões a, b e c. Chamamos de diagonal do paralelepípedo a todo segmento de reta que une dois vértices que não pertencem a uma mesma face. Como as diagonais de um paralelepípedo retângulo são congruentes, então podemos considerar a diagonal AG para realizarmos a demonstração. A consequência de o paralelepípedo ser retângulo é que o ângulo formado entre arestas consecutivas é sempre igual a 90 graus.

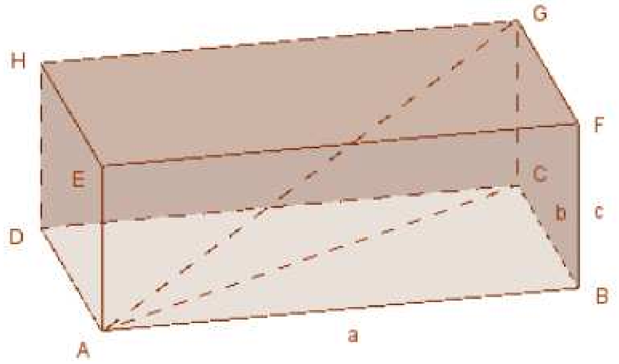

Figura 3.6: Paralelepípedo retângulo ABCDEFGH e diagonal AG.

Primeiramente, vamos calcular o comprimento do segmento AC, hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = a^2 + b^2$$

Por outro lado, no triângulo retângulo ACG, temos o seguinte:

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \overline{AG} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad \blacksquare$$

A próxima proposição é um problema proposto no livro *Temas e problemas elementares*, da coleção do Professor de Matemática, publicação da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática.

Proposição 3.4. *Em um tetraedro com um triedro trirretangular, o quadrado da área da face oposta a esse triedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.*

Demonstração. Seja ABCO um tetraedro com um triedro trirretangular no vértice O tal que $\overline{AO} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{CO} = c$, conforme figura 3.7. Devemos mostrar que o quadrado da área da face ABC é igual à soma dos quadrados das áreas das faces AOC, COB e AOB.

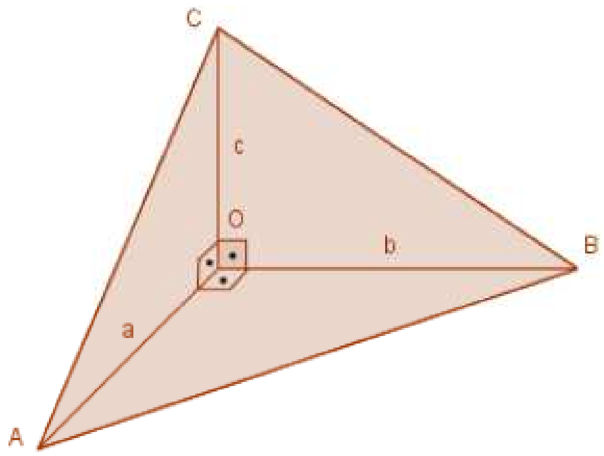

Figura 3.7: Tetraedro ABCO com um triedro trirretangular.

Vamos seccionar nosso tetraedro com um plano que contém o segmento CO e é perpendicular a AB. Chame de D o ponto de interseção entre esse plano e o segmento AB. Feito isso, construímos um novo triângulo retângulo COD. Digamos que $\overline{OD} = d$ e $\overline{CD} = h$.

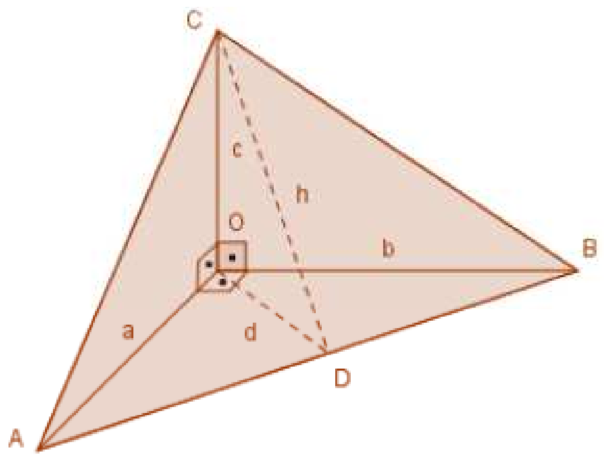

Figura 3.8: Novo triângulo retângulo COD fomentado.

As áreas das faces AOC, COB e AOB são dadas por:

$$\text{área}(AOC) = \frac{ac}{2},\ \text{área}(COB) = \frac{bc}{2} \text{ e área}(AOB) = \frac{ab}{2}.$$

Agora, recordemos que em um triângulo retângulo o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela. Por isso, no triângulo AOB:

$$ab = d\overline{AB} \Rightarrow a^2b^2 = d^2\overline{AB}^2.$$

Ainda sobre o mesmo triângulo AOB, temos que $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$, enquanto que no triângulo COD verificamos $h^2 = c^2 + d^2$.

Sendo assim, a soma dos quadrados das áreas das faces AOC, COB e AOB é:

$$\text{área}^2(AOC) + \text{área}^2(COB) + \text{área}^2(AOB) =$$

$$\left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = \frac{a^2c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{4} = \frac{c^2(a^2 + b^2) + d^2\overline{AB}^2}{4} =$$

$$\frac{c^2\overline{AB}^2 + d^2\overline{AB}^2}{4} = \frac{\overline{AB}^2(c^2 + d^2)}{4} = \frac{\overline{AB}^2h^2}{4} = \text{área}^2(ABC). \quad \blacksquare$$

Observação 3.1. Na verdade, esse último resultado é ainda mais geral. Se uma figura plana qualquer for projetada em três planos perpendiculares dois a dois, então o quadrado da área dessa figura será igual à soma dos quadrados das áreas das três projeções. Essa observação pode ser encontrada em [6].

A próxima aplicação do Teorema de Pitágoras é um problema proposto em um livro didático, [5], o qual mostra como podemos utilizar tal resultado em algumas situações em nosso cotidiano de modo a facilitar nossa vida.

“Um grupo de escoteiros deve atravessar um rio caudaloso. Para isso, o melhor nadador deve cruzar o rio com uma corda e amarrá-la do outro lado. Qual deve ser o comprimento aproximado da parte esticada da corda?”

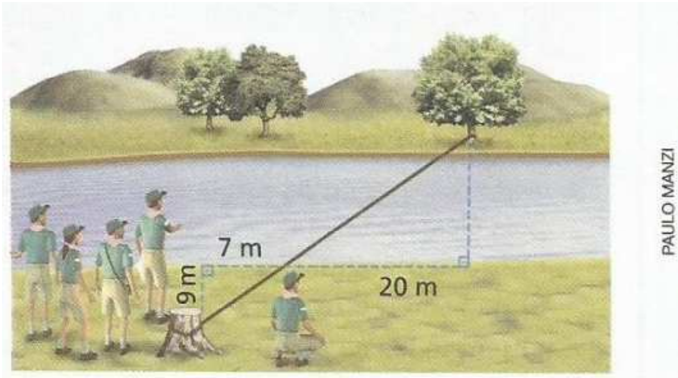

Figura 3.9: Ilustração.

Solução: Primeiramente, note que o menor triângulo que aparece na figura é retângulo e, por isso, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para calcularmos o valor da sua hipotenusa.

$$x^2 = 9^2 + 7^2$$

$$x^2 = 81 + 49$$

$$x^2 = 130$$

$$x = \sqrt{130} \cong 11{,}4 \text{ metros.}$$

Agora, observe que os dois triângulos que aparecem na figura são semelhantes, pela proposição 1.4.

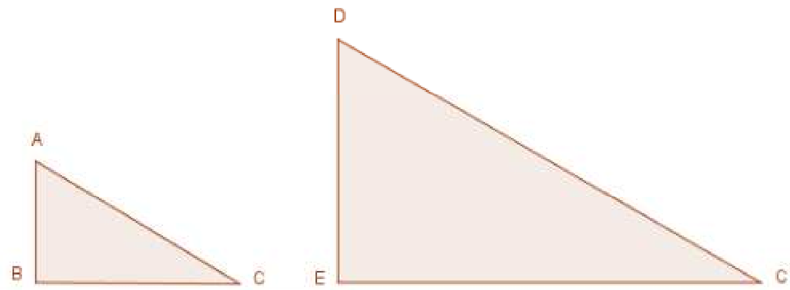

Figura 3.10: Triângulos retângulos ABC e DEC.

Pois, $A\hat{B}C = D\hat{E}C = 90°$ e $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ (pois, na ilustração, são ângulos opostos pelo vértice). Da proporcionalidade entre os lados correspondentes, segue-se:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{7}{20} = \frac{11{,}4}{\overline{DC}} \Rightarrow \overline{DC} = \frac{228}{7} \Rightarrow \overline{DC} = 32{,}57 \text{ metros.}$$

Portanto, o comprimento aproximado da parte esticada da corda será dado por:

$$\overline{AC} + \overline{DC} = 11{,}4 + 32{,}57 = 43{,}97 \cong 44 \text{ metros.}$$

Um fato bastante curioso é que Pitágoras sabia que seu teorema tinha uma falha. Quando os catetos do triângulo eram iguais, não era possível encontrar uma medida racional para a sua hipotenusa. Frente a essa incoerência, ele decidiu esconder tal fato para não levantar dúvidas sobre a veracidade do seu resultado. Desde então, vários matemáticos se propuseram a compreender o porquê da incomensurabilidade dos lados no triângulo retângulo. Uma solução convincente para esse problema só veio 25 séculos depois, durante o século XIX, quando Dedekind decidiu cortar a reta dos números racionais e introduzir o conjunto dos números irracionais para suprir essa deficiência da matemática, a qual era também facilmente encontrada em outras situações.

Uma famosa aplicação desse resultado é a espiral de Teodoro. Com ela, podemos construir, utilizando apenas régua e compasso, segmentos de reta com comprimentos iguais à raiz quadrada de qualquer número inteiro positivo.

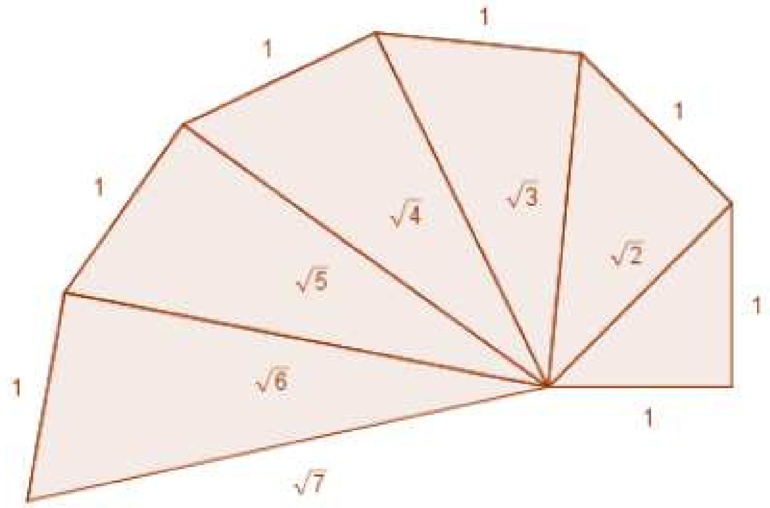

Figura 3.11: Espiral de Teodoro.

Cada uma das hipotenusas acima foi calculada utilizando o Teorema de Pitágoras. Elas formam uma sequência de raízes quadradas de inteiros positivos.

Considerações finais

Neste trabalho, entendemos como surgiram os primeiros estudos sobre as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. Vimos que várias civilizações, durante diversas épocas e de maneira independente, contribuíram para que tivéssemos uma solidez para o resultado do Teorema de Pitágoras. É válido salientar que antes da demonstração de fato de qualquer teorema, fizemos toda uma preparação para que chegássemos efetivamente a ele, apresentando definições, lemas e proposições pertinentes, e ainda justificando grande parte dos resultados necessários para as devidas demonstrações. Acreditamos que essa construção situará o leitor de uma forma mais compreensível sobre os estudos realizados.

Mostramos que o Teorema de Pitágoras sempre é válido para qualquer triângulo retângulo e provamos, ainda, que sua recíproca também é verdadeira. No capítulo dedicado às aplicações do Teorema de Pitágoras, fizemos a generalização desse resultado para figuras semelhantes quaisquer traçadas sobre os catetos de um triângulo retângulo e apresentamos o famoso problema das lúnulas de Hipócrates, mostrando a relação que há entre as áreas dessas figuras. Sem falar nas aplicações clássicas que envolvem a geometria espacial, como o cálculo da altura de um tetraedro regular e a fórmula para determinar a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo. Destacamos a importância da utilização de um aplicativo matemático para facilitar a visualização das figuras e propriedades estudadas, como foi em nosso caso com o GeoGebra.

Finalmente, almejamos que este trabalho possa ser utilizado por professores e alunos para facilitar e propagar os estudos sobre o Teorema de Pitágoras, servindo como material de apoio para sanar eventuais dúvidas sobre esse resultado, que é tão importante para a geometria plana e espacial. E como proposta de aplicações do Teorema de Pitágoras, indicamos o estudo sobre os casos de inscrição e circunscrição de polígonos regulares, o cálculo das diagonais do quadrado e do cubo, a fórmula para determinar a distância entre dois pontos e a relação fundamental da trigonometria. Ainda sobre as aplicações, não poderíamos deixar de citar a forte conexão entre os estudos sobre os ternos pitagóricos e a teoria dos números, da qual conseguimos encontrar uma fórmula muito simples e prática para determinar triângulos retângulos cujos lados sejam representados por números inteiros positivos. Sugerimos, ao leitor, folhear um pouco as páginas do livro "*The Pythagorean Proposition*", o qual contém nada mais nada menos que 370 demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras. Enfim, são várias e interessantes as aplicações dos resultados abordados neste trabalho.

Referências

[1] Barbosa, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana.* 4ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 1995. (Coleção do Professor de Matemática.)

[2] Boyer, C. B., *História da Matemática.* 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

[3] Cintra, C. O., Cintra, R. J. S., *O Teorema de Pitágoras.* 1ª edição. Recife: O autor, 2003.

[4] Eves, H., *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. Campinas. Editora UNICAMP. 2004.

[5] Leonardo, F. M., *Conexões com a Matemática* - Volume 1, 3ª edição. São Paulo: Editora Moderna, 2016. 231 p.

[6] Lima, E. L., et al, *Temas e Problemas Elementares.* 2ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira da Matemática, 2006. (Coleção do Professor de Matemática.)