



Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências Exatas Sociais Aplicadas
Curso de Licenciatura Plena em Física

Aline Marques dos Santos
O Vácuo Quântico e o Efeito Casimir

Novembro/2017

Patos - PB

Aline Marques dos Santos

O Vácuo Quântico e o Efeito Casimir

Monografia apresentada ao Corpo Docente do curso de Licenciatura Plena em Física do campus VII da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

Novembro /2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237v Santos, Aline Marques dos.
O vácuo quântico e o Efeito Casimir [manuscrito] : / Aline Marques dos Santos. - 2017.
33 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira, Coordenação do Curso de Licenciatura em Física - CCTS."

1. Efeito Casimir. 2. Vácuo quântico. 3. Quantização de energia.

21. ed. CDD 530

Aline Marques dos Santos

O VÁCUO QUÂNTICO E O EFEITO CASIMIR

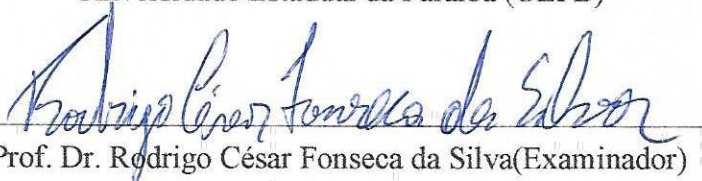
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 29 de novembro de 2017

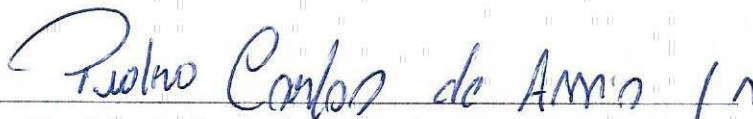
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Rodrigo César Fonseca da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedicatória

Dedico esse trabalho a todos os professores que tive até aqui, os quais me inspiraram e inspiram, através do carinho dedicado a profissão, a seguir a carreira docente.

À Aparecida minha mãe, pelas palavras de apoio e incentivo, por acreditar em meus sonhos e por me ensinar a ser forte e independente.

À Ângelo meu pai, por todo o esforço, compreensão e apoio, para que eu pudesse chegar até aqui.

À Arielma e Alinane, minhas irmãs, por todo carinho e apoio durante os anos de graduação.

Ao meu orientador, professor Marcelo Vieira, pela dedicação ao longo dessa orientação. Pelos conselhos, puxões de orelha, por acreditar no meu potencial, e principalmente por ser uma das pessoas a quem passei a admirar como exemplo de profissional a ser seguido.

À minha colega e de curso e amiga Samara Keylla por aguentar os meus ataques de ansiedade e por me ajudar sempre que precisei.

Aos meus amigos queridos que conquistei ao longo desses anos no Curso de Física pelo apoio e incentivo.

Aos meus professores do Curso de Licenciatura em Física por todo o incentivo e auxílio ao longo desses anos de graduação.

*A todos os que acreditam e incentivam
o nosso sucesso.*

“Alguma coisa há...”
(Mário Ferreira dos Santos)

Resumo

Buscamos com este trabalho fazer uma crítica ao conceito de vácuo, como sinônimo de espaço vazio. Defendendo assim a visão quântica do vácuo, na qual mesmo no estado de vácuo existe energia, a qual chamaremos de energia do vácuo. Para tal, realizamos uma revisão bibliográfica a respeito de um de um efeito relacionada a essa energia, o qual é mensurável por inúmeros experimentos. Efeito o qual foi proposto pelo físico holandês, Hendrik B. G. Casimir, no ano de 1948. No qual, levando em consideração apenas as condições de contorno de duas placas, que se encontram eletricamente neutras e paralelas no vácuo quântico, existiria uma atração entre as placas, a qual é atribuída a energia do estado fundamental, ou energia do vácuo. Efeito esse que foi posteriormente nomeado de Efeito Casimir, em sua homenagem. Buscamos aqui demonstrar a quantização da energia do campo eletromagnético, assim como realizar o cálculo da força de Casimir. E sabendo-se que esse efeito já foi experimentalmente comprovado, não faz mais sentido abordarmos nos dias de hoje, o conceito de vácuo, como sinônimo de nada.

Palavras-Chaves:

Efeito Casimir, vácuo quântico, quantização da energia.

Abstract

We seek with this work to criticize the concept of vacuum, as synonymous with empty space. Defending thus the quantum vision of the vacuum, in which even in the vacuum state there are fluctuations of energy. To that end, we carried out a bibliographical review of one of the measurable effects of the existence of this energy, which was proposed by the Dutch physicist, Hendrik BG Casimir, in the year 1948. In which, considering only the boundary conditions of two plates, which are electrically neutral and parallel in the quantum vacuum, there would be an attraction between the plates, which is attributed to ground state energy, or vacuum energy. This effect was later named Casimir Effect, in his honor. We have tried to prove the quantization of the energy of the electromagnetic field, as well as to perform the calculation of the Casimir force. And knowing that this effect has already been experimentally proven, it does not make sense anymore, we approach today the concept of vacuum, as synonymous with nothing.

Key Words:

Casimir effect, quantum vacuum, quantization of energy.

Sumário

1. Introdução	9
2. O conceito de vácuo	11
3. Oscilador Harmônico Quântico	13
4. Quantização do Campo eletromagnético e a Energia do Vácuo	19
5. A Força de Casimir	24
5. Considerações Finais	30
6. Referências Bibliográficas	31

1. INTRODUÇÃO

De acordo com a Física newtoniana o vácuo é o espaço absoluto, onde há a ausência de qualquer conteúdo, seja ele material ou energético. Essa visão foi muito estudada e difundida durante séculos, os cientistas a defendiam ou negavam, utilizando-se para tal a análise filosófica, e os princípios físicos, fazendo com que seu conceito variasse assim durante séculos entre a ideia do vácuo como sinônimo de nada, ou de um espaço preenchido por um “éter”.

Porém, com o estudo dos fenômenos a partir do formalismo quântico encontramos comportamentos físicos que não podem ser explicados fazendo a utilização do conceito clássico do vácuo, dentre eles a energia de ponto zero, a emissão espontânea e o efeito Casimir, que são algumas das manifestações físicas e mensuráveis da energia do vácuo.

Abordaremos aqui uma dessas manifestações que é o efeito Casimir, o qual foi proposto pelo físico de origem holandesa Hendrik Brugt Gerhard Casimir, no ano de 1948. E trata-se da atração entre duas placas perfeitamente condutoras, que se encontram paralelas, e eletricamente neutras no vácuo, as placas são planas e a distância que as separam é muito menor que as suas dimensões. Como são eletricamente neutras não existe força elétrica entre elas, e sabendo-se que a força gravitacional é desprezível. Não deveria existir uma força entre elas, mas, existe uma força atrativa, fato que poderia ser atribuído a interação devida a força intermolecular ou força de Van der Waals [19], porém, o que se destacou-se no trabalho de Casimir, que ele propôs essa interação poderia ser calculada levando em consideração apenas as condições de contorno atribuídas as placas no vácuo quântico. O que o permitiu a ele atribuir essa atração, as flutuações de energia do vácuo.

Este trabalho trata-se de uma revisão bibliográfica a respeito do efeito Casimir, o qual no seu decorrer abordaremos as descrições dos dois principais conceitos

de vácuo, defendidos durante a história. Com a utilização da Mecânica quântica, trataremos a energia do estado fundamental do campo eletromagnético, a partir da qual efetuaremos o cálculo da força de Casimir.

2. O CONCEITO DE VÁCUO

Muitas vezes atribuímos ao conceito de vácuo a ideia do espaço vazio, sem a existência de matéria ou energia, utilizando-o por muitas vezes como sinônimo de nada. A discussão a respeito desse assunto dividiu a opinião de cientistas e filósofos durante os séculos, as quais abordaremos forma sucinta a seguir.

O conceito de vácuo é discutido pelos filósofos desde a Antiguidade Clássica, onde as opiniões a seu respeito se dividiam em duas principais corrente de pensamentos distintos, haviam aqueles que defendiam o vácuo como sendo o espaço vazio onde não existia nada, e aqueles que acreditavam que o vácuo seria composto por uma espécie de ar sutil, denominado de éter.

Como aborda Pinto, Farina e Tort (2000) [17] aqueles que defendiam a primeira corrente de pensamento viam a matéria e o espaço como sendo independentes entre si, cabendo ao vácuo apenas ocupar os lugares entre os corpos materiais e permitir seus movimentos. Dentre seus defensores estavam os filósofos gregos Demócrito (460-370 a.C.) e Platão (428-347 a.C.), e o filósofo romano Lucrécio (94-55 a.C.). Aqueles que defendiam a segunda corrente, não aceitavam a ideia de vácuo como sendo sinônimo de vazio, dentre seus defensores: Parmênides de Eleia (515-450 a.C.) e Aristóteles (384-322 a.C.). O qual defendia a existência do vácuo como sinônimo de espaço vazio, como sendo uma impossibilidade física, pois ele via a resistência do meio como algo primordial, para o movimento, pois se o meio não oferecesse nenhuma resistência ao corpo que está se movimentando, sua velocidade deveria ser infinita, desta forma ele defendia a existência do éter, e a ideia do vácuo como sendo sinônimo de vazio era abominada.

A visão de Aristóteles a respeito do vácuo foi a mais aceita e prevaleceu durante muitos séculos, Descartes (1596-1650) e toda a escolástica também a defendiam, até que no período do Iluminismo, século XVII sua visão começou a ser contestada ex-

perimentalmente. Inicialmente como cita Martins [14], pelo barômetro de mercúrio produzido em 1644 por Evangelista Torricelli (1608-1647) e posteriormente com o experimento Hemisférios de Magdeburgo de Otto Von Guericke (1602-1686) . Esses experimentos provaram a existência de um lugar desprovido de qualquer tipo de matéria, para os cientistas da época, refutando assim a ideia defendida por Aristóteles. Outro importante cientista que defendeu essa visão foi Newton (1643-1727) a existência do espaço absoluto, onde matéria e espaço não são dependentes.

Até que no século XIX quando começou-se a trabalhar a dualidade onda-partícula da luz, os físicos da época como deveria existir um meio de propagação para a onda, e a ideia defendida por Aristóteles voltou a ser utilizada, só que com uma nova abordagem, ao invés de uma substância menos densa que o ar, eles acreditavam que deveria existir um éter luminífero, que seria o meio de propagação da ondas eletromagnéticas.

Em concordância com aqueles que defendiam a inexistência do espaço vazio, o filósofo brasileiro Mário Ferreira dos Santos (1907-1968), aborda em sua obra “Filosofia Concreta”, a sua impossibilidade, utilizando-se para tal, de argumentos filosóficos concretos.

No decorrer dos séculos o conceito de vácuo, ficou variando entre a ideia de “espaço vazio” a um “éter”, dependendo da abordagem dada ao fenômeno que se estava estudando. Foi a apenas com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, e em decorrência, com a abordagem quântica do vácuo, que soube-se que mesmo no estado de vácuo (vácuo eletromagnético por exemplo) existe flutuações de energia. Surgindo então assim o conceito de vácuo quântico.

3. OSCILADOR HARMÔNICO QUÂNTICO

Para compreendermos melhor o conceito de energia de ponto zero, a qual é fundamental para compreendermos o Efeito Casimir, iniciaremos assim, estudando o caso da energia do oscilador harmônico quântico.

A hamiltoniana de um oscilador harmônico pode ser escrita levando em consideração, a energia potencial e o momento do sistema [8] [1].

$$H = \frac{kx^2}{2} + \frac{P^2}{2m} \quad (1)$$

O qual conhecendo a frequência de oscilação angular: $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Temos que:

$$H = \frac{m\omega^2 X^2}{2} + \frac{P^2}{2m} \quad (2)$$

Multiplicando 2 por $\frac{1}{\hbar\omega}$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{H}{\hbar\omega} &= \frac{m\omega^2 X^2}{2\hbar\omega} + \frac{P^2}{2m\hbar\omega} \\ \frac{H}{\hbar\omega} &= \frac{m\omega^2}{X} 2\hbar + \frac{P^2}{2m\hbar\omega} \end{aligned} \quad (3)$$

A qual pode ser reescrita como:

$$\frac{H}{\hbar\omega} = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega P}} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega P}} \right), \quad (4)$$

Se fizermos $a' = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P \right)$ e $a^* = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P \right)$. Podemos assim reescrever 4, em função de a' e a^* . Temos: $\frac{H}{\hbar\omega} = a'a^*$ ou $\frac{H}{\hbar\omega} = a^*a'$.

Devido a simetrização podemos dizer que:

$$\frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} (a'a^* + a^*a'),$$

Assim:

$$H = \frac{1}{2\hbar\omega} (a'a^* + a^*a'), \quad (5)$$

Passando agora para a descrição quântica do sistema. Vamos associar a' e a^* aos operadores a e a^\dagger , de tal forma que $a' \rightarrow a$ e $a^* \rightarrow a^\dagger$.

Logo, a eq. (5), pode ser escrito como:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a), \quad (6)$$

Temos, pela regra de comutação de operadores [8] [24] :

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a.$$

Conhecendo a e a^\dagger , temos que:

$$\begin{aligned} [a, a^\dagger] &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{P} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{P} \right) \\ &- \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{P} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{X} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{P} \right) \\ [a, a^\dagger] &= 2i\sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar m\omega}} \hat{X} \hat{P} + 2i\sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar m\omega}} \hat{P} \hat{X} \\ [a, a^\dagger] &= -2i\sqrt{\frac{m\omega}{4\hbar m\omega}} (\hat{X} \hat{P} - \hat{P} \hat{X}) \\ [a, a^\dagger] &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{X}, \hat{P}] \end{aligned} \quad (7)$$

Pela regra da comutação fundamental , ou relações de Heisenberg [8] [1], temos : $[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{1}i\hbar$. Assim obteremos para a eq. (7):

$$[a, a^\dagger] = (a, a^\dagger - a^\dagger a) = \hat{1}, \quad (8)$$

Onde a eq. (8), é a regra de comutação para operadores. Aplicando-a na eq. (6), temos que:

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + a^\dagger a + \hat{1}),$$

Assim, considerando que o operador identidade $\hat{1} = 1$, encontramos

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Aplicando os operadores a e a^\dagger separadamente em H , encontramos:

Para a :

$$\begin{aligned} [H, a] &= \left[\left(aa^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, a \right] \\ &= [\hbar\omega (aa^\dagger, a)] + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \hbar\omega, a \right]}_0 \\ &= \hbar\omega (aa^\dagger a - aaa^\dagger) \\ &= \hbar\omega a (a^\dagger a - aa^\dagger) \\ &= \hbar a [a^\dagger, a] = -\hbar\omega [a, a^\dagger], \end{aligned}$$

Desta forma:

$$[H, a] = -\hbar\omega a, \quad (10)$$

Para a^\dagger :

$$\begin{aligned}
 [H, a^\dagger] &= \left[\left(aa^\dagger + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, a^\dagger \right] \\
 &= [\hbar\omega (aa^\dagger), a^\dagger] + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \hbar\omega, a^\dagger \right]}_0 \\
 &= \hbar\omega (aa^\dagger a^\dagger - a^\dagger aa^\dagger) \\
 &= \hbar\omega (aa^\dagger - a^\dagger a) a^\dagger,
 \end{aligned}$$

Assim:

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger. \quad (11)$$

Considerando que $|\psi\rangle$, satisfaz a equação de Schrödinger com uma determinada energia E , onde $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

Temos que ao aplicarmos o operador a :

$$\begin{aligned}
 [H, a]|\psi\rangle &= -\hbar\omega a|\psi\rangle \\
 Ha|\psi\rangle - aH|\psi\rangle &= -\hbar\omega a|\psi\rangle \\
 Ha|\psi\rangle - aE|\psi\rangle &= -\hbar\omega a|\psi\rangle,
 \end{aligned} \quad (12)$$

Logo:

$$H(a|\psi\rangle) = (E - \hbar\omega) a|\psi\rangle \quad (13)$$

Aplicando o operador uma segunda vez, temos que:

$$H(a^2|\psi\rangle) = (E - 2\hbar\omega) a^2|\psi\rangle$$

E assim sucessivamente, desta forma podemos generalizar a eq. (13), como:

$$Ha^n|\psi\rangle = (E - n\hbar\omega) a^n|\psi\rangle. \quad (14)$$

De tal forma que ao aplicarmos o operador a energia do meu oscilador vai diminuir, em determinados pacotes, dados pela eq. (14).

De forma analoga ao que acontece com a , ao aplicarmos o operador a^\dagger . Temos:

$$Ha^\dagger|\psi\rangle = (E + \hbar\omega) a^\dagger|\psi\rangle \quad (15)$$

Ao aplicarmos uma segunda vez, temos que:

$$Ha^\dagger|\psi\rangle = (E + \hbar\omega) a^\dagger|\psi\rangle$$

Assim podemos generalizar 15 como sendo:

$$Ha^{\dagger n}|\psi\rangle = (E + n\hbar\omega) a^{\dagger n}|\psi\rangle \quad (16)$$

Quando aplicarmos o operador a energia do sistema vai aumentar, em determinados pacotes dados pela eq. (16). Ao analisarmos as equações (15) e (16), observamos que a energia no oscilador harmônico quântico, não pode ser tratada de forma contínua, ela possui valores discretos. E neste caso aumenta e diminui de acordo com a aplicação dos operadores. Podemos dessa forma nomear a como sendo um operador de aniquilação, pois ao aplicarmos há uma diminuição na energia do sistema, e a^\dagger de operador de criação, pois ao aplicarmos há um aumento na energia do sistema.

Como a energia do oscilador harmônico é sempre positiva [1] [9] [24]. No decorrer das sucessivas aplicações do operador de aniquilação a , tem que ter um determinado ponto onde ele cessa. Pois ao contrário, observaríamos estados de energia negativos, o que não pode ocorrer.

Sendo assim, existe um estado $|0\rangle$, tal que:

$$a|0\rangle = 0$$

Desta forma aplicando $|0\rangle$ em 9, encontramos:

$$H|0\rangle = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |0\rangle$$
$$H|0\rangle = \left(\hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega}{2} \right) |0\rangle,$$

Logo, temos que:

$$H|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle \tag{17}$$

Assim temos que $|0\rangle$, é o estado de menor energia possível, ou estado fundamental do oscilador harmônico quântico, no qual a energia é diferente de zero. Essa característica é puramente quântica, não sendo encontrada quando abordamos o sistema utilizando a Física Clássica.

4. QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO E A ENERGIA DO VÁCUO

Antes de abordarmos o cálculo do Efeito Casimir, é fundamental entendermos inicialmente a quantização do campo eletromagnético. Sabendo-se que nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável podemos aproximar qualquer sistema físico de um oscilador harmônico. Vamos mostrar aqui que aplicando as leis da Mecânica Quântica ao campo eletromagnético, este campo será um conjunto de osciladores harmônicos quânticos, onde o primeiro estado excitado corresponderá a um fóton, o segundo a dois fótons, e assim sucessivamente. Enquanto o estado fundamental corresponderá ao estado de vácuo eletromagnético.

Partindo das equações que fazem a descrição clássica dos campos elétricos e magnéticos, as equações de Maxwell [9] [13], considerando um espaço onde não exista cargas e fontes de campo, e fazendo uso do sistema de unidades Gaussiano. Temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

Onde \vec{E} é o campo elétrico, \vec{B} o campo magnético e c a velocidade da luz. Postulemos agora um potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ de forma que possamos fazer $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Desta forma podemos dizer que a eq. (20) é:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (22)$$

Substituindo as equações (19) e (22) na eq. (21) obtemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

Aplicando a propriedade vetorial, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, podemos reescrever 23 como:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Fazendo uso do calibre de Coulomb [13], onde $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, satisfazemos as equações 18 e 20.

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (24)$$

Desta forma vemos que o potencial vetor satisfaz a equação da onda. A equação 24 representa uma onda plana, cuja solução é conhecida. Consideremos que ela se propaga em $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, neste caso $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$. Assim a solução da eq. (24), pode ser escrita como:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{k}) e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{\mp i\omega_k t} \quad (25)$$

2

Onde \vec{k} é o vetor de onda e ω_k é o espectro de frequência que é dado por $\omega_k = kc$.

A utilização do calibre de Coulomb faz com que tenhamos uma condição de transversalidade aplicada ao campo, desta forma a direção de propagação da onda será perpendicular ao potencial vetor.

Simplificando a eq. (25), temos: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}\lambda} \hat{b}_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}(x, t)$. Onde $\hat{b}_{\vec{k}\lambda}$ é o vetor unitário que indica a direção de propagação da onda, e λ representa as polarizações possíveis, como o vetor de onda é perpendicular aos vetores de polarização impedindo a presença de fótons longitudinais [20], há assim apenas duas polarizações. Desta forma considerando os dois sentidos possíveis da onda, temos que: $A_{\vec{k}\lambda}(\vec{r}, t) = A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + A_{\vec{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$.

Como o campo elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{B}) estão em função do potencial vetor, agora que conhecemos $\vec{A}(\vec{r}, t)$, podemos reescrevê-los como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\vec{k}\lambda} \hat{b}_{\vec{k}\lambda} (A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + A_{\vec{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})}) \right) \hat{b}_{\vec{k}\lambda} \quad (26)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \left(\sum_{\vec{k}\lambda} \hat{b}_{\vec{k}\lambda} (A_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + A_{\vec{k}\lambda}^* e^{+i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})}) \right) \hat{b}_{\vec{k}\lambda} \quad (27)$$

Sabendo que a energia do campo eletromagnético, é [9], [13], [21]:

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int_v \left[\left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 + \left| \vec{B}(\vec{r}, t) \right|^2 \right] d^3r \quad (28)$$

Calculando-se o módulo ao quadrado das equações (26) e (27), e resolvendo as integrais separadamente, temos que:

$$\int_v \left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 d^3r = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V \left[A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^* + A_{\vec{k}\lambda}^* A_{-\vec{k}\lambda} e^{2i\omega_k t} + A_{\vec{k}\lambda} A_{-\vec{k}\lambda} e^{-2i\omega_k t} \right] \quad (29)$$

$$\int_v \left| \vec{B}(\vec{r}, t) \right|^2 d^3r = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} V \left[A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^* - A_{\vec{k}\lambda}^* A_{-\vec{k}\lambda} e^{2i\omega_k t} - A_{\vec{k}\lambda} A_{-\vec{k}\lambda} e^{-2i\omega_k t} \right] \quad (30)$$

Onde $V = \int_v d^3r$. Como:

$$\int_v \left(\left| \vec{E}(\vec{r}, t) \right|^2 + \left| \vec{B}(\vec{r}, t) \right|^2 \right) d^3r = \int_v \left| \vec{E}(x, t) \right|^2 d^3r + \int_v \left| \vec{B}(x, t) \right|^2 d^3r$$

Assim:

$$\int_v \left(|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2 \right) d^3r = \sum_{k\lambda} \frac{2\omega_k^2}{c^2} V [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \quad (31)$$

Substituindo a eq. (31) na eq. (28):

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \left(\sum_{k\lambda} \frac{2\omega_k^2}{c^2} V [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \right)$$

Assim, a energia no campo eletromagnético é dada por:

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi} V \left(\sum_{k\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \right) \quad (32)$$

Conhecendo a energia que descreve o campo podemos escrever seu hamiltoniano como:

$$H = \frac{1}{4\pi} V \left(\sum_{k\lambda} \frac{\omega_k^2}{c^2} [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \right) \quad (33)$$

Desta forma, multiplicando a eq. (33), por $\frac{\hbar}{h}$ temos:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar\omega_k^2}{\hbar 4\pi c^2} V [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \\ H &= \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(\frac{\omega_k V}{\hbar 2\pi c^2} \right) [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \\ H &= \frac{\hbar\omega_k}{2} \left(\left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) [A_{\vec{k}\lambda}^* A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{\vec{k}\lambda}^*] \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left[\left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda}^* \left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda} + \left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{\omega_k V}{2\pi \hbar c^2} \right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda}^* \right] \quad (34)$$

Façamos $a = \left(\frac{\omega_k V}{2\pi\hbar c^2}\right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda}$ e $a^* = \left(\frac{\omega_k V}{2\pi\hbar c^2}\right)^{\frac{1}{2}} A_{\vec{k}\lambda}^*$.

Reescrevendo 34 em função de a e a^* , temos:

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left[a_{\lambda}^*(\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k}) + a_{\lambda}(\vec{k})a_{\lambda}^*(\vec{k}) \right] \quad (35)$$

Vamos associar agora $a_{\lambda}^*(\vec{k})$ e $a_{\lambda}(\vec{k})$ aos operadores $(a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}))$, e $(a_{\lambda}(\vec{k}))$ [8] [12]. Como as flutuações de energia presentes no vácuo eletromagnético são atribuídas a criação e aniquilação dos fótons. Podemos definir $(a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}))$ como sendo o operador de criação, e $(a_{\lambda}(\vec{k}))$ aniquilação. Onde esses operadores obedecem a regra de comutação fundamental para bósons $[a_{\lambda}(\vec{k}), a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k})] = 1$. Desta forma, a eq. (35) pode ser escrita como:

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} \left[\left(a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k})a_{\lambda}(\vec{k}) \right) + \left(a_{\lambda}(\vec{k})a_{\lambda}^{\dagger}(\vec{k}) \right) + 1 \right] \quad (36)$$

O hamiltoniano descreve a energia do sistema, se considerarmos o vácuo eletromagnético, onde não há nenhum fóton, podemos reescrever a eq. (36) como:

$$H = E_0 = \sum_{k\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{2} \quad (37)$$

Se considerarmos as duas polarizações possíveis em λ :

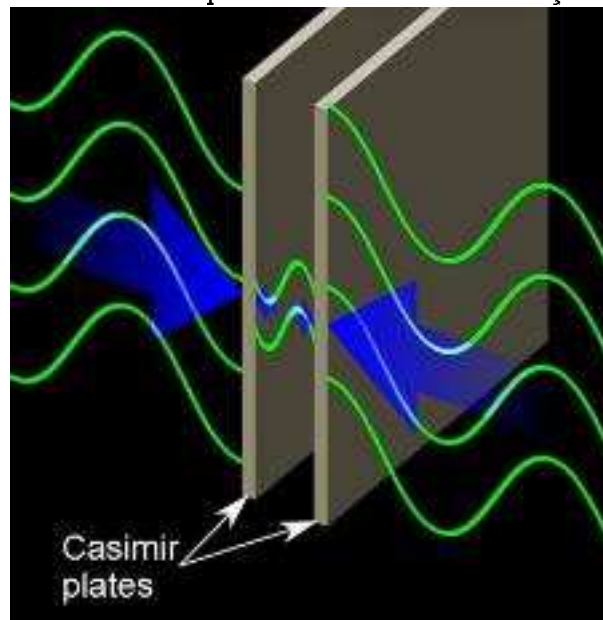
$$E_0 = \sum_k \hbar\omega_k \quad (38)$$

Desta forma, vemos que mesmo na ausência de campo, ou seja, no estado de zero fótons, ainda temos a energia do campo eletromagnético. Vemos assim que ao se abordar o campo eletromagnético com a utilização da mecânica quântica, seus valores de energia representam um espectro discreto, assumindo valores bem definidos.

5. A FORÇA DE CASIMIR

Consideremos duas placas quadradas, de lado R , perfeitamente condutoras, paralelas no vácuo a temperatura de $0K$, as placas estão separadas por uma distância $r \ll R$ [4] [10] [17] [20]. Como as representadas na imagem abaixo:

Figura1: Placas metálicas paralelas no vácuo e as flutuações de energia



Fonte: Ribeiro (2016)

Considerando a relação de dispersão da onda no vácuo ($\omega = ck$), e sabendo que as componentes do vetor de onda são quantizados;

$$k_x = \frac{\pi}{R}s, k_y = \frac{\pi}{R}d, k_z = \frac{\pi}{r}n,$$

Onde s , d e n são números inteiros e positivos. Assim temos que:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (39)$$

Considerando que as placas estão separadas pela distância r , podemos considerar k_x e k_y , como sendo variáveis contínuas, logo:

$$k^2 = \kappa^2 + k_z^2, \quad (40)$$

Desta forma, podemos escrever a equação para a energia do vácuo com as placas como:

$$E_p = \frac{\hbar}{2} \sum \omega = \frac{\hbar c}{2} \sum_{s,d,n} k, \quad (41)$$

No limite em que $R \rightarrow \infty$ o somatório em s e d se torna uma integral, e podemos reescrever a eq. (41), utilizando as coordenadas polares como:

$$E_p = \frac{\hbar c R^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \kappa \left(\kappa^2 + \left(\frac{\pi n}{r} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\theta d\kappa, \quad (42)$$

Integrando em θ :

$$E_p = \frac{\hbar c R^2}{4\pi} \sum_n \int_0^\infty \left(\kappa^2 + \left(\frac{\pi n}{r} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\kappa,$$

Que pode ser reescrita como:

$$E_p = \frac{\hbar c \pi^2 R^2}{4r^3} \sum_n \int_0^\infty (v + n^2)^{\frac{1}{2}} dv, \quad (43)$$

A equação (43) descreve a energia do vácuo com as placas presentes. Se considerarmos também $r \rightarrow \infty$, desta forma o somatório desaparece se tornando apenas a integral, de forma analoga temos que a energia do vácuo sem as placas, que pode ser escrita como:

$$E_l = \frac{\hbar c \pi^2 R^2}{4r^3} \int_0^\infty dv \int_0^\infty (v + q^2)^{\frac{1}{2}} dq, \quad (44)$$

A atração entre as placas pode ser calculada considerando apenas as condições de contorno, ou seja, as posições das placas. Se considerarmos a diferença entre a

energia do vácuo com e sem as placas, podemos definir a energia potencial de ponto zero como sendo:

$$U_l = E_p - E_l$$

$$U_l = \frac{\hbar c \pi^2 R^2}{4r^3} \sum_n \int_0^\infty (v + n^2)^{\frac{1}{2}} dv - \frac{\hbar c \pi^2 R^2}{4r^3} \int_0^\infty dv \int_0^\infty (v + q^2)^{\frac{1}{2}} dq, \quad (45)$$

$$U_l = \frac{\hbar c R^2}{4\pi r^3} \left[\sum_n \int_0^\infty (v + n^2)^{\frac{1}{2}} dv - \int_0^\infty dv \int_0^\infty (v + q^2)^{\frac{1}{2}} dq \right], \quad (46)$$

A equação (46) representa a energia potencial para todas as frequências de onda, porém se considerarmos frequências muito altas, tendendo ao infinito as placas se tornam transparentes. Sendo assim podemos utilizar a renormalização incluindo uma frequência de corte em U_l (DUTRA, p.50[5]).

Definindo então uma função de corte $g_p(\omega_{\vec{k}}/c)$, que tende a zero rapidamente quando a frequência se torna grande. E que é dependente de um parâmetro p , de tal forma que quando $p \rightarrow 0$, $g_p = 1$. Incluindo a função de corte em 46 temos:

$$U_l = \frac{\hbar c R^2}{4\pi r^3} \left[\sum_n \int_0^\infty (v + n^2)^{\frac{1}{2}} g_p \left((v + n^2)^{\frac{1}{2}} \right) dv - \int_0^\infty dv \int_0^\infty (v + q^2)^{\frac{1}{2}} g_p \left((v + q^2)^{\frac{1}{2}} \right) dq \right], \quad (47)$$

Observando as integrais da equação (47) em função de v , podemos reescreve-las de uma forma geral:

$$X_p(\delta) \equiv \int_0^\infty (v + \delta^2)^{\frac{1}{2}} g_p \left(\sqrt{v + \delta^2} \right) dv,$$

Se mudarmos a variável de integração de v para $v' = \frac{2}{3} (v + \delta^2)^{\frac{3}{2}}$. Podemos obter:

$$X_p(\delta) = \int_{\frac{2\delta^3}{3}}^\infty g_p \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2} v'} \right) dv', \quad (48)$$

Tomando o limite de $p \rightarrow 0$, $g_p = 1$, resolvendo a integral. Temos:

$$X_p(\delta) = v' \Big|_{\frac{2\delta^3}{3}}^{\infty} = \infty - \frac{2\delta^3}{3},$$

Como não estamos considerando grandes frequências no infinito $v' \rightarrow 0$, logo:

$$X_p(\delta) = -\frac{2\delta^3}{3}, \quad (49)$$

Tomando as derivadas dessa função:

$$\frac{dX_p}{d\delta} = -2\delta^2 \quad (50)$$

$$\frac{dX_p^2}{d\delta^2} = -4\delta \quad (51)$$

$$\frac{dX_p^3}{d\delta^3} = -4 \quad (52)$$

$$\frac{dX_p^4}{d\delta^4} = 0 \quad (53)$$

Todas as derivadas superiores a terceira serão zero. Podemos agora resolver 47, utilizando a expansão em séries de Euler-Maclaurin, que nos permite calcular a relação entre o somatório e a integral [6], a qual é dada por:

$$\sum_{i=m}^{\infty} g(i) = \int_m^n g(x)dx - \frac{1}{2}(g(n) - g(m)) + \sum_{k=1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (g(n)^{2k-1} - g(m)^{2k-1}) + R \quad (54)$$

Onde k é um número inteiro e positivo, e B_k , é o número de Bernoulli, referente a esse inteiro. E R é o termo de erro decrescente [6]. Fazendo $m \rightarrow \infty$ e $n = 0$, o termo de erro vai para zero e podemos calcular a diferença entre a série e a integral, com:

$$\sum_{i=0}^{\infty} g(i) - \int_0^{\infty} g(x)dx = g(0) + \left[-\frac{B_2}{2!}g^{(1)}(0) - \frac{B_4}{4!}g^{(3)}(0) - \dots \right] \quad (55)$$

Onde de acordo com Felgueiras [7], os números de Bernoulli B_2 e B_4 , tem valores de $\frac{1}{6}$ e $-\frac{1}{30}$ respectivamente. E $g^{(1)}$ e $g^{(3)}$, são a primeira e terceira derivada de g . Desta forma podemos reescrever a equação 47 como:

$$U_l = \frac{\hbar c R^2 \pi^2}{4r^3} \left[-\frac{1}{2} X_p(0) - \frac{1}{12} \frac{dX_p}{d\delta} \Big|_{\delta=0} + \frac{1}{720} \frac{d^3 X_p}{d\delta^3} \Big|_{\delta=0} + \dots \right] \quad (56)$$

Substituindo as equações (50), (51) e (52) na eq. (56), temos:

$$U_l = \frac{\hbar c R^{22}}{4r^3} \left\{ 0 - \frac{1}{12} 0 + \frac{1}{720} (-4) \right\}$$

$$U_l = \frac{\hbar c R^2 \pi^2}{4r^3} \left(\frac{-4}{720} \right)$$

$$U_l = -\frac{\hbar c R^2 \pi^2}{720 r^3}, \quad (57)$$

Onde a eq. (57), é a energia potencial de ponto zero, ou energia de Casimir.

Sabendo que $F_r = -\vec{\nabla} U_l(r)$, logo:

$$F_r = -\frac{\hbar c R^2 \pi^2}{240 r^4} \quad (58)$$

Levando em consideração a unidade por área, onde $R = 1$, temos que a força atrativa será de:

$$F_r = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 r^4} \quad (59)$$

Temos então a força de atração entre duas placas no vácuo, levando em consideração apenas as condições de contorno das mesmas, a qual é denominada de Força de Casimir. Essa força é na verdade a pressão exercida devido as flutuações de energia no vácuo. Desta forma o efeito Casimir é uma das comprovações de que mesmo no estado de vácuo, existe algo, neste caso as flutuações de energia. A qual é explicada apenas quando levamos em consideração a abordagem do vácuo quântico. Efeito esse que já foi experimentalmente comprovado por M. J. Sparnaay em 1958,

porém com uma certa margem de erro, e posteriormente comprovado de forma mais precisa por outros experimentos como o de Lamoreaux [11] em 1997, Mohideen e Roy [15] em 1998 e por Bressi, Carugno e Rousso [3] em 2002. Experimentos esses que provam a existência das flutuações quânticas do vácuo, ou seja, a existência do vácuo quântico.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desse trabalho nós realizamos uma breve abordagem da evolução do conceito de vácuo, desde a ideia do vácuo como sinônimo de nada defendida por Platão, até o conceito de vácuo quântico, onde mesmo no estado fundamental existem flutuações de energia.

Apresentamos a abordagem quântica do oscilador harmônico, o qual considerando os operadores de criação e aniquilação, possui um espectro de energia discreto que é diferente de zero no seu estado fundamental.

De forma análoga abordamos a quantização do campo eletromagnético, partindo da forma diferencial das equações de Maxwell, e aplicando as leis da Mecânica Quântica, no mesmo, mostramos que podemos considera-lo, como sendo um conjunto de osciladores harmônicos, cujo estado fundamental, é o estado de zero fóton.

Calculamos então a força de Casimir, onde levamos em consideração, a energia do estado de vácuo eletromagnético, e as condições de contorno das placas, e utilizamos da renormalização para aniquilar os infinitos, assim como da expansão de Euler-Maclaurin, para relacionar a parte discreta e contínua da energia.

Sabendo-se que esse efeito previsto por Casimir, já foi comprovado experimentalmente [11] [15] [3], temos que ele é uma comprovação física e mensurável das flutuações de energias presentes no vácuo. Desta forma a abordagem do vácuo como vazio absoluto que vem sendo discutida por filósofos e cientistas desde a antiguidade clássica, já não faz mais sentido. Pois mesmo no estado de vácuo existe algo, e possui interação mensurável.

Referências Bibliográficas

- [1] ALCARÁS, José Renato. **Mecânica Quântica Oscilador Harmônico Quântico**. Disponível em: <https://goo.gl/pBMPKn>. Acesso em: 17/08/2017.
- [2] BARBOSA, Felipe Alexandre Silva. **Flutuações do Campo Eletromagnético no Regime de transparência Eletromagneticamente Induzida**. Data de defesa. Total de folhas. Dissertação - Universidade de São Paulo - Instituto de Física. Disponível em: <https://goo.gl/ZWmRcs>. Acesso em: 24/09/2017.
- [3] BRESSI, G. CARUGNO, R. and RUOSO, G. **Measurement of the Casimir Force Between Parallel Metallic Surfaces**. Physical Review Letters. v. 88 - 2002. Disponível em: <https://goo.gl/akuYRF>. Acesso em: 25/10/2017.
- [4] CASIMIR, H. B. G. **On the attraction between two perfectly conducting plates**(1948). Disponível em: <https://goo.gl/wdng7b>. Acesso em: 15/09/2017.
- [5] DUTRA, Sergio M. **Cavity Quantum Electrodynamics: The Strange Theory of Light in a Box**. Copyright-2005
- [6] **Euler Maclaurin formula**. In Wikipédia - the free encyclopedia. Disponível em: <https://goo.gl/ekZNjF>. Acesso em: 14/10/2017.
- [7] FELGUEIRAS, Óscar. **Números de Bernoulli**. Apanhados na Rede. Disponível em: <https://goo.gl/kEa1gc>. Acesso em: 18/09/2017.
- [8] GRIFFITHS, David J. **Mecânica Quântica**. Pearson. 2ª edição- São Paulo, 2011.
- [9] GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**. Pearson. 3 edição - São Paulo, 2011.
- [10] KINGSBURY, Kyle. **The Casimir Effect** Disponível em: <https://goo.gl/x1nk5K>. Acesso: 27/09/2017.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] LAMOREAUX, S.K. **Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6μ m Range**. Physical Review Letters. Volume 78, Number 1 Published 6 January 1997. Disponível em: <https://goo.gl/42Ek8R>. acesso: 23/05/2017.
- [12] LIMA, Marco Aurelio Pinheiro. **Quantização do Campo Eletromagnético**. Disponível em: <https://goo.gl/tMzVrC>. Acesso em: 13/09/2017.
- [13] MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do Eletromagnetismo** volume III. Editora UEPG-2006.
- [14] MARTINS Roberto de Andrade. **Em Busca do Nada: Considerações sobre os argumentos a favor do vácuo ou do Éter**. Trans/Form/Ação [online]. 1993, vol.16, pp.07-27. ISSN 0101-3173. Disponível em: <https://goo.gl/36e46o>. Acesso em: 13/09/2017.
- [15] MOHIDENN, U. e ROY Anushree. **Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9μ m**. Physical Review Letters. 81. - 1998. Disponível em: <https://goo.gl/dSieUh>. Acesso em: 25/10/1994.
- [16] MEDEIROS, Waleska Priscylla Florencio de. **O Vácuo Quântico** Physicae Organum. Brasília, vol. 1, n. 2 - 2005. Disponível em: <https://goo.gl/paVwiM>. Acesso 15/10/2010.
- [17] PINTO, Marcus Venicius Couto-; FARINA, Carlos e TORT, Alexandre. **O Efeito Casimir**. Revista Brasileira de ensino de Física, vol. 22, nº 1. p. 122-132 - 2000.
- [18] RIBEIRO, Williams Jonata Miranda. **Efeito Casimir: Teoria x Experimento**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) Universidade Federal do Amazonas. Defendida em 5 de Julho de dois mil e dezessete. Disponível em: <https://goo.gl/8aYd7k>. Acesso em: 13/11/2017.
- [19] ROCHA, Willian R. **Interações Intermolecular** Cderno Temático de Química Nova Escola. nº 4 - 2001. Disponível em: <https://goo.gl/g6EhNm>. Acesso em: 16/09/2017.
- [20] ROUVER, A.N.; ORLANDO, M. T. D. **Cálculo da Força Casimir**; Anais do VI Encontro Científico de Física Aplicada. Disponível em: <https://goo.gl/9hVHAL>. Acesso em 27/05/2017.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [21] SALINAS Silvio R. A. **Introdução à Física Estatística**. Editora da Universidade de São Paulo. 2ª edição - São Paulo, 1999.
- [22] SANTOS, Mário Ferreira dos. **Filosofia Concreta**. Brasil: Realizações - 2009.
- [23] SOBRINHO J.J. Passos; TORT A.C. **Uma Introdução aos Métodos de Cálculo da Energia de Casimir**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Volume 23 no. 4-São Paulo, 2001.
- [24] TIPLER, Paul A. MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros: física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria**. Livros Técnicos e Científicos, 2006.
- [25] ZANELA, Lucas. **Números de Bernoulli e Números Figurados**. Disponível em: <http://lucaszanella.com/pt/artigos/mat/bernoulli>. Acesso em:17/09/2017.