UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HELDER FLAUBERT LOPES DE MACÊDO

NÍVEL DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA ESTADUAL PARAIBANA

CAMPINA GRANDE
2018

HELDER FLAUBERT LOPES DE MACÊDO

NÍVEL DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA ESTADUAL PARAÌBANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Banca Examinadora da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Abigail Fregni Lins

CAMPINA GRANDE
2018

M141n Macedo, Helder Flaubert Lopes de.

Nível de pensamento geométrico de alunos do 1º ano do ensino médio de uma Escola Estadual Paraibana [manuscrito] : / Helder Flaubert Lopes de Macedo. - 2018.

57 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.

"Orientação : Profa. Dra. Abigail Fregni Lins, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Demonstrações matemáticas. 2. Pensamento geométrico. 3. Educação Matemática. 4. Proposta didática.

21. ed. CDD 516

HELDER FLAUBERT LOPES DE MACÊDO

NÍVEL DE PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA ESTADUAL PARAIBANA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada a Banca Examinadora da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática
Orientadora: Profa. Dra. Abigail Fregni Lins

Aprovado em: 08/02/2018.

BANCA EXAMINADORA

Abigail Fregni L.
____
Profa. Dra. Abigail Fregni Lins (orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Marconi Coelho dos Santos
____
Prof. Ms. Marconi Coelho dos Santos (egresso e examinador externo)
Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira - Areia

Danielly Barbosa de Sousa
____
Profa. Ms. Danielly Barbosa de Sousa (egressa e examinadora externa)
Escola Municipal do Ensino Fundamental Roberto Simonsen – Campina Grande
Escola Municipal do Ensino Fundamental Irmão Damião – Lagoa Seca

CAMPINA GRANDE – PB
2018

À minha avó, Maria de Lurdes, e à minha mãe, Edilza Maria, que sempre estiveram ao meu lado nessa jornada, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradecer a Deus por ter me dado saúde e condições para que eu chegasse até aqui.

À minha mãe, Ediza Maria de Macedo Euzebio, e ao meu padrasto, Derivan Silva Euzebio, por sempre me apoiarem de todas as formas. Mesmo estando longe sempre estiveram ao meu lado dando-me força. A realização desse sonho não teria sido possível sem vocês.

À minha avó/mãe, Maria de Lurdes Dantas, por sempre acreditar no meu potencial, sempre me ajudando com seus conselhos, fazendo com que eu sempre seguisse em frente, mesmo diante das dificuldades.

Ao meu avô, Mario, meu irmão, Joedson e minhas tias, Marinalda e Lurdes

À minha tia, Maurileide, que foi como uma mãe nessa jornada do Curso, sempre me amparando nas horas em que eu mais precisava.

À minha namorada, colega, irmã e companheira, Layssa Medeiros, por sempre me apoiar nas decisões, sempre estar presente com seu apoio nos momentos que mais necessitei, por sempre me dar forças para continuar e por ter tido a paciência de entender muito das minhas ausências.

À professora, Abigail Fregni Lins, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação, pelos conselhos, puxões de orelhas, e por toda sua dedicação.

À professora, Katia Suzana, coordenadora do Curso de Graduação, por seu empenho e por estar sempre presente nos momentos que mais precisamos.

Aos colegas de classe, Jose Hélio, Jonatas Romero e Vinicios Sales, pelos momentos de amizade e apoio.

Agradecer em especial às minhas duas colegas de classe, Alania Cordeiro e Raquel Reis, que foram fundamentais nessa reta final, sempre me ajudando nos momentos de estudo e me dando força.

Por fim, mas não menos relevante, agradecer a CAPES, agência de fomento brasileira, por proporcionar bolsa de estudos para a pesquisa realizada por mim e pela equipe do Núcleo UEPB do Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL.

A Matemática expressa valores que refletem o
cosmos, incluindo ordem, equilíbrio,
harmonia, lógica e beleza abstrata
Deepak Chopra

RESUMO

MACEDO, Helder Flaubert Lopes. **Nível de pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual paraibana.** Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, TCC. Universidade Estadual da Paraíba, *Campus* Campina Grande, 54f, 2018.

Nossa pesquisa investigou os níveis de pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio, segundo a teoria de Van Hiele. Para tal, adotamos uma pesquisa de cunho qualitativo, fazendo um estudo de caso em uma escola pública na cidade de Areia, estado da Paraíba, tendo como objetivo central, avaliar os níveis de pensamento geométrico dos alunos a partir de uma proposta didática que engloba o uso de provas e demonstrações. A proposta didática foi desenvolvida em equipe, onde tal era composta por seis integrantes: um professor doutor/coordenador, dois graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática, dois mestrandos e um professor da escola básica. Trabalhamos de forma colaborativa, inseridos no Projeto CAPES/OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Núcleo UEPB. Desenvolvemos as atividades da proposta de forma a nortear os alunos a argumentar, provar e demonstrar. Nosso trabalho se inicia trazendo visões de alguns autores que dissertam sobre o uso de provas e demonstrações matemáticas no ensino básico como recurso pedagógico e que tomamos com base para caminhar nossa investigação, a exemplo de Hanna, Nasser e Tinoco, Balacheff e De Villiers. Após a aplicação da proposta didática na escola, a qual tal foi respondida por duplas de alunos escolhidas livremente, tomamos duas duplas de uma turma do 1º do Ensino Médio por terem dados mais ricos para nosso estudo de caso. Ao analisar de maneira mais profunda as propostas respondidas pelas duas duplas, nos deparamos com dados preocupantes a respeito do ensino da Geometria. Ficou evidente que os alunos têm baixo nível de pensamento geométrico. Além disso, tais alunos apresentaram grandes dificuldades em expressar e argumentar suas respostas. Nesse sentido, o uso de provas e demonstrações nas aulas de Matemática se mostra bastante promissor quando trabalhado de maneira adequada.

Palavras-Chave: Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas, OBEDUC, Educação Matemática.

ABSTRACT

MACEDO, Helder Flaubert Lopes**. Level of geometrical thinking of first year high school students from a public school in Paraiba.** Graduation Course in Mathematics. State University of Paraíba, Campus Campina Grande, 54p, 2018.

Our research has investigated the levels of geometric thinking of students of the 1st year of high school, according to the theory of Van Hiele. To do this, we adopted a qualitative research, making a case study in a public school in the city of sand, state of Paraíba, having as its central objective, assessing levels of geometric thinking of students from a didactic proposal which encompasses the use of tests and demonstrations. The Didactic proposal was developed in team, where it was composed by six members: a professor/coordinator, two undergraduate degree course in Mathematics, two students and a professor at the Escola Básica. We work collaboratively, inserted in the Project CAPES/networked OBEDUC UFMS/Uepb/UFAL Nucleus UEPB. We have developed the activities of the proposal in order to guide the students to argue, prove and demonstrate. Our work starts bringing visions of some authors who dissertam about the use of mathematical proofs and demonstrations in basic education as a pedagogic resource and that we take as a basis for moving our research, the example of Hanna, Nasser and Tinoco, Balacheff and De Villiers. After the application of the didactic proposal at school, which this was resolved by pairs of students chosen freely, we have two pairs of a class of 1st Middle School for having richer data for our case study. To analyze more deeply the proposals answered by two doubles, faced with worrying data about the teaching of geometry. It was evident that students have low level of geometric thinking. Furthermore, these students had great difficulty in expressing and explain their answers. In this sense, the use of evidence and statements in the teaching of mathematics shows very promising when worked properly.

Keywords: Geometric Thinking, Evidence and mathematical, demonstrations, OBEDUC Mathematics education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
OBEDUC	Observatório da Educação
PCN	Paramentos Curriculares Nacionais
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
UFMS	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha jornada como estudante na rede pública de ensino básico notei a dificuldade enfrentada por mim e meus colegas nos conteúdos voltados ao ensino da Matemática. Dificuldades essas que ficaram ainda mais evidentes nos anos finais. Da forma em que os conteúdos nos eram apresentados, em particular, sentia-os muito vagos, vagos no sentido de: De onde veio tudo isso? Como poderíamos associar isto a outros conceitos matemáticos? O porquê de aprendermos tal conteúdo? Indagações estas que acredito ter sido feita por boa parte dos estudantes do ensino básico.

Seguindo esta linha de pensamento, no ano de 2012, decidi prestar vestibular para Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), tendo conquistado umas das vagas ofertadas e ingressando no Curso em 2012.2. Meu pensar nessa época, assim como é até hoje, era o de contribuir de alguma forma para melhorar o ensino da Matemática. Porém, pela imaturidade acadêmica, haja vista que ainda não tinha tido uma experiência similar a esta, não sabia ao menos por onde começar. Ao caminhar o primeiro período do Curso fui começando a enxergar possibilidades para colocar em prática todo aquele anseio carregado por mim durante o ensino básico.

No segundo semestre do Curso conheci a professora Dra. Abigail Fregni Lins, no período ministrante da disciplina Informática Aplicada ao Ensino I. Era sabido por mim, e por meus colegas, que a Dra. Abigail, carinhosamente chamada de Bibi, sempre foi e é extremamente atuante em pesquisas voltadas à Educação Matemática. Certo dia, ao término da aula fui convidado por ela a participar do Projeto OBEDUC/CAPES Núcleo UEPB, mais especificamente da Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, um projeto de três anos em rede entre Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e a Universidade Federal de Alagoas (UFAL), intitulado Trabalho Colaborativo com Professores da Rede Pública da Região Nordeste e Centro-Oeste, coordenado pela Dra. Patrícia Sandalo Pereira, Dra. Abigail Fregni Lins e a Dra. Mercedes Carvalho, respectivamente. Vi então uma grande oportunidade, de não apenas crescer academicamente, mas também de contribuir para melhorar o ensino da Matemática.

A equipe Provas e Demonstrações Matemáticas, na qual fui integrante, composta por um professor doutor/coordenador, dois graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática, dois mestrandos e um professor da escola básica, teve como principal objetivo o de examinar o nível de absorção do conhecimento matemático via utilização de provas e demonstrações nas aulas de Matemática no ensino básico.

Nós, como equipe, trabalhamos de maneira colaborativa, dividimos nossa pesquisa em três fases. Na primeira nos reuníamos uma vez por semana para discutirmos aportes teóricos relacionados à nossa linha de pesquisa e definirmos novas leituras. Na segunda fase abrimos ainda mais a discussão ao tema, com diversos artigos, minicursos e pôsteres, expondo-os em congressos e encontros de educação matemática. Na terceira fase, com base em nossas leituras e conhecimentos adquiridos ao longo da pesquisa, elaboramos uma proposta didática, proposta essa que aplicamos ao primeiro, segundo e terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado da Paraíba com o intuito de explorar que tipos de prova e demonstração esses alunos conseguiriam desenvolver com atividades que os conduzissem a argumentar, conjecturar, provar e demonstrar.

Nesse sentido, após leituras individuais, e orientações da professora Abigail Fregni Lins, aclaramos que nossa pesquisa teria como norte a seguinte questão: Qual o nível de pensamento Geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática que os norteassem a argumentar, provar e demonstrar?

Guiados por essa questão, organizamos nosso trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos alguns aportes teóricos relacionados ao uso de provas e demonstrações como recurso pedagógico, a exemplo de Hanna (1995), Nasser e Tinoco (2003), Aguillar Jr e Nasser (2014), Pietropaolo (2005). Além disso, fizemos uma breve explanação sobre os níveis e tipos de provas. No Capitulo 2 trazemos algumas orientações e dificuldades inerentes ao ensino da Geometria, seguindo adiante sobre os níveis de pensamento geométrico, segundo Van Hiele, citando alguns autores que compartilham de sua perspectiva a respeito do ensino e aprendizagem da Geometria. No Capitulo 3 apresentamos os aspectos metodológicos de nossa pesquisa com autores sobre trabalho colaborativo. Em seguida explicitamos nossos aspectos metodológicos. No Capitulo 4 abordamos referenciais teóricos sobre nosso modelo de análise dos dados. Por fim, nossas considerações finais, nas quais revisamos nossos anseios iniciais, revisitando nossos objetivos, seguidos dos resultados obtidos.

2 PROVAS E DEMONSTRAÇÕES: CRENÇAS E CONCEPÇÕES

É sabido que nos últimos anos as pesquisas voltadas para o ensino e a aprendizagem da Matemática cresceram exponencialmente, provocando inquietações e reflexões nos professores e em suas atuações em sala de aula. Contudo, o ensino e a aprendizagem da Matemática ainda é um dos grandes desafios por parte de professores e alunos. Nesta vertente, trazemos uma pesquisa tendente ao uso de provas e demonstrações nas aulas de Matemática, tema esse ainda longínquo do ensino básico brasileiro, com objetivo de despertar um novo olhar, tanto do professor quanto do aluno, sobre uma questão defendida por tantos autores como de fundamental importância para o ensino e aprendizado da Matemática em seus diferentes níveis.

Segundo os PCN (1998), do terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental se faz necessário desenvolver nos alunos habilidades que permitam provar resultados, testar seus efeitos e comparar diferentes caminhos para obter a solução. O que converge a pesquisas realizadas por Hanna (1995), nas quais ela defende que os alunos deveriam ter contato com provas, justificativas e argumentações desde as séries iniciais. Segundo a autora, é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de avaliar cada etapa de uma prova e fazer um julgamento, informando sua validade. Entretanto, Nasser e Tinoco (2003) levantam em suas pesquisas que professores de Matemática brasileiros não exigem que seus alunos justifiquem suas respostas, principalmente porque isso não foi enfatizado no currículo. Além disso, tais alunos não conseguem reconhecer, explicar e nem justificar quando são questionados sobre conteúdos básicos e bastantes conhecidos da Matemática.

Caminhando ainda por esta vertente, Aguillar Jr e Nasser (2014) nos dizem que para desenvolver tal capacidade nos alunos se faz necessário que o professor aceite os diferentes níveis de argumentação e justificação, que possam vir a apresentar e validar determinado resultado. De modo a concluir, o professor Daniel Cordeiro de Morais Filho nos diz que não é exagero afirmarmos que não existe Matemática sem demonstração, pois tal é indispensável para que se haja uma compreensão da estrutura lógica que compõe a Matemática:

> É lamentável, entretanto, a atitude de certos professores e alguns autores de livros didáticos que parecem desejar abolir definitivamente a palavra *demonstração* das salas de aula e dos livros, como se este desserviço pudesse contribuir, de alguma maneira, para a melhoria do ensino. (MORAIS FILHO, 2010, p.15).

A fala de Morais Filho nos remete mais uma vez, o quão longínquo as provas e demonstrações está da educação básica brasileira, talvez um dos motivos de professores e autores de livros didáticos excluírem tal abordagem, seja dada ao simples fato de considerar o ato de provar, demonstrar, argumentar, e justificar como algo apenas da matemática pura, sendo incapazes ou simplesmente não querendo enxergar o potencial desses meios no ensino aprendizagem da matemática na educação básica.

2.1 TIPOS DE PROVA

O ato de se provar matematicamente desde sempre se relacionou com o de validar ideias. Alguns historiadores matemáticos reconhecem que as escrituras acerca do volume do tronco de pirâmide de base quadrada encontradas no papiro de Moscou ou papiro de Moscovo escrito por volta de 1.850 a.C. podem ter sido obtidas através de uma dedução algébrica a partir de conceitos já conhecidos e usados no cálculo do volume de uma pirâmide. No entanto, tais demonstrações seriam muito superficiais, não tendo como fundamentação o método dedutivo e assim não podendo ser visto como uma prova. Muito pouco se sabe sobre a evolução histórica da prova matemática, no entanto, costumasse tomar sua origem na Grécia, pelo fato de não existir nenhum fragmento ou documento de alguma civilização anterior aos autores Gregos do século VII e VI a.C. que se possa falar do contrário (PIETROPAOLO, 2005).

Perante o exposto, e também pelo fato de estarmos Problematizando o uso de provas e demonstrações na educação matemática, acreditamos ser pertinente fazermos alguns esclarecimentos a respeito de suas definições e tipos antes de seguirmos adiante.

Quase sempre provas e demonstrações são tomadas como sinônimo, principalmente no âmbito da educação Matemática. No entanto, alguns autores as distinguem, entre eles está Balacheff (1988). Segundo ele, prova é uma explicação aceita por uma comunidade em um dado momento. Esta aceitação ou não pode ser objeto de um debate na qual tem por obrigação determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. Uma demonstração trata-se de um conjunto de enunciados, organizados e que seguem regras bem definidas.

Balacheff (2000) ainda traz dois tipos de prova, as pragmáticas e as intelectuais, onde as provas pragmáticas têm como base as manipulações e exemplos concretos sendo dividas em três níveis:

- **O empirismo ingênuo**: não a indícios de formulação da validação. Geralmente a afirmação é constatada por meio de um exemplo especifico;

- **A experiência crucial**: verifica-se a validade da proposição por meio de um caso onde não há hesitação em dizer que: “se a proposição vale para este caso, então vale para todos”. Nota-se que na experiência crucial já há certa formalização, onde o sujeito se arrisca a generalizar a proposição a partir de um exemplo pouco conhecido; e,
- **Exemplo genérico**: tem-se a explicação dos motivos e passos seguidos para a validação da afirmação. A formulação presente neste nível traz propriedades, características e estruturas válidas para toda a classe representada, isto é, ainda trata-se de uma demonstração particular, porém valida para todos os casos em questão.

Já as provas intelectuais são caracterizadas principalmente pelo afastamento da ação em relação a um representante particular. Dentre tais provas, Balacheff ressalta o experimento mental, isto é, o foco está na ação, interiorizando-a e separando-a de um caso particular. Os conceitos e operações empregados nunca são escolhidos pelo resultado de sua implementação.

Ainda segundo este autor, não se deve iniciar a educação para prova matemática enfatizando sua forma, mas sim seu significado como atividade matemática. Isto é, alunos e professores devem enxergar a demonstração matemática como uma atividade essencialmente própria da Matemática.

De maneira correlativa, Hanna (1996) apresenta alguns aspectos sobre prova, as quais ela define como:

- **Prova formal**: conceito teórico baseado na lógica formal, onde pode ser visto como um modelo onde à prática matemática atual apenas se assemelha;
- **Prova aceitável:** formulação padrão que define o que é aceitável para matemáticos qualificados; e,
- **O ensino da prova:** provar atividades que parecem nas aulas de Matemática a fim de elucidar conceitos importantes para o aluno.

Ela ainda articula que dependendo do nível e maturidade do aluno tais aspectos podem ter o mesmo grau de aceitação.

3 ENSINO DA GEOMETRIA

A Geometria é um ramo da Matemática importantíssimo, posto que esteja sempre presente em nossa vida cotidiana. Portanto, de total relevância para a formação do indivíduo.

Os PCN (1999) do Ensino Médio orientam que ao se trabalhar com Geometria o professor seja capaz de conduzir o aluno a desenvolver habilidades de argumentação lógica e de suas aplicações, podendo assim usar formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o rodea. No entanto, tais objetivos não estão sendo alcançados. Talvez um dos problemas que acarrete este insucesso seja apontado por Lorenzatto (1993), em pesquisa realizada com 255 professores de 1º e 4º série, na qual os professores foram submetidos a responder oito questões sugeridas pelos alunos. O resultado foi 100% de erro, o que demonstra o total despreparo dos professores em termos de conteúdo. Além disso, apenas 8% dos professores confessou que tentavam ensinar Geometria a seus alunos. Nesta mesma direção Pavanello (1993) aponta que:

> O tratamento não rigoroso dado a geometria euclidiana, o apelo que esta faz a visualização, atrelando seu estudo a duas ou três dimensões e induzindo oticamente certos resultados e sua submissão a álgebra tem sido os motivos matemáticos invocados para a diminuição do espaço reservado a geometria nos currículos escolares dos vários níveis e sua substituição pela álgebra e pelo cálculo (PAVANELLO, 1993, p. 15).

Discutindo ainda sobre os problemas que impactam o ensino da Geometria, podemos citar os impasses acarados pelos professores. Sempre que confrontados sobre as dificuldades enfrentadas no ensino da Geometria nos seus diferentes níveis, as alegações são do tipo: porque não sei; o tempo é curto; porque os alunos preferem trabalhar com números; porque os problemas são de contas. No entanto, o maior problema talvez seja o fato da Geometria exigir um raciocínio especifico do aluno, ou seja, para se resolver problemas de Geometria não basta apenas ser bom em Aritmética e/ou Álgebra (LORENZATO, 1993)

Em pesquisa mais recente, Nascimento (2012) atribui o insucesso do professor no ensino da Geometria a três fatores. Primeiro, os professores não se adequaram as novas tecnologias, não conseguem usar como recurso didático computadores e lousas digitais, por exemplo. O segundo ponto recai no conteúdo, ou seja, os professores não aprofundam seus conhecimentos na área, querem tentar ensinar Geometria sem conhecê-la, ou simplesmente não ensinar. O terceiro ponto está relacionado ao livro didático. Nele a Geometria é apresentada como *mera conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, aplicada só no papel.*

Notamos que, apesar de décadas de discussões, houve pouco, ou quase nenhuma, mudança no que desrespeito ao ensino da Geometria. O que pode se notar é que boa parte dos professores está encarcerada em seus arcaicos métodos de ensino. No entanto, não podemos culpa-los, haja vista que tais são filhos de uma Matemática tradicionalista e dedutiva, com enfoque na Álgebra e Aritmética.

3.1 PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Mesmo em cursos superiores os alunos demonstram ter dificuldades em relacionar sistemas axiomáticos diversos a propriedades fundamentais da Geometria, o que ocasiona, em muitas das vezes, a não compreensão do processo de demonstração, ou a incapacidade de utilizar-se de representações geométricas para a visualização de conceitos matemáticos (PAVANELLO, 1993). Contudo, no mínimo o ensino básico de Matemática foi cursado por estes alunos, então por que isso ocorre? Será que tais dilemas enfrentados no ensino superior sejam provenientes das dificuldades enfrentadas na educação básica? Gerando assim um *ciclo vicioso*? Em busca de respostas para tais questionamentos, em 1957, na Universidade de Utrecht, Holanda, os Van Hiele desenvolveram uma pesquisa intitulada *Fundamentos de Geometria: aspectos práticos dos níveis de pensamento de Van Hiele*. Conhecida como teoria de Van Hiele, essa pesquisa teve como fundamentação trabalhos realizados por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof, que veio a falecer logo após concluir sua tese. Com isso, Pierre reformulou e dimensionou a teoria em publicações posteriores (KALEFF, HENRIQUES e FIGUEIREDO,1994).

Os Van Hiele atribuíram a principal razão do fracasso do currículo de Geometria tradicional, ao fato de:" (...) o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender!"(DE VILLIERS, 2010, P. 401).

Nesta perspectiva, Freudenthal (Freudenthal, 1973, *apud* Kaleff, 1994) nos diz que quando o ensinamento ocorre em um nível mais alto do qual o estudante se encontra, os conceitos não são bem assimilados e não ficam retidos por muito tempo em sua memória. No entanto, as concepções erradas quando aprendidas parecem persistir.

Com certeza a grande maioria dos alunos do ensino básico sente dificuldade, ou não conseguem assimilar conteúdos matemáticos mais abstratos. Seguindo a perspectiva de Van Hiele, Freudenthal disserta que isso ocorre pelo fato do professor estar ensinando em um nível superior ao qual o aluno se encontra. O grande desafio para o professor é trabalhar conteúdos que estejam no mesmo nível de seus vários alunos. Nessa perspectiva, o modelo de Van Hiele norteia a aprendizagem e avalição dos conhecimentos em Geometria.

A teoria de Van Hielle distinguiu cinco níveis de pensamentos geométricos, em suas características gerais descritas da seguinte forma:

Nível 0: reconhecimento

Os alunos reconhecem as figuras geométricas apenas pelo visual. Reconhecem triângulos, quadrados, retângulos, porém suas propriedades são irrelevantes e não desempenham papel algum nesse processo.

Nível 1: análise

Os alunos identificam as figuras por suas propriedades geométricas, em vez suas formas, contudo as propriedades são vistas de maneira isolada.

Nível 2: ordenação

Os alunos compreendem o significado das propriedades e as ordenam logicamente por meio de pequenas deduções. A correlação entre figuras e propriedades é compreendida.

Nível 3: dedução

Os alunos tem o raciocínio lógico desenvolvido. As deduções, sequências dos enunciados, condições necessárias e suficientes são empregadas com significado.

Nível 4: rigor

Os alunos analisam diversos sistemas dedutivos com elevado grau de rigor, sendo capazes de se aprofundarem nas análises de um sistema dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas.

No entanto para nosso estudo, focamos apenas nos quatro primeiros níveis, haja vista serem níveis mais relevantes para a Geometria do Ensino Básico.

Segundo De Villiers (2001), a compreensão de definições, normalmente expressas nos livros didáticos, desenvolve no aluno apenas o Nível 2. Tais definições, ofertadas diretamente aos alunos em níveis inferiores, estão fadadas ao fracasso, ou seja, aplicar conteúdos referentes a níveis mais elevados sem antes haver uma compreensão dos níveis inferiores dificilmente acarretará bons resultados. Um exemplo claro é a forma como o conceito de retângulo é passado aos alunos, onde frequentemente é introduzido por meio da comparação com algum objeto de mesma forma, ou figura estática de um livro. No entanto, a figura de um livro, assim como um objeto de forma retangular, não pode ser transformada em um quadrado (a menos que partes sejam cortadas), proporcionando assim um conceito de retângulo completamente desassociado do conceito de quadrado:

> Tradicionalmente, a maioria dos professores e autores de livros escolares simplesmente fornece aos alunos conteúdo pronto (definições, teoremas, comprovações, classificações, etc.) para que eles meramente tenham de assimilá-lo e regurgitá-lo em testes e provas. Esse tipo de ensino tradicional de geometria pode ser comparado a uma aula de culinária na qual o professor simplesmente mostra aos alunos bolos (ou pior, apenas fotos de bolos) sem jamais mostrar a eles o que vai dentro do bolo e como ele é preparado (DE VILLERS, 2001, p. 411).

Ainda de acordo com este autor, um dos conceitos mais importantes da teoria de Van Hiele é que as atividades dos Níveis 0 e 1 deveriam fornecer *subestruturas conceituais* adequadas para os Níveis seguintes. Nesta perspectiva, o uso de provas e demonstrações no ensino desempenha papel de fundamental importância. Para Santos (2015):

> O ato de explicar, provar e demonstrar seus resultados é passível desencadear caminhos para que o aluno desenvolva suas habilidades, desenvolvendo estratégias e atitudes que sirvam de guia para a construção do seu saber matemático. A Matemática ensinada desta forma é uma Matemática viva que oferece ao aluno possibilidades de participar de seu desenvolvimento e compreensão (SANTOS, 2015, p. 20).

Neste sentindo, atentamos ao grande potencial que o uso de provas e demonstrações mostra ter, principalmente no ensino e aprendizagem da Geometria. Ao se trabalhar nessa perspectiva, propiciamos aos alunos a capacidade de desenvolver seu raciocínio lógico dedutivo, sua argumentação, seu pensar matemático e consequentemente seu pensamento geométrico.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Considerando que trabalhamos de maneira colaborativa no Projeto OBEDUC, decidimos por trazer alguns apontamentos de Damiani (2008) e Ibiapina (2008) referentes a cooperação, colaboração, trabalho colaborativo e pesquisa colaborativa a fim de situar o leitor. No entanto, nós, como Projeto OBEDUC, tomamos por base as menções feitas por Ibiapina (2008), posto que seu viés para colaboração é o mesmo do nosso.

Para Damiani (2008), cooperação e colaboração se distinguem. Segundo ele, na cooperação há uma relação de reciprocidade na execução das tarefas. No entanto, os objetivos finais nem sempre são resultados de negociação conjunta do grupo, abrindo espaço para relações desiguais e hierárquicas entre os seus membros. Em contrapartida, na colaboração há uma relação de apoio, o grupo trabalha junto, negociando suas perspectiva afim de alcançar propósitos comuns, ou seja, *estabelecendo relações que tendem à não-hierarquização, liderança compartilhada, confiança mútua e co-responsabilidade pela condução das ações.*

Para Ibiapina (2008), pesquisar de maneira colaborativa é tornar a interação entre professor e pesquisador uma troca de saberes, proporcionando que ambos construam teorias sobre suas práticas profissionais e as discutam com os demais colegas, não existindo assim uma hierarquia entre os participes, ou seja, um grupo trabalhando junto, negociando suas perspectivas a fim de alcançar propósitos comuns, onde para ela seria o benefício da escola e o desenvolvimento profissional do docente, gerando assim a colaboração:

> ... a colaboração é produzida por intermédio das interações estabelecidas entre as múltiplas competências de cada um dos participes, os professores, com potencial de análise das praticas pedagógicas; e o pesquisador, com o potencial de formador e organizador das etapas formais da pesquisa. A interação entre esses potenciais representa a qualidade da colaboração, quando menor as relações de operação e poder, maior o potencial colaborativo... (IBIAPINA, 2008, p. 20).

Ainda segundo esta autora, trabalho colaborativo é a ação voltada a resolução dos problemas sociais, em especial aqueles presentes na escola, contribuindo com aspectos que motivam a co-produção de conhecimentos entre pesquisador e professor, tendo por finalidade a mudança da cultura escolar e o desenvolvimento profissional dos docentes. Dessa forma, pesquisar colaborativamente é trabalhar em conjunto na análise de problemas, onde as responsabilidades, tomadas de decisões e realização das atividades de investigação são compartilhadas por todos os partícipes de maneira equivalente.

4.1 PESQUISA QUALITATIVA

Normalmente a escolha do método de pesquisa se dá por uma estratégia de pesquisa, ou um conjunto de decisões sobre como ela se desenha, além dos princípios que o sujeito tem a respeito do estudo do mundo social e de como aferir a validade do conhecimento social que tal pesquisa estabelece. Em muitos dos casos, a escolha de um método de pesquisa, em particular, está também atrelado a um aspecto teórico, ou a conceitos comuns e explanatórios, que fornecem um alicerce para expor o pensamento sobre o mundo social e informar suas pesquisas. Como consequências dessas diferentes posições teóricas, a pesquisa qualitativa não é unificada, nem bem definida. Podemos dizer que existe um verdadeiro debate das diferentes visões sobre o que de fato define uma pesquisa qualitativa (POPE, ZIEBLAND e MAYS, 2005). Nesta perspectiva, Stake (2011) afirma que:

> Não existe uma única forma de pensamento qualitativo, mas uma enorme coleção de forma: ele é interpretativo, baseado em experiências, situacional e humanístico. Cada pesquisador fará isso de maneira diferente, mas quase todos trabalharão muito na interpretação. Eles tentarão transformar a parte da historia em termos experienciais. Eles mostrarão a complexidade do histórico e tratarão os indivíduos como únicos, mesmo que de modos parecidos com outros indivíduos (STAKE, 2011, p. 41).

Bogdan e Biklen (2003) atribuem cinco características à investigação qualitativa:

> 1 - Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2 - A investigação qualitativa é descritiva;
> 3 - Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4 - Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5 - O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 2003, p. 47-51).

Ainda de acordo com estes autores, os investigadores qualitativos em educação estão sempre questionando os sujeitos da investigação, buscando compreender o que eles experimentam, como interpretam sua experiências e o modo como eles enxergam o mundo social. Se faz necessário também que os investigadores estabeleçam estratégias e procedimentos que os permitam contemplar as experiências do ponto de vista do informador.

Neste caminhar, Pope, Ziebland e Mays (2005) dissertam que a pesquisa qualitativa busca respostas para perguntas do tipo *o que é X, como X varia em* *circunstâncias diferentes e por quê? ao invés de qual o tamanho de X ou quantos X existem?* Ela relaciona-se diretamente com os significados que as pessoas atribuem às suas experiências e maneira de enxergar o mundo social.

Ao optar por este método de pesquisa o investigador deve estar ciente que trabalhará com pessoas em seus ambientes naturais, e não artificiais ou experimentais, exigindo assim, no mínimo, um tempo com os participes em seu meio natural a fim de desenvolver perguntas essencialmente investigadoras a respeito dos fenômenos sociais.

Diante do exposto, optamos por desenvolver uma pesquisa de cunho qualitativo, abrangendo o estudo de caso, o qual é discutido na seção Análise dos Dados. Admitimos também que as definições e aspectos aqui expostos qualificam bem a forma na qual trabalhamos.

4.2 COMO SE DEU A PESQUISA

Durante leituras derivadas do Projeto OBEDUC/CAPES chegamos ao casal Van Hiele. Suas pesquisas voltadas ao ensino e aprendizado da Geometria, seguindo uma tendência que contempla o uso de provas e demonstrações, despertou nosso interesse em caminhar por uma investigação desse gênero. Em paralelo, estávamos a desenvolver uma proposta didática com a Equipe Provas e Demonstrações, que aplicaríamos em uma escola estadual na cidade de Areia, Paraíba. Diante disso, decidimos por definir a pergunta que teríamos como norte para nossa pesquisa:

Qual o nível de pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática que os norteiam a argumentar, provar e demonstrar?

Tomando por base a questão que nos guia, temos como objetivo central avaliar os níveis de pensamento geométrico dos alunos a partir de uma proposta didática que engloba o uso de provas e demonstrações.

4.2.1 Local da pesquisa

O desenvolvimento da pesquisa se deu na Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Carlota Barreira, localizada na cidade de Areia, estado da Paraíba. A escolha dessa Escola se deu ao fato de dois integrantes da Equipe Provas e Demonstração terem forte vínculo com ela, tendo ambos eles estudado nessa Escola, fazendo assim parte da história de vida deles, e também pelo fato de atualmente eles trabalharem como professores de Matemática, sentindo assim certa necessidade em contribuir com o crescimento da Escola e dos alunos.

4.2.2 Sujeitos da pesquisa

Segundo Fontanella, Ricas e Turato (2008), na pesquisa qualitativa o sujeito não pode ser escolhido casualmente, tal deverá ser escolhido de forma a atender aos objetivos específicos da pesquisa.

Nesta perspectiva, optamos por trabalhar com alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio, haja vista que eles já viram o conteúdo abordado na proposta didática e assim não sentiriam grandes dificuldades na obtenção de suas respostas. A turma em questão tinha 17 alunos, propomos que formassem duplas. Como havia um número impar de alunos, um se propôs a fazer de maneira individual.

4.2.3 Coleta dos dados

Nós, como Equipe Provas e Demonstração, iniciamos a coleta dos dados no mês de junho de 2015, dividindo-a em três momentos, ao longo de quatro horas cada momento.

No primeiro momento foi proposto aos alunos que discursassem sobre *Provas e Demonstrações Matemáticas*. Deixamo-los livres para expressar o que pensam e sabem a respeito do tema em questão (Apêndice A) em forma de redação.

No segundo momento adentramos na Proposta Didática, trabalhando as Partes I e II, referentes ao Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Nesse momento propomos aos alunos que formassem duplas e dessem inicio a resolução das Partes I e II da Proposta. Ao término do primeiro dia da pesquisa recolhemos as propostas didáticas devolvendo-as no inicio da terceira fase.

No terceiro e último momento foi trabalhada a parte final da Proposta, ou seja, as Partes III e IV que abordam o Teorema do Ângulo Externo e atividades a serem trabalhadas no GeoGebra. No entanto, a Parte IV foi desenvolvida apenas pelas turmas do 2º ano do Ensino Médio.

A proposta didática foi aplicada a um total de 80 alunos, entre o 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio. No entanto, como citado anteriormente, a pesquisa aqui apresentada foi desenvolvida apenas com os alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Das oito mais duplas mais um aluno que se propôs a fazer de maneira individual a qual aplicamos a proposta, optamos por analisar duas como nosso estudo de caso.

4.3 PROPOSTA DIDÁTICA

A proposta didática foi desenvolvida por nós integrantes da Equipe a qual é composta por um professor doutor/coordenador, dois graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática, dois mestrandos e um professor da escola básica, a qual abrange três assuntos que consideramos de extrema relevância para a Geometria: *Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do ângulo externo*. A proposta foi aplicada a todo o Ensino Médio do turno da tarde. Optamos pelo Ensino Médio pressupondo que os alunos detinham conhecimento suficiente para lidar com as dificuldades encontradas no decorre da proposta didática.

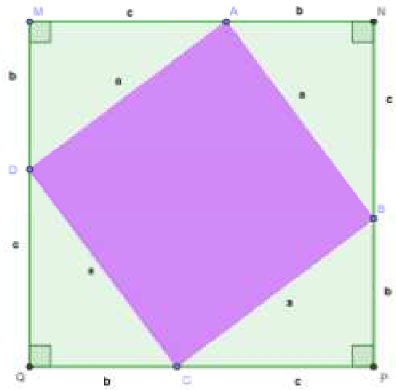
Essa proposta (APÊNDICE B) é constituída de 18 atividades, sendo divididas em quatro partes. A primeira contempla 8 atividades a respeito do Teorema de Pitágoras; a segunda de 3 atividades sobre o Teorema da Soma dos Ângulos Externos; a terceira de 2 atividades sobre o Teorema do Ângulo Externo; e a quarta de 5 atividades a serem desenvolvidas no aplicativo GeoGebra. Desenvolvemos as questões de maneira a conduzir os alunos a justificarem e argumentarem suas respostas, exigindo deles raciocínio e reflexão sobre propriedades e conceitos matemáticos. Nesse momento, decidimos que a resolução da proposta se daria em dupla a fim dos sujeitos pesquisados discutirem entre si, expondo seus diferentes pontos de vista acerca das questões propostas, havendo assim reflexão por parte dos sujeitos sobre suas respostas.

Para a presente pesquisa utilizamos a atividade 8 da Parte I, referente ao Teorema de Pitágoras. Abaixo a atividade e resultados esperados de cada item:

Figura 1 –Atividade 8

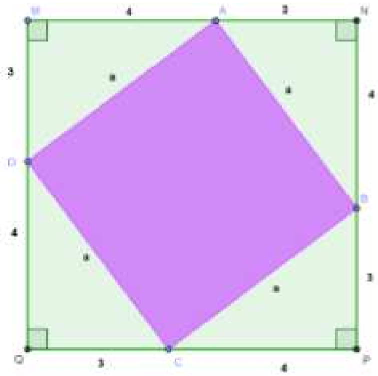
(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

Fonte: Dados da pesquisa

4.3.1 Objetivos das questões

- item *a***:** O objetivo principal é que ao olhar a figura os alunos concluam se é ou não um quadrado, argumentando suas repostas com propriedades e conceitos;

- item *b:* O objetivo dessa questão é conduzir os alunos a uma prova do Teorema de Pitágoras usando conceitos de área;

- item *c:* A finalidade é que partindo de um caso específico os alunos compreendam mais facilmente a relação do cálculo de área com o Teorema de Pitágoras;

- item *d:* Com essa questão esperamos que eles possam distinguir um caso geral de um especifico, mas que conclua que ambos são semelhantes; e,

- item *e:* por fim queremos que os alunos analisem as etapas anteriores e consigam distinguir uma prova de uma simples verificação.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Levando em consideração o caminhar da pesquisa e o método de investigação que adotamos, para a análise dos dados tomamos as técnicas de estudo de caso. Segundo Ventura (2007), com este método pode-se supor conseguir conhecimento do fenômeno estudado a partir da exploração intensa de um único caso.

Para Ludek e Andre (1986), os estudos de caso visam descobertas. Mesmo o investigador tendo como base alguns pressupostos teóricos, ele sempre se manterá atento a elementos importantes que possam vir a surgir durante o estudo. Assim, o embasamento teórico servirá de estrutura básica. De acordo com Yin (2001):

> O estudo de caso é a estratégia escolhida ao se examinarem acontecimentos contemporâneos, mas quando não se podem manipular comportamentos relevantes. O estudo de caso conta com muitas das técnicas utilizadas pelas pesquisas históricas, mas acrescenta duas fontes de evidências que usualmente não são incluídas no repertório de um historiador: observação direta e série sistemática de entrevistas (YIN e ROBERT, 2001, p. 27).

O estudo de caso é normalmente projetado em torno de um pequeno número de questões. No entanto, nessa estratégia de investigação predominam temas ou questões sobre relações complexas, situadas e problemáticas (STAKE, 2000).

Triviños (1987) ainda ressalta que o estudo de caso na pesquisa qualitativa talvez seja o mais importante, pois o tipo de estudo adotado nesse método de pesquisa caracteriza-se pelo ponto de vista da medida dos dados que ele apresenta e pela utilização elementar de uma estatística simples.

Nesta perspectiva optamos por analisar duas duplas de alunos, na qual denominamos de dupla A e dupla B. A escolha dessas duas duplas se deu ao fato de elas terem ofertado dados mais ricos na atividade 8 da parte I da proposta didática, atividade essa escolhida entre as demais pelo fato de melhor se encaixar no nosso objetivo de pesquisa, sendo assim capaz de propiciar uma visão geral que responda a nossa questão.

5.1 REDAÇÂO

Antes de iniciarmos a aplicação da proposta didática entregamos uma folha (APÊNDICE A) para que os alunos dissertassem sobre provas e demonstrações, a fim de trazer à tona seus anseios e ponto de vista a respeito do tema em questão. Após a aplicação tivemos como retorno dos integrantes da dupla A e dupla B:

Figura 2 – Resposta dada pelo integrante I dupla A

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Na Matemática, são feitos cálculos que de uma forma ou outra se você não buscar uma justificativa ou prova, não será demonstrada automaticamente. Para tudo tem uma justificativa, uma razão. Não faz nenhum sentido você fazer um cálculo e não saber porque está sendo feito.

É bom quando tem um problema que você tem que interpretar e entender para resolver. Daí, não será apenas um cálculo sem sentido, será uma situação cotidiana que dará a percepção de que qualquer coisa do nosso dia-a-dia é Matemática e pode envolvê-la.

Aliás, qualquer coisa da nossa vida envolve Matemática. Esse é o sentido de nós buscarmos

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

provas e demonstrações, assim podemos ver que é indo atrás dessas justificativas que a matéria pode se tornar bem mais interessante e legal. Toda disciplina pode ser mais interessante quando passa a trabalhar coisas comuns.

Por isso, é bom procurar justificativas para os cálculos que fizermos. Quanto mais soubermos o "porquê" das coisas, mais nos causará interesse e curiosidade de saber cada vez mais.

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 3 – Reposta da pelo integrante II dupla A

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Matemática é uma matéria onde eu particularmente considero bastante complicada. A matemática envolve certos tipos de assunto onde não é muito ruim não gosta ler, interpretar para que possa buscar o resultado de uma questão, mas, não é só buscar o resultado, tem que provar, ou justificar o resultado que você conseguiu, para que tenhamos certeza se aquele resultado é de certeza correto. Onde essas justificativas, ou provas são o que realmente dá sentido da matemática.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4 – Reposta da pelo integrante I dupla B

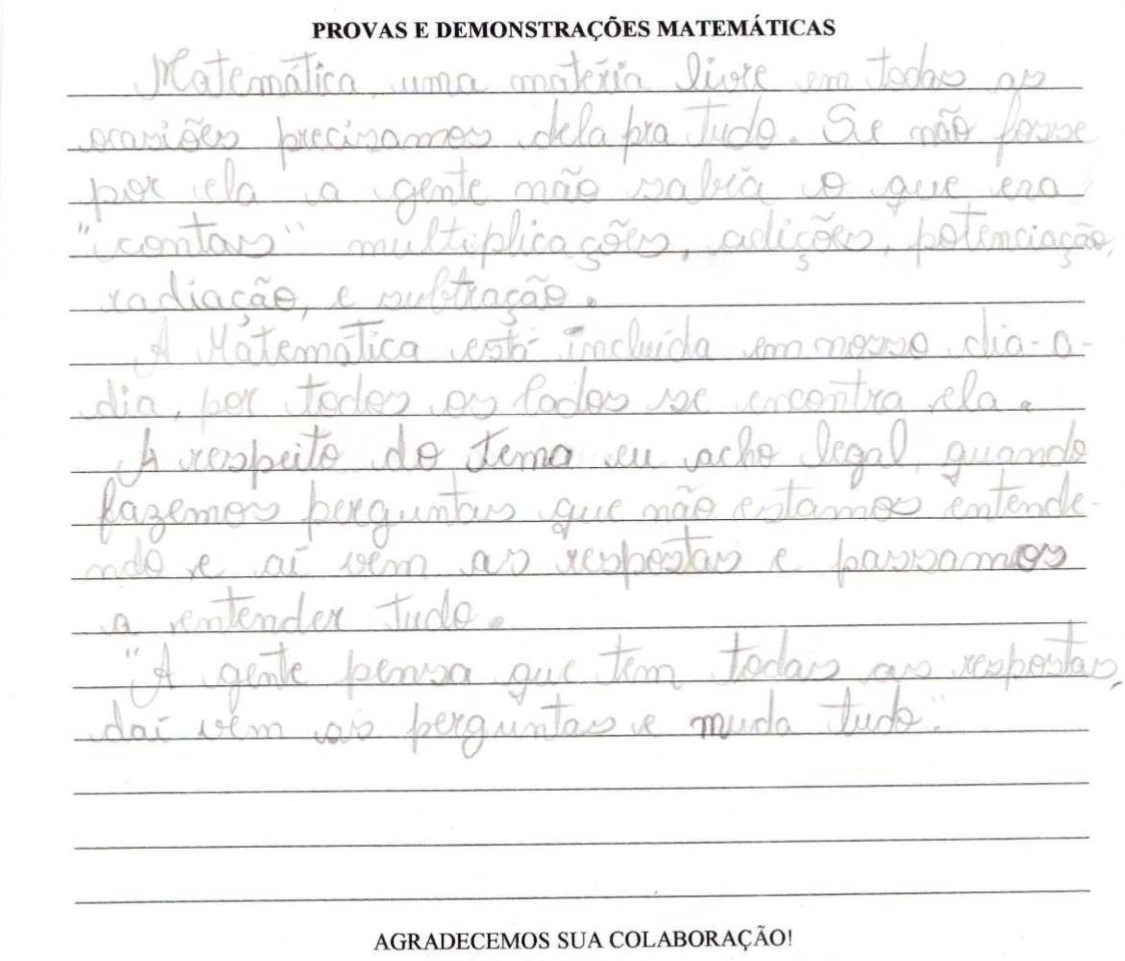
PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Bom matemática na minha opinião é algo que já vem de muito tempo, antes as pessoas para saberem o resultado de alguma coisa, não perguntavam a nenhum professor, pois naquele tempo não tinha; eles pegavam pedrinhas pequenas, sementes de árvores, e começavam a contar ou contar a clara tal resultado, daí sabiam o valor daquele objeto. Mais hoje a matemática está evoluída, temos várias professoras ensinando, explicando, é disciplina; enfim a matemática, as contas são feitas por meio de celulares, calculadoras e quando não sabemos tal pergunta, vamos lá e perguntamos ao professor, ele nos explica e no fim, tiramos todas as dúvidas.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5 – Reposta da pelo integrante II dupla B


PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Matemática uma matéria livre em todos os
ocasiões precisamos dela pra Tudo. Se não fosse
por ela a gente não sabia o que era
"contas" multiplicações, adições, potenciação,
radiação, e subtração.
A Matemática está incluída em nosso dia-a-
dia, por todos os lados se encontra ela.
A respeito do tema eu acho legal, quando
fazemos perguntas que não estamos entende-
ndo e aí vem as respostas e passamos
a entender tudo.
"A gente pensa que tem todas as respostas,
daí vem as perguntas e muda tudo".

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!

Fonte: Dados da pesquisa

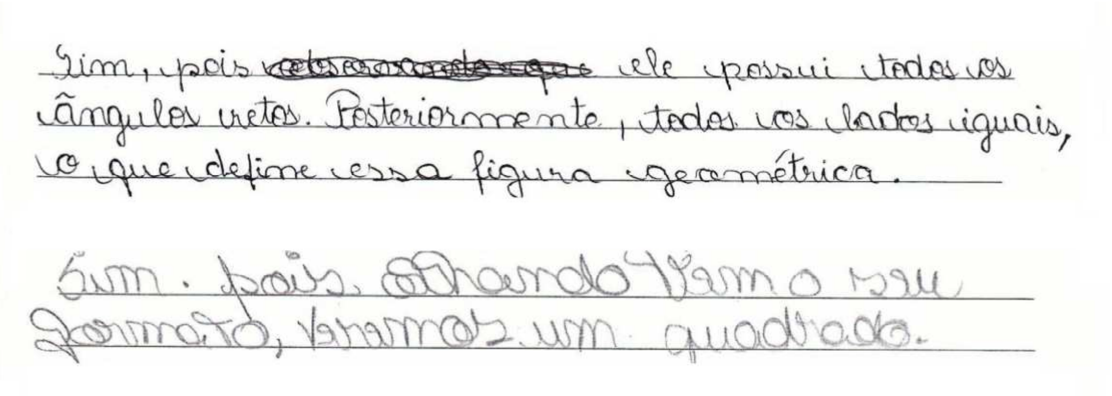
Nasser e Tinoco (2003) trazem em suas pesquisas que professores de Matemática brasileiros não exigem que seus alunos justifiquem suas respostas, principalmente porque isso não foi enfatizado no currículo. Podemos notar o reflexo disso na fala da dupla B, onde ambos os integrantes não conhecem ou não associaram provas e demonstrações a o ato de provar, justificar e argumentar sentenças matemáticas. Hanna (1995) nos diz que os alunos deveriam ter contato com Provas e demonstrações desde as series iniciais. Não sabemos se os sujeitos aqui pesquisados tiveram ou não contato com provas e demonstrações na series anteriores, o que nos fica claro é o conhecimento superficial detento por eles sobre o tema em questão. No entanto, podemos notar também que abordar esse tema em sala da aula, para esses alunos, é de total relevância, isso fica evidente na fala do integrante I da dupla A, onde ele nos diz que: “para tudo tem uma justificativa, uma razão. Não faz nenhum sentido você fazer um cálculo e não saber por que está sendo feito”. De maneira correlativa o integrante II da dupla diz que: “... não é só buscar o resultado, tem que provar ou justificar o resultado que você conseguiu, para que tenhamos certeza se aquele resultado é de certeza correto.”.

Podemos perceber que mesmo não tendo um conhecimento mais aprofundado sobre o tema, os alunos enxergam o ato de provar e demonstrar com de fundamental importância nas aulas de Matemática. Isso nos faz questionar, o porquê desse tema ser tão pouco abordado nas pesquisas de educação matemática no Brasil, tão pouco ainda, abordada nas aulas de Matemática da educação básica.

5.2 ATIVIDADES

Após a aplicação das redações aplicamos as atividades da proposta, na Figura 3 podemos ver a resposta dada pela dupla A e B ao item “*a*” da atividade 8, na qual perguntávamos se na figura abaixo, o quadrilátero ABCD era de fato um quadrado e pedíamos que justificassem sua resposta:

Figura 6 – Resposta dada pela dupla A e B respectivamente ao Item *a*


Sim, pois ele possui todos os ângulos retos. Posteriormente, todos os lados iguais, o que define essa figura geométrica.

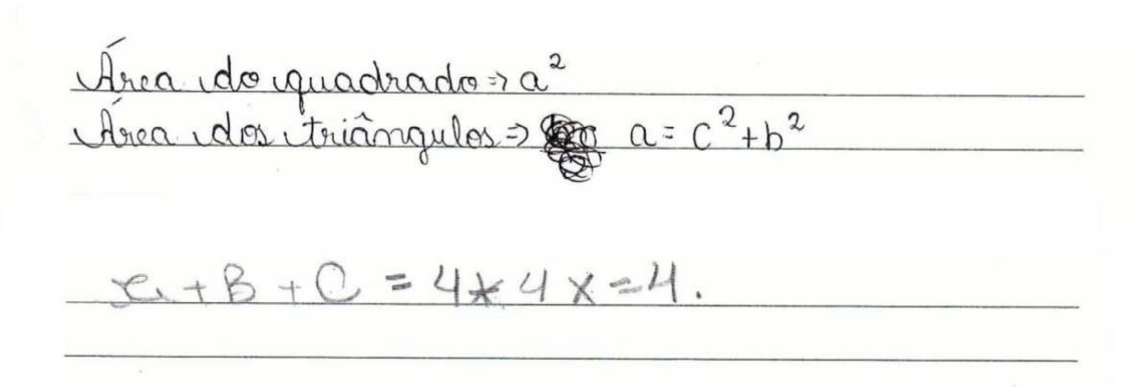
Sim. pois. Olhando vemo o seu formato, veremos um quadrado.

Fonte: Dados da pesquisa

Diante do exposto podemos notar que a dupla “A” utilizou-se da definição de um quadrado para justificar sua resposta. Nota-se que a dupla compreende o significado das propriedades e as ordena para chegar a uma conclusão. Já a dupla “B” não se utilizou de conceitos ou propriedades para concluir que a figura é um quadrado. Notamos a falta de questionamento matemático por parte da dupla, isto é, ela não faz uma auto reflexão se a figura mostrada de fato é um quadrado ou não.

No item “*b*” foi pedido que calculassem o valor de *a* em função de *b* e *c* usando o conceito de área:

Figura 7 – Resposta dada pela dupla A e B respectivamente ao Item *b*

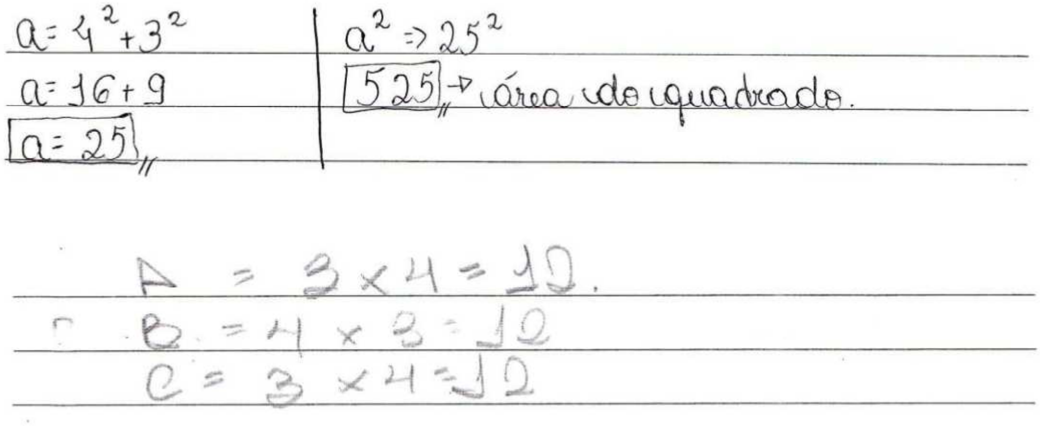


Fonte: Dados da pesquisa

A dupla A afirmou de maneira correta quando expôs que área do quadrado é um de seus lados elevado ao quadrado. Em relação a área do triângulo houve um equívoco. Talvez eles estivessem pensando no Teorema de Pitágoras no momento de sua afirmação. No entanto, era pedido o valor de *a* usando conceitos de área, fugindo assim do que se foi pedido. Com isso, pudemos perceber que a dupla não assimilou o conceito geométrico, talvez pelo simples fato de estar lidando com letras, ou por exigir deles um pouco mais de raciocínio para assimilar os conteúdos de produtos notáveis e cálculos de áreas de figuras geométricas. A argumentação da dupla B não atribuiu muito significado ao que se foi pedido, uma vez que fez *4x4X=4*. Talvez a dupla tenha tomado a medida de *a* como sendo 4X e tenha multiplicado pela quantidade de vezes que ele se repete. Tudo seria igual a 4, montando assim uma equação. Mesmo assim, percebe-se que não tem significado. Pudemos julgar que a dupla esqueceu, ou não assimilou os conceitos fundamentais exigidos na questão.

De maneira análoga à questão anterior, na letra C pedimos que eles calculassem o valor de a, porém agora em função de 3 e 4 respectivamente:

Figura 8 – Resposta dada pela dupla A e B respectivamente ao Item *c*

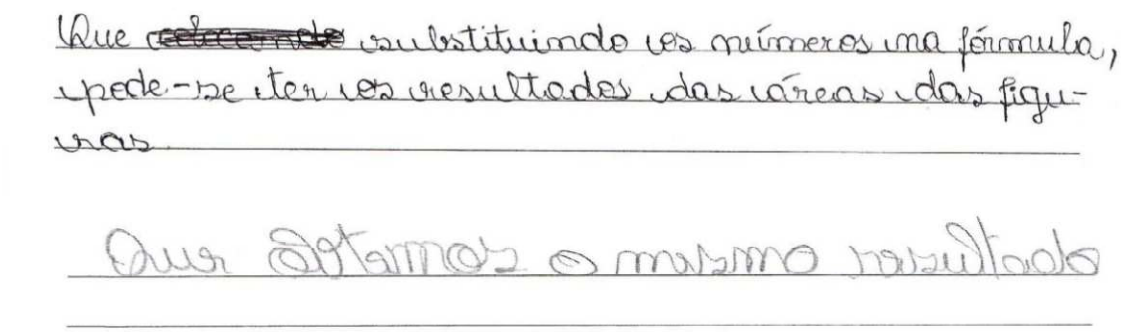


Fonte: Dados da pesquisa

Herdando a *fórmula* da questão anterior, a dupla usou-se dela para aplicar os valores dados, levando-os assim, como na questão anterior, a um equívoco. Portanto, consideramos a análise dessa questão para a dupla A como similar a anterior. A dupla B, de maneira análoga, também obteve um cálculo sem significado para o que se foi pedido, já que simplesmente fez o produto das constantes dadas, não dando explicação nem justificativa para isso.

No item *d* pedimos para a dupla comparar os resultados do item *b* e *c* e dissertassem sobre o que observaram:

Figura 9 – Resposta dada pela dupla A e B respectivamente ao Item *d*



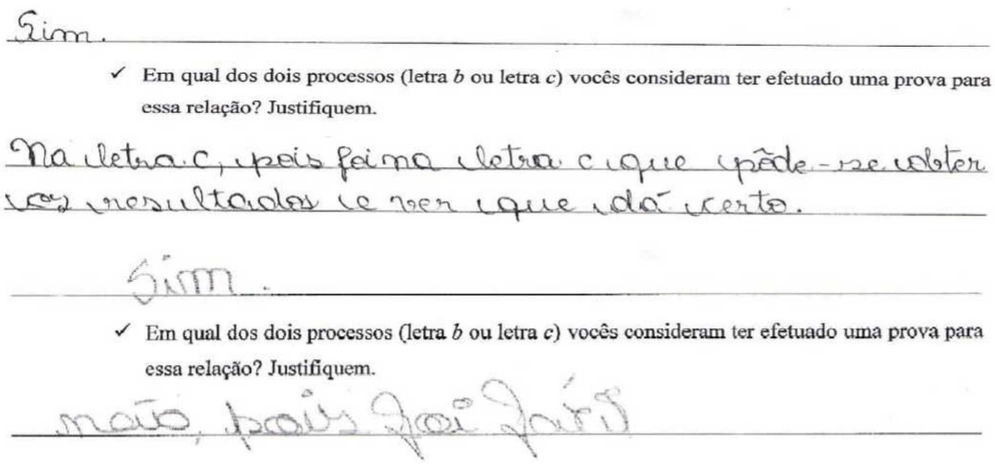
Fonte: Dados da pesquisa

A dupla A concluiu que substituindo os números na *fórmula* que eles encontraram pode-se obter a medida da área das figuras. Concluímos que a dupla A fugiu totalmente do objetivo que tínhamos com a questão, que era de relacionar o caso geral com o especifico e ver que são semelhantes. Notamos que os alunos se prendem muito às fórmulas, tentando aplicá-las simplesmente, sem analisar, muito menos tentar compreender o que foi pedido.

A dupla B disserta que ao comparar os dois itens obtêm os mesmos resultados. Nota-se que a dupla faz uma análise muito superficial da figura, pois de certa forma as falas deles faz sentido, no entanto eles não expõem argumentos que possam comprova a veracidade do que foi dito. Eles não conseguem enxergar de maneira mais aprofundada. Acreditamos que eles dissertaram sobre pelo fato dos itens *b* e *c* estarem respectivamente relacionados com os inteiros 3 e 4.

Por fim, no item *e* pedimos que eles analisassem a conclusão obtida no item *b* e *c* e dissertassem se elas eram equivalentes, em seguida concluísse qual delas, eles achavam ter efetuado uma prova para a relação dada, neste último caso pedimos também que justificassem suas respostas:

Figura 10 – Resposta dada pela dupla A e B respectivamente ao Item *e*


Sim.

✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

Na letra c, pois foi na letra c que pôde-se obter os resultados e ver que dá certo.

Sim.

✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

não, pois foi fácil

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla A responde que sim, elas são equivalentes, no entanto não expressam argumentos que sustentem sua tese. Em seguida concluíram que teriam construído uma prova no item *c,* pois foi nesse momento que puderam obter os resultados e ver que dava certo. Nota-se que a dupla confunde uma simples verificação com uma prova, deixando transparecer a falta de familiaridade que os alunos têm com provas e demonstrações.

A dupla B também conclui que são equivalentes, porém assim como a dupla A não justificaram sua resposta. Em seguida discorreram que em momento algum foi efetuado uma prova, *pois foi muito fácil*. Isso evidencia que os alunos associam o ato de provar e demonstrar a algo difícil e complexo.

5.2.1 Nível de pensamento geométrico: duplas A e B

O modelo de Van Hiele, além de nortear o ensino e aprendizado da Geometria, nos dá a oportunidade de avaliar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico e aprendizagem do aluno em determinado assunto através de suas habilidades. Para isso, o autor nos apresenta cinco níveis de pensamento geométrico; nível 0 (Reconhecimento), onde o aluno costuma usar propriedades visuais para classificar a figura, no entanto essas propriedades são irrelevantes ou incompletas, sendo assim facilmente enganados pela orientação das figuras; no nível 1 (Análise), os alunos enxergam as propriedades das figuras geométricas, no entanto são vistas de maneira isoladas, por exemplo, não a inclusões entre quadrados e retângulos; nível 2 (Ordenação), os alunos conseguem formular definições corretas para as figuras, sendo capazes de aceitá-las de maneira equivalente para o mesmo pensar, nesse nível as funções dos axiomas, definições e prova não são claras; nível 3 (Dedução), os axiomas e definições são compreendidos pelos alunos, sendo assim capazes de fazer deduções e conjecturas; nível 4 (Rigor), os alunos são capazes de analisar e se aprofundarem em sistemas dedutivos com elevado grau de rigor.

Nessa perspectiva, podemos concluir que a dupla A se encaixa no nível 2, uma vez que no item *a* foi dada a condição necessária e suficiente para que a figura seja um quadrado, isto é, tenha quatro ângulos e quatro lados congruentes. Notamos que a dupla A foi capaz de concluir que os itens *b* e *c* eram equivalentes, no entanto não foi capaz de ver a prova do enunciado com clareza, o que realça nossa decisão.

A dupla B também se encaixa no nível 2, visto que, assim como a dupla A, conseguiu concluir a equivalência dos itens *b* e *c*. No entanto, não conseguiram descrever com exatidão o quadrado, definindo-o apenas por sua aparência, ponto característico do nível 0. Tomando por base Ventura (2007), onde ele nos diz que, com o método abordado em nossa pesquisa, podemos supor conseguir conhecimento do fenômeno estudado a partir da exploração intensa de um único caso. Diante disso, podemos supor que os alunos da turma na qual desenvolvemos a pesquisa, se encaixam no nível 2. Tal ocorrência enfatiza as pesquisas de De Villiers (2001), nas quais ele nos afirma que a compreensão de definições normalmente expressas nos livros didáticos desenvolvem no aluno apenas o Nível 2. Tais definições, ofertadas diretamente aos alunos em níveis inferiores, estão fadadas ao fracasso.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando realizamos nossa pesquisa tínhamos por objetivo investigar os níveis de pensamento geométrico dos alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual paraibana. Assim tomamos como norte a seguinte pergunta: Qual o nível de pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática que os norteiam a argumentar, provar e demonstrar?

Para isso tomamos como referencial teórico autores que defendem essa linha de pesquisa, a exemplo de Hanna, Nasser e Tinoco, Balacheff e De Villiers, nos permitindo classificar em qual(is) nível(is) de pensamento geométrico os alunos se encaixam.

Em busca de respostas para nossa pergunta norteadora e a fim de alcançar nossos objetivos desenvolvemos uma proposta didática que conduzissem os alunos a argumentar, provar e demonstrar.

Como dito anteriormente, o desenvolvimento da proposta didática, assim como de nossa pesquisa, foi fruto de um projeto maior, Projeto CAPES/OBEDUC em rede com UFMS, UEPB e UFAL, onde fui integrante da Equipe intitulada Provas e Demonstrações Matemáticas; um professor doutor/coordenador, dois graduandos do Curso de Licenciatura em Matemática, dois mestrandos e um professor da escola básica. Trabalhando de maneira colaborativa, desenvolvemos leituras e pesquisas que serviram de alicerce para elaboração da proposta didática.

Posteriormente à aplicação da proposta didática nos deparamos com uma enorme quantidade de dados, analisando-os na Equipe. A priori notamos a pouca familiaridade que os alunos tinham com as provas e demonstrações e a Geometria.

Uma análise mais aprofundada dos dados nos revelou a superficialidade tanto do conhecimento sobre provas e demonstrações quanto da Geometria por parte dos alunos, que alcançaram apenas o nível 2 de Van Hiele. Além disso, a pesquisa em questão nos revelou também que os alunos não são capazes de argumentar, justificar e nem reconhecer uma prova, realçando as discussões feitas por Nasser e Tinoco (2003), que afirmam que na realidade atual os alunos não conseguem reconhecer, explicar e nem justificar quando questionados sobre conteúdos básicos matemáticos.

Acreditamos que esses dados retratam uma realidade sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil. Em busca de amenizar este quadro, e também desmistificá-lo, trazemos uma pesquisa voltada ao uso de provas e demonstrações no ensino básico. Nesse sentido, tal proposta didática se mostra como um caminho para desenvolver no aluno a capacidade de argumentar, justificar e desenvolver seu pensamento geométrico, tomando assim uma abordagem diferente da convencional, onde a Geometria é apresentada como *mero conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas.*

Esperamos também que nossa pesquisa sirva como fonte para professores e alunos de graduação, onde tais sejam capazes de compreender um pouco do grande potencial que provas e demonstrações matemáticas mostram ter no ensino e na aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AGUILAR Jr., C. A; NASSER, L. Estudo sobre a visão do professor em relação à argumentação e prova matemática na escola. **BOLEMA.** Rio Claro, São Paulo, v. 28, n. 50, p. 1012-1031, 2014.

BALACHEFE, N. Processus de preuveet sitations de validation**. Educational Studies in Mathematics**, v. 18, n. 2, p. 147-170, 1988.

BALLACHEFF, N. **Processos de pruebaenlos aumos de matemáticas**. Bogotá: uma empresa docente y Universidade de los Andes, 2000.

BOGDAN, R.: BIKLEN S K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos.** Porto Alegre, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar em Revista,** v. 31, p.215-220, 2008.

DE VILLIERS, M. Algumas Reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Educação Matemática Pesquisa,** v. 12, n. 3 p. 400-430, 2010. Disponível em https://revistas.pucsp.br//index.php/emp/issue/view/192

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o teorema de Pitágoras.** 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007

FONTANELLA B. J. B.; RICAS J., TURATO E. R. Amostragem por saturação em pesquisas qualitativas em saúde: contribuições teóricas. **Cad. Saúde Pública**, 2008.

HANNA, G.: Some pedagogical aspects of proof**. Interchange**, 21 (1), 6-13, 1990.

HANNA, G. Challenges to the impact of proof**. For the Learning of Mathematics**, v.15, n. 3, p. 42-49, 1995.

HANNA, G; JAHNKE, H. Proof and proving. IN **International Handbook of Mathematics Education,** p. 877-900, 1996.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. 1ª Ed. Brasilia: Liber Livro Editora, 2008.

KALEFF, A M. M. R.; HENRIQUES, A.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de Van Hiele, **BOLEMA**, v.10. 21-30, 1994.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista,** Ano 3, p. 3-12, 1993.

LUDH, M.; ANDRE, M E. D. A. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo: Pedagógica e Universitária, 1986.

MORAIS FILHO, D. C**. Um convite à matemática: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidade**. 3. Ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010

NASCIMENTO, E. G. A. do. **Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria**. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2012.

NASSER, L. TINOCO, L. A. A. **Argumentação e provas no ensino da Matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PAVANELLO, R M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista ZETETIKÉ**, ano 1, n. 1, p. 22, 1993.

PCN, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores da educação básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

POPE C, ZIEBLAND S, MAYS N. Analisando dados qualitativos. In: Pope C, Mays N, organizadores. **Pesquisa qualitativa na atenção à saúde**. Porto Alegre (RS): ARTMED, p.87-99, 2005.

SANTOS, M. C. e LINS, A. F. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio: realidade e necessidade**s. Campina Grande, 2015.

STAKE. R. E. Case studies. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (ed.) **Handbook of qualitative research**. London: Sage, p. 435-443, 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução a pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em Educação.** São Paulo, 1987.

VENTURA, M. M. **O estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa** – Faculdade de Educação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) – Rio de Janeiro (RJ), Brasil, 2007.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: planejamento e métodos**. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Redação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL
EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

REDAÇÃO

ALUNO(A):____

DATA:___/____/2015

PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

AGRADECEMOS A COLABORAÇÃO!

APÊNDICE B – Proposta didática

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

PROJETO CAPES OBEDUC UFMS/UEPB/UFAL

EQUIPE PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

PROPOSTA DIDÁTICA

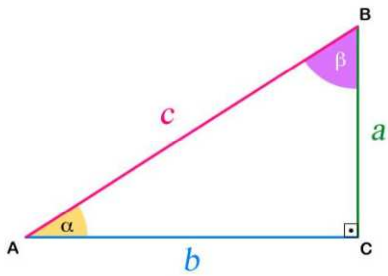
DESAFIANDO NOSSO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Dupla: ____ **Série:** ________

______________________________________ **Data:** ______/_______/_______

PARTE I

(1) (nossa autoria) Observem o triângulo ABC retângulo em C. Com base em suas observações, determinem e justifiquem:



a) Como identificar um triângulo retângulo?

b) os catetos:

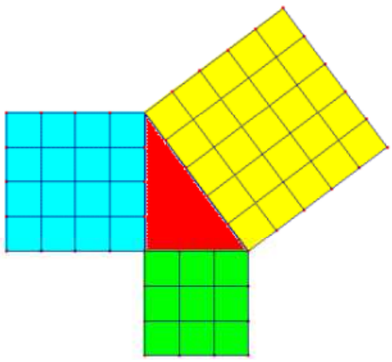
c) a hipotenusa:

d) o ângulo reto (90°)

e) os ângulos agudos

(2) (nossa autoria) De acordo com Eves (2004) e Boyer (2010), os povos antigos, acerca de 3000 anos, como egípcios e babilônicos, sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 era retângulo, mas de acordo com Lima (2006), esses povos não tinham a necessidade de demonstrar esta afirmação.

Na Figura abaixo temos um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 unidades de comprimento:



Foram construídos quadrados com os lados desse triângulo. Esses quadrados foram divididos em quadrados menores, como vocês podem observar na Figura. Respondam:

a) Quantos quadradinhos tem o quadrado maior?

b) Qual é o número de quadradinhos do quadrado intermediário?

c) Qual a quantidade de quadradinhos em que o quadrado menor foi dividido?

d) De acordo com as respostas dos itens a, b e c, vocês conseguem observar alguma relação entre o quadrado maior e os outros menores?

(3) (extraído de Bastian, 2000) No quadro abaixo, a medida de cada cateto e da hipotenusa são lados dos quadrados A, B e C respectivamente. Com base nesta informação, calculem as áreas A, B e C:

			Áreas dos Quadrados		
Cateto a	**Cateto b**	**Hipotenusa c**	**Área A**	**Área B**	**Área C**
3	4	5			
6	8	10			
5	12	13			
9	12	15			

a) Comparando as áreas A, B e C, a que conclusão vocês chegaram?

b) Será que a conclusão descrita acima, no item (a), vale para qualquer triângulo? Experimentem usá-la em um triângulo de lados 4, 7 e 8. O que vocês observaram?

(4) (extraído de Bastian, 2000)

a) Desenhem e recortem um triângulo retângulo qualquer. Agora desenhem e recortem mais sete triângulos idênticos ao primeiro, identificando seus referidos lados como a, b e c.

b) Agora desenhem e recortem um:

- ✓ Quadrado de tamanho igual ao lado *a* (pinte de vermelho)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *b* (pinte de amarelo)
- ✓ Quadrado de tamanho ao lado *c* (pinte de verde)

c) como se fosse um quebra cabeças montem:

- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e o quadrado vermelho
- ✓ Um quadradão usando quatro triângulos e os quadrados amarelo e verde
- ✓ Se retirarmos das duas figuras montadas os quatro triângulos, o que podemos dizer sobre as áreas restantes de cada figura?
- ✓ Existe alguma relação entre as áreas restantes? Como podemos escrever esta relação?

(5) (extraído de Bastian, 2000)

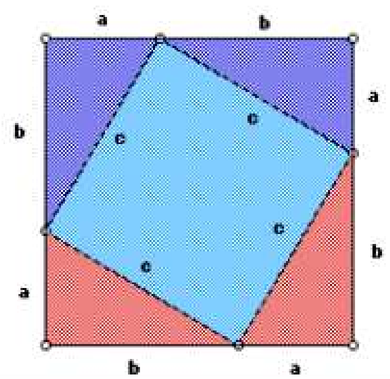


Figura 1

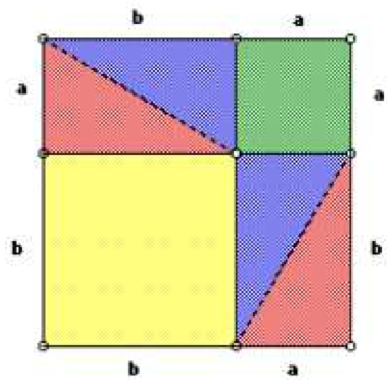


Figura 2

a) Descrevam algebricamente a área do quadradão (Figura 1) em função do quadrado

b) Façam o mesmo na Figura 2.

c) Que relação existe entre as áreas dos quadradões das Figuras 1 e 2? Deduzam a relação entre a, b e c.

(6) (nossa autoria) Um teorema é uma afirmação matemática que deve ser rigorosamente demonstrada. Sendo assim, para que o Teorema de Pitágoras seja válido é necessário demonstrá-lo. Podemos escrever o Teorema de Pitágoras na forma implicativa: ***Se o triângulo é retângulo então a área do quadrado que tem como lado a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos catetos são os lados.***

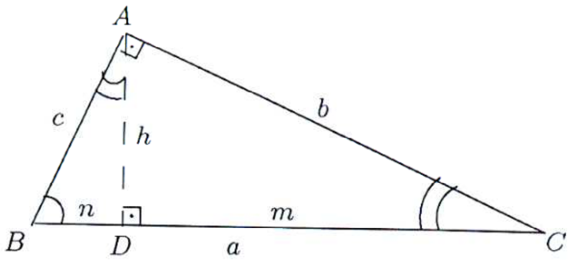
No Teorema escrito na forma implicativa, identifiquem:

a) Hipótese

b) Tese

(7) (adaptado de Lima, 2006)

No triângulo ABC, retângulo em A, a altura AD (perpendicular a BC) relativa à hipotenusa origina dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos (BÂD = $\widehat{C}$, complemento de $\widehat{B}$, CÂD = $\widehat{B}$, complemento de $\widehat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial ou total:

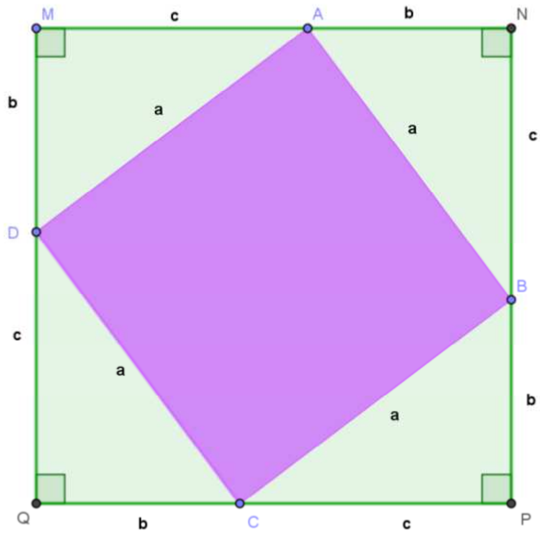


$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \ e \ \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Usando as informações acima, tentem demonstrar o Teorema de Pitágoras.

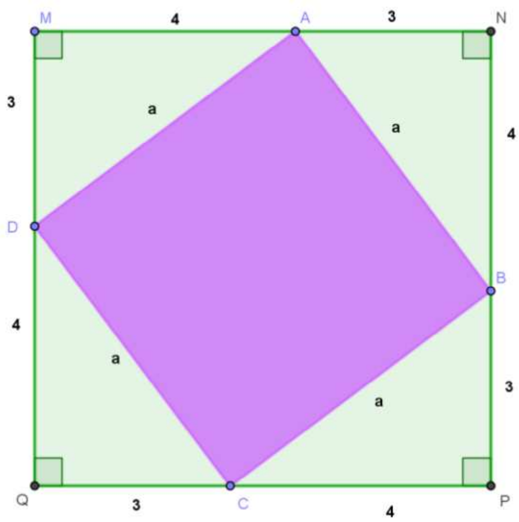
(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

PARTE II

(1) (adaptado da questão G1 do AprovaME) Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.

Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.

$(90° - 28°) + 28° + 42° + (90° - 42°) = 180°$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

Afirmações	Justificativa
$p = s$........................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$........................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180°$.........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180°$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

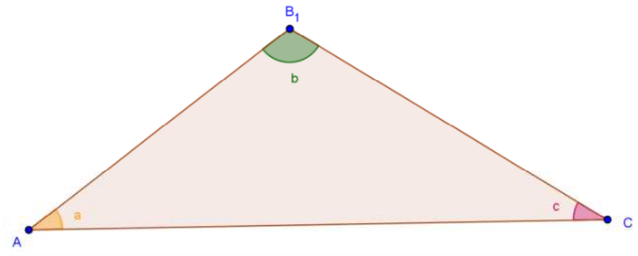
Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

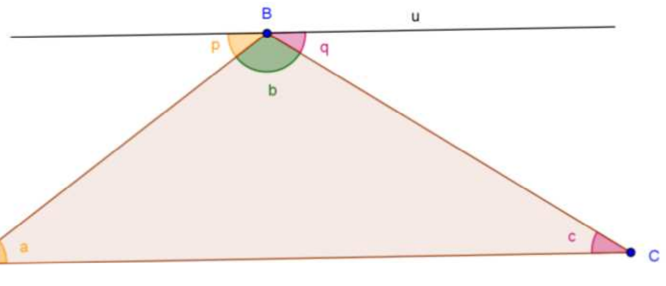
a) Das respostas acima, escolham uma que é a mais parecida com a resposta que vocês dariam se tivessem que resolver esta questão. Justifiquem sua escolha.

b) Das respostas acima, escolham aquela para a qual vocês acham que seu professor daria a melhor nota. Justifiquem sua escolha.

(2) (nossa autoria) **Considerem um triângulo ABC, no qual estão assinalados os ângulos internos:**



Traçando a reta *u*, paralela ao lado AC e que passa pelo vértice B:



Sabemos que p = a e q = c.

Como p + b + q = 180º, concluímos que a + b + c = 180º.

Observando essa demonstração, respondam o que se pede:

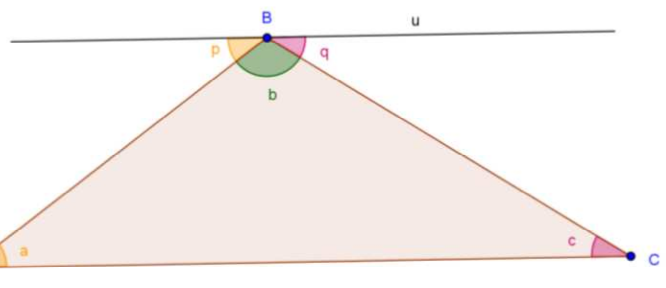
a) Por que podemos afirmar que p = a e q = c?

b) O que podemos afirmar com essa conclusão da demonstração?

c) Essa afirmação vale para qualquer triângulo? Justifiquem.

d) Tente demonstrar essa afirmação de outra forma.

(3) (nossa autoria) Seja um triângulo ABC qualquer com ângulos internos a, b e c. A figura abaixo ilustra uma construção geométrica que auxilia na demonstração da propriedade de que "em todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180°":



a) Como são chamados os elementos geométricos representados por u, B, a e $\overline{AC}$?

b) Vocês conseguem identificar alguma propriedade na figura. Qual (is)?

c) Coloquem em ordem, de 1 a 5, as frases abaixo a fim de obter a demonstração do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo:

( ) $p + b + q = 180°$

( ) Seja um triângulo ABC qualquer e nomeamos seus ângulos internos como a, b e c

( ) $p = a$ e $q = c$, pois, são ângulos alternos internos

( ) Pelo vértice B, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ obtendo $\hat{p}$ e $\hat{q}$

( ) Conclusão: $a + b + c = 180°$.

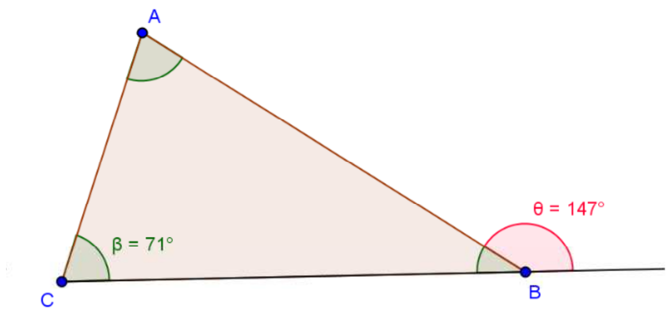
d) Demonstrem de outra maneira que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

PARTE III

(1) (nossa autoria) Todo ângulo externo de um triângulo mede mais do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.

a) Na Geometria Euclidiana usamos com certa frequência o teorema do ângulo externo para cálculos de ângulos. Descrevam o que vocês conhecem sobre este teorema.

b) Dado o triângulo ABC, determinem as medidas dos ângulos internos que faltam.

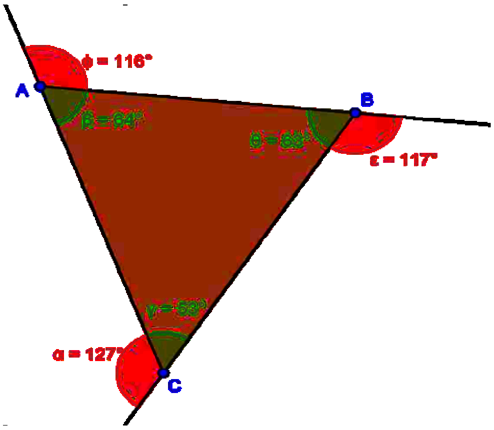


c) Observem que $\theta > B\hat{A}C$ assim como também $\theta > A\hat{C}B$. Será que esta relação vale para todo triângulo? Justifiquem.

d) Se tomarmos ABC como sendo um triângulo retângulo, essas relações ainda valeriam? Justifiquem.

(2) (nossa autoria) Nas alternativas I, II, III, marquem qual delas vocês descreveriam como demonstração do teorema do ângulo externo, descrito na Questão 1. Ao final, justifiquem sua escolha.

I ( ) Dado um triângulo qualquer ABC e sejam $\beta = 64^{o}$, $\theta = 63^{o}$ e $Y = 53^{o}$,as medidas dos ângulos. Como descrito na figura abaixo:



Observem:

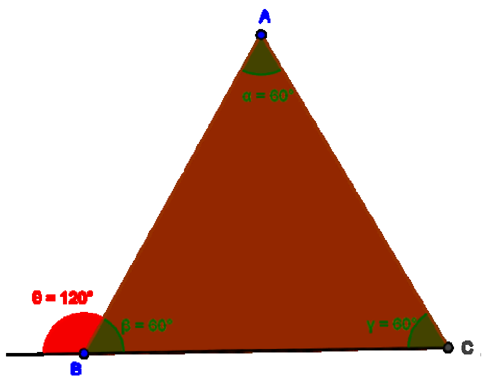
Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo α, onde $\alpha = 127^{o}$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CA}$ formaremos o ângulo Φ, onde $\Phi = 116^{o}$.

Se prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{AB}$ formaremos o ângulo ε, onde $\varepsilon = 117^{o}$.

Note que, $\alpha > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, assim como $\beta > A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$, assim como também $\theta > C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$, como queríamos demonstrar.

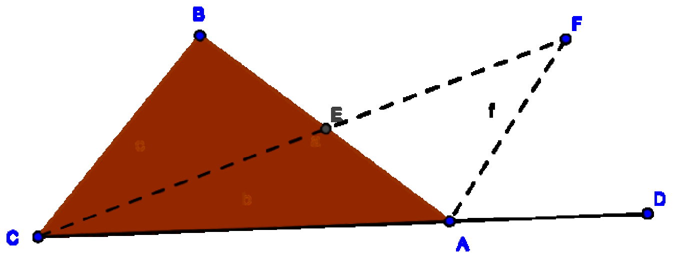
II ( ) Tomemos o triângulo equilátero ABC descrito na figura abaixo:



Como se trata de um triângulo equilátero, sabemos que o ângulo $B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C = 60^{o}$. Ao prologarmos a semirreta $\overrightarrow{BC}$ formaremos o ângulo θ, que mede 120^{o}, além disso, note que, $\theta = 120^{o} > 60^{o} = B\hat{C}A = C\hat{A}B = A\hat{B}C$. Logo fica demonstrado o teorema.

III ( ) Seja ABC um triângulo. Na semirreta $\overrightarrow{CA}$, marque um ponto D tal que o ponto A esteja entre os pontos C e D, como indicado na figura abaixo:

Queremos provar que o ângulo BÂD > $\hat{B}$ e BÂD > $\hat{C}$. Vamos primeiro provar que o ângulo BÂD > $\hat{B}$. Para isto consideremos o ponto médio E do segmento $\overline{AB}$.



Na semirreta $\overrightarrow{CE}$ marque um ponto F tal que, o segmento $\overline{CE}$ = $\overline{EF}$. Trace $\overline{AF}$. Compare os triângulos CEB e FAE. Como $\overline{BE}$ = $\overline{AE}$ (já que E é ponto médio de AB), $\overline{CE}$ = $\overline{EF}$ (por construção) e BÊC = AÊF (por serem opostos pelo vértice), segue-se que o ângulo BÊC = AÊF. Consequentemente $\hat{B}$=EÂF, como a semirreta $\overrightarrow{AF}$ divide o ângulo BÂD, então EÂF < BÂD, portanto $\hat{B}$ < BÂD. Analogamente provamos que BÂD > C. Assim fica demonstrado o teorema.

Justifiquem a escolha:

Parte IV

(1) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-27567" e observem atentamente a figura. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Arrastem o seletor para a direita. O que aconteceu com a figura? Quais os movimentos observados pelas três divisões do triângulo?

b) Arrastem o próximo seletor para baixo. O que aconteceu com a figura? Qual o movimento realizado pelas três divisões do triângulo? O que vocês observaram após essa movimentação?

c) Marquem os três quadrados referentes a "comparar ângulos". O que vocês observaram? Como podem ser chamados os ângulos azuis, vermelhos e verdes? Por quê?

d) Qual propriedade está ligada a essa verificação? Como vocês encontraram essa propriedade e por quê?

(2) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-239787" e observem a figura.

Há uma importante relação relacionada aos triângulos e seus ângulos internos. Sigam as instruções abaixo e respondam às perguntas:

a) Movimentem o vértice C do triângulo. O que acontece com o triângulo? E com seus ângulos internos?

b) Ao movimentar esse vértice C, qual a relação entre os triângulos encontrados e seus ângulos internos?

c) Agora movimentem o vértice B. O que acontece? Continua valendo essa relação para outros triângulos encontrados e seus ângulos internos?

d) Se movimentarmos o vértice A. O que acontece? Essa relação continua sendo válida?

e) Desse modo, o que podemos concluir com essa verificação? Justifiquem.

(3) (extraído do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-145257", observem a figura e respondam o que se pede.

(4) (adaptado do Tube GeoGebra) Abram o arquivo "material-57095" e observem a figura. Sigam as instruções e respondam o que se pede:

a) Movimentem os seletores dos ângulos α e β. O que aconteceu ao movimentar o ângulo α? E o ângulo β? As duas figuras foram movimentadas para onde? Como elas ficaram nessas movimentações?

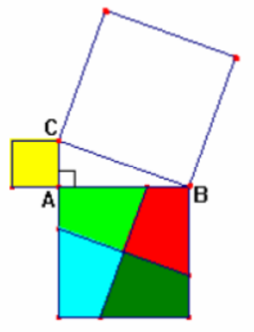
b) Surgiu um novo seletor. Movimentem o ângulo γ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

c) Surgiu um novo seletor. Movimente o ângulo δ. O que aconteceu ao movimentar esse ângulo?

d) Ao fazer todos esses movimentos, o que vocês observaram? A que conclusões vocês chegaram?

e) Existe alguma relação entre esses quadrados e os lados do triângulo retângulo? Se sim, qual?

(5) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)



Abram o arquivo *Montagem – Perigal* e observem, antes de fazer qualquer movimento, a imagem atenta e detalhadamente.

Na figura temos 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Arrastem cada uma das peças, encaixando-as dentro do quadrado maior.

Façam o que se pede:

a) O que vocês observaram? Relacionem as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos com a área do quadrado construído sobre a hipotenusa. O que vocês concluíram?

b) Representem a medida da hipotenusa do triângulo retângulo por a, e por b e c as medidas de cada cateto. Relacionem as três medidas.

c) A verificação feita com esse arquivo é confiável, suficiente e dá certeza de que a relação obtida no item b é sempre válida em qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

d) No GeoGebra, construam um triângulo retângulo ABC qualquer. Com a ferramenta "distância, comprimento ou perímetro", meçam os lados de seu triângulo e com uma calculadora verifiquem a relação percebida anteriormente. O que vocês concluíram?

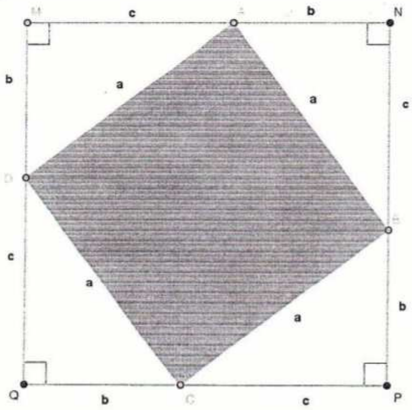
e) A verificação feita no item d garante que a relação vale sempre para qualquer triângulo retângulo? Justifiquem.

AGRADECEMOS SUA COLABORAÇÃO!.

APÊNDICE C - Reposta atividade 8 – dupla *A*

(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.



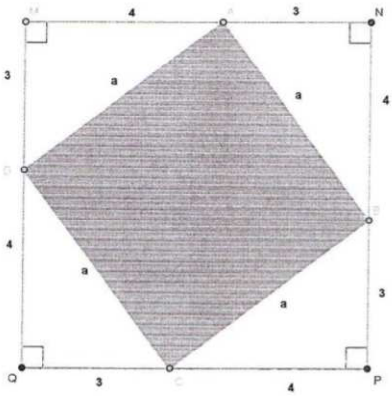
Sim, pois ele possui todos os ângulos retos. Posteriormente, todos os lados iguais, o que define essa figura geométrica.

b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

Área do quadrado => a^2

Área dos triângulos => $a = c^2 + b^2$

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



$a = 4^2 + 3^2$

$a = 16 + 9$

$\boxed{a = 25}$ //

$a^2 \Rightarrow 25^2$

$\boxed{525}$ // → área do quadrado.

d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

Que substituindo os números na fórmula, pode-se ter os resultados das áreas das figuras.

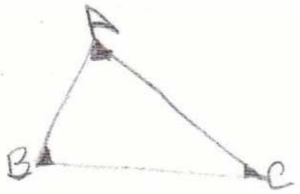
e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

Sim.

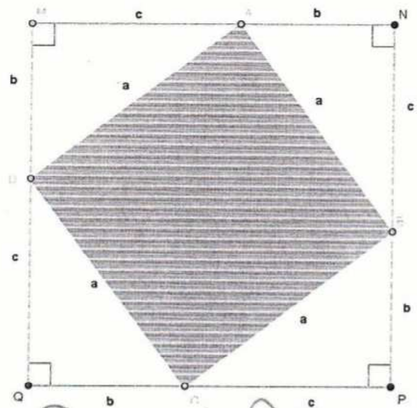
- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

Na letra c, pois foi na letra c que pôde-se obter os resultados e ver que dá certo.



(8) (adaptado de Ferreira Filho, 2007)

a) Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD é um quadrado? Justifiquem.

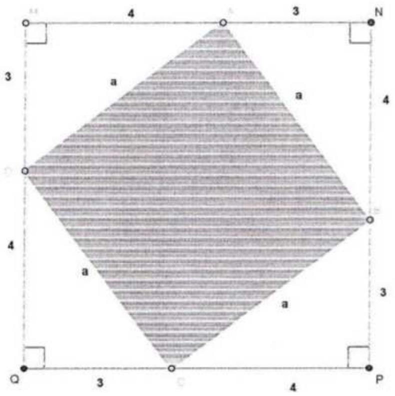


Sim. pois, olhando bem o seu formato, veremos um quadrado.

b) Calcule o valor de a, da figura acima, em função de b e c utilizando o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos.

a + B + C = 4 * 4 x = 4.

c) Observem o desenho abaixo e calculem o valor de a em função de 3 e 4 usando apenas o conceito de área aplicado nos quadrados e nos triângulos:



A = 3 x 4 = 12.
B = 4 x 3 = 12
C = 3 x 4 = 12

d) Comparem com o resultado obtido na letra b. O que vocês observam?

Que estamos o mesmo resultado

e) Comparem a conclusão obtida na letra b com a conclusão obtida na letra c e respondam:

- ✓ As duas conclusões são equivalentes (iguais)?

Sim.

- ✓ Em qual dos dois processos (letra *b* ou letra *c*) vocês consideram ter efetuado uma prova para essa relação? Justifiquem.

não, pois foi fácil