UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTUDO DE FUNÇÕES, LIMITES E DERIVADAS USANDO O GEOGEBRA

ROMÁRIO DA SILVA

CAMPINA GRANDE
Fevereiro de 2018

ROMÁRIO DA SILVA

ESTUDO DE FUNÇÕES, LIMITES E DERIVADAS USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE
Fevereiro de 2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Romario da.
Estudo de funções, limites e derivadas usando o GeoGebra [manuscrito] : / Romario da Silva. - 2018.
45 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação : Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Funções. 2. Limites. 3. Sequências. 4. GeoGebra.

21. ed. CDD 515.5

ROMÁRIO DA SILVA

ESTUDO DE FUNÇÕES, LIMITES E DERIVADAS USANDO O GEOGEBRA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 08 /de fevereiro/ 2018

BANCA EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
ORENTADOR

Fernando Luiz Tavares da Silva

Prof. Me. Fenando Luiz Tavares da Silva
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
EXAMNADOR

Onildo dos Reis Freire

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
EXAMINADOR

CAMPINA GRANDE
Fevereiro de 2018

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os professores, em especial a Davis Matias de Oliveira meu orientador; à toda minha família, especialmente a minha mãe Riseuda Maria da Conceição; a minha esposa Juliana Marques de Carvalho e a meu filho Paulo Ulisses Marques Carvalho Silva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS, sobre todas as coisas, pois se não fosse pela sua ajuda não teria conseguido chegar até aqui. O senhor é o pricipal responsável por essa conquista, e espero que seja a primeira de muitas que virão.

Agradeço a minha digníssima mãe, Riseuda Maria Da Conceição, que sempre me ensinou e me guiou pelos caminhos da bondade, honestidade e humildade nunca me deixando fraquejar em relação aos estudos.

Agradeço também a minha maravilhosa esposa, Juliana Marques De Carvalho, que foi uma companheira em todos os momentos desta minha vida acadêmica me ajudando muitas vezes quando eu não tinha tempo para trabalhos academicos.

Não esquecendo do meu filho Paulo Ulisses Marques de Carvalho Silva que foi um dos principais motivos para que eu continuasse na batalha dia após dia.

Agradeço ao meu orientador Prof.º Dr.º Davis Matias de Oliveira por toda sua atenção, paciência, compreensão, dedicação e por todos os conselhos para que eu pudesse ter concluído este trabalho.

Agradeço a todos os docentes da graduação por suas contribuições durante essa jornada.

Aos professores Me. Fernando Luiz Tavares da Silva e Me. Onildo dos Reis Freire por terem aceitado fazerem parte da minha banca examinadora.

Por fim, mas não menos importantes, agradeço aos amigos de estudos que conheci durante o curso: Ari Sampaio, Jobson Darlan e Maurício Batista; estes que de forma direta ou indireta contribuíram para esta vitória em minha vida.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo fazer um estudo introdutório sobre o uso do GeoGebra em atividades que envolvam funções, seus limites e derivadas, sendo fiel aos conceitos e definições de cada um. Inicialmente falamos sobre o GeoGebra, um software livre e que nos oferece amplas possibilidades de se trabalhar com geometria e álgebra. Em seguida mostramos o desenvolvimento do conceito de função no decorrer da formação da sociedade e como ela está presente em nossa vida sem que percebamos. Além disso é apresentado o conceito de função, onde são mostrados alguns exemplos que geralmente se destacam na matemática do ensino médio e, no próximo Capítulo, é apresentado o conceito de sequência, que é um tipo particular de função e, no qual também são abordados os conceitos de sequências infinitas, convergência e divergência dessas sequências. Ainda, faço um estudo sobre limites de funções, suas teorias e propriedades e, termino com um breve estudo sobre derivadas de funções e suas regras.

Palavras-chave: GeoGebra, Funções, Sequências, Limites, Derivadas.

Abstract

This work aims to make an introductory study on the use of GeoGebra in activities involving functions, their limits and derivatives, being faithful to the concepts and definitions of each one. Initially we talked about GeoGebra a free software and that offers us ample possibilities to work with geometry and algebra. Then we show the development of the concept of function in the course of the formation of society and how it is present in our life without our realizing it. In addition, the concept of function is presented, which shows some examples of functions that generally stand out in high school mathematics and, in the next chapter, the concept of sequence is presented, which is a particular type of function, and in which also the concepts of infinite sequences, convergence and divergence of these sequences are discussed. But I still make a study of limits of functions, their theories and properties, and I suggest with a brief study on derivatives of functions and their rules.

Keywords : GeoGebra, Functions, Sequences, Limits, Derivatives.

Sumário

Lista de Figuras

criada no GeoGebra pelo autor

Introdução

A Matemática foi, durante o decorrer da história, uma das ferramentas mais aliadas do ser humano, sendo um instrumento fundamental para seu desenvolvimento intelectual e social. Porém, nos últimos anos, ensinar e aprender Matemática tem sido de grande dificuldade por parte de professores e alunos.

Com o desenvolvimento da tecnologia os pesquisadores têm se preocupado com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Muitos são os softwares matemáticos que axiliam os professores em sala de aula, facilitando assim a aprendizagem por parte dos alunos, alguns dos quais foram utilizados em minha vida acadêmica, a exemplo do GeoGebra.

O GeoGebra é um software gratuito de fácil acesso que nos oferece amplas possibilidades de atividades que envolvam geometria e álgebra. Sendo utilizado para ilustrar o conceito de função, pode facilitar o entendimento de gráficos pelo estudante, que as vezes sente dificuldade de visulizá-los e construí-los. Mas não é apenas para funções que pode-se usar o Geogebra. Este também será utilizado, neste trabalho, para ilustrar limites e derivadas de funções.

Este trabalho tem como finalidade o aprofundamento nos estudos e uso do GeoGebra como ferramenta no auxílio do ensino da matemática.

1 Sobre o GeoGebra

Um dos aplicativos matemáticos mais utlizados no ensino regular e superior nos dias atuais é o GeoGebra. Este software nos oferece ampla diversidade na construção de gráficos e soluções de problemas envolvendo muitos campos matemáticos. O nome GeoGebra deriva da união das palavras Geometria e Álgebra, que são os dois campos da matemática em que este software se destaca como um dos melhores aplicativos de ensino de matemática que existem. O programa, livre para download, foi criado por Markus Hohenwarter e escrito em linguagem Java para ajudar o professor em sala de aula.

Com relação a geometria este software nos permite construir figuras geométricas utilizando os conceitos básicos da área, como; ponto, reta, segmentos de reta, planos, polígonos etc.

Na álgebra podemos trabalhar com o conceito de funções, equações, cordenadas entre outros, livremente sem que tenhamos que nos preocupar com a construção de seus gráficos. Podemos ainda, manipular dados das funções mesmo depois de termos finalizado sua construção.

Falando em um cálculo mais avançado podemos também perfeitamente trabalhar conceitos como álgebra vetorial, derivadas, integrais, etc.

1.1 Porquê o GeoGebra

Com o aumento do uso das **tecnologias de informação e comunicação** (tic_s) em sala de aula este foi o software escolhido para produzir este trabalho devido a sua dimensão em relação ao ensino da matemática. Este aplicativo oferece um mundo de possibilidades em relação a álgebra e a geometria. Foi muitas vezes trabalhado em minha vida acadêmica e o resultado durante as aulas, entre os alunos, foi bastante satisfatório.

Muitas esperiências com o uso de tecnologias digitais no ensino de funções na escola básica tem se mostrado eficintes. De fato, a exploração de funções por meio de softwares pode enrriquecer a aprendizagem dos alunos.

2 O desenvolvimento do conceito de função

A ideia de função foi desenvolvida ao longo do tempo por vários matemáticos. Na antiguidade um conceito mais arcaico aparece em algumas situações encontradas em tábuas babilônicas.

Um importante registro sobre funções aparece na obra do francês Nicole Oresme (1323-1382), que mostra a ideia de construir "uma figura"para representar graficamente uma quantidade variável; na obra, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme usou *latitude* para representar a velocidade e *longitude* representando o tempo (hoje chamamos de ordenada e abscissa). Foi o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.

Quem introduziu a palavra *função* foi o matemático G. W. Leibniz (1646-1716), praticamente com o mesmo sentido que conhecemos hoje. A notação $f(x)$ para denotar a "função de x"foi criada pelo matemático suíço L. Euler (1707-1783). Já o matemático alemão P. G. Legeune Dirichlet (1805-1859) deu a definição mais próxima que sabemos hoje, "se uma variável y se relaciona com uma variável x de modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um único valor y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x".

Com a criação da teoria dos conjuntos no final do século XIX, foi possível definir um conceito de função como sendo um conjunto de pares ordenados (x, y), em que x é um elemento qualquer de um conjunto $\mathbf{A}$, y um elemento qualquer de um conjunto $\mathbf{B}$ e, para todo x que pertence a $\mathbf{A}$ existe um único y que pertence a $\mathbf{B}$ tal que (x, y) pertence a função.

2.1 As funções e a sociedade

Um dos grandes desafios no ensino e na aprendizagem de Matemática, para alunos de todos os níveis escolares, é identificar ou perceber a aplicação de determinados conteúdos matemáticos em torno de si. Um atleta praticando ciclismo, o ato de comprar um coco na praia, e até mesmo alguém fretar um ônibus pra fazer excursões são exemplos claros de aplicações de funções na sociedade.

Vejamos algumas ilustrações:

Ilustração 1: Uma pista de ciclismo tem marcações a cada $600m$. Um ciclista treina sobre ela desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu amigo anota, de minuto em minuto, a distância percorrida pelo ciclista. Podemos perceber que, a cada instante, x, corresponde uma única distância, y. Dizemos, por isso, que a distância y é função do instante x. A lei de formação que relaciona y com x é: $y = 600x$. A tabela a seguir ilustra essa relação para alguns instantes:

Istante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1200
3	1800
4	2400

Ilustação 2: Um dono de uma barraca de praia vende água de coco ao preço de $R\$2,20$ o copo. Para facilitar seu trabalho, ele construiu a seguinte tabela:

Número de copos	Preço (R$)
1	$2,20$
2	$4,40$
3	$6,60$
4	$8,80$
5	$11,00$
6	$13,20$
7	$15,40$
8	$17,60$
9	$19,80$
10	$22,00$

Neste caso, a cada quantidade de copos corresponde um único preço. Assim, podemos afirmar que o preço é uma função do número de copos. A fórmula que estabelece a relação entre preço, y, e o número de copos de água de coco, x, é: $y = (2,20)x$.

Ilustração 3: Para fretar um ônibus com 40 poltronas paga-se ao todo $R\$360,00$. Esse valor deverá ser repartido igualmente entre os passageiros. Para achar a quantidade, y, que cada um irá pagar, basta dividir o preço total ($R\$360,00$) pelo número de passageiros, x. A fórmula que relaciona y com x é:

$$y = \frac{360}{x}.$$

A tabela abaixo relaciona alguns valores.

Número de Passageiro	Quantidade a pagar (R$)
12	$30,00$
15	$24,00$
18	$20,00$
20	$18,00$
24	$15,00$
36	$10,00$
40	$9,00$

3 Função

Definição: Uma relação $\boldsymbol{f}$ de **A** em **B** é chamada de **função**, ou **aplicação**, quando associa a todo elemento de **A** um único elemento em **B**. Em termos matemáticos temos que:

$$f : A \to B \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{A} \text{ existe um único } y \in \mathbf{B}; \text{ tal que } y = f(x).$$

O Diagrama de Veen a seguir ilustra uma relação entre os conjuntos A e B que pode ser interpretada como uma função $\boldsymbol{f}$ de **A** em **B**.

Ilustração:

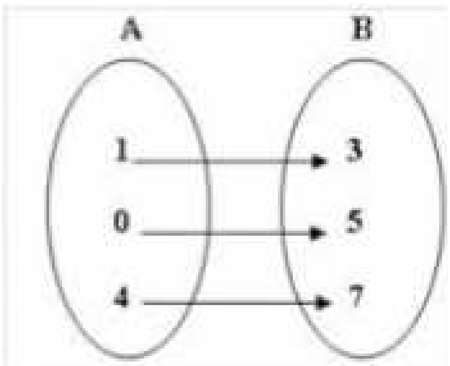

Figura 1: http://www.matematicadidatica.com.br/Funcao.aspx

A Figura acima representa o Diagrama de Veen de uma função, já que, por definição é necessário que todo elemento de **A** se relacione com um único elemento em **B**.

Ilustração:

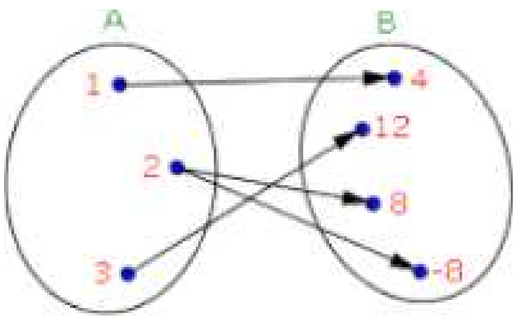

Figura 2: http://www.matematicadidatica.com.br/Funcao.aspx

Na Figura 2 note que existe um elemento em **A** que se relaciona com dois elementos em **B**. Desse modo a relação entre os elementos dos dois conjuntos não caracteriza uma função.

3.1 Domínio, Contra Domínio e Imagem de uma Função

Dada uma função $f : A \rightarrow B$, o conjunto A é chamado de **domínio** de f e, o conjunto B é chamado de **contra domínio** de f. A **imagem** de f, denotada por $Im(f)$, é o conjunto: $Im(f) = \{y \in B; y = f(x),$ para algum $x \in A\}$. Para melhor visualisar estas três definições observe a Figura 3, abaixo.

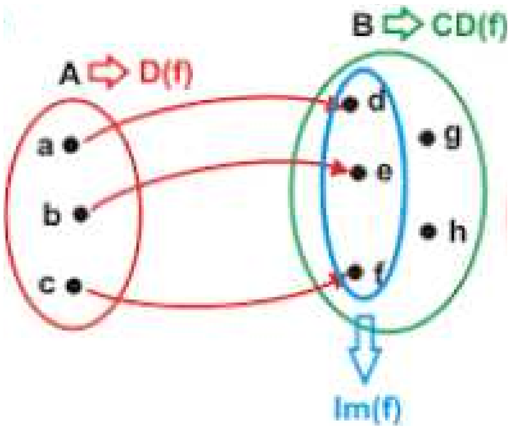

Figura 3: https://Lusoacademia.wordpress.com/2015/08/20/dominio-contradominio-e-imagem-de-função-2

No GeoGebra podemos notar todos os detalhes de uma função observando-a no Diagrama de Veen, e notar mais detalhadamente seu domínio, contra domínio e sua imagem.

4 Noções básicas do plano cartesiano

Um par ordenado de números reais será denotado por (a, b) em que a é a primera coordenada e b é a segunda coordenada.

É importante oservar que os pares $(1, 4)$ e $(4, 1)$ são diferentes entre si pela ordem de seus elementos. Existe uma forma de associar, de maneira única, um par ordenado (a, b) com um ponto do plano, fazendo uso dos seguintes passos:

1. desenhe dois eixos perpendiculares, use a interseção 0 como origem para cada eixo;
2. marque no eixo horizontal o ponto X, correspondente ao valor de a;
3. marque no eixo vertical o ponto Y, correspondente ao valor de b;
4. trace por X uma reta m paralela ao exo vertical;
5. trace por Y uma reta n paralela ao exo horizontal;
6. destacamos a interseção das retas m e n e chamamos esse ponto de P, que representa graficamente o par ordenado (a, b).

Dado um par ordenado (a, b), a, é chamado de **abscissa** e o segundo elemento, b, é chamado de **ordenada**. O eixo horizontal, $0x$, é o **eixo das abscissas**; o eixo vertical, $0y$, é o **eixo das ordenadas**; o plano que contém $0x$ e $0y$ é chamado **plano cartesiano**.

Esse sistema estabelece uma relação bionívoca entre os pares ordenados de números reais e os pontos do plano, à qual chamamos de **sistema de cordenadas do plano**.

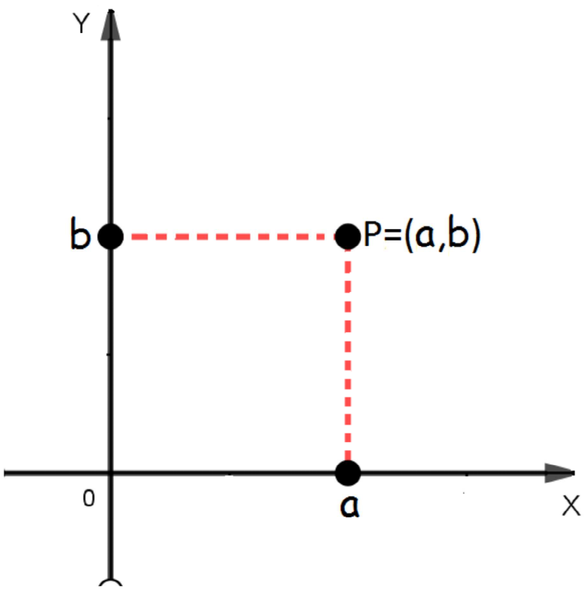

Figura 4: criada no GeoGebra pelo autor

Podemos visualizar o plano cartesiano na própria janela de álgebra do GeoGebra.Pela facilidade de se usar o aplicativo, para marcarmos um ponto basta recorrer ao ícone *marcar ponto* ou então criá-lo no campo de entrada, como por exemplo $(2, f(2))$, desde que a função f já tenha sido criada.

5 Noção intuitiva do gráfico de uma Função

Quando falamos em gráficos na Matemática, geralmente associamos a figuras ou curvas que encontramos por meio de condições que são satisfeitas pelos pontos cujas coordenadas se relacionam pela função, e uma das representações mais usuais e importantes na Matemática é o gráfico de uma função: $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$.

Podemos ter uma pequena noção do gráfico de uma função conhecendo a sua lei de formação $y = f(x)$ e seu domínio D, procedendo da seguinte forma:
Construir uma tabela na qual se atribui alguns os valores de x, que pertencem a D, e os valores que correspondem a y que foram caculados pela lei $y = f(x)$;
O conjunto de pontos obtidos constitui o gráfico da função, representando cada par ordenado (a, b) obtido da tabela por um ponto no plano cartesiano.

Ilustração: Vejamos, por exemplo, como construir o gráfico da função $y = x^2 - 1$, com domínio $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ usando os dados acima:

- Primeiro passo: Considerar alguns pontos do gráfico, como na tabela abaixo:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	1	0	3	8

- Segundo passo: Marcar os pontos no plano cartesiano:

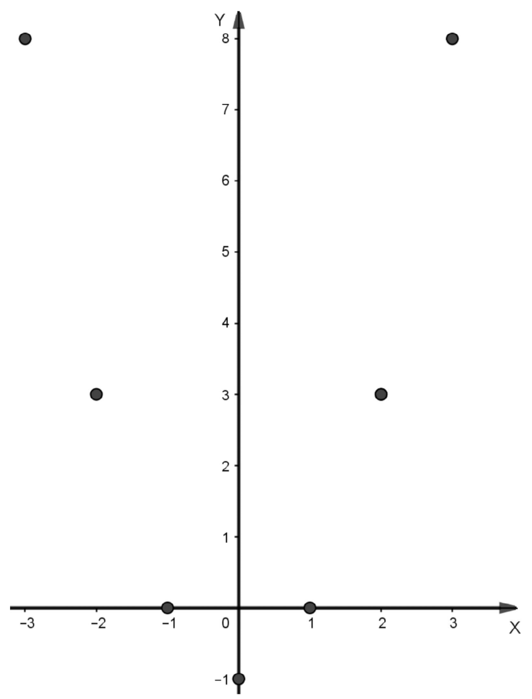

Figura 5: criada no GeoGebra pelo autor

5.1 Análise de gráficos

Várias informações podem ser obtidas a respeito do comportamento de uma função apenas observando o seu gráfico. Analisando-o podemos descobrir algumas propriedades notáveis, como:

5.1.1 O sinal de uma função

O sinal de uma função refere-se ao sinal de y, ou seja, estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de x tem-se $y > 0$ e, para quais valores de x tem-se $y < 0$.

5.1.2 Crescimento e Decrescimento de uma função

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é **crescente** em um subconjunto N de (D), se para quaisquer valores de x_1 e x_2 em N, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Analogamente uma função f é **decrescente** em um subconjunto N de (D), se para quaisquer valores de x_1 e x_2 em N, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Observe o gráfico que ilustra os dois conceitos acima:

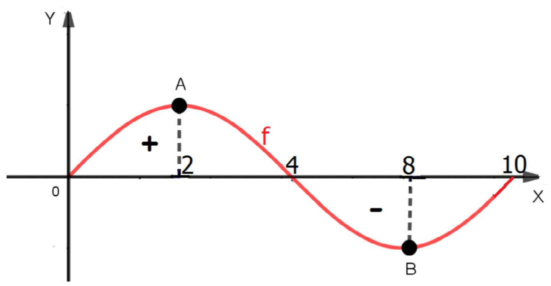

Figura 6:criada no GeoGebra pelo autor

- A função f é crescente nos intervalos $I = [0, 2]$ e $S = [8, 10]$;
- Afunção f é decrescente no intervalo $R = [2, 8]$.

5.1.3 Valor máximo e valor mínimo de uma função

Sejam N um subconjunto do domínio, D, de uma função f, e $x_0 \in N$. Se para todo x em N temos $f(x) \geq f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é **ponto mínimo** de f em N e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de f em N.

Da mesma maneira tomemos N um subconjunto do domínio, D, de uma função f, e $x_0 \in N$. Se para todo x em N, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é **ponto máximo** de f em N e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de f em N.

Se analisarmos o gráfico na Figura 6 podemos notar que:

- considerando o intervalo $I = [0, 4]$, temos A como ponto máximo de f em I e, $f(2)$ como valor máximo de f em I;
- considerando o intervalo $S = [4, 10]$, temos B como ponto mínimo de f em S e, $f(8)$ como valor mínimo de f em S.

O GeoGebra possui comandos que nos ajudam e facilitam a interpretação de gráficos. Por exemplo, o comando **extremo** nos permite observar os pontos de máximo e mínimo; o comando **pontodeinflexão** nos permite perceber os pontos onde as curvas mudam de concavidade, e ainda, observar o crescimento e decrescimento da função, entre vários outros comandos.

6 Algumas funções usuais da matemática

6.1 Função constante

Chamamos de **função constante** uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa todo $x \in \mathbb{R}$ a um mesmo número $c \in \mathbb{R}$, denotada da seguinte forma:

$$f(x) = c.$$

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, c)$, sua imagem é o conjunto $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y = f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}\} = \{c\}$.

Ilustação Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -3$. O gráfico de f é o conjunto $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x) = -3\}$; isto é, $G(f) = \{(x, -3);$ com $x \in \mathbb{R}\}$, como ilustrado na Figura abaixo:

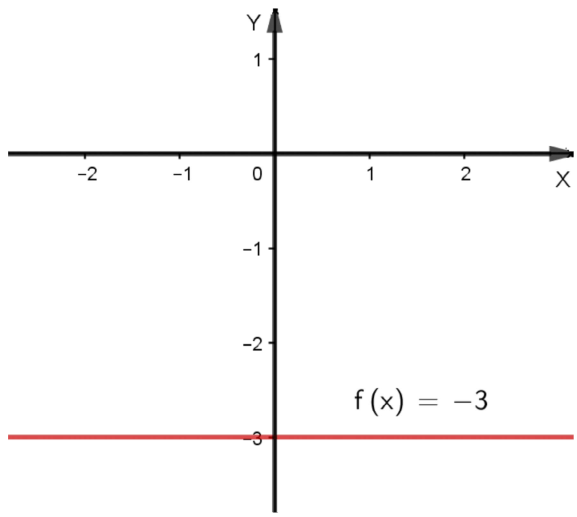

Figura 7: criada no GeoGebra pelo autor

6.2 Função identidade

Chama-se de **função identidade** uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada $x \in \mathbb{R}$ a ele mesmo, isto é:

$$f(x) = x.$$

O gráfico da função identidade é uma reta que coincide com as bissetrizes dos quadrantes ímpares. Seu conjunto imagem é dado por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y = f(x) = x\} = \mathbb{R}$. A Figura logo a seguir ilustra o gráfico da função identidade.

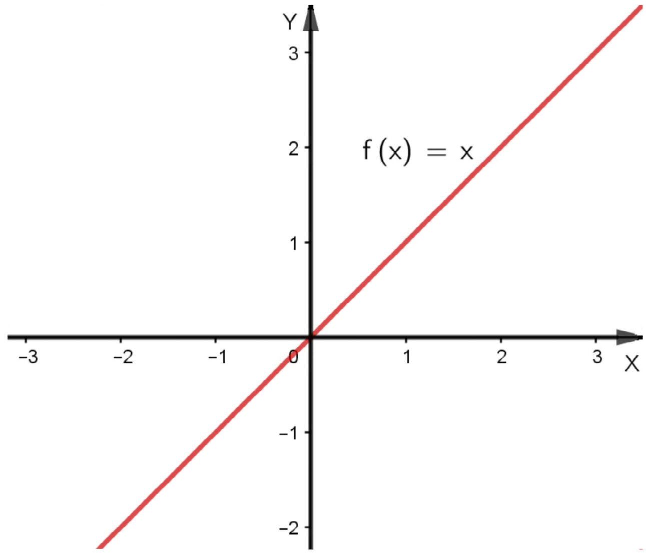

Figura 8: criada no GeoGebra pelo autor

6.3 Função linear

Chamamos de **função linear** uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $ax \in \mathbb{R}$, no qual a é um número real com $a \neq 0$; isto é:

$$f(x) = ax.$$

Graficamente, para os casos em que $f(x) = -2x$ e $g(x) = 3x$, tem-se:

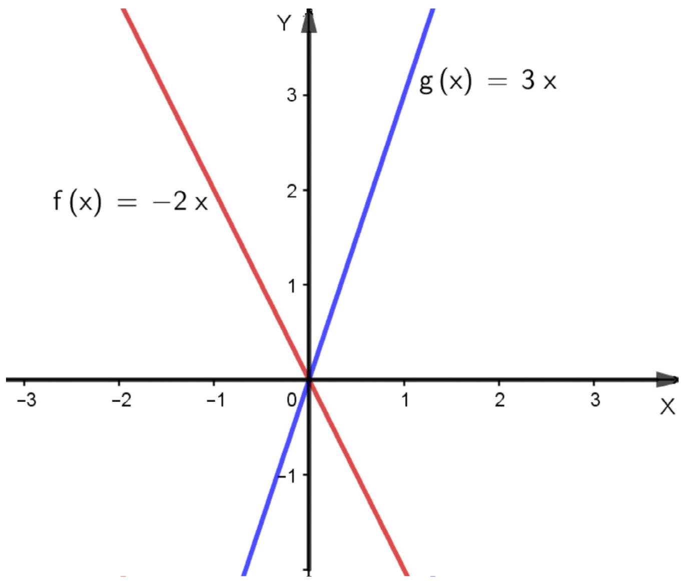

Figura 9: criada no GeoGebra pelo autor

Seu gráfico é uma reta que passa na origem. O conjunto imagem da função linear é constituido por todos os números reais

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y = f(x) = ax\};$$

isto é, $Im(f) = \mathbb{R}$.

6.4 Função afim

Definimos como **função afim** a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, no qual a e b são numeros reais quaisquer, com $a \neq 0$; isto é:

$$f(x) = ax + b.$$

Assim como todas as funções enunciadas acima, o gráfico da função afim também é uma reta, e seu conjunto imagem é constituído por todos os números reais; isto é,

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}, \text{ tal que } y = f(x) = ax + b\} = \mathbb{R}.$$

Ilustração Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = -2x + 4$. Graficamente tem-se:

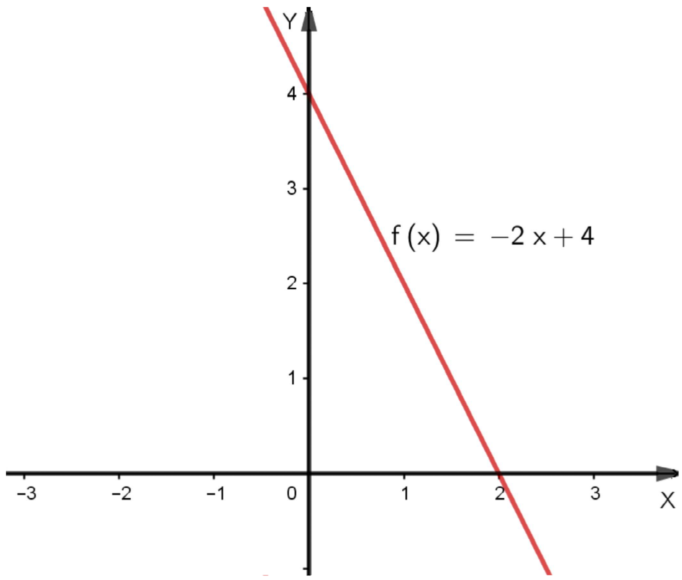

Figura 10: criada no GeoGebra pelo autor

Aplicando as funções no GeoGebra podemos fazer observações importantes, como por exemplo no que diz respeito aos seus gráficos. O comportamento do gráfico de uma função pode ser alterado a partir da modificação dos valores dos seus coeficientes. Por exemplo, para a função $ax^2 + bx + c$ ou, $ax + b$, tal comportamento pode ser facilmente observado utilizando o GeoGebra. Suas raizes e extremos são outros conceitos que podemos abordar com o uso deste software.

7 Sequências

Definição: Uma **sequência** é uma função do tipo $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R},$ tal que $f(n) = a_n$, onde cada a_n é um número chamado **n-ésimo termo da sequência**.

A título de exemplo, considere a sequência a_n de números ímpares, isto é:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n + 1, ...$$

O primeiro termo é 1 e o n-ésimo é $2n + 1$, em que n é um inteiro chamado **índice da sequência**.

Em outro exemplo considere a sequência $\{a_n\}$ de números pares

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 2n, ...$$

A função associada à sequência acima atribui:

$$a_1 = f(1) = 2, a_2 = f(2) = 4, \ldots a_n = f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{Z}_+$$

. Em termos de notação essa função seria descrita da seguinte forma:

$$f(n) = a_n = 2n, \text{ com } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Geralmente as sequências podem ser escritas de uma forma mais geral, ou seja, por meio de regras que especifiquem cada termo. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\{a_n\} = \sqrt{n};$$

$$\{b_n\} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n};$$

$$\{c_n\} = \frac{n-1}{n};$$

$$\{d_n\} = (-1)^{n+1}.$$

Ainda podemos identificar uma sequência observando a listagem de seus termos. Tomando a_n e b_n do exemplo anterior temos que:

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}, ...\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, ..., (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, ...\right\}$$

Aplicando as sequências ao software podemos contruir uma sequência de números simples como uma sequência de números pares, ímpares etc, como mostrado nos exemplos acima.

7.1 Convergência e Divergência

Observe os seguintes exemplos de sequências:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\} \quad \text{e} \quad \{1, -1, 1, -1, 1, -1, ..., (-1)^{n+1}, ...\}.$$

Podemos observar que algumas vezes os termos da sequência se aproximam de um determinado valor, como no primeiro exemplo, onde conforme n aumenta os termos da sequência se aproximam de 0. Mas nem sempre isto ocorre. No segundo caso, conforme n aumenta, o valor da sequência varia entre 1 e -1; ou seja, os termos desta sequência não se aproximam de um valor real, quando n cresce.

7.1.1 Convergência

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ **converge** para um número L qualquer quando, para todo número real positivo ϵ existe um inteiro positivo N tal que

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Se $\{a_n\}$ covergir para L, matematicamente escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, e chamamos L de **limite da sequência**.

7.1.2 Divergência

Uma sequência $\{a_n\}$ **diverge** se o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ não existe.

7.1.2.1 Divergência para o infinito

Uma sequência $\{a_n\}$ **diverge para** ∞ quando para todo $M \in \mathbb{R}_+$ existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $n > N$, tem-se que $a_n > M$. Em notação de limite temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Da mesma forma, uma sequência $\{a_n\}$ diverge para $-\infty$, se para todo $M \in \mathbb{R}_-$ existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que para todo $n > N$, tem-se que $a_n < M$. Em notação:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Como já sabemos, sequências são funções cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Desta forma, as regras usadas no limite de funções são as mesmas usadas no cálculo de limites de sequências.

7.1.3 Propriedades do limite de sequências

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências convergentes e $c \in \mathbb{R}$. Então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n);$$

Se $\{c_n\}$ é uma sequência tal que

$$c_n = c, \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c = c$$

Ilustração:

- Seja $\{a_n\}$ uma sequência dada por $a_n = -\frac{1}{n}$. Calculando o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = -1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0;$$

- Dada $\{b_n\}$ uma sequência definida por $b_n = \frac{n-1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1;$$

- De maneira análoga seja $\{c_n\}$ uma sequência definida por $c_n = \frac{5}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Como mostrado no início deste capítulo as sequências são funções com domínio $\mathbb{Z}_+$, de modo que o conhecimento de alguns comandos de funções no GeoGebra possibilita trabalhar com o conceito de **sequência**. Neste caso podemos construir uma sequência de números simples ou podemos optar por sequêcias mais complexas envolvendo infinito.

8 Limite de uma Função

Definição: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto contendo um ponto a, exceto possivelmente em a. Se L é um número real, diz-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a a é L e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Se, para todo número $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que para todos os valores de x satisfazendo a

$$0 < |x - a| < \delta$$

tem-se

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Como ilustração da definição acima observe o seguinte gráfico:

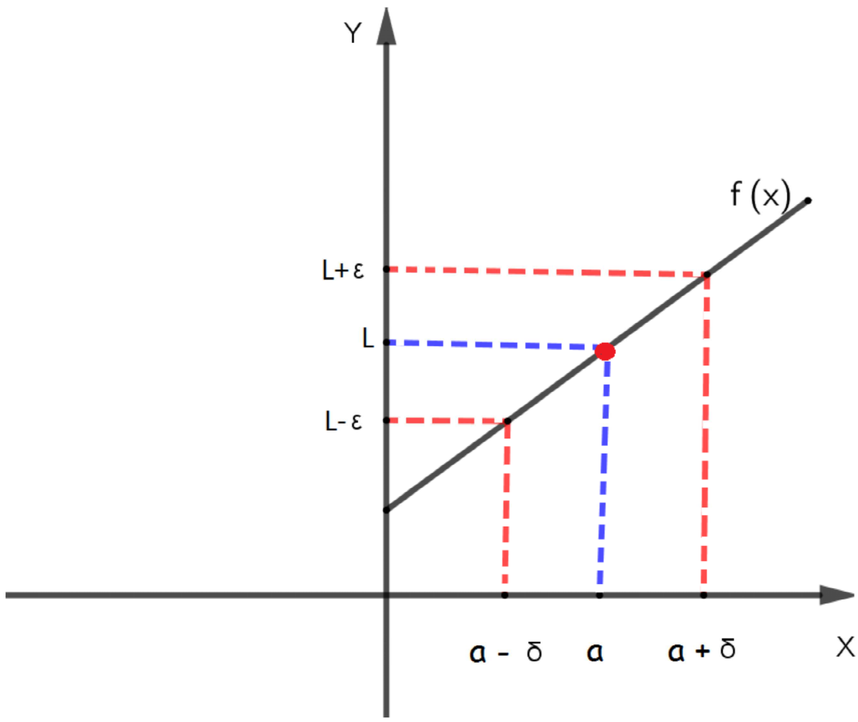

Figura 11: criada no GeoGebra pelo autor.

Existe um comando no GeoGebra para podermos trabalhar limites, este comando de mesmo nome nos oferece o limite de qualquer função (se existir)

8.1 Propriedades do limite de uma função

Sejam L, M, c, k números reais e suponha que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$. Então:

1. Limite da função constante é igual a própria constante:
$$\lim_{x\to c} k = k;$$
2. Limite de uma constante multiplicando uma função é a constante multiplicando o limite da função:
$$\lim_{x\to c}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to c} f(x) = k \cdot L;$$
3. Limite da soma (diferença) de duas funções é a soma (diferença) de seus limites:
$$\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)] = L + M;$$
$$\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)] = L - M;$$
4. Limite do produto de duas funções é o produto de seus limites:
$$\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M;$$
5. Limite do quociente de duas funções é o quociente de seus limites, desde que o limite do denominador seja diferente de zero:
$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M};$$
6. Dados r e s inteiros sem fatores comuns, e $s \neq 0$ então o limite de uma potência racional de uma função é a potência do limite da função desde que esse limite seja um número real (se s é par pressupomos que $L > 0$):
$$\lim_{x\to c}[f(x)]^{\frac{r}{s}} = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}.$$

Exemplo: Para cada função dada abaixo, calcule o seu limite, quando $x \to 2$:

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 3x + 4$;

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{2x-2}$;

c) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}$;

d) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $p(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{6 - 4x}$.

Solução

a) $\lim_{x\to 2}(3x + 4) = \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 4 = 3 \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 4 = 3(2) + 4 = 10;$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2x-2} = \dfrac{\lim_{x\to 2} x + 1}{\lim_{x\to 2} 2x - 2} = \dfrac{2+1}{2(2)-2} = \dfrac{3}{2};$

c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)} = \sqrt{2^3 + 2(2^2) - 3(2) + 2} = 12;$

d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{6 - 4x} = \dfrac{\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x^2 + 3x + 2)}}{\lim_{x\to 2}(6 - 4x)} = \dfrac{2(2^2) + 3(2) + 2}{6 - 4(2)} = -8.$

8.2 Limites laterais

Dizemos que uma função $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tem um limite **lateral à direita** de a, L, quando para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que $0 < x - a < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$.
Notação:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Uma função $f(x)$ definida em um intervalo aberto (a,b) tem um limite **lateral à esquerda** de b, L, quando para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que $-\delta < x - a < 0$ implica em $|f(x) - L| < \epsilon$.
Notação:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = L.$$

8.2.1 Limites que envolvem infinito

Dizemos que uma função $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ possui um limite L, quando x cresce indefinidamente, se para cada $\epsilon > 0$ existir $M > 0$ tal que para $x > M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

Ilustração: Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$, para todo $x \in (0, \infty)$. Note que, intuitivamente, quando x cresce o valor de $f(x)$ se aproxima de 1, conforme tabela abaixo:

x	1	5	10	100	1000	10000
$f(x)$	3	$1,4$	$1,2$	$1,02$	$1,002$	$1,0002$

Analogamente, dada uma função $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, dizemos que $f(x)$ possui um limite L, quando x decresce indefinidamente, se para cada $\epsilon > 0$ existir $M < 0$ tal que para $x < M$ então $|f(x) - L| < \epsilon$, e definimos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Ilustração: Seja $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$, para todo $x \in (-\infty, 0)$. Note que, intuitivamente, quando x decresce o valor de $f(x)$ também se aproxima de 1, conforme tabela abaixo:

x	-1	-5	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	-1	$0,6$	$0,8$	$0,98$	$0,998$	$0,9998$

Exemplo: Para cada função dada abaixo, calcule o seu limite quando $x \to \pm\infty$:

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = 3 + \dfrac{1}{x}$;

c) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = \dfrac{3\sqrt{2}}{x^2}$;

d) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $p(x) = \dfrac{4x^2 + 5x - 2}{5x^2 + 3}$;

e) Seja $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $t(x) = \dfrac{5x + 6}{3x^3 - 2}$.

Solução:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(3 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 3 + \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 3 + 0 = 3$;

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3\sqrt{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 3\sqrt{2}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} 3\sqrt{2}. \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x}. \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 3\sqrt{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
Quando o limite for de uma função racional, divida o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparecer no denominador:

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x^2 + 5x - 2}{5x^2 + 3} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{5 + \frac{3}{x^2}} = \dfrac{4 + 0 + 0}{5 + 0} = \dfrac{4}{5}$;

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5x + 6}{3x^3 - 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}}{3 - \frac{2}{x^3}} = \dfrac{0 + 0}{3 - 0} = 0$.

Observamos que em alguns limites, conforme x se aproxima de um determinado a real, o valor de $f(x)$ cresce (ou decresce) tomando valores cada vez maiores. Quando isso ocorre usamos a notação $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Definição: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, onde I é um intervalo aberto da reta real, contendo a. Dizemos que o valor de $f(x)$ cresce indefinidamente, quando x tende a a, se para todo número real $P > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer x, $0 < |x - a| < \delta$ então, $f(x) > P$ e denotamos da seguinte forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Por outro lado, dizemos que o valor de $f(x)$ decresce indefinidamente, quando x tende a a, se para todo número real $P < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer x, $0 < |x - a| < \delta$ então, $f(x) < P$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Ilustação: Note que para $f(x) = \dfrac{1}{x}$ conforme x tende à 0 pela direita, o valor de $f(x)$ cresce indefinidamente. Desta maneira $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Na tabela logo a seguir, tem-se alguns valores relacionados:

x	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$0,00001$	$0,000001$
$f(x)$	10	100	1000	10000	100000	100000000

Da mesma maneira para, a mesma função, se fizermos x tender à 0 pela esquerda, o valor de $f(x)$ decresce indefinidamente, ou seja, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$. A tabela abaixo relaciona alguns dos valores de x com os respectivos valores de $f(x)$.

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$	$-0,000001$
$f(x)$	-10	-100	-1000	-10000	-100000	-100000000

Considere, agora, o caso em que $(x) = \frac{1}{x^2}$, para o qual

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Exemplo: Para cada caso abaixo mostre se o limite de cada função é $+\infty$ ou $-\infty$:

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$;

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = \dfrac{x-3}{(x^2-4)}$;

c) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = \dfrac{3-x}{(x-3)^3}$.

Solução:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{(x+2)^2} = \infty$;

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{(x-3)^3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-(x-3)}{(x-3)^3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-1}{(x-3)^2} = -\infty$.

Fazendo uso dos comandos **limitesuperior** e **limiteinferior** limite a direita e a esquerda respectivamente no GeoGebra, podemos perceber graficamente se o limite de determinadas funções existem ou não.

8.2.2 Limites envolvendo o infinito ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$)

Existem ainda limites em que, conforme x cresce ou decrece sem proporções, o valor de $f(x)$ cresce ou decresce da mesma maneira.

Definição: Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que, quado x cresce ilimitadamente $f(x)$ também cresce ilimitadamente se para qualquer $B > 0 \; \exists \; P > 0$ tal que se $x > P$ implica em $f(x) > B$, e denotamos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

De maneira análoga, segue que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Ilustração: Considere a função dada pela equação $f(x) = x^2$. Note que quanto mais o valor de x cresce $f(x)$ acompanha esse crescimento ilimitado; ou seja, $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

A tabela abaixo ilustra alguns valores relacionados:

x	1	5	10	100	1000	10000
$f(x)$	1	25	100	10000	1000000	100000000

Ilustração: Agora veja que para mesma função quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ cresce ilimitadamente. Em outras palavras,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Alguns valores estão ilustrados na tabela abaixo:

x	-1	-5	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	1	25	100	10000	1000000	100000000

Exemplo: Para cada função abaixo, ache seu limite:

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = (4x^2 - 7x + 3)$, quando x tende a ∞;

b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$, quando x tende a ∞;

c) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2)$, quando x tende a $-\infty$;

d) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $p(x) = (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$, quando x tende a $-\infty$.

Solução:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2 - 7x + 3) = +\infty;$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x^2 - 5x + 3) = -\infty;$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2) = -\infty;$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x - 4) = +\infty.$

Com o comando **limite**, no GeoGebra, podemos verificar se determinadas funções possuem ou não limite, e ainda podemos observar graficamente se esses limites existem ou não. Limites infinitos também podem ser abordados neste comando.

9 Derivação

Definição: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto da reta real, I, contendo x_0. Chamamos de **derivada** de f, no ponto x_0, o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

caso exista. O limite acima pode ser reescrito da forma:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

em que $h = x - x_0$.

Geometricamente, a derivada de uma função f qualquer é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0, ou seja, se $y = mx + b$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto x_0, então:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Esta afirmação é um resultado que podemos abordar no GeoGebra, com o uso de alguns comandos podemos perceber mais fácilmente a relação derivada e reta tangente.

9.1 A função Derivada.

Segundo a definição de derivada posta acima, podemos definir uma função derivada como sendo uma $f' : I \to R$ que associa, a cada x_0 em I, a derivada f no ponto x_0. Geralmente para definir a derivada de f usam-se as notações $\dfrac{df}{dx}$, além de $f'(x)$.

Exemplo: Para cada função abaixo determine sua derivada:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2x + 1$;

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = \dfrac{x - 1}{x}$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x) = (x - 3)^2$.

Solução:

a)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x + h) + 1 - (2x + 1)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} \Rightarrow f'(x) = 2;$$

A ilustração logo a seguir mostra o gráfico de f (em azul) e f' (em vermelho)

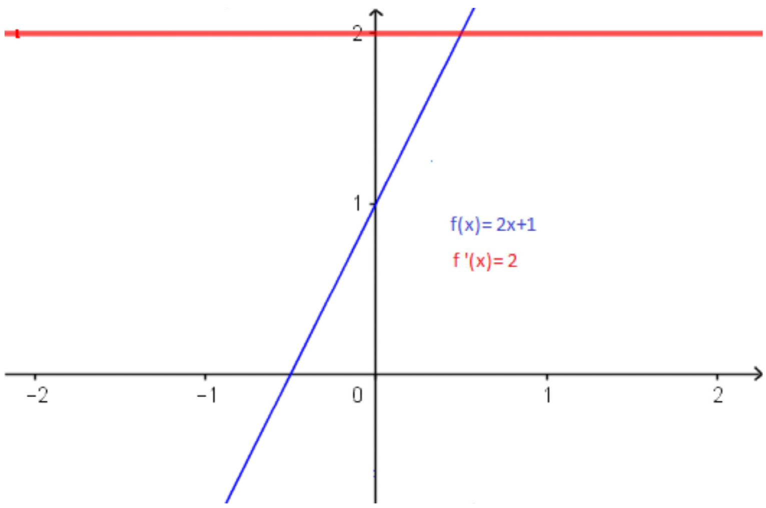

Figura 12:criada no GeoGebra pelo autor

b)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x+h)-1}{x+h} - \frac{(x-1)}{x}}{h} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(x^2+hx-x)-(x^2-x+hx-h)}{(x+h)x}}{h} \Rightarrow g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{(x+h)x}}{h} \Rightarrow$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x^2+hx} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^2};$$

A ilustração abaixo mostra o gráfico de g (em azul) e g' (em vermelho)

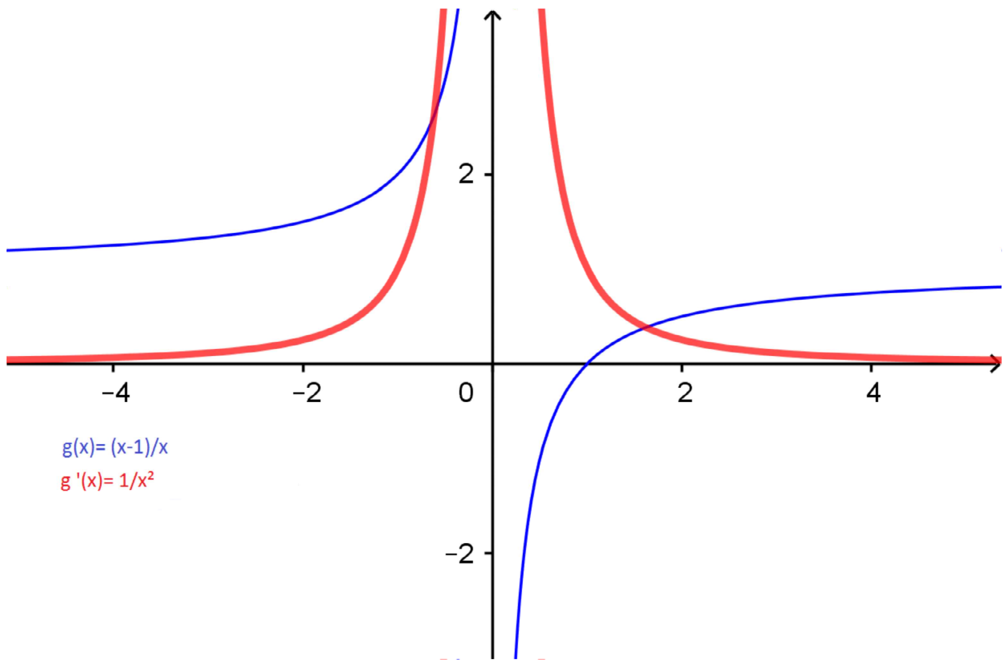

Figura 13: criada no GeoGebra pelo autor

c)

$$h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} \Rightarrow h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)-3]^2 - (x-3)^2}{h} \Rightarrow$$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 6x - 6h + 9 - (x^2 - 6x + 9)}{h} \Rightarrow$$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 6h}{h} \Rightarrow h'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h - 6 \Rightarrow h'(x) = 2x - 6.$$

A ilustração abaixo mostra o gráfico de h (em azul) e h' (em vermelho)

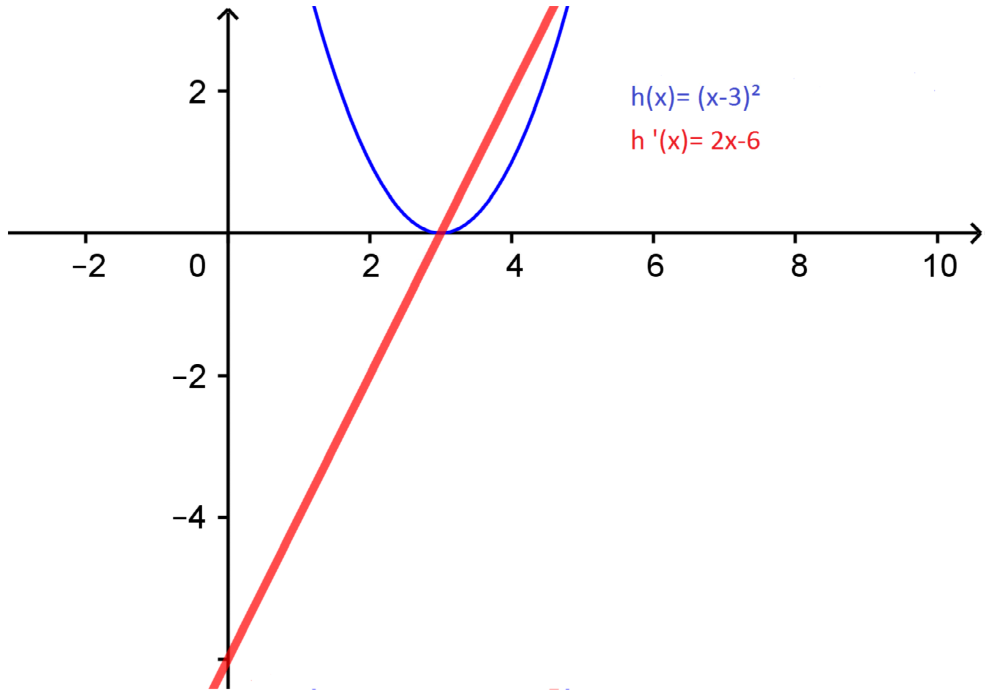

Figura 14: criada no GeoGebra pelo autor

É importante lembrar que as funções deriváveis (diferenciáveis) são contínuas no ponto x_0, conforme o teorema abaixo.

Teorema: Seja uma função $f : I \to R$ e $x_0 \in I$. Se f é diferenciável em x_0, então f é contínua em x_0.

Demontração:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Aplicando o limite na última equação acima, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x) \cdot 0 = 0.$$

Então:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0);$$

logo f é contínua em x_0.

Observação: É importante saber que a recíproca desse teorema não é verdadeira, ou seja, continuidade não implica em diferenciabilidade. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não tem derivada no ponto $(0, 0)$.

Vejamos algumas regras que nos permitem derivar uma função sem que tenhamos que recorrer a definição:

1. Derivada da função constate $f(x) = c$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}c = 0;$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 5$, então:

$$\frac{d}{dx}(5) = 0.$$

2. Derivadas de função potência ou potenciação, dado $n \in Z$ e $f(x) = x^n$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1};$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^2$, então:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

3. Derivada da multiplicação por constate

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx};$$

Exemplo: Seja c é uma constante e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 3x^2$, então:

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = (3)2x = 6x;$$

4. Derivada da soma e da diferença é a soma e a diferença respectivamente das derivadas, se f e g são fuções deriváveis temos:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(g) \quad \text{e,} \quad \frac{d}{dx}(f-g) = \frac{d}{dx}(f) - \frac{d}{dx}(g);$$

Exemplo1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 3x^3$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = 5x$, então:

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}(3x^3) + \frac{d}{dx}(5x) = 9x^2 + 5.$$

Exemplo2: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^4$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = x$, então:

$$\frac{d}{dx}(f-g) = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(x) = 4x^3 - 1.$$

5. Derivada do produto de funções, seja f e g funções deriváveis temos que

$$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{d}{dx}(g) + g\frac{d}{dx}(f);$$

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = (x^2+1)$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(x) = (x^3+2)$, então:

$$\frac{d}{dx}(fg) = (x^2+1)(3x^2) + (x^3+2)(2x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(fg) = 5x^4 + 3x^2 + 4x.$$

6. Derivada do quociente de funções, seja f e g funções deriváveis temos que
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\frac{d}{dx}(f)-f\frac{d}{dx}(g)}{g^2};$$
Exemplo: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por $f(x)=(x^2+1)$, e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por $g(x)=(x)$, então:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(x)(2x)-(x^2+1)(1)}{x^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{x^2-1}{x^2}.$$
Vejamos as derivadas de outras funções importantes na matemática.

7. Derivada da função exponencial $f(x)=e^x$
$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x;$$
8. Derivada da função logaritmo natural $f(x)=ln(u)$
$$\frac{d}{dx}ln(u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx};$$
9. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\sin x$
$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x;$$
10. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\cos x$
$$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x;$$
11. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\tan x$
$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x;$$
12. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\cot x$
$$\frac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x;$$
13. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\sec x$
$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\cdot\tan x;$$
14. Derivada de função trigonométrica $f(x)=\csc x$
$$\frac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cdot\cot x.$$

As regras de derivação vistas até agora nos dão a possibilidade derivar grande parte das funções existentes (desde que elas sejam deriváveis), mas nos daria muito trabalho derivar por exemplo $f(x)=(4x^2+1)^2$ usando as regras ou a definição; o mesmo ocorrendo para funções compostas como $y=\sin(x^2+1)$. É pensando nesta dificuldade que fazemos uso da **regra da cadeia** para estes tipos de funções.

9.2 Regra da Cadeia

Seja $f(u)$ uma função derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ uma função derivável em x. Então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é derivável em x e:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x);$$

ou ainda, podemos escrever em outra notação, de tal forma que, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Desta forma, agora podemos calcular a derivada dos dois casos citados anteriomente, entre outros:

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = (4x^2 + 1)^2$. Fazendo $f(x) = y$ obtemos $y = u^2$ e $u = 4x^2 + 1$, de onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2u \cdot 8x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(4x^2 + 1) \cdot 8x = 16x(4x^2 + 1).$$

A ilustração abaixo mostra o gráfico de f (em azul) e f' (em vermelho)

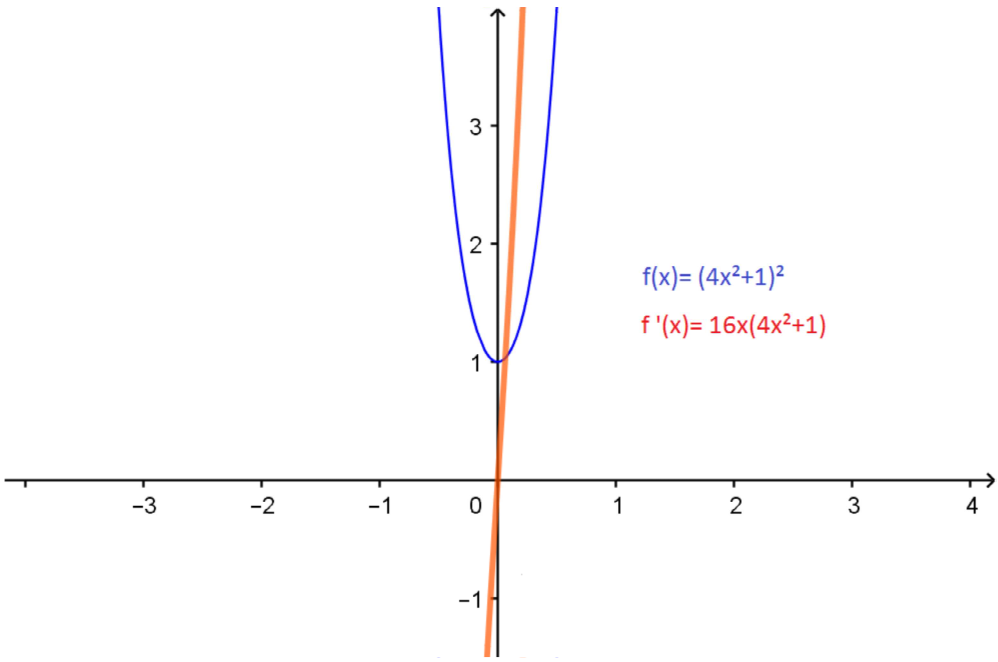

Figura 15: criada no GeoGebra pelo autor

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \sin(x^2 + 1)$. Fazendo $f(x) = y$ obtemos $y = \sin u$ e $u = x^2 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x\cos(x^2 + 1).$$

A ilustração logo a seguir mostra o gráfico de f (em azul) e f' (em vermelho)

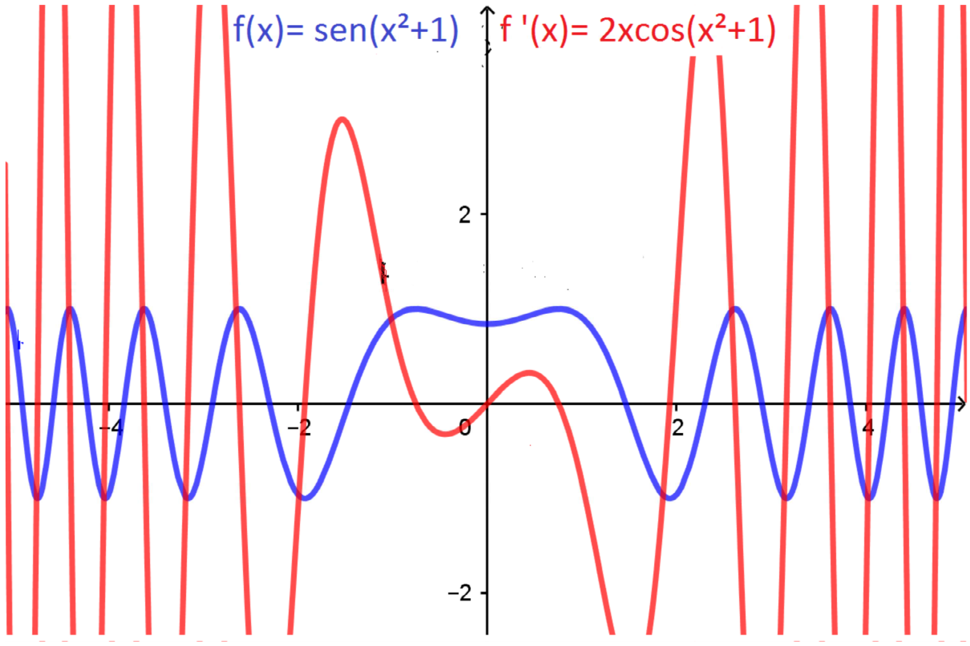

Figura 16: criada no GeoGebra pelo autor

Existem funções onde não basta usar a regra da cadeia apenas uma vez mas sim duas ou mais vezes. Chamamos isso de regra da cadeia de vários elos:

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = (\tan(2x+2))^2 \Longrightarrow y = u^2$ e $u = \tan v$ e $v = 2x+2$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2u \cdot \sec^2 v \cdot 2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\tan(2x+2) \cdot \sec^2(2x+2) \cdot 2 = 4\tan(2x+2) \cdot \sec^2(2x+2).$

A ilustração abaixo mostra o gráfico de f (em azul) e f' (em vermelho)

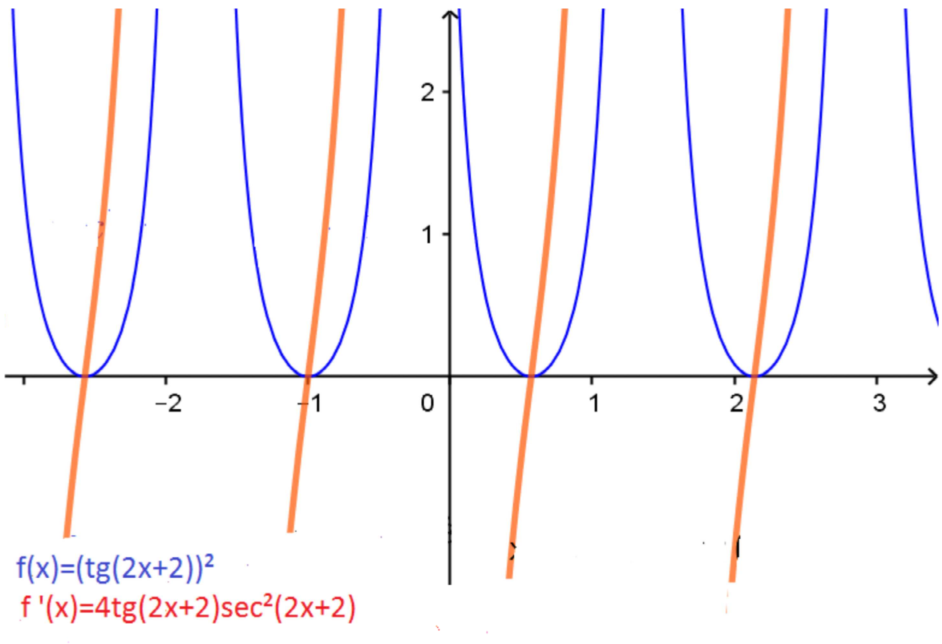

Figura 17: criada no GeoGebra pelo autor

Exemplo: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = [\cot(3 - \tan 2x)]^3 \Longrightarrow y = u^3$ e $u = \cot v$ e $v = 3 - \tan t$ e $t = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (-\csc^2 v) \cdot (-\sec^2 t)2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6 \cdot \cot^2(3 - \tan 2x) \cdot (-\csc^2(3 - \tan 2x) \cdot (-\sec^2 x).$$

A ilustração abaixo mostra o gráfico de f (em azul) e f' (em marrom)

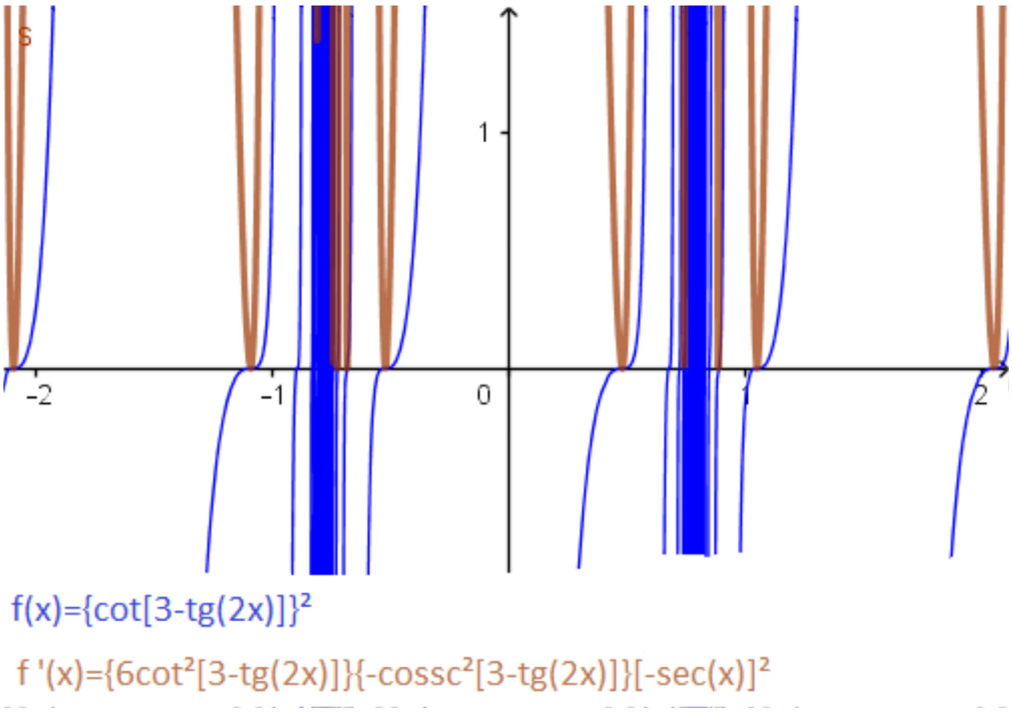

Figura 18: criada no GeoGebra pelo autor

Podemos derivar funções de vários tipos e maneiras, escolhendo a derivada primeira, segunda, etc, sempre observando se desejado seus gráficos antes e depois da derivação, podendo assim observar que funões quadráticas se transfomam em funções do 1 grau.

Considerações Finais

Ter trabalhado com o assunto tratado neste TCC foi uma experiência interessante, pois foram os conteúdos entre outros que gostei bastante de trabalhar durante a graduação. Isso acabou contribuindo muito com o meu amadurecimento e enrriquecimento com relação aos estudos do cálculo matemático, principalmente em relação as funções, sequências, limites e derivadas, e entre outros conteúdos da graduação. No decorrer da elaboração deste trabalho acabei aprofundando os conceitos tratados. O interesse de aplicar o GeoGebra ao conteúdo por mim abordado se deve a busca de novos meios que facilitem o ensino de matemática, meios estes oferecidos pelo software.

Desta forma, finalizo este trabalho com a sensação de que cumpri meu papel na universidade, com a certeza de que sempre busquei adiquirir o conhecimento matemático aplicado pelos professores.

Referências

[1] Weir, Maurice D. Cálculo (George B. Thomas Jr). Volume II / Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R.Giordano: tradução Luciana do Amaral Teixeira, Leila Maria Vasconcellos Figueredo; revisão técnica Claudio Hirofume Asano, - São Paulo: Addison weley. 2009. Título original: Cauculos. II ed. americana.

[2] Weir, Maurice D. Cálculo (George B. Thomas Jr). Volume I / Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R.Giordano: tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueredo; revisão técnica Claudio Hirofume Asano, - São Paulo: Addison weley. 2009. Título original: Cauculos. II ed. americana.

[3] Iezzi, Gelson, 1939- Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções: 84 exercícios resolvidos, 484 exercícios propostos com resposta, 368 testes de vestibular com resposta / Gelson Iezzi, Carlos Murakami - 8. ed. - São Paulo: Atual, 2004.

[4] Iezzi, Gelson, 1939- Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral: 62 exercícios resolvidos, 264 exercícios propostos com resposta, 71 testes de vestibular com resposta / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado - 6. ed. - São Paulo: Atual, 2005.

[5] Iezzi, Gelson, 1939- Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas: 43 exercícios resolvidos, 407 exercícios com resposta, 302 testes de vestibular com resposta / Gelson Iezzi, Samuel Hazzan - 7. ed. - São Paulo: Atual, 2004.

[6] STEWART, James. Cálculo, Volume I / James Stewart; tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins ; revisão técnica Helena Castro. – São Paulo : Cengage Learning, 2011. Título original: Cauculos. 6. ed. americana.

[7] Matemática: ciência e aplicações, volume 1: ensino médio / Gelson Iezzi...[et al.]. - 7. ed. - são Paulo: Saraiva, 2013.
Outros autores: Osvaldo Dulce, Degenszajn, Roerto Périgo, Nilze de Almeida.

[8] Conjuntos e funções: 2 grau / Aref Antar Neto...(et al). - São Paulo: Ed Moderna 1979 (noções de matemática; V.1)

[9] Thiago. Conhecendo um pouco mais sobre o GeoGebra. Disponível em: ≺edumatecno.blogspot.com.br/2013/04/conhecendo um pouco mais sobre o.html≻. Acesso em: 10 de dez. 2016.