UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

KÉZIA PATRÍCIA MESTRE CARVALHO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

KÉZIA PATRÍCIA MESTRE CARVALHO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

C331t Carvalho, Kézia Patrícia Mestre.
O Teorema da Representação de Riesz [manuscrito] : / Kezia Patricia Mestre Carvalho. - 2017.
44 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Teorema de Riesz. 2. Espaço de Hilbert. 3. Funcionais lineares.

21. ed. CDD 510

KÉZIA PATRÍCIA MESTRE CARVALHO

O TEOREMA DA REPRESENTAÇÃO DE RIESZ E APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 15/12/2017

COMISSÃO EXAMINADORA

Luciana Freitas

Prof.ª Dra. Luciana Roze de Freitas
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
ORIENTADORA

Thiciany M. Iwano

Prof.ª Ma. Thiciany Matsudo Iwano
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Prof.ª Ma. Joselma Soares dos Santos
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADORA

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, meu alicerce e meu guia, ao meu pai José Patrício, minha mãe Jucelmi e à minha orientadora Luciana Rose de Freitas.

Agradecimentos

Ao Criador do Universo, Jesus Cristo, pelas oportunidades que ele me proporcinou e por sempre está comigo e que permitiu que eu chegasse até aqui, sou imensamente grata! A Ele, toda honra e glória!

Aos meus pais, Jucelmi Mestre e José Patrício, pelos ensinamentos e incentivos nos estudos, por sempre me apoiarem nas decisões que tomei e por terem me ajudado a chegar ao final da minha graduação.

Ao professor José Elias da Silva, que sempre se disponibilizou a me ajudar desde o começo deste curso e que colaborou de maneira essencial em cada etapa dessa jornada.

A minha Orientadora Luciana Roze de Freitas por ter me aceitado como orientanda tanto do Pibic como também na orientação deste trabalho. Um exemplo de humildade, paciência e profissionalismo e sobretudo pelos seus ensinamentos que foram fundamentais na minha formação.

A professora Thiciany Matsudo Iwano, por sempre está a disposição para ajudar e tirar dúvidas ou mesmo para aconselhar, pela disponibilidade de participar da examinação deste trabalho, juntamente com a professora Joselma Soares do Santos e por serem exemplos de professores.

Aos meus amigos, em especial a Isabel Liz, que é quase uma irmã e que conheço desde a infância, pelas risadas, loucuras e também pelos conselhos.

Aos meus colegas de viagem, que estiveram comigo durante esta caminhada, que tornaram as viagens menos cansativas com muitas risadas e também pela força e companheirismo.

Aos meus colegas de curso, principalmente Mayara Priscila, Renally Ferreira e Luiz Carlos, que conviveram comigo durante esses cinco anos, entre greves e aulas e que de maneira direta e indireta contribuíram na minha formação e pela amizade que sempre levarei comigo. E de maneira especial agradeço a Carlos Alberto, que sempre me ajudou

quando precisei, me dando incentivo e conselhos, e vem me ajudando a ser uma profissional melhor, que com companheirismo e simplicidade sempre me acompanha em todos os momentos acadêmicos.

“Até aqui nos ajudou o Senhor.”1 Samuel 7:12b.

Epígrafe

"A felicidade não é uma variável matemática, mas pode alcançar o infinito em um dado momento".

(Fabrício Britto)

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar o Teorema da Representação de Riesz, assim como algumas aplicações deste teorema. Apresentaremos inicialmente um estudo sobre os espaços métricos, bolas abertas e fechadas e sequências, que são essenciais para compreensão de alguns resultados. Abordamos também conceitos e resultados da Análise Funcional, centralizando ao estudo dos espaços completos, como os Espaços de Banach e Espaços de Hilbert e apresentamos a teoria dos operadores lineares, em particular os funcionais lineares. Esses conceitos são o ponto chave desse trabalho, já que o Teorema central mostra a forma de um funcional linear limitado em um Espaço de Hilbert.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert, Funcionais Lineares, Teorema de Riesz.

Abstract

The present work aims to present the Riesz Representation Theorem, as well as some applications of it. Initially, it is going to be presented a study on metric spaces, open and closed balls, and sequences, which are essential for the understanding some results. It is also going to be approached concepts and results of Functional Analysis, centering on the study of complete spaces, such as Banach Spaces and Hilbert Spaces. Finally, it is going be present the theory of linear operators, in particular linear functional ones. These concepts are the key point of this work, since the central Theorem shows the form of a limited linear functional in a Hilbert Space.

Keywords: Hilbert Space, linear functional, Riesz Theorem

Sumário

Introdução **10**

1 Teoria preliminar **12**

1.1 Espaços métricos 12

1.2 Sequências 14

1.3 Espaço de Banach 15

1.4 Operador linear 17

1.5 Funcional linear 24

1.6 Espaços com produto interno 26

1.7 Espaços de Hilbert 28

2 Teorema da Representação de Riesz **32**

2.1 Demonstração do Teorema 32

3 Aplicações **36**

3.1 Generalizando o Teorema de Riesz (Teorema de Lax-Milgram) 36

Considerações Finais **43**

Referências Bibliográficas **44**

Introdução

A Análise Funcional é o ramo da matemática que estuda os espaços vetoriais normados e os operadores lineares contínuos nestes espaços, dando ênfase a importantes espaços de funções utilizados em várias áreas da Matemática. Tem suas raízes históricas no estudo de transformações, tais como a Transformada de Fourier, e no estudo de equações diferenciais e equações integrais.

O estudo dos elementos da Análise Funcional, iniciou-se na primeira década do século XX. Os pioneiros no estudo desta teoria foram Fréchet, Hausdorff e Schmidt. Posteriormente, trabalhos devidos a Helly, Banach, Riesz e Hilbert impulsionaram a construção da teoria da Anáise Funcional, e consequentemente, o desenvolvimento de vários ramos da matemática moderna.

Alguns conceitos e propriedades da Álgebra Linear e da Análise Matemática são apresentados num contexto mais amplo, considerando não apenas espaços vetoriais de dimensão finita, mas dando maior ênfase aos espaços vetoriais de dimensão infinita.

O objetivo deste trabalho é abordar alguns tópicos importantes da Análise Funcional e apresentar um dos resultados mais importantes da área, que foi desenvolvido por Riesz e é chamado de Teorema da Representação de Riesz. Em 1907, Fréchet e Riesz mostraram independentemente este resultado de representação sobre o espaço de funções L^2. Logo em 1934, Riesz consegue estender este resultado para qualquer espaço de Hilbert. Por essa razão o Teorema pode ser conhecido como Teorema de Riesz-Fréchet ou apenas Teorema da Representação de Riesz.

"A representação de Riesz, nos mostra a forma geral de um funcional linear, limitado em um espaço de Hilbert. Mais especificamente, o teorema nos diz que, para qualquer funcional linear limitado sobre um espaço de Hilbert , existe um vetor z, tal que a atuação do funcional sobre um vetor x é o produto interno de x por z."

No capítulo 1 serão abordados alguns conceitos da Análise Matemática, tais como, espaços métricos, sequências e convergência e também da Análise Funcional, como espaços normados, operadores lineares e funcionais lineares, produto interno e alguns espaços de funções. Esses conceitos são introduzidos para facilitar a compreensão dos resultados e aplicações aqui apresentadas.

No segundo capítulo será apresentado o famoso Teorema da Representação e Riesz e sua demonstração. Por fim, no terceiro capítulo, serão apresentadas algumas aplicações. Umas delas é o Teorema de Lax-Milgram, que é uma generalização do Teorema de Riesz para forma sesquilinear.

Os resultados e conceitos apresentados aqui, sobre Álgebra Linear e Topologia Matemática, podem ser consultados, para as provas, nas referências [2], [4] e [8].

Capítulo 1

Teoria preliminar

Nesse capítulo abordaremos algumas definições e resultados essenciais da Análise Funcional, bem como algumas terminologias das quais devemos nos familiarizar para melhor entendimento do Teorema da Representação de Riesz. A teoria apresentada a seguir pode ser encontrada nas referências [1] e [2].

1.1 Espaços métricos

Definição 1.1. *(**Espaço Métrico**) Chamaremos de espaço métrico um par* (X, d) *em que* $X \neq \varnothing$ *é um conjunto qualquer e* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *é uma métrica, ou seja, é uma função que tem as seguintes propriedades, para todo* $x, y, z \in X$*:*
i) $d(x, y) \geq 0$*;*
ii) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se* $x = y$;
iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Observação 1.1. *d(x,y) é chamada de distância de x a y.*

Observação 1.2. *A propriedade iv) é conhecida como desigualdade triangular.*

Exemplo 1.1. *A reta real é um dos exemplos mais importantes de espaço métrico, considerando a métrica dada por* $d(x, y) = |x - y|$.

Exemplo 1.2. *Consideremos agora o conjunto* $\mathbb{R}^n$ *de todas as n-uplas reais. Definimos uma métrica* d *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$, *sendo* $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3. *O par* $(\mathbb{R}^n, d)$ *é um espaço métrico, onde* d *é uma métrica definida da seguinte forma:*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 1.2. ***(Bola aberta e fechada)*** *Seja* X *um espaço métrico,* $x_0 \in X$ *e* $r > 0$ *um número real. Definimos os seguintes conjuntos:*

a) Bola aberta: $B(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$;

b) Bola fechada: $B[x_0; r] = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$;

c) Esfera: $S(x_0; r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$.

Nos três casos, x_0 *é chamado de centro e* r *é o raio.*

Definição 1.3. ***(Conjunto abertos e fechados)*** *Um subconjunto* M *de um espaço métrico* X *é dito aberto se contém um bola com centro em cada um dos seus pontos, ou seja, para todo* $x \in M$*, existe um* $r > 0$ *real, tal que*

$$B(x; r) \subset M.$$

E um subconjunto K *de* X *é dito fechado se o seu complementar (em* X*) é aberto, isto é,*

$$K^C = X - K \text{ é aberto.}$$

Definição 1.4. ***(Ponto aderente)*** *Seja* M *um subconjunto de um espaço métrico* X*. Um ponto* $x_0 \in X$ *se diz ponto aderente de* M *se, para todo* $\epsilon > 0$ *vale a relação*

$$B(x_0, \epsilon) \cap M \neq \varnothing.$$

O conjunto dos pontos aderentes de M *chama-se fêcho de* M *e é indicado por* $\overline{M}$*. É imediato que* $M \subset \overline{M}$*.*

Definição 1.5. *Sejam* X *e* Y *espaços métricos. Uma aplicação* $f : X \longrightarrow Y$ *é dita contínua em um ponto* $x_0 \in X$ *se para cada* $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Dizer que f *é contínua signifia que* f *é contínua em todos os pontos de* X*.*

1.2 Sequências

Definição 1.6. *(**Sequência**) Seja (X,d) um espaço métrico. Toda aplicação $n \longrightarrow x_n$ de $\mathbb{N}^*$ em X é chamada sequência de elementos de X e denotada por (x_n).*

Definição 1.7. *(**Sequência convergente**) Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X,d) é dita convergente se existe um $x \in X$ tal que:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

O elemento x é chamado o limite de (x_n) e escrevemos:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$$

ou, simplesmente, $x_n \longrightarrow x$. Neste caso, dizemos que (x_n) converge para x ou tem limite x. Se (x_n) não é convergente, dizemos que é divergente.

Proposição 1.1. *Seja M um subconjunto não vazio de um espaço métrico (X,d) e $\overline{M}$ é o fecho de M. Então:*
a) $x \in \overline{M}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n) \in M$ tal que $x_n \longrightarrow x$.
b) M é fechado se e somente se, $(x_n) \in M$ e $x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.

Demonstração. a) Seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, basta considerar a sequência $(x, x, ...)$. Se $x \notin M$, então x é um ponto aderente de M. Portanto, para cada $n = 1, 2, ...$ a bola $B(x; \frac{1}{n})$ contém um $x_n \in M$, logo $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ e, $x_n \longrightarrow x$ porque $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Reciprocamente, se (x_n) é uma sequência em M e $x_n \longrightarrow x$, então $x \in M$ ou cada vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$ de modo que x é um ponto aderente de M. Portanto $x \in \overline{M}$, pela definição de fecho.

b) Primeiro vamos mostrar que M é fechado se, e somente se, $\overline{M} = M$.

Sabemos por definição que $M \subset \overline{M}$, então temos que mostrar que $\overline{M} \subset M$. Considere $x \in \overline{M}$, então por (a) existe $x_n \longrightarrow x$, onde $x_n \in M$. Suponha que $x \notin M \Rightarrow x \in M^C$. Por hipótese M é fechado, logo M^C é aberto. Assim existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x, \epsilon) \subset M^C \text{ e } x_n \in B(x, \epsilon) \subset M^c, \quad \forall n \geq n_0.$$

Mas como $x_n \in M$ isso seria uma contradição e portanto $x \in M$ e $\overline{M} \subset M$.

Usando esse fato de que M é fechado se, e somente se, $M = \overline{M}$, então (b) segue de (a). □

Definição 1.8. ***(Sequência de Cauchy)*** *Uma sequência* (x_n) *em um espaço métrico* (X, d) *é dita de Cauchy se para cada* $\epsilon > 0$ *existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \qquad \forall m, n > N.$$

Teorema 1.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow x$, então para cada $\epsilon > 0$ existe um N tal que,

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n > N$. Pela desigualdade triangular temos que para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim, (x_n) é de Cauchy. $\square$

Definição 1.9. ***(Espaço Completo)*** *O espaço* X *é dito completo se cada sequência de Cauchy em* X *converge, ou seja, cada sequência de Cauchy em* X *tem um limite que é um elemento de* X.

Exemplo 1.4. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *é um espaço métrico completo.*

Exemplo 1.5. *O espaço* R^n *é completo.*

1.3 Espaço de Banach

Definição 1.10. ***(Norma)*** *Em um espaço vetorial* X *sobre* $\mathbb{R}$, *uma norma é uma função que associa a cada* $x \in X$ *um número real não negativo, indicado por* $\| x \|$ *(lemos norma de x) de maneira que, para todo* $x, y \in X$ *e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos:*

i) $\| x \| \geq 0$;

ii) $\| x \| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

iii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$;

iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Observação 1.3. *Do item (iv) podemos provar que:*

$$| \, \| x \| - \| y \| \, | \leq \| x - y \| \, . \tag{1.1}$$

Observe que

$$\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \| \Rightarrow \| x \| - \| y \| \leq \| x - y \| \tag{1.2}$$

e

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \| y - x \| + \| x \| \Rightarrow \| y \| - \| x \| \leq \| y - x \| . \tag{1.3}$$

Mas,

$$\| y - x \| = \| (-1)(x - y) \| = | -1 | \| x - y \| = \| x - y \| .$$

Assim,

$$\| y \| - \| x \| \leq \| x - y \| \Rightarrow \| x \| - \| y \| \geq - \| x - y \| . \tag{1.4}$$

Logo, de (1.2) e (1.4)

$$- \| x - y \| \leq \| x \| - \| y \| \leq \| x - y \| \Rightarrow | \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \| .$$

Proposição 1.2. *A norma* $\| \, . \, \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Pela definição de aplicação contínua, mostremos que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que,

$$\| x - y \| < \delta \Rightarrow | \| x \| - \| y \| | < \epsilon.$$

De fato, basta tomar $\delta = \epsilon$ e teremos:

$$\| x - y \| < \delta \Rightarrow \| x - y \| < \epsilon.$$

Daí, pela observação anterior,

$$|\| x \| - \| y \|| < \| x - y \| < \epsilon \Rightarrow | \| x \| - \| y \| | < \epsilon.$$

Assim,

$$\| x - y \| < \delta \Rightarrow | \| x \| - \| y \| | < \epsilon.$$

□

Definição 1.11. ***(Espaço normado)*** *Um espaço normado X é um espaço vetorial com uma norma definida nele.*

Observação 1.4. *Se X é um espaço vetorial normado, então $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \| x-y \|$ é uma métrica sobre X. A métrica d assim obtida chama-se* ***métrica induzida pela norma*** *dada sobre X.*

Definição 1.12. *(**Espaço de Banach**) Um espaço normado X é chamado espaço de Banach quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Exemplo 1.6. *O espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\| x \| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

Demonstração. De fato, o espaço $\mathbb{R}^n$ é completo e

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_n - y_n|^2},$$

é uma métrica como citado no exemplo (1.3). □

Teorema 1.2. *Sejam X um espaço de Banach e Y um subespaço vetorial de X. Então Y é um espaço de Banach, com a norma induzida de X, se, e somente se, Y é fechado em X.*

Demonstração. Suponha que Y é um espaço de Banach. Mostremos que Y é fechado em X. De fato, pela parte a) da Proposição 1.1, para todo $x \in \overline{Y}$ existe uma sequência (x_n) em Y que converge para x. Como (x_n) é convergente então é de Cauchy e como Y é completo, existe um $y \in Y$ tal que $\lim x_n = y$. Pela unicidade do limite, tem-se $x = y$. Logo $\overline{Y} \subset Y$ e por definição $Y \subset \overline{Y}$. Portanto, $\overline{Y} = Y$ e Y é fechado em X.

Reciprocamente, suponha que Y é fechado em X. Mostremos que Y é de Banach. Dada uma sequência de Cauchy (x_n) em Y, existe um $\lim x_n = a \in X$, pois X é completo. Como Y é fechado em X, então $a \in Y$. Logo Y é completo, ou seja, é de Banach. □

1.4 Operador linear

Definição 1.13. *(**Operador linear**) Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ é um operador linear, onde $D(T)$ é um subespaço vetorial, quando temos, para todo $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:*

$$T(x + y) = Tx + Ty \tag{1.5}$$

$$e \quad T(\alpha x) = \alpha T x. \tag{1.6}$$

As igualdades (1.5) e (1.6) equivalem a:

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty.$$

Exemplo 1.7. *A aplicação $Ix : X \longrightarrow X$ definida por $Ix = x$, para todo $x \in X$, é um operador linear chamado operador identidade.*

Demonstração. De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$I(x + y) = x + y = Ix + Iy$$

e

$$I(\alpha x) = \alpha x = \alpha Ix.$$

□

Exemplo 1.8. *Seja X o espaço vetorial de todos os polinômios em $[a, b]$. Podemos definir um operador linear T em X por:*

$$Tx(t) = x'(t),$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Com efeito, usando as propriedades de diferenciação, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos:

$$T(x + y)(t) = (x + y)'(t) = x'(t) + y'(t) = Tx(t) + Ty(t)$$

e

$$T(\alpha x)(t) = (\alpha x)'(t) = \alpha x'(t) = \alpha Tx(t).$$

□

Definição 1.14. *O espaço nulo ou núcleo de um operador linear T é o conjunto:*

$$ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}.$$

Proposição 1.3. *Seja $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*
a) A imagem $R(T)$ é um subespaço vetorial de Y.
b) O núcleo $ker(T)$ é um subespaço vetorial de $D(T)$.

Demonstração. *a*) Sejam $y_1, y_2 \in R(T)$, devemos mostrar que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ para quaisquer escalares α *e* β. De fato, como $y_1, y_2 \in R(T)$ existem $x_1, x_2 \in D(T)$ tais que,

$$Tx_1 = y_1 \text{ e } Tx_2 = y_2.$$

Como $D(T)$ é um subespaço vetorial de X por definição de operador linear, então $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sendo T linear,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T).$$

E assim, $R(T)$ é um subespaço vetorial de Y.

b) Sejam $x_1, x_2 \in N(T)$, então $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Como T é linear, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0.$$

Portanto $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$ e $N(T)$ é um subespaço vetorial de $D(T)$. □

Proposição 1.4. *Seja $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então:*
a) A inversa $T^{-1} : R(T) \longrightarrow D(T)$ existe, se, e somente se, $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$.
b) Se T^{-1} existe, ele é um operador linear.

Demonstração. a) Primeiro devemos relembrar que uma aplicação $T : D(T) \longrightarrow Y$ é dita injetora quando para qualquer $x_1, x_2 \in D(T)$ temos $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Suponha que T^{-1} existe então T é injetora. Sabendo que $T0 = 0$ obtemos

$$Tx = T0 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Agora suponha que $Tx = 0$ implica $x = 0$. Sejam $x_1, x_2 \in D(T)$, tais que $Tx_1 = Tx_2$. Como T é linear,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0.$$

Logo, por hipótese, $x_1 - x_2 = 0$ e isso implica que $x_1 = x_2$. Como $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 = x_2$, então T é injetora e T^{-1} existe.

b) Vamos assumir que T^{-1} existe e mostramos que T^{-1} é linear. O domínio de T^{-1} é $R(T)$ e é um espaço vetorial (ver Proposição 1.3). Consideremos $x_1, x_2 \in D(T)$ e as imagens

$$y_1 = Tx_1 \text{ e } y_2 = Tx_2.$$

Então,

$$x_1 = T^{-1}y_1 \text{ e } x_2 = T^{-1}y_2.$$

Como T é linear, então para quaisquer escalares α, β temos

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Aplicando T^{-1}:

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2.$$

Portanto, isso prova que T^{-1} é linear. □

Definição 1.15. *(**Operador linear limitado**) O operador T é limitado quando existe um numero real $c > 0$ tal que para cada $x \in D(T)$ vale a seguinte desigualdade:*

$$\| Tx \| \leq c \| x \| .$$

Podemos definir uma norma de um operador linear limitado T por:

$$\| T \| = \sup_{x \in D(f); x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} \quad \Rightarrow \quad \| Tx \| \leq \| T \| \| x \| .$$

Exemplo 1.9. *O operador identidade $I : X \longrightarrow X$ em um espaço normado $X \neq \{0\}$ é limitado e tem norma $\| I \| = 1$.*

Demonstração. Temos que $Ix = x$, $\forall x \in X$ e,

$$\frac{\| Ix \|}{\| x \|} = \frac{\| x \|}{\| x \|} = 1 \leq c,$$

c fixado, ou seja, I é limitado. E a norma é,

$$\| I \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Ix \| = \sup_{\| x \| = 1} \| x \| = 1.$$

□

Exemplo 1.10. *Seja X o espaço normado de todos os polinômios em $J = [0, 1]$ cuja norma é $\| x \| = max|x(t)|, t \in J$. O operador diferenciação T definido em X por*

$$Tx(t) = x'(t)$$

é linear mas não é limitado.

Demonstração. De fato, no exemplo (1.8) mostramos que T é linear. Agora basta mostrar que T não é limitado.
Seja $x_n(t) = t^n$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\| x_n \|= \max_{t\in J} |x_n(t)| = \max_{t\in J} |t^n| = 1$$

e

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1}.$$

Daí,

$$\| Tx_n \|= \sup_{t\in J} \| nt^{n-1} \|= n \sup_{t\in J} \| t^{n-1} \|= n.1 = n.$$

Portanto, $\dfrac{\| Tx_n \|}{x_n} = \dfrac{n}{1} = n$, onde $n \in \mathbb{N}$.
Isso mostra que não existe um número c fixado tal que

$$\frac{\| Tx_n \|}{x_n} \leq c.$$

Logo T não é limitado. □

Proposição 1.5. *Seja T um operador linear limitado. Então:*
a) Uma fórmula equivalente para a norma de T é:

$$\| T \|= \sup_{x\in D(f);||x||=1} \| Tx \| .$$

b) A norma definida por

$$\| T \|= \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}$$

satisfaz a Definição 1.10.

Demonstração. $a)$ Seja $\| x \|= a$ e $y = \dfrac{x}{a}$, onde $x \neq 0$. Então

$$\| y \|= \left\|\frac{x}{a}\right\| = \frac{\| x \|}{a} = \frac{\| x \|}{\| x \|} = 1.$$

Como T é linear e limitado temos:

$$\begin{aligned}\| T \|= \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \frac{1}{a} \|Tx\| = \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \left\| \left(\frac{1}{a}Tx\right) \right\| &= \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \left\| T\left(\frac{1}{a}x\right) \right\| \\ &= \sup_{x\in D(f);x\neq 0} \| Ty \| .\end{aligned}$$

Logo,

$$\| T \|= \sup_{y\in D(f);||y||=1} \| Ty \| .$$

Trocando x por y na direita, temos:

$$\| T \| = \sup_{x \in D(f); ||x||=1} \| Tx \| .$$

$b)$ (i) É imediato. Se $T = 0$ então $\| 0 \| = 0$.

$ii)$ Por outro lado, $\| T \| = 0$, temos $Tx = 0$, para todo $x \in D(T)$, então $T = 0$.

(iii) Além disso,

$$\| T \| = \sup_{\|x\|=1} \| \alpha Tx \| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \| Tx \| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| = |\alpha| \| T \|,$$

para todo $x \in D(T)$.

$iv)$ Por último,

$$\| T_1 + T_2 \| = \sup_{\|x\|=1} \| (T_1+T_2)x \| = \sup_{\|x\|=1} \| T_1x + T_2x \| \leq \sup_{\|x\|=1} \| T_1x \| + \sup_{\|x\|=1} \| T_2x \| = \| T_1 \| + \| T_2 \|,$$

onde $x \in D(T)$. □

Proposição 1.6. *Seja T um operador linear limitado. Então:*

a) Para $x_n, x \in D(T)$ temos que $x_n \longrightarrow x$ implica $Tx_n \longrightarrow Tx$;

b) O espaço nulo N(T) é fechado.

Demonstração. $a)$ Por hipótese T é linear e limitado. Suponhamos que $x_n \longrightarrow x$ e mostremos que $Tx_n \longrightarrow Tx$. De fato, pois,

$$\| Tx_n - Tx \| = \| T(x_n - x) \| \leq \| T \| \| x_n - x \| \longrightarrow 0$$

Logo, $Tx_n \longrightarrow Tx$.

$b)$ Da Proposição 1.1 temos que, para cada $x \in \overline{N(T)}$ existe uma sequência (x_n) em $N(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Daí, por (a):

$$x_n \longrightarrow x \Longrightarrow Tx_n \longrightarrow Tx.$$

Como (x_n) é uma sequência em $N(T)$, temos $Tx_n = 0, \forall n$ e pela unicidade do limite $Tx = 0$ e, assim, $x \in N(T)$. Logo N(T) é fechado. □

Definição 1.16. *(**Operador contínuo**) Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador qualquer, onde $D(T) \subset C$ e X e Y são espaços normados. O operador T é contínuo no ponto $x_0 \in D(T)$ se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que*

$$\| Tx - Tx_0 \| < \epsilon$$

para todo $x \in D(T)$ que satisfaz

$$\| x - x_0 \| < \delta.$$

T é contínuo se T é contínuo em todo $x \in D(T)$.

Teorema 1.3. *Seja $T : D(T) \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$ e X, Y são espaços normados. Então:*

a) T é contínuo se, e somente, se T é limitado;

b) Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.

Demonstração. a) Vamos assumir que T é limitado e considerar qualquer $x_0 \in D(T)$. Seja $\epsilon > 0$, então, como T é linear e limitado, para todo $x \in D(T)$ tal que

$$\| x - x_0 \| < \delta,$$

onde $\delta = \dfrac{\epsilon}{\| T \|}$. Obtemos:

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| \leq \| T \| \| x - x_0 \| < \| T \| \delta = \epsilon.$$

Portanto, temos que para todo $x \in D(T)$

$$\| x - x_0 \| < \delta \quad \Rightarrow \quad \| Tx - Tx_0 \| < \epsilon.$$

Logo, T é contínuo.

Por outro lado, vamos assumir que T é contínuo e tomemos qualquer $x_0 \in D(T)$. Então, por hipótese de continuidade, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\| x - x_0 \| \leq \delta \Rightarrow \| Tx - Tx_0 \| \leq \epsilon$$

para todo $x \in D(T)$. Agora, tomemos um $y \neq 0$ em $D(T)$ e seja $x = x_0 + \dfrac{\delta}{\| y \|} y$. Então

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\| y \|} y \quad \Rightarrow \quad \| x - x_0 \| = \delta.$$

Como T é linear,

$$\| Tx - Tx_0 \| = \| T(x - x_0) \| = \left\| T \left(\frac{\delta}{\| y \|} y \right) \right\| = \frac{\delta}{\| y \|} \| Ty \| \leq \epsilon.$$

Logo, $\| Ty \| \leq \dfrac{\epsilon}{\delta} \| y \| \quad \Rightarrow \quad \| Ty \| \leq c \| y \|$, onde $c = \dfrac{\epsilon}{\delta}$ e assim mostramos que T é limitado.

b) A continuidade de T em um ponto indica que T é limitado pela segunda parte do item acima provado. Sendo T limitado temos que T é contínuo pela primeira parte do item a). ◻

Definição 1.17. *Definimos o conjunto $B(X,Y)$ como sendo o conjunto de todos os operadores lineares limitados de X em Y, ou seja,*

$$B(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y; T \quad \text{é um operador linear limitado}\}.$$

Agora veremos a definição de funcional linear, que é um caso particular de operadores lineares. Logo, todos os conceitos e resultados para operadores também servem para funcionais lineares.

1.5 Funcional linear

Definição 1.18. *(**Funcional linear**) Um funcional linear f é um operador linear com domínio em um espaço vetorial X e a imagem em um corpo escalar $\mathbb{K}$ de X, isto é:*

$$f : D(f) \longrightarrow \subset X\mathbb{K}, \text{ onde } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Exemplo 1.11. *A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + y$ é um funcional linear.*

Demonstração. De fato, como $D(f) = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial, basta mostra que f é linear.
Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = (x_1, y_1), u = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda v + u) &= 2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda(2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(v) + f(u). \end{aligned}$$

Portanto, f é um funcional linear. □

Exemplo 1.12. *A norma $\| \, . \, \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional em X, que não é linear.*

Definição 1.19. *(**Funcional linear limitado**) Um funcional linear é limitado se existe um número real $c > 0$ tal que para todo $x \in D(f)$ temos:*

$$|f(x)| \leq c\|x\|.$$

Além disso a norma de f é definida por

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f); x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{1.7}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f); \|x\|=1} |f(x)|. \tag{1.8}$$

Observação 1.5. *Se f é um funcional linear limitado então segue de (1.7) que*

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|.$$

Exemplo 1.13. *O produto escalar com um fator fixado define um funcional linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por meio de*

$$f(x) = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3,$$

onde $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ e $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ fixado.

Demonstração. Vamos mostrar que f é linear e é limitado. De fato, considere $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

$i)$ f é linear:

$$\begin{aligned}
f(\beta x + y) = (\beta x + y) \cdot a &= (\beta\xi_1 + \eta_1, \beta\xi_2 + \eta_2, \beta\xi_3 + \eta_3) \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
&= (\beta\xi_1 + \eta_1)\alpha_1 + (\beta\xi_2 + \eta_2)\alpha_2 + (\beta\xi_3 + \eta_3)\alpha_3 \\
&= (\beta\xi_1)\alpha_1 + (\eta_1)\alpha_1 + (\beta\xi_2)\alpha_2 + (\eta_2)\alpha_2 + (\beta\xi_3)\alpha_3 + (\eta_3)\alpha_3 \\
&= \beta(\xi_1\alpha_1) + \beta(\xi_2\alpha_2) + \beta(\xi_3\alpha_3) + (\eta_1)\alpha_1 + (\eta_2)\alpha_2 + (\eta_3)\alpha_3 \\
&= \beta(\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3) + (\eta_1\alpha_1 + \eta_2\alpha_2 + \eta_3\alpha_3) \\
&= \beta(x \cdot a) + (y \cdot a) = \beta f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

$ii)$ f é limitado:

$$\begin{aligned}
|f(x)| = |x \cdot a| = |\xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3| &\leq |\xi_1\alpha_1| + |\xi_2\alpha_2| + |\xi_3\alpha_3| \\
&= |\xi_1||\alpha_1| + |\xi_2||\alpha_2| + |\xi_3||\alpha_3| \\
&\leq ||x||||a||.
\end{aligned}$$

Aplicando o supremo para todo $||x|| = 1$ temos,

$$\sup_{x \in D(f); \|x\|=1} |f(x)| \leq ||x||||a|| \quad \Rightarrow \quad ||f|| \leq ||a||.$$

Além disso, tomando $x = a$ e usando $|f(x)| \leq \| f \| \| x \|$ obtemos,

$$\| f \| \geq \frac{|f(a)|}{\| a \|} = \frac{|a \cdot a|}{\| a \|} = \frac{\| a \|^2}{\| a \|} = \| a \| \quad \Rightarrow \quad \| f \| \geq \| a \| .$$

Mostrando que $\| f \| = \| a \|$. □

Definição 1.20. ***(Espaço dual)*** *O conjunto de todos os funcionais lineares definidos em um espaço vetorial X é denotado por X' e se chama espaço dual de X. Usando a notação de conjuntos:*

$$X' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K};\ f \text{ é um funcional linear}\}, \text{ onde } \mathbb{K} \text{ é um corpo escalar.}$$

Observação 1.6. *Podemos considerar o dual de X', chamado de bidual de X e denotado por X''.*

1.6 Espaços com produto interno

Definição 1.21. *(**Produto interno**) Seja X um espaço vetorial. Um produto interno em X é uma aplicação de $X \times X$ sobre o corpo $\mathbb{K}$ de X, de modo que, a cada par de vetores (x, y) existe um escalar associado denotado por $\langle x, y\rangle$ e é chamado produto interno de x e y, tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ e um escalar α temos:*
(P_1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;
(P_2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;
(P_3) $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$;
(P_4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;
(P_5) $\langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.22. *(**Espaço com produto interno**) Um espaço com produto interno é um espaço vetorial X munido de um produto interno definido em X.*

Observação 1.7. *Um produto interno em X define uma norma em X dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad \forall x \in X \qquad (\geq 0).$$

Observação 1.8. *Seja X um espaço com produto interno. Se $\langle x, y\rangle = 0$, para todo $x \in X$, então $y = 0$. De fato, se $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in X$ e, em particular, para $x = y$, tem-se:*

$$\langle y, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Proposição 1.7. *Seja X um espaço com produto interno. Então para quaisquer $x, y \in X$ valem:*
a) Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq\| x \|\| y \|$.
b) Desigualdade triangular: $\| x + y \|\leq\| x \| + \| y \|$.

Demonstração. a) Se $\langle x, y\rangle = 0$, podemos ver que a desigualdade vale, pela observação

1.8. Se $\langle x, y\rangle \neq 0$ podemos supor que $y \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \| x - \alpha y \|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \\ &= \| x \|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha} \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left(\langle y, x\rangle + \overline{\alpha} \| y \|^2\right), \forall \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Tomemos $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\| y \|^2}$, segue então que

$$0 \leq \| x \|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\| y \|^2}\langle x, y\rangle - \alpha\left(\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\| y \|^2} \| y \|^2\right) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \| x \|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\| y \|^2}\langle x, y\rangle.$$

Como $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,

$$0 \leq \| x \|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\| y \|^2} \quad \Rightarrow \quad |\langle x, y\rangle|^2 \leq \| x \|^2 \| y \|^2 .$$

Consequentemente,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \| y \| .$$

b) Usaremos o fato de que $|\langle y, x\rangle| = |\langle x, y\rangle|$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz da letra (a)

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \| x \|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + |\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle| + \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \| y \|^2 \\ &\leq \| x \|^2 + 2 \| x \| \| y \| + \| y \|^2 \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2, \\ &\Rightarrow \| x + y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2. \end{aligned}$$

Assim, $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$. □

Proposição 1.8. *Se em um espaço com produto interno*

$$x_n \longrightarrow x \quad e \quad y_n \longrightarrow y,$$

então,

$$\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle.$$

O que equivale a dizer que o produto interno é contínuo.

Demonstração. Sejam x_n, y_n em X tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Observe que

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \| .$$

Como $\| x_n \|$ e $\| y_n \|$ são limitadas (pois convergem), $\| x_n - x \| \longrightarrow 0$ e $\| y_n - y \| \longrightarrow 0$, temos que quando $n \longrightarrow \infty$, tem-se

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$\langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle.$$

□

1.7 Espaços de Hilbert

Definição 1.23. *(**Espaço de Hilbert**) Um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno é chamado de Espaço de Hilbert.*

Observação 1.9. *Em particular, espaços com produto interno são espaços normados e um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.*

Definição 1.24. *(**Vetores ortogonais**) Um vetor x de um espaço com produto interno X é dito ser ortogonal a um vetor $y \in X$ se*

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Dizemos que x e y são ortogonais e escrevemos $x \perp y$.

Similarmente, para os subconjuntos $A, B \subset X$ dizemos que $x \perp A$ se $x \perp a$ para todo $a \in A$, e $A \perp B$ se $a \perp b$ para todo $a \in A$ e para $b \in B$.

Definição 1.25. *(**Complemento ortogonal**) Seja X um espaço com produto interno e E um subconjunto de X. Denominamos o subconjunto*

$$E^{\perp} = \{y \in X / \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in E\}$$

de complemento ortogonal de E.

Definição 1.26. *(**Conjunto convexo**) O segmento ligando dois elementos x e y de um espaço vetorial X é definido como sendo o conjunto de todos os $z \in X$ da forma*

$$z = \alpha x + (1 - \alpha) y,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Um subconjunto M de X é dito ser convexo se para todo $x, y \in M$ o segmento ligando x e y está contido em M.

Proposição 1.9. *Seja X um espaço com produto interno e $M \neq \varnothing$ um subconjunto convexo completo, onde a métrica é induzida pela produto interno. Então, para cada $x \in X$ existe um único $y \in M$ tal que*

$$\delta = \inf_{\tilde{y} \in M} \| x - \tilde{y} \| = \| x - y \| .$$

Para a demonstração desta Proposição ver [2].

Lema 1.1. *Na Proposição anterior, seja M o subespaço completo Y e $x \in X$ fixo. Então $z = x - y$ é ortogonal a Y.*

Para a demonstração deste Lema ver [2].

Definição 1.27. *(**Soma direta**) Um espaço vetorial X é dito ser soma direta de dois de seus subespaços X_1 e X_2, denotado por:*

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

se todo $x \in X$ possui uma representação única $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$.

Proposição 1.10. *Seja Y um espaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Então:*

$$H = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Demonstração. Por hipótese, H é completo e Y é fechado, então Y é completo pelo Teorema 1.2. Visto que Y é convexo (ver Proposição 1.9 e o Lema 1.1), temos que para cada $x \in H$ existe um $y \in Y$ tal que

$$x = y + z, \qquad z \in Y^{\perp}.$$

Para provar a unicidade assumimos que

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

onde $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Y^{\perp}$. Então,

$$y - y_1 = z_1 - z.$$

Sabemos que $y - y_1 \in Y$ e $z_1 - z \in Y^{\perp}$ e como o único elemento que pertence a Y e $Y^{\perp}$ é o vetor nulo, então

$$y - y_1 \in Y \cap Y^{\perp} = \{0\},$$

donde,

$$y - y_1 = 0 \Rightarrow y = y_1.$$

Por conseguinte,

$$0 = y - y_1 = z_1 - z \quad \Rightarrow \quad z_1 - z = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z.$$

□

Veremos um resultado útil que relaciona o produto interno com a norma induzida por ele, onde mostra o fato de que a norma definida neste espaço satisfaz a lei do paralelogramo. Se a norma não satisfizer esta propriedade então pode-se dizer que ela não provem de um produto interno.

Proposição 1.11. ***(Lei do paralelogramo)*** *Seja X um espaço vetorial com produto interno. Então para todo $x, y \in X$ a norma induzida pelo produto interno satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned}
\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\
&= 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 .
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.14. *O espaço $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}; f$ é contínua$\}$ não é um espaço com produto interno com a norma definida por*

$$\| x \| = \max_{t \in J} |x(t)|, \qquad J = [a,b],$$

portanto não é um espaço de Hilbert com essa norma.

Demonstração. Mostremos que a norma definida por

$$\| x \| = \max_{t \in J} |x(t)|, \qquad J = [a,b]$$

não provém de um produto interno, visto que esta norma não satisfaz a lei do paralelogramo. De fato, tomemos $x(t) = 1$ e $y(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$, temos que

$$\| x \| = \max_{t \in J} |1| = 1, \qquad \| y \| = \max_{t \in J} \left| \frac{t-a}{b-a} \right| = 1$$

e,

$$x(t) + y(t) = 1 + \frac{t-a}{b-a}, \qquad x(t) - y(t) = 1 - \frac{t-a}{b-a}.$$

Como $\| x+y \| = 2$, $\| x-y \| = 1$ e

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 5 \quad \text{mas} \quad 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) = 4$$

, ou seja a norma não satisfaz a lei do paralelogramo e assim completamos a demonstração.

□

Capítulo 2

Teorema da Representação de Riesz

Em matemática, existem diversos teoremas que recebem o nome de Teorema da Representação de Riesz. O mais conhecido destes teoremas se refere à representação de funcionais lineares contínuos em espaços de Hilbert.

É de suma importância conhecer a forma geral de um funcional linear limitado em vários espaços, em particular iremos apresentar a representação de funcionais em Espaços de Hilbert.

Iniciaremos esse capítulo enunciando e demonstrando o Teorema principal deste trabalho. Ele garante que: "cada elemento de um espaço de Hilbert pode ser identificado com um único funcional linear contínuo e este pode ser representado por um produto interno". Em seguida mostraremos o Teorema de Lax-Milgram que generaliza o Teorema da Representação de Riesz: "Em um espaço de Hilbert existe um único elemento associado a cada funcional do dual deste espaço, e este funcional possui uma representação mais geral, que é a forma sesquilinear limitada e coerciva dada."

2.1 Demonstração do Teorema

Teorema 2.1. ***(Teorema de Riesz - Representação de funcionais em Espaços de Hilbert)*** *Cada funcional linear limitado f em um espaço de Hilbert H pode ser representado em termos de produto interno, a saber,* $f(x) = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in H$, *onde* $z \in H$ *depende de f, é determinado unicamente por f e tem norma* $\| z \| = \| f \|$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração desse teorema em três partes:

$a)$ f tem representação $f(x) = \langle x, z \rangle$, para algum $z \in H$;

b) z é único;

c) A igualdade $\| z \| = \| f \|$ verifica-se.

Justificativa de *a*): Se $f \equiv 0$, então $f(x) = \langle x, z \rangle$ e $\| z \| = \| f \|$ verifica-se, basta tomar $z = 0$.

Suponhamos então que $f \neq 0$. Observe que:

1) Devemos encontrar um vetor $z \in H$ tal que

$$z \neq 0,$$

pois se $z = 0$ teríamos $f(x) = \langle x, 0 \rangle = 0$ o que implicaria em $f \equiv 0$.

2) Devemos ter

$$\langle x, z \rangle = 0$$

para todo x para o qual $f(x) = 0$, isto é, todos os x no espaço nulo $N(f)$ de f. Portanto, $z \perp N(f)$.

Vamos consideremos então $N(f)$ e seu complemento ortogonal. Sabemos que $N(f)$ é um espaço vetorial (ver Proposição 1.3) e é fechado (ver Proposição 1.1). Além disso:

$$f \neq 0 \Rightarrow N(f) \neq H \Longrightarrow N(f)^{\perp} \neq \{0\}.$$

De fato, se $f \neq 0$ então existe $x \in H$ que não está em $N(f)$, logo $N(f) \neq H$. Pela Proposição 1.10,

$$H = N(f) \oplus N(f)^{\perp},$$

e, assim, se $N(f)^{\perp} = \{0\}$ teríamos $H = N(f)$ o que não é verdade. Portanto, $N(f)^{\perp} \neq \{0\}$ e contém um $z_0 \neq 0$. Agora, fixando $x \in H$ arbitrário, considere $v \in H$ da seguinte maneira:

$$v = f(x)z_0 - f(z_0)x.$$

Aplicando f em v e usando a linearidade, obtemos:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= f(f(x)z_0) + f(-f(z_0)x) \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $v \in N(f)$.

Como $z_0 \perp N(f)$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0 \rangle + \langle -f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle. \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação, isolando $f(x)$, obtemos:

$$f(x) = \frac{f(z_0)\langle x, z_0 \rangle}{\langle z_0, z_0 \rangle} \qquad (\langle z_0, z_0 \rangle = \| {z_0}^2 \| \neq 0).$$

E daí podemos ter:

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\langle z_0, z_0 \rangle}\langle x, z_0 \rangle = \langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0 \rangle.$$

Tomando, $z = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\langle z_0, z_0 \rangle} z_0$ segue-se que:

$$f(x) = \langle x, z \rangle.$$

Visto que $x \in H$ foi tomado arbitrariamente então podemos afirmar que f tem representação:

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \qquad \forall x \in H$$

como deveríamos provar.

b) Suponhamos que para todo $x \in H$ tenhamos:

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Então $\langle x, z_1 \rangle - \langle x, z_2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0$ para todo x. Em particular para $x = z_1 - z_2$. Daí:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, z_1 - z_2 \rangle \\ &= \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \| z_1 - z_2 \|^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Assim está provado que z em $f(x) = \langle x, z \rangle$ é único.

c) Por último devemos mostrar que a igualdade $\| z \| = \| f \|$ verifica-se.

Se $f \equiv 0$, então $z = 0$ e $\| z \| = \| f \|$ se verifica.

Seja $f \neq 0$, então $z \neq 0$, pois se $z = 0$ teríamos $f \equiv 0$. Considerando:

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

temos:

$$\begin{aligned} \| z \|^2 &= \langle z, z \rangle = f(z) \\ &\leq |f(z)| \\ &\leq \| f \| \| z \|, \end{aligned}$$

pois f é linear e limitada. Dividindo por $\| z \| \neq 0$ a última desigualdade obtemos,

$$\frac{\| z \|^2}{\| z \|} \leq \frac{\| f \| \| z \|}{\| z \|} \Rightarrow \| z \| \leq \| f \| .$$

Mostremos agora que: $\| f \| \leq \| z \|$ e, assim, $\| f \| = \| z \|$. Para isso, usando: $f(x) = \langle x, z \rangle$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz vamos ter que:

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \| x \| \| z \| .$$

Aplicando o supremo com $\| x \| = 1$:

$$\| f \| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \| x \| \| z \| = \| z \| \quad \Rightarrow \quad \| f \| \leq \| z \| .$$

Logo $\| z \| = \| f \|$. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Nesse capítulo iremos apresentar algumas aplicações do Teorema da Representação de Riesz.

3.1 Generalizando o Teorema de Riesz (Teorema de Lax-Milgram)

Definição 3.1. *(**Forma sesquilinear**) Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Então uma forma sesquilinear (ou funcional sesquilinear) h em $X \times Y$ é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} h : X \times Y & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) & \longrightarrow & h(x, y) \end{array}$$

tal que para cada $x, x_1, x_2 \in X$ e $y, y_1, y_2 \in Y$ e ainda para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:
i) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$;
ii) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$;
iii) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$;
iv) $h(x, \beta y) = \bar{\beta} h(x, y)$.

Definição 3.2. *(**Forma sesquilinear limitada**) Seja $b : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear sobre os espaços normados X e Y. Se existir um número real c, tal que para todo $x \in X$ e $y \in Y$ tem-se*

$$|b(x, y)| \leq c \parallel x \parallel \parallel y \parallel,$$

dizemos que b é limitada e o número

$$\| b \| = \sup_{x \in X - \{0\}; y \in Y - \{0\}} \frac{|b(x,y)|}{\| x \| \| y \|} = \sup_{\|x\|=1; \|y\|=1} |b(x,y)|$$

é chamado a norma de b.

Definição 3.3. ***(Forma sesquilinear coerciva)*** *Seja X um espaço normado. Uma forma sesquilinear $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é coerciva, quando existir uma constante $c > 0$ tal que*

$$|b(x,x)| \geq c \| x \|^2, \forall x \in X.$$

Proposição 3.1. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Se $b : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T \in B(H_1, H_2)$ satisfazendo*

$$b(x,y) = \langle Tx, y \rangle, \ \forall x \in H_1, \ y \in H_2.$$

Demonstração. Considere o funcional $L_x : H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, dado por $L_x(y) = b(x,y)$, para $x \in H_1$. Por definicão, L_x é linear e pela norma da forma sesquilinear limitada temos:

$$\frac{|b(x,y)|}{\| x \| \| y \|} \leq \| b \|, \forall x \in H_1 - \{0\}, \ y \in H_2 - \{0\},$$

assim,

$$|L_x(y)| = |b(x,y)| \leq \| b \| \| x \| \| y \|,$$

logo, L_x é contínuo, e portanto $L_x \in H_2'$.

O Teorema da Representação de Riesz garante que existe um único $z \in H_2$, tal que

$$L_x(y) = \langle z, y \rangle, \forall y \in H_2.$$

Então, definindo $T : H_1 \longrightarrow H_2$, por $Tx = z$, temos

$$b(x,y) = L_x(y) = \langle z, y \rangle = \langle Tx, y \rangle, \forall x \in H_1, y \in H_2 - \{0\}.$$

Vamos mostrar que $T \in B(H_1, H_2)$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, w \in H_1$. Como b é linear e $\langle Tx, y \rangle = b(x,y)$, temos para todo $y \in H_2$:

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha x + \beta w), y \rangle &= b(\alpha x + \beta w, y) \\
&= \alpha b(x,y) + \beta b(w,y) \\
&= \alpha \langle Tx, y \rangle + \beta \langle Tw, y \rangle \\
&= \langle \alpha Tx, y \rangle + \langle \beta Tw, y \rangle \\
&= \langle \alpha Tx + \beta Tw, y \rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle T(\alpha x+\beta w)-\alpha Tx-\beta Tw, y\rangle = 0.$$

para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $x,w\in H_1$ e $y\in H_2$. Então pela observação 1.8 temos que:

$$T(\alpha x+\beta w)-\alpha Tx-\beta Tw=0 \Rightarrow T(\alpha x+\beta w)=\alpha Tx+\beta Tw$$

e assim, T é linear.

Agora, veja que $T=0$ se, e somente se, $b=0$. Então suponha $b\neq 0$, daí,

$$\begin{aligned}
\| T \| = \sup_{x\neq 0}\frac{\| Tx \|}{\| x \|} &= \sup_{x\neq 0; Tx\neq 0}\frac{\| Tx \|^2}{\| x \|\| Tx \|}\\
&= \sup_{x\neq 0; Tx\neq 0}\frac{\langle Tx, Tx\rangle}{\| x \|\| Tx \|}\\
&= \sup_{x\neq 0; Tx\neq 0}\frac{b(x,Tx)}{\| x \|\| Tx \|}\\
&\leq \sup_{x\neq 0; Tx\neq 0}\frac{\| b \|\| x \|\| Tx \|}{\| x \|\| Tx \|} = \| b \| .
\end{aligned}$$

Agora, suponha que exista outro operador $S\in B(H_1,H_2)$ que satisfaz $b(x,y)=\langle S(x),y\rangle, \forall x\in H_1, y\in H_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle Sx,y\rangle = \langle Tx,y\rangle &\Rightarrow \langle Sx,y\rangle - \langle Tx,y\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle Sx-Tx,y\rangle = 0, \forall x\in H_1, y\in H_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$Sx-Tx=0\Rightarrow Sx=Tx, \quad \forall x.$$

□

Teorema 3.1. ***(Lax-Milgram)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Se $b: H\times H\longrightarrow\mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear, limitada e coerciva, então para todo $f\in H^*$ existe um único $x_f\in H$ com*

$$f(y)=b(x_f,y), \forall y\in H.$$

Demonstração. Seja b uma forma sesquilinear limitada, pela proposição anterior existe um único operador $T\in B(H)$ que satisfaz:

$$b(x,y)=\langle Tx,y\rangle, \forall x,y\in H.$$

Temos que T admite uma inversa T^{-1}, que também é um operador linear contínuo. De fato, como b é coerciva, temos que:

$$c \| x \|^2 \leq |\langle Tx,y\rangle| \leq \| Tx \|\| x \| .$$

e assim, temos a desigualdade:

$$c \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel, \forall x \in H.$$

Se $Tx = 0$, então $0 = \parallel Tx \parallel \geq c \parallel x \parallel$, o que implica que $x = 0$ e segue que T é invertível e sua inversa T^{-1} é um operador linear (ver Teorema 1.4).

Pela desigualdade $c \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel$, note que:

$$\begin{aligned} x = T^{-1}z \quad &\Longrightarrow \quad c \parallel T^{-1}z \parallel \leq \parallel T(T^{-1}z) \parallel = \parallel z \parallel \\ &\Longrightarrow \quad \parallel T^{-1}z \parallel \leq \frac{1}{c} \parallel z \parallel, \end{aligned}$$

logo T^{-1} é limitado.

Agora mostremos que T é um operador sobrejetor, então devemos mostrar que a imagem $R(T) = H$. Seja $z \in \overline{R(T)}$, logo existe uma sequência $Tx_n \subset R(T)$, tal que

$$\lim Tx_n = z.$$

Como Tx_n é convergente, ela é de Cauchy; logo, dado $\epsilon > 0$, existe n_0, tal que

$$\parallel Tx_m - Tx_n \parallel < c\epsilon, \forall m, n > n_0.$$

Novamente, por $c \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel, \forall x \in H$, temos:

$$\parallel x_m - x_n \parallel \leq \frac{1}{c} \parallel T(x_m - x_n) \parallel = \frac{1}{c} \parallel Tx_m - Tx_n \parallel < \frac{1}{c} c\epsilon = \epsilon, \qquad \forall m, n > n_0.$$

Então, (x_n) é de Cauchy e por isso converge, digamos, $\lim x_n = x$. Temos também que $\lim Tx_n = Tx$ pois T é contínuo e como $\lim Tx_n = z$ pela unicidade do limite $Tx = z$, ou seja, $z \in R(T)$ e portanto $R(T)$ é fechada.

Sendo R(T) um subespaço fechado de um espaço H de Hilbert, podemos escrever

$$H = R(T) \oplus R(T)^{\perp}.$$

Agora observe que se $y \in R(T)^{\perp}$ então,

$$0 = |\langle Ty, y \rangle| = |b(y, y)| \geq c \parallel y \parallel^2,$$

logo $y = 0$ e isso implica que $R(T)^{\perp} = 0$. Daí,

$$H = R(T) \;\text{ e }\; D(T^{-1}) = H.$$

Temos agora pelo Teorema da Representação de Riesz, que para todo $f \in H^*$, existe um único $x \in H$, tal que

$$f(y) = \langle x, y \rangle, \forall y \in H,$$

mas, por $b(x, y) = \langle Tx, y \rangle$, temos:

$$b(T^{-1}x, y) = \langle T(T^{-1}x, y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Logo,

$$f(y) = b(T^{-1}x, y), \forall y \in H.$$

Portanto, para cada funcional linear contínuo $f : H \longrightarrow \mathbb{K}$, existe um único $x_f \in H$, satisfazendo: $f(y) = b(x_f, y), \forall y \in H$, onde $x_f = T^{-1}x$. $\square$

Definição 3.4. *(**Aplicação canônica**) Seja X um espaço de Hilbert. Para cada $x \in X$ existe um correspondente $g_x \in X''$, onde g_x é um funcional linear limitado e único, dado por $g_x(f) = f(x)$ e $f \in X'$. Isso define uma aplicação*

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longmapsto g_x. \end{aligned}$$

C é chamada aplicação canônica de X em X''.

Observação 3.1. *Podemos escrever $Cx(f) = g_x(f) = f(x)$ e mostrar que C é linear. De fato, como $f \in X'$,*

$$\begin{aligned} C(\alpha x + \beta y)(f) = g_{\alpha x + \beta y}(f) &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) \\ &= \alpha (Cx)(f) + \beta C_y(f). \end{aligned}$$

Definição 3.5. *(**Reflexividade**) Um espaço normado X é dito reflexivo se*

$$R(C) = X''$$

onde C é a aplicação canônica e $R(C)$ sua imagem.

Proposição 3.2. *O dual de um espaço de Hilbert é também um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja H um espaço de Hilbert. Como H' é completo, basta mostrar que a norma é induzida por um produto interno. Seja $f_1, f_2 \in H'$, pelo Teorema da Representação de Riesz, existem únicos $y_1, y_2 \in H$ tais que

$$f_1(x) = \langle x, y_1 \rangle \text{ e } f_2(x) = \langle x, y_2 \rangle, \forall x \in H.$$

E ainda, $\| f_1 \| = \| y_1 \|$ e $\| f_2 \| = \| y_2 \|$.

Podemos mostrar que a expressão $\langle f_1, f_2 \rangle := \langle y_2, y_1 \rangle$ define um produto interno em H'.

De fato, considere $f_3 \in H'$ tal que $f_3(x) = \langle x, y_3 \rangle$, onde $x \in H$; $y_3 \in H$ e um $\alpha \in \mathbb{R}$.

$P_1)$ $\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle := \langle y_3, y_1 + y_2 \rangle = \langle y_3, y_1 \rangle + \langle y_3, y_2 \rangle = \langle f_1, f_3 \rangle + \langle f_2, f_3 \rangle$.

$P_2)$ $\langle f_1, \alpha f_2 \rangle := \langle \alpha y_2, y_1 \rangle = \alpha \langle y_2, y_1 \rangle = \alpha \langle f_1, f_2 \rangle$.

$P_3)$ $\langle \alpha f_1, f_2 \rangle := \langle y_2, \alpha y_1 \rangle = \overline{\alpha} \langle y_2, y_1 \rangle = \overline{\alpha} \langle f_1, f_2 \rangle$.

$P_4)$ $\langle f_1, f_2 \rangle := \langle y_2, y_1 \rangle = \overline{\langle y_1, y_2 \rangle} = \overline{\langle f_2, f_1 \rangle}$.

$P_5)$ $\langle y_2, y_1 \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle \geq 0$ e $\langle y_1, y_2 \rangle = 0 \Rightarrow y_1 = 0$. Assim, $\langle f_1, f_1 \rangle := \langle y_1, y_1 \rangle = 0 \Rightarrow f_1 = 0$.

Além disso,

$$\langle f_1, f_1 \rangle := \langle y_1, y_1 \rangle = \| y_1 \|^2 = \| f_1 \|^2 \Rightarrow \| f_1 \| = \| y_1 \| .$$

□

Proposição 3.3. *Todo espaço de Hilbert H é reflexivo.*

Demonstração. Devemos mostrar a sobrejetividade da aplicação canônica $C : H \longrightarrow H''$, ou seja que para cada $\varphi \in H''$ existe um $z \in H$ tal que $Cz = \varphi$. Então, seja H um espaço de Hilbert. Dado $\varphi \in H''$, como H' é um espaço de Hilbert pela Proposição anterior, podemos usar o Teorema da Representação de Riesz e então tomar $y \in H'$ tal que $\varphi(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H'$.

Usando $y \in H'$, uma segunda aplicação do Teorema da Representação de Riesz nos dar um $z \in H$ tal que $y(p) = \langle p, z \rangle, \forall p \in H$.

Agora, usando $x \in H'$ e pela terceira vez o Teorema da Representação de Riesz, temos que existe um $w \in H$ tal que $x(p) = \langle p, w \rangle, \forall p \in H$. Temos então que, $y, x \in H'$, $z, w \in H$ e também que,

$$y(p) = \langle p, z \rangle \text{ e } x(p) = \langle p, w \rangle.$$

Logo, pela proposição anterior sabemos que, $\langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle$. Dessa forma, pela definição,

$$Cz = x(z) = \langle z, w \rangle = \langle x, y \rangle = \varphi(x).$$

Segue então que $Cz = \varphi$, provando que H é reflexivo. $\square$

Proposição 3.4. *(**Teorema de Hahn-Banach em espaços de Hilbert**) Seja f um funcional linear limitado em um subespaço fechado F de um espaço de Hilbert H. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ que é extensão de f em H e tem norma*

$$\| \tilde{f} \| = \| f \|,$$

Demonstração. De fato, se F é um subespaço fechado de um espaço H de Hilbert, então, pelo Teorema da Representação de Riesz, o funcional $f : F \subset H \longrightarrow \mathbb{K}$ tem representação

$$f(x) = \langle x, z \rangle, \qquad \forall z \in F,$$

e $\| z \| = \| f \|$. Como o produto interno está definido em todo o espaço H, isto fornece uma extensão $\tilde{f}$ de F em H com $\| \tilde{f} \| = \| z \| = \| f \|$. $\square$

Considerações Finais

No decorrer deste trabalho podemos observar a importância da Análise Funcional e principalmente do Teorema da Representação de Riesz, que é importante na obtenção de novos resultados da Análise. Através deste Teorema mostramos que cada elemento de um espaço de Hilbert pode ser representado por um produto interno e essa representação é muito útil em Teoremas como o de Lax-Milgram e o de Hahn-Banach.

A realização desse estudo contribuiu para o enriquecimento em relação à pesquisa matemática, sobretudo sobre os conceitos da Topologia e da Análise Funcional, despertando o interesse para uma possível pós-graduação na área da Matemática Pura. Além disso, com o auxilio da minha orientadora Luciana Roze, pude aprofundar e amadurecer o meu conhecimento matemático já existente.

Referências Bibliográficas

[1] Botelho G., Pellegrino D. e Teixeira E. Fundamentos de Análise Funcional - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] Bueno H. P. Álgebra Linear - Um segundo curso - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] Domingues, H. H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia- São Paulo: Atual, 1982.

[4] Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications - Wiley, 1989.

[5] Kuhlkamp, N. Introdução à Topologia Geral - Editora da UFSC, 2002.

[6] Lima , E. L. Elementos de Topologia Geral- Rio de janeiro: Editora SBM, 2009.

[7] Lima , E. L. Espaços Métricos- Projeto Euclides, Rio de janeiro: IMPA, 2012.

[8] Lima, E. L. Álgebra Linear - Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[9] Louredo, A. T; Oliveira, A. M. Um Primeiro Curso de Álgebra Linear. Campina Grande: Eduepb, 2015.

[10] Oliveira, C. R. Introdução à Análise Funcional - Rio de Janeiro: IMPA, 2010.