UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARLOS ALBERTO DE LIMA

O TEOREMA DE HAHN-BANACH

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

CARLOS ALBERTO DE LIMA

O Teorema de Hahn Banach

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Ma. Thiciany Matsudo Iwano

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2017

L732t Lima, Carlos Alberto de.
O Teorema de Hahn-Banach [manuscrito] : / Carlos Alberto de Lima. - 2017.
35 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Profa. Ma. Thiciany Matsudo Iwano, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Lema de Zorn. 2. Análise funcional. 3. Espaços normados. 4. Análise funcional.

21. ed. CDD 510

CARLOS ALBERTO DE LIMA

O Teorema de Hahn Banach

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 15/12/2017

COMISSÃO EXAMINADORA

Thiciany M. Iwano

Prof.ª Ma. Thiciany Matsudo Iwano

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADORA

Luciana R Freitas

Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Prof.ª Ma. Joselma Soares dos Santos

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, que me deu a oportunidade de ingressar nesse curso e que me sustentou até o dia de hoje!

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Criador, pois sem Ele não estaria contemplando esse momento, também percebo que a medida que a conclusão desse trabalho se aproxima não poderia jamais deixar de lembrar da minha orientadora e incentivadora Thiciany Matsudo Iwano, que acreditou em mim.

Também devo falar dos meus grandes amigos: Professor José Elias a quem devo demais, tanto pelos conselhos quanto pelas ajudas nas horas de maior dificuldade; as meninas Renaly e Mayara, os companheiros Luiz Carlos, Jandeilson Felipe Queiroga, Felipe Paganini e Juninho (o Pequeno da turma não só no nome), amigos que desde o princípio estiveram ao meu lado entre uma disciplina e outra cooperando sempre para meu engrandecimento como profissional que almejo ser mais também como ser Humano.

Por último eu preciso agradecer a pessoa que fez esse sonho se realizar, aquela que me fez migrar das trevas para luz, a qual à existência na minha vida me fez reescrever minha história e me trouxe ao ápice da minha graduação, sempre me incentivando e com cumplicidade me fazendo acreditar que seria possível, a qual me vejo sem palavras para descrever o quão grato eu sou, por isso com simplicidade te digo muito obrigado Kézia Patrícia Mestre Carvalho.

Epígrafe

"Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito".

(François Fénelon)

Resumo

Um ramo da matemática que estuda assuntos como espaços de funções, topologia entre outros é a análise funcional. Nela podemos ver a fusão de conceitos da álgebra linear, análise matemática e a própria topologia com destaque para os espaços vetoriais normados. Um dos principais resultados já demonstrados e que tem aplicações em diversas áreas da ciência, como por exemplo na física, é o Teorema de Hahn-Banach. Esse trabalho tem como principal objetivo demonstra-lo, assim como introduzir conceitos topológicos e resultados da análise matemática e funcional. Iniciaremos relatando um pouco da história dos matemáticos Hahn e Banach. Em seguida mostraremos conceitos como espaços métricos, sequência de Cauchy e espaços normados e também espaços de Banach, operadores lineares e em particular os funcionais lineares. Por fim, abordaremos o Lema de Zorn, fundamental na demonstração da versão do Teorema de Hahn-Banach escolhida.

Palavras-chave: Lema de Zorn, Espaços Normados, Teorema de Hahn-Banach.

Abstract

A offshoot of mathematics that studies subjects such as function spaces, topology among others and functional analysis. In it we can see the fusion of concepts of linear algebra, mathematical analysis and the topology itself with prominence for normed vector spaces. One of the main results already demonstrated and that has applications in several areas of science, as for example in physics, is the Hahn-Banach Theorem. This work has as main objective to demonstrate it, as well as to introduce topological concepts and results of the mathematical and functional analysis. We will begin by recounting a little of the history of mathematicians Hahn and Banach. Next we will show concepts like metric spaces, Cauchy sequence and normed spaces and also Banach spaces, linear operators and in particular the linear functional ones. Finally, we will approach the Zorn Lemma, fundamental in the demonstration of the chosen version of Hahn-Banach's Theorem.

Keywords: Zorn's Lemma, Normalized Spaces, Hahn-Banach's Theorem.

Sumário

Introdução

Segundo [5], Hans Hahn foi um matemático Austríaco que cursou o ensino básico nas cidades de Estrasburgo, Munique e Gottingen e recebeu o título de Doutor na Universidade de Viena, e lecionou na Áustria-Hungara. Ele foi nomeado professor extraordinário até 1920. Os primeiros resultados de Hahn foram contribuições para o clássico Cálculo das Variações, os espaços abstratos de Fréchet dentre outras teorias .

Banach estudou o ensino primário em Cracóvia e a graduação na faculdade de engenharia na Universidade Técnica de Lviv na Ucrância. Em 1916 conheceu o matemático Hugo Steinhaus, com quem manteve um vínculo chegando a fundar uma sociedade matemática. Uma das primeiras publicações de Banach foi no boletim da Academia de Cracóvia em 1918 e junto com Steinhaus produziu vários trabalhos matemáticos.

A Análise Funcional foi o ramo da matemática que tanto Hahn quanto Banach se empenharam mais, e são esses alguns dos teoremas importantes da Análise Funcional: Teorema de Hahn-Banach, Teorema da Função Aberta, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Schauder, Teorema de Banach-Alaoglu.

O Teorema de Hahn-Banach é um dos principais resultados da Análise Funcional. Ele trata da extensão de funcionais lineares em subespaços. Interessados em resolver determinadas equações, Riesz em 1911 e Helly em 1912, obtiveram os primeiros teoremas de extensão de funcionais lineares em alguns espaços de funções. Hahn em 1927 obteve o primeiro resultado para o caso real e Banach em 1929 conseguiu resultados para casos mais gerais. Juntos desenvolveram várias versões deste Teorema.

Um dos objetivos da Análise Funcional é o estudo dos operadores lineares contínuos em espaços vetoriais normados, dando grande importância aos espaços de funções utilizados em várias áreas da Matemática.

Diversas técnicas da topologia foram aplicadas no estudo da Análise Funcional no século XX. Um tópico da Análise Funcional que possui forte relação com a topologia é o estudo dos espaços vetoriais localmente convexos, onde não se admite necessariamente a existência de uma norma definindo uma topologia sobre os espaços vetoriais estudados.

Neste trabalho temos como objetivo enunciar e demonstrar uma das versões do Teorema de Hahn-Banach, que garante a existência de extensões lineares para todo espaço de funcionais lineares.

Mostraremos inicialmente um pouco da histórica dos matemáticos Hahn e Banach, que foram os responsáveis pelo desenvolvimento do Teorema central deste trabalho.

No primeiro capítulo serão abordados algumas resultados prévios já mencionados que dá início aos nossos estudos e também uma abordagem do objeto central de estudo, como operadores lineares e os funcionais lineares. Tais conceitos são introduzidos para facilitar a compreensão dos resultados demonstrados, o que culmina com a apresentação do Lema de Zorn, que é fundamental para a demonstração do Teorema de Hahn-Banach na versão a qual escolhemos para estudar e apresentar.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos o referencial teórico necessário para compreensão e demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Para o leitor interessado em obter maiores informações, consultar [1] e [2].

1.1 Conjuntos

Durante nossas abordagens usaremos os conjuntos abaixo:

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais;

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos números inteiros;

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais;

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais;

Para detalhes acerca de suas propriedades operatórias, consulte [2].

1.2 Espaço métrico

Definição 1.1. *(Métrica): Num conjunto M, não-vazio, métrica é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância do ponto x ao ponto y, de tal modo que:*

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0$ *se, e somente se* $x = y$.

iii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$

Essa quarta propriedade é chamada de desigualdade triangular, que exprime que cada lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Definição 1.2. *(Espaço métrico): O par (M,d) formado por um conjunto qualquer $M \neq \varnothing$ e uma métrica d em M é chamado de Espaço Métrico M.*

Exemplo 1.1. *Seja $\mathbb{R}$, o conjunto dos números reais e considere a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $d(x, y) = |x - y|$. Tem-se que d é uma métrica e $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.*

Solução: Com efeito,

i) $d(x, y) = |x - y| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1|\ |y - x| = |y - x| = d(y, x)$.

iv) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.

Assim d é uma métrica e $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 1.2. *Agora, seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todos os pares ordenados $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de números reais, com a métrica definida por:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

O par $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico.

Solução: De fato, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) Temos que, $\forall i = 1, 2, ..., n$

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

iii) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} = d(y, x)$.

iv) Temos que:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Assim, temos que provar que:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}.$$

Pondo, $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$, fica:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}. \tag{1.1}$$

Para mostrar a desigualdade (1.1) usaremos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2} \tag{1.2}$$

Provaremos primeiro que a desigualdade (1.2) vale.

Então, para qualquer λ real, temos:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i\lambda + b_i)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum (a_i)^2(\lambda)^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)\lambda + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \geq 0.$$

Pondo, $A = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2, B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ *e* $C = \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2$, fica:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta \leq 0 \;&\Rightarrow\; 4B^2 - 4AC \leq 0 \\
&\Rightarrow\; B^2 \leq AC \\
&\Rightarrow\; B \leq \sqrt{A}\sqrt{C} \\
&\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}.
\end{aligned}$$

Agora, usando (1.2) em (1.1):

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2)} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.
\end{aligned}$$

Assim, fica provado que d é uma métrica.

1.2.1 Bolas e conjuntos abertos e fechados

Definição 1.3. *(Bolas em espaços métricos) Seja M um espaço métrico, um ponto $p \in M$ e um raio $\epsilon > 0$. Podemos definir três tipos de conjuntos em M.*

1) *A bola aberta, de centro p e raio ϵ é o conjunto $B(p;\epsilon)$ de todos os pontos de M cuja distância ao ponto p é menor que ϵ. Simbolicamente:*

$$B(p;\epsilon) = \{x \in M; d(x,p) < \epsilon\}.$$

2) *A bola fechada (ou disco) de centro p e raio ϵ é o conjunto $D(p;\epsilon)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto p é menor ou igual a ϵ:*

$$D(p;\epsilon) = \{x \in M; d(x,p) \leq \epsilon\}.$$

3) *A esfera é o conjunto formados pelos pontos $x \in M$ cuja distância ao centro p é exatamente igual a ϵ:*

$$S(p;\epsilon) = \{x \in M; d(x,p) = \epsilon\}.$$

Exemplo 1.3. *Na reta $\mathbb{R}$, a bola aberta $B(p;\epsilon)$ é o intervalo aberto $(p-\epsilon, p+\epsilon)$; a bola fechada $D(p;\epsilon)$ é o intervalo $[p-\epsilon, p+\epsilon]$ e a esfera $S(p;\epsilon)$ é o par de pontos $\{p-\epsilon, p+\epsilon\}$.*

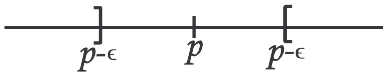

Figura 1

As seguintes propriedades valem para qualquer bola aberta $B(p;\epsilon)$ de um espaço métrico arbitrário M.

i) Dado um $\delta > 0$ e dadas $B(p;\epsilon)$ e $B(p,\delta)$, se $\epsilon \leq \delta$, então $B(p,\epsilon) \subset B(p,\delta)$

Justificativa:

Se $x \in B(p,\epsilon)$ então $d(x,p) < \epsilon$. Como $\epsilon \leq \delta$, então $d(x,p) < \delta$ e portanto $x \in B(p,\delta)$.

ii) Dado $q \in B(p,\epsilon)$, então existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q,\delta) \subset B(p,\epsilon)$.

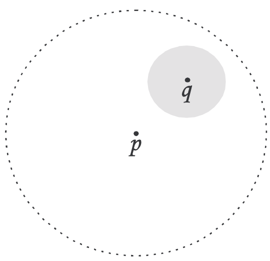

Figura 2

Justificativa:

Tomemos $\delta = \epsilon - d(p,q)$ e seja $x \in B(q,\delta)$. Pela desigualdade triangular temos que:

$$d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p).$$

Como $x \in B(q,\delta) \Rightarrow d(x,q) < \delta = \epsilon - d(p,q)$, então:

$$d(x,p) < \epsilon - d(p,q) + d(p,q) \Rightarrow d(x,p) < \epsilon \Rightarrow x \in B(p,\epsilon).$$

iii) Dado um $\delta > 0$ e seja $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\delta)$ bolas não disjuntas. Se $t \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$ então existe $\lambda > 0$ tal que $B(t,\lambda) \subset B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$.

Ou seja, escolhido qualquer ponto na interseção de duas bolas abertas, existe uma bola inteiramente contida nesta interseção.

Justificativa:

Seja $t \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$, então $t \in B(p,\epsilon)$ e $t \in B(q,\delta)$. Devido a (ii), existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$B(t,\lambda_1) \subset B(p,\epsilon) \text{ e } B(t,\lambda_2) \subset B(q,\delta).$$

Daí,

$$B(t,\lambda_1) \cap B(t,\lambda_2) \subset B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta).$$

Se $\lambda = min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ então: $B(t,\lambda) \subset B(t,\lambda_1)$ e $B(t,\lambda) \subset B(t,\lambda_2)$,

E portanto,

$$B(t,\lambda) \subset B(t,\lambda_1) \cap B(t,\lambda_2) \Rightarrow B(t,\lambda) \subset B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta).$$

iv): Sejam $p \neq q$ pontos do espaço métrico M. Se $d(p,q) = \epsilon$ então $B(p,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\epsilon}{2}) = \varnothing$.

Justificativa: Suponhas que exista $x \in B(p,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\epsilon}{2})$. Então $x \in B(p,\frac{\epsilon}{2})$ e $x \in B(q,\frac{\epsilon}{2})$.

Portanto $d(x,p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x,q) < \frac{\epsilon}{2}$.

Pela desigualdade triângular, temos que:

$$\epsilon = d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad Absurdo!$$

Logo, $B(p;\dfrac{\epsilon}{2}) \cap B(q;\dfrac{\epsilon}{2}) \neq \varnothing$. *v*): Dado um $\eta > 0$, sejam $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\eta)$ se $\epsilon + \eta \leq d(p,q)$, então $B(p,\epsilon) \cap B(q,\eta) = \varnothing$

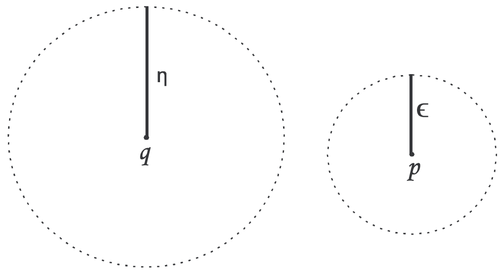

Figura 3

Justificativa:

Suponhamos que existe um ponto $x \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\eta)$, então:

$d(x,p) < \epsilon$ e $d(x,q) < \eta$. Assim:

$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \epsilon + \eta \leq d(p,q).$$

O que é impossível! Logo, $B(p,\epsilon) \cap B(q,\eta) = \varnothing$.

Definição 1.4. *(Conjuntos abertos e fechados) Seja (M,d) um espaço métrico. Um subconjunto M de um espaço métrico X é aberto se contém um bola em cada um dos seus pontos, isto é, para todo $x \in M$, existe um $r > 0$ real, tal que*

$$B(x;r) \subset M.$$

E Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, F^c é aberto.

Observação 1.1. *Fechado não significa não aberto. Pois dependendo do espaço M, podemos ter subconjuntos que não são abertos e nem fechados ou que são ambas as coisas.*

Exemplo 1.4. *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a,b], [a,+\infty[,]-\infty,b]$.*

Solução: De fato,

$[a,b]^c \ =]-\infty, a[\bigcup]b,+\infty[$ e cada um é aberto.

$[a,+\infty[^c =]-\infty, a[$ é aberto.

$]-\infty, a]^c \ =]a,+\infty[$ é aberto.

1.2.2 Sequências

Definição 1.5. *(Sequências em espaços métricos) Seja M um espaço métrico. Toda aplicação: $x : n \to x_n$ de $\mathbb{N}^*$ em M é chamada sequência de elementos de M.*

Notação: $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, ...)$.

Dada a sequência (x_n) cada imagem x_n é chamada termo da sequência.

Definição 1.6. *(Subsequências) Uma subsequência da sequência x_n em um conjunto X é uma restrição da aplicação $n \longmapsto x_n$ a um conjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ...\}$ do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Uma subsequência é representada pelas notações (x_{n_k}), $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_k}, ...)$ ou $(x_n)_{n \in N'}$.*

Definição 1.7. *(Sequência limitada) Uma sequência (x_n) no espaço métrico M é limitada quando existe $K > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq k$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Quando a sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Observação 1.2. *Como a sequência é uma função, o conceito de sequência limitada coincide com o de função limitada. Assim, toda subsequência de uma sequência limitada também é limitada.*

Exemplo 1.5. *Seja $M = \mathbb{R}$ e a sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{1}{n}$. Então (x_n) é limitada pois $d(x_m, x_n) \leq 1$, $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.8. *(Sequência convergente) Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita convergente se existe um $x \in X$ tal que:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Chamamos x de limite de (x_n) e escrevemos:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$$

ou, simplesmente, $x_n \longrightarrow x$. Dizemos então, que (x_n) converge para x ou tem limite x. Se (x_n) não é convergente, dizemos que é divergente.

Definição 1.9. *(Sequência de Cauchy) Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita de Cauchy se para cada $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \qquad \forall\ m, n > N.$$

Teorema 1.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow x$, então para cada $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n > N$. Pela desigualdade triangular temos que para $m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Assim, (x_n) é de Cauchy. □

Observação 1.3. *A recíproca desse Teorema nem sempre é verdade.*

Definição 1.10. *(Espaço Métrico Completo) O espaço X é dito completo se cada sequência de Cauchy em X converge, ou seja, cada sequência de Cauchy em X tem um limite que é um elemento de X.*

Exemplo 1.6. *O conjunto $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.*

1.3 Espaço Vetorial

Definição 1.11. *Um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um subconjunto não-vazio de elementos munido de duas operações algébricas. Essas operações são chamadas Adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares.*

Adição de vetores associa cada par ordenado de vetores $(x, y) \in E \times E$ um vetor $x + y$, chamado soma de x e y, de tal modo que tem as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in E$:

s_1) $x + y = y + x$;

s_2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

s_3) $x + 0 = 0 + x = x$; *onde* $0 \in E$ *é chamado elemento neutro.*

s_4) $\exists - x \in E$ *tal que* $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Multiplicação de vetores por escalar associa cada vetor $x \in E$ e um escalar α a um vetor αx, chamado produto de α e x, de tal modo que satisfaz as seguintes propriedades, para cada $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

m_1) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

m_2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

m_3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

m_4) $1.x = x$.

Para obter a definição e corpo e maiores detalhes sobre Espaço Vetorial, consulte [3].

1.4 Espaços vetoriais Normados

Definição 1.12. *(Norma) Em um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$, uma norma é uma função que associa a cada $x \in X$ um número real não negativo, indicado por $\| x \|$ de maneira que, $\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos:*

i) $\| x \| \geq 0$;

ii) $\| x \| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

iii) $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$;

iv) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Definição 1.13. *(Espaço normado) Um espaço vetorial normado é um par formado por um espaço vetorial E e uma norma definida nele. Denotamos por: $(E, \| \, . \, \|)$.*

Proposição 1.1. *A função $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma métrica sobre E.*

Demonstração. Com efeito, pela definição de norma

i) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$

ii) $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

iii) $d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = \| y = x \| = d(y, x)$.

iv) $d(x, y) = \| x - z \| = \| x - y + y - z \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| = d(x, y) + d(y, z)$. □

Exemplo 1.7. *A função $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$, com $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é uma norma no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.*

Solução:

Sejam $x = (x_1, ..., x_n); y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

i) $\| x \| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\| x \| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\| x \| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad (x_i)^2 = 0, i = 1, 2, ..., n \\
& \Leftrightarrow \quad x_i = 0, i = 1, 2, ..., n \\
& \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, ..., 0) \\
& \Leftrightarrow \quad x = 0.
\end{aligned}
$$

iii) $\| \lambda x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} = |\lambda| \| x \|$.

iv) Devemos provar que $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$. Temos:

$$\begin{aligned}
\| x+y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \Leftrightarrow \| x+y \|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i)(y_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(y_i)^2 \\
&= (\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2})^2 \\
&= (\| x \| + \| y \|)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\| x+y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2 \quad \Rightarrow \quad \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$. Portanto, a função dada é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.4. *Maiores detalhes acerca dos espaços vetoriais e normados nas referências bibliográficas* [3] *e* [1].

1.5 Funções contínuas

Definição 1.14. *(Aplicação contínua) Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Proposição 1.2. *Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$ existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p,\delta)) \subset B(f(p), \epsilon)$$

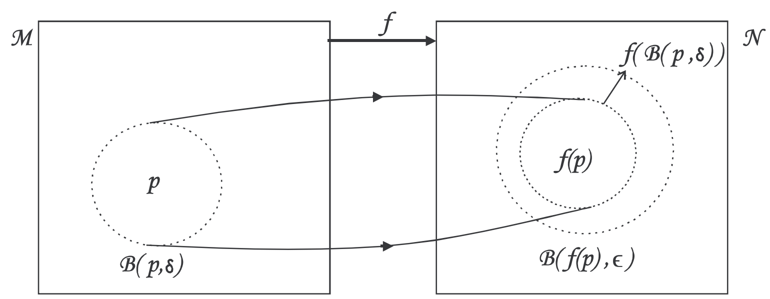

Figura 4

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese f é contínua, devemos mostrar que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$. Dada uma bola $B(f(p),\epsilon)$, considerando o seu raio ϵ, como por hipótese f é contínua, existe um $\delta > 0$ tal que

$$d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(p)) < \epsilon.$$

Considerando $B(p,\delta)$ mostremos que a sua imagem está contida na $B(f(p),\epsilon)$, de fato, se $y \in f(B(p,\delta))$, então $y = f(x)$ com $x \in B(p,\delta)$ daí $d(x,p) < \delta$ o que implica $d(f(x),f(p)) < \epsilon$. assim $f(x) \in B(f(p),\epsilon)$, logo $y \in B(f(p),\epsilon)$. Portanto $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$

($\Leftarrow$) Por hipótese $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$, devemos mostrar que f é contínua.
Como $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$, dado um $y \in f(B(p,\delta))$ então $y \in B(f(p),\epsilon)$. Considerando $y = f(x)$, com $x \in B(p,\delta)$ temos que $d(x,p) < \delta$, e mais, $f(x) \in B(f(p),\epsilon)$, ou seja, $d(f(x),f(p)) < \epsilon$. Logo $d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(p)) < \epsilon$ e portanto f é contínua. $\square$

1.6 Espaço de funções reais limitadas

Definição 1.15. *(Função limitada) Dado um subconjunto $X \neq \varnothing$ um função $f : X \to \mathbb{R}$ se diz limitada se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\| f(x) \| < k$, para qualquer $x \in X$.*

Exemplo 1.8. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é limitada por $Im(f) = (0,1]$. Ou seja, existe um número $k \in \mathbb{R}$ que é maior do que todos os $y \in (0,1]$. Mas, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ não é limitada, porque a $Im(g) = [0,\infty)$*

Definição 1.16. *(Conjunto das funções limitadas) Indiquemos por $B(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$.*
Para qualquer $f, g \in B(X;\mathbb{R})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, se definirmos $f+g, \alpha f$ e $\| f \|$ do seguinte modo:
i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$;
ii) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall \in X$;
ii) $\| f \| = sup\{\| f(x) \|; x \in X\}$.
Assim, o conjunto $B(X;\mathbb{R})$ se torna um espaço vetorial normado.

Observação 1.5. *Note de início que* $\| f \|$ *está bem definida visto que* $sup\{\| f(x) \| ; x \in X\}$ *existe pelo fato de que f é limitada. Além disso,* $\| f \| \in \mathbb{R}_+$*, para qualquer* $f \in B(X; R)$*.*

Solução:Provaremos que

$$\| f \| = sup\{\| f(x) \|; x \in X\}$$

é uma norma. $i)$ $\| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \| f \| = 0 &\Leftrightarrow sup\{\| f(x) \|; x \in X\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \| f(x) \| = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f = 0. \end{aligned}$$

$ii)$ $\| \alpha f \| = \| \alpha \| \| f \|$.

$$\begin{aligned} \| \alpha f \| &= sup\{\| \alpha f(x) \|; x \in X\} \\ &= sup\{\| \alpha \| \| f(x) \|; x \in X\} \\ &= |\alpha| sup.\{\| f(x) \|; x \in X\} = \| \alpha \| \| f \| . \end{aligned}$$

$iii)$ $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

Dadas $f, g \in B(X; \mathbb{R})$, então $\forall x \in X$:

$$\| f(x) + g(x) \| \leq \| f(x) \| + \| g(x) \| \leq sup\{\| f(x) \|; x \in X\} + sup\{\| g(x) \|; x \in X\}.$$

Assim,

$$sup\{\| f(x) + g(x) \|\} \leq sup\{\| f(x) \|; x \in X\} + sup\{\| g(x) \|; x \in X\}$$

Ou seja,

$$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \| .$$

Logo $B(X; \mathbb{R})$ é um espaço métrico e a métrica induzida pela norma citada é:

$$d(f, g) = sup\{\| f(x) - g(x) \|; x \in X\}$$

Para qualquer $f, g \in B(X; \mathbb{R})$.

Observação 1.6. *Essa métrica é chamada métrica da convergência uniforme ou métrica do supremo.*

1.7 Análise Funcional

Para que seja possível a apresentação do Teorema de Hahn-Banach, precisaremos de alguns conceitos prévios que serão relembrados. Assim nesta seção abordaremos, resultados voltados a esse Teorema tão importante para Álgebra Linear, Análise Funcional dentre outros. Com o uso na Análise Funcional, também iremos abordar os conceitos de funcionais lineares, bem como o Lema de **Zorn**, que será indispensável para enunciarmos e demonstrarmos o Teorema. A maior parte dos resultados apresentados nessa sessão estão em [6].

1.7.1 Espaço de Banach

Definição 1.17. *(Espaço de Banach) Um espaço métrico Normado X é chamado de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge. De forma geral, um espaço normado é de Banach se é um espaço completo em relação à métrica induzida por sua norma.*

Exemplo 1.9. *$(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, é espaço de Banach. Para provar essa afirmação basta mostrarmos que é completo. Seja $x_k = (x_1^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Então dado $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|x_m - x_k\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - x_i^{(k)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \ \forall m, k > n_0$$

Notemos que se fixarmos $i = 1, ..., n$ e $m, k > n_0$ teremos

$$(x_i^m - x_i^k)^2 < \epsilon^2 \Longrightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| < \epsilon.$$

Isto mostra que para cada $i = 1, ..., n$ a sequência $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ é completo temos que a sequência é convergente, isto é, $x_i^{(k)} \longrightarrow x_i$ quando $k \longrightarrow \infty$. Com isso defina $x = (x_1, ..., x_n)$ os respectivos limites. Note que $x \in \mathbb{R}^n$. Logo, tomando $k \longrightarrow \infty$ em $(\boldsymbol{i})$ temos

$$\|x_m - x\| \leq \epsilon, \forall m > n_0$$

Portanto $x_m \longrightarrow x$ e concluirmos que $\mathbb{R}^n$ é completo.

1.7.2 Operador linear

(Operador linear)

Definição 1.18. *Um operador linear T é um operador tal que:*
(i) O domínio D(T) é um espaço vetorial e a imagem R(T) encontra-se em um espaço vetorial Y sobre o mesmo corpo de escalares.
(ii) Para todo x,y $\in$ D(T) e α um escalar vale que:

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

e

$$T(\alpha x) = \alpha Tx.$$

Essas últimas igualdades equivalem a:

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty.$$

Observação 1.7. *Observe as notações:*

1. *D(T) é o domínio de T;*
2. *R(T) é a imagem de T;*
3. $N(T) = \{x \in D(T); Tx = 0\}$ *é o espaço nulo de T.*

Exemplo 1.10. *A aplicação* $Ix : X \longrightarrow X$ *definida por* $Ix = x$*, para todo* $x \in X$*, é um operador linear chamada operador identidade.*

Pois, temos que: $I(x+y) = x + y = Ix + Iy$ e $I(\alpha x) = \alpha x = \alpha Ix$.

Proposição 1.3. *Seja* $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear. Então:*
a) A imagem $R(T)$ *é um subespaço vetorial de* Y*;*
b) O núcleo $N(T)$ *é um subespaço vetorial de* $D(T)$*.*

Demonstração. a)De fato, como $y_1, y_2 \in R(T)$ existem $x_1, x_2 \in D(T)$ tais que, $Tx_1 = y_1$ e $Tx_2 = y_2$.

Como $D(T)$ é um subespaço vetorial de X por definição, então $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sendo T linear temos:

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Como $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$ então $T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$. Portanto, $R(T)$ é um subespaço vetorial de Y.
b) Dados $x_1, x_2 \in N(T)$, então $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Como T é linear, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0.$$

Logo, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$ e $N(T)$ é um subespaço vetorial de $D(T)$. $\square$

Definição 1.19. *(Operador linear limitado) O operador T é limitado quando existe um numero real c tal que para cada $x \in D(T)$ vale a seguinte desigualdade:*

$$\| Tx \| \leq c \| x \|$$

Podemos definir a norma de um operador linear limitado T por:

$$\| T \| = \sup_{x \in D(f); x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}$$

Proposição 1.4. *Seja T um operador linear limitado. Então a norma definida por*

$$\| T \| = \sup_{x \in D(T); x \neq 0} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} = \sup_{x \in D(T); ||x|| = 1} \| T(x) \|$$

satisfaz as condições de norma.

Demonstração. Sejam:
(i) É imediato que $||T|| \geq 0$ e $\| 0 \| = 0$.
(ii) Para $\| T \| = 0$, temos $Tx = 0$, para todo $x \in D(T)$, então $T = 0$.
(iii) Temos:

$$||\alpha T|| = \sup_{\|x\|=1} \| \alpha T x \| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \| Tx \| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \| Tx \| = |\alpha| ||T||.,$$

para todo $x \in D(T)$.
(iv) Por último, temos que:

$$\sup_{\|x\|=1} \| (T_1 + T_2)x \| = \sup_{\|x\|=1} \| T_1 x + T_2 x \| \leq \sup_{\|x\|=1} \| T_1 x \| + \sup_{\|x\|=1} \| T_2 x \|,$$

onde $x \in D(T)$. $\square$

1.7.3 Extensão de operadores lineares

Definição 1.20. *Seja* $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ *um operador linear definido no subespaço* $D(T) \subset X$*, onde* X *e* Y *são espaços vetoriais normados. Definimos uma extensão de* T *como sendo* $\tilde{T}$ *um operador definido no subespaço* $D(\tilde{T}) \supset D(T)$ *tal que*

$$\tilde{T}|_{D(T)} = T,$$

ou seja, $\tilde{T}(x) = T(x), \forall x \in D(T)$.

1.7.4 Funcionais lineares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre funcionais lineares, que é um caso particular de operador linear.

Definição 1.21. *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$*. Um Funcional Linear* f *é uma transformação linear com domínio* $D(f)$ *em um espaço vetorial* V *e imagem no corpo dos escalares* $\mathbb{K}$*, ou seja,* $f : D(f) \subset V \to \mathbb{K}$ *e tem as seguintes propriedades,* $\forall\ v, w \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*
(i) $f(v + w) = f(v) + f(w)$*;*
(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.
As igualdades $i)$ *e* $ii)$ *equivalem a:*

$$f(\lambda v + u) = \lambda f(v) + f(u).$$

Exemplo 1.11. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $f(x, y) = 2x + y$ *é um funcional linear.*

Solução: De fato, sejam $\lambda\ \in \mathbb{R}$ *e* $v = (x_1, y_1), u = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda v + u) &= 2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda(2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(v) + f(u). \end{aligned}$$

Portanto, f é um funcional linear.

Exemplo 1.12. *A aplicação* $f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por*

$$f\left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right] = 3x + y + z + w$$

é um funcional linear.

Solução: De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Então,

$$\begin{aligned} f(\lambda v + u) &= 3(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) + (\lambda z_1 + z_2) + (\lambda w_1 + w_2) \\ &= \lambda(3x_1 + y_1 + z_1 + w_1) + (3x_2 + y_2 + z_2 + w_2) \\ &= \lambda f(v) + f(u). \end{aligned}$$

Portanto f é um funcional linear.

Observação 1.8. *Podemos afirmar que seja X um espaço normado sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então um operador linear $f : X \to \mathbb{K}$ é denominado funcional linear.*

1.7.5 Espaço Dual

Definição 1.22. *Tomando o espaço normado X então o espaço de Banach $B(X, \mathbb{K})$ será denotado por X' é denominado de Espaço Dual de X. Em notação de conjuntos:*

$$X' = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K};\ f \text{ é um funcional linear}\},\ \textit{onde } \mathbb{K} \textit{ é um corpo escalar.}$$

As operações em X' são definidas da seguinte forma:
(i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in X', x \in X$;
(ii) $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall f \in X', x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

Observação 1.9. *Podemos considerar o dual de X', chamado de bidual de X e denotado por X''.*

1.7.6 Lema de Zorn

O **Lema de Zorn** é equivalente a um axioma da teoria dos conjuntos chamado Axioma da Escolha o qual é possível encontrar mais detalhes em [3]. Foi apresentado em 1935 demonstrado por M. Zorn porém esse resultado já havia sido provado antes por um matemático chamado KURATOWSKI em 1922, apesar dessa prova ser omitida [5].

Definição 1.23. *(Conjunto parcialmente ordenado) Dado um conjunto P e uma relação binária $\leq$ sobre ele, dizemos que $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado se satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) $x \leq x, \forall x \in P$ *(reflexiva);*

(ii) Se $x, y \in P$, $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *então* $x = y$ *(antissimétrica);*

(iii) Se x, y *e* $z \in P$, $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *então* $x \leq z$ *(transitiva).*

Observação 1.10. *Dois elementos* a *e* b *são comparáveis se* $a \leq b$ *ou* $b \leq a$.

Definição 1.24. *(Cadeia) Um conjunto totalmente ordenado ou cadeia é um conjunto parcialmente ordenado tal que dois elementos quaisquer desse conjunto são comparáveis.*

Definição 1.25. *(Cota superior) Uma cota superior de um subconjunto* V *de um conjunto parcialmente ordenado* M *é um elemento* $u \in M$ *tal que*

$$x \leq u, \forall x \in V.$$

Se u *é uma cota superior de* M, *então este elemento é único.*

Definição 1.26. *(Elemento maximal) Um elemento maximal de* M *é um* $m \in M$ *tal que*

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

O conjunto M *pode ter mais de um elemento maximal.*

Observação 1.11. *Se um conjunto* M *possui cota superior, então* M *tem um único elemento maximal.*

Exemplo 1.13. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais, ordenador pela ordem natural "* $\leq$ *", não tem cota superior, porque todo número natural é menor que seu sucessor, isto é,*

$$n < n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.14. *Seja o conjunto* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *ordenado pelo diagrama abaixo.*

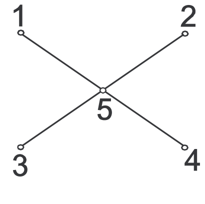

Figura 5

Os elementos maximal de A *são* a *e* e, *mas* A *não tem cota superior, porque não existe um elemento de* A *que sucede todos os outros elementos.*

Exemplo 1.15. *Seja o conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *ordenado pelo diagrama abaixo.*

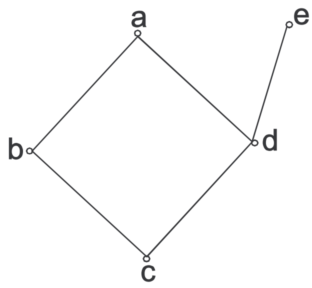

Figura 6

Os elementos maximal de A *são* 1 *e* 2.

Lema 1.1. ***(Lema de Zorn)*** *Seja* $M \neq \varnothing$ *um conjunto parcialmente ordenado suponhamos que cada cadeia* $C \subset M$ *tem uma cota superior. Então* M *tem pelo menos um elemento maximal.*

1.7.7 Funcional sublinear

Definição 1.27. *Seja* X *um espaço vetorial real. Um funcional sublinear em* X *é um funcional linear* $x \longmapsto p(x)$ *tal que:*
i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X;$
ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad x \in X.$

Exemplo 1.16. *A norma é um funcional sublinear.*

Solução: De fato,
i) $p(x+y) = \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \| = p(x) + p(y);$
ii) $p(\alpha x) = \| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \| = \alpha \, \| x \| = \alpha p(x).$

Capítulo 2

Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção veremos segundo [6] a demonstração de uma das grandes ferramentas matemáticas para a Análise Funcional. A sua essência em uma versão para espaços vetoriais reais é que funcionais lineares em um subespaço $G \subset E$ podem ser estendidos a todo espaço E preservando sua linearidade, a sua continuidade e em espaços normados, até sua norma.

2.1 Teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.1. *(**Teorema de Hahn-Banach (caso real)** Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X, e ainda seja f um funcional linear que é definido em um subespaço Z de X e satisfaz*

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in Z.$$

Então existe um $\tilde{f}$ que é uma extensão linear de f de Z para X e que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

Ou seja, para cada $x \in Z$ temos que $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Demonstração. Devemos construir o conjunto E de todas as extensões lineares g de f que satisfazem $g(x) \leq f(x)$ e que é parcialmente ordenado e assim o Lema de Zorn produz um elemento maximal $\tilde{f}$ de E.

De fato, seja E o conjunto de todas as extensões lineares g de f que satisfaz a condição

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in D(g).$$

Segue-se que $E \neq \varnothing$ visto que $f \in E$ por hipótese. Nesse conjunto E podemos definir um ordem parcial $g(x) \leq h(x)$, isto é, h é uma extensão de g, onde $D(g) \subset D(h)$ e $h(x) = g(x), \forall x \in D(g)$.

Para qualquer cadeia $C \subset E$ podemos definir $\tilde{g}$ por $\tilde{g} = g(x)$ se $x \in D(g)$, onde $g \in C$. Observe que $\tilde{g}$ é um funcional cujo domínio é

$$D(\tilde{g}) = \cup D(g), \quad g \in C,$$

que é um espaço vetorial visto que C é uma cadeia.

Temos que g é uma cota superior de C e como $C \subset E$ é arbitário, podemos usar o Lema de Zorn em E e isso implica que E tem um elemento maximal que vamos chamar de $\tilde{f}$.

Por definição de E, $\tilde{f}$ é uma extensão linear de f que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in D(\tilde{f}).$$

Agora vamos mostrar que $D(\tilde{f}) = X$ e assim estará provado o teorema.

Com efeito, suponhamos por absurdo que $D(\tilde{f}) \neq X$. Então podemos escolher um $y_1 \in X - D(\tilde{f})$ e considerar o subespaço Y_1 de X gerado por $D(\tilde{f})$ e y_1. Note que $y_1 \neq 0$ visto que $0 \in D(\tilde{f})$. Temos também que qualquer elemento $x \in Y_1$ pode ser escrito da seguinte forma

$$x = y + \alpha y_1, \qquad y \in D(\tilde{f}).$$

Essa representação é única. De fato, se tivermos

$$x = y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1, \quad y, \tilde{y} \in D(\tilde{f}),$$

Então,

$$y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1,$$

onde $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ e $y_1 \notin D(\tilde{f})$. De modo que a única solução possível é $y - \tilde{y} = 0$ e $\beta - \alpha = 0$, daí temos $y = \tilde{y}$ e $\beta = \alpha$, o que nos garante a unicidade.

Podemos definir um funcional g_1 em Y_1 por

$$g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$$

onde c é uma constante real.

Daí, podemos mostrar que g_1 é linear e que satisfaz $g_1(x) \leq p(x), \forall x \in D(g_1)$. Com isso, estaremos contradizendo a maximalidade de $\tilde{f}$ e seria absurdo. Logo podemos concluir que $D(\tilde{f}) = X$.

De fato, g_1 é linear. Seja $x = y + \alpha y_1, z = \tilde{y} + \beta y_1$ e β um escalar qualquer, temos:
$i)$ Mostremos que $g_1(x+z) = g_1(x) + g_2(x)$.

$$\begin{aligned} g_1(x+z) &= g_1(y + \alpha y_1 + \tilde{y} + \beta y_1) \\ &= g_1(y + \tilde{y} + (\alpha + \beta) y_1) \\ &= \tilde{f}(y + \tilde{y}) + (\alpha + \beta) c. \end{aligned}$$

Sendo $\tilde{f}$ linear obtemos,

$$\begin{aligned} g_1(x+z) &= \tilde{f}(y) + f(\tilde{y}) + \alpha c + \beta c \\ &= g_1(y + \alpha y_1) + g_1(\tilde{y} + \beta y_1) = g_1(x) + g_1(z). \end{aligned}$$

$ii)$ Agora mostremos que $g_1(\beta x) = \beta g_1(x)$.

$$\begin{aligned} g_1(\beta x) = g_1(\beta(y + \alpha y_1)) = g_1(\beta y + \beta \alpha y_1) &= \tilde{f}(\beta y) + (\beta \alpha) c \\ &= \beta \tilde{f}(y) + \beta(\alpha c) \\ &= \beta(\tilde{f}(y) + \alpha c) \\ &= \beta g_1(y + \alpha y_1) = \beta g_1(x). \end{aligned}$$

Além disso, se $\alpha = 0 \Rightarrow g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Portanto, g_1 é uma extensão adequada de $\tilde{f}$, onde $D(\tilde{f}) \subset D(g_1)$.

Agora, encontraremos um c adequado para $g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c$ que satisfaz $g_1(x) \leq p(x)$. Para isso, consideremos qualquer y e z pertencentes a $D(\tilde{f})$. De

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \text{ e } p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) = \tilde{f}(y - z) &\leq p(y - z) \\ &= p(y + y_1 - y_1 - z) \\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z) \\ &\Rightarrow -p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \qquad (1) \end{aligned}$$

onde y_1 é fixado. Podemos tomar o supremo (m_0) sobre $z \in D(\tilde{f})$ no lado esquerdo e o ínfimo (m_1) sobre $y \in D(\tilde{f})$ então $m_0 \leq m_1$ daí existe um c tal que $m_0 \leq c \leq m_1$. Da desigualdade (1) acima temos,

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c, \quad \forall z \in D(\tilde{f})$$

e

$$c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \quad \forall y \in D(\tilde{f}).$$

Provaremos agora que $g_1(x) \leq p(x)$, quando $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$.
i) Se $\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0$ e usamos a desigualdade $-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leq c$, substituindo z por $\alpha^{-1}y$. Assim,

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$:

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leq -\alpha c.$$

Utilizando essa última desigualdade e a igualdade $g_1(y+\alpha y_1) = \tilde{f}(y)+\alpha c$, usando $y+\alpha y_1 = x$, obtemos

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Ou seja, $g_1(x) \leq p(x)$.
ii) para $\alpha = 0$ obtemos:

$$g_1(x) = g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c = \tilde{f}(y) \leq p(x) \Rightarrow g_1(x) \leq p(x).$$

iii) Para $\alpha > 0$ usaremos $c \leq p(y + y_1) - \tilde{f}(y)$ com y substituído por $\alpha^{-1}y$, daí

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$, obtemos

$$\alpha c \leq \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y) \Rightarrow \alpha c \leq p(x) - \tilde{f}(y) \Rightarrow \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x),$$

Portanto, $g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leq p(x)$. Concluímos então que g_1 é um funcional linear que é uma extensão adequada de $\tilde{f}$ e que satisfaz $g_1(x) \leq p(x)$. Como isso não é possível, $D(\tilde{f}) = X$ e provamos nosso teorema. $\square$

Considerações finais

O Teorema de Hahn-Banach é um importante resultado da Análise Funcional e tem diversas aplicações interessantes. Através deste teorema mostramos a existência de extensões lineares limitadas de funcionais lineares limitados, definidos em subespaços de espaços vetoriais normados. Neste trabalho demonstramos a versão do Teorema de Hahn-Banach para o caso real, onde utilizamos o Lema de Zorn para garantir a existência dessas extensões. A realização do estudo acerca dos conteúdos abordados, tais como conceitos da Topologia e da Análise Funcional contribuíram para o enriquecimento e amadurecimento em relação à pesquisa matemática, despertando o interesse para uma possível pós-graduação na área da Matemática Pura e Aplicada. Com o auxilio da minha orientadora, pude aprofundar meus conhecimentos e busquei ao máximo aprender e melhorar o meu conhecimento matemático já existente e principalmente aprimorar a minha escrita matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Domingues, H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia - São Paulo: Atual, 1982.

[2] Kreyszig E. Introductory Functional Analysis with Applications - Wiley, 1989.

[3] Lima, E. L. Álgebra Linear - Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[4] Lima , E. L. Elementos de Topologia Geral- Rio de janeiro: Editora SBM, 2009.

[5] Lima , E. L. Espaços Métricos - Projeto Euclides, Rio de janeiro: IMPA, 2012.

[6] Louredo, A. T, Oliveira, A. M. Um Primeiro Curso de Álgebra Linear. Campina Grande: Eduepb, 2015.

[7] Pellegrino D., Botelho G. e Teixeira E. Fundamentos de Análise Funcional - Rio de Janeiro: SBM, 2012.