UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

KAROL WOJTYLA DE SOUZA

UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES DA LINGUAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DO CUBO MÁGICO

CAMPINA GRANDE - PB
2017

KAROL WOJTYLA DE SOUZA

UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES DA LINGUAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DO CUBO MÁGICO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso em Licenciatura em Matemática, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

CAMPINA GRANDE - PB
2017

S729a Souza, Karol Wojtyla de.
Uma análise das dimensões da linguagem matemática por meio da resolução do cubo mágico [manuscrito] : / Karol Wojtyla de Souza. - 2017.
36 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática - CCT."

1. Cubo mágico. 2. Cubo de Rubik. 3. Linguagem matemática. 4. Dimensões da linguagem.

21. ed. CDD 510

KAROL WOJTYLA DE SOUZA

UMA ANÁLISE DAS DIMENSÕES DA LINGUAGEM MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DO CUBO MÁGICO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso em Licenciatura em Matemática, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 11 / 12 2017

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Mozart Edson L. Guimarães

Prof. Me. Mozart Edson Lopes Guimarães
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Márcio da Silva R. Diniz

Prof. Me. José Márcio da Silva Ramos Diniz
Secretaria Municipal de Educação e Cultura de João Pessoa

Aos meus pais, a toda minha família e a minha namorada, por todo carinho, apoio e inspiração, que me fez acreditar na minha capacidade de chegar à conclusão deste curso, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar presente em meus pensamentos, nas minhas iniciativas e também na minha vida em momentos de glórias e tribulações que passei. Toda honra e toda glória seja dada ao senhor nosso Deus, porque nele eu encontro todas as respostas.

Aos meus amados pais, Paulo José de Souza e Maria Margarida de Souza, por todos os incentivos, esforços e motivação. A minha irmã Joseilda Maria de Souza, que lutou tanto para que eu conseguisse ingressar nessa caminhada, aos meus demais 14 irmãos que sempre me ajudaram. A minha namorada, Juliana Lira Sousa, e a minha enteada, Aline Lira Costa, que me deram força para que em nenhum momento eu fraquejasse nos momentos difíceis. Apesar de todas as dificuldades e limitações ao longo de todo o meu percurso acadêmico, a certeza de que eu poderia melhorar um pouco a vida da minha família não me deixou desistir nunca.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UEPB, que contribuíram com suas devidas instruções em sala de aula ao longo desses cinco anos da minha graduação por meio de suas disciplinas, em especial ao Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida pela a sua amizade, por todo incentivo e conhecimento transmitido.

Agradeço aos membros da banca, professores Mozart Edson Lopes Guimarães e José Márcio da Silva Ramos Diniz, pelas suas valiosas contribuições e por estarem presente nesse momento tão importante da minha vida.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar as dimensões da linguagem matemática por meio da montagem do cubo mágico, através do conhecimento e realização de algoritmos. A proposta foi lançada e aplicada com alunos do Programa Novo Mais Educação, da Escola Estadual Dr. Trajano Nóbrega, localizada na cidade de Soledade – PB. Para chegarmos a esse objetivo apresentamos o algoritmo de Rubik para montar um cubo mágico de versão 3x3x3, e logo após ensinarmos esse algoritmo sugerimos que cada um dos alunos fosse escrevendo como eles conseguiram montar o cubo mágico, ou seja, o aluno estaria criando o seu próprio algoritmo. Percebemos que alguns alunos mesmo sem ter um domínio da dimensão sintática da linguagem, conseguem dialogar sobre a montagem do cubo, cada um com a sua maneira, tendo como base a linguagem natural ou a linguagem figural para montar o cubo, e conseguem compreender o que estão fazendo, isso significa que eles têm o domínio da parte semântica sobre a atividade que lhes foi passada, mesmo sem saber que têm, e isso nos dar um indicativo para o ensino da matemática, pois um dos caminhos para se compreender essa parte sintática é ter uma compreensão das ideias e procedimentos, uma proposta contrária, tendo em vista que na matemática estamos acostumados primeiro ensinar os algoritmos para só então começar a resolver problemas.

Palavras-Chave: Cubo mágico. Cubo de Rubik. Linguagem matemática. Dimensões da linguagem.

ABSTRACT

The present work aims to analyze the dimensions of mathematical language through the assembly of the magic cube, through the knowledge and realization of algorithms. The proposal was applied with students of the New Program “Mais Educação”, in the School Dr. Trajano Nóbrega, located in the city of Soledade - PB. To reach this goal we present Rubik's algorithm to create a magic cube of 3x3x3 version, and soon after teaching this algorithm we suggested that each student write as they were able to assemble the magic cube, that is, the student would be creating his own algorithm. We realize that some students, even without having a mastery of the syntactic dimension of language, are able to talk about the assembly of the cube, each in its own way, based on the natural language or the figurative language to assemble the cube, they can understand what they are doing, which means that they have the domain of the semantic part about the activity that has been passed on to them, even without knowing, this gives us an indication for the teaching of mathematics, since one of the ways to understand this syntactic part is to have an understanding of ideas and procedures, a contrary proposition, since in mathematics we are accustomed to first teach the algorithms to only then begin to solve problems.

Keywords: Magic Cube. Rubik's Cubo. Mathematical language. Dimensions of language.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Não existe matemática sem linguagem. Isso que Almeida (2006) fala em seu livro, foi um dos motivos que nos levaram a tentar descobrir os passos da matemática no mundo linguístico. Neste trabalho estão destacadas algumas situações nas quais a linguagem tem fundamental importância para se entender a matemática.

Ao longo de nossa carreira acadêmica nos deparamos várias vezes com disciplinas que falavam que a matemática era na verdade uma linguagem, desfazendo o que nos foi imposto até então sobre a matemática, “algo pronto e acabado”. A ideia de que o aluno antes de resolver qualquer problema matemático deve saber o que ele irá fazer, em outras palavras, para que o aluno consiga se desenvolver melhor, ele terá que ter o entendimento sobre as ideias. O professor por sua vez, deve considerar todos os passos que o aluno percorreu até chegar a uma determinada solução, não apenas o resultado final.

Uma disciplina ministrada pelo professor Doutor José Joelson Pimentel de Almeida, foi o ápice para levarmos adiante o projeto que iremos destacar ao longo deste trabalho. O fato determinante foi quando conhecemos o cubo mágico e o professor nos pediu para estudarmos e aprendermos o algoritmo de Rubik, após isso montar o cubo mágico criando o nosso próprio algoritmo, ou seja, os caminhos necessários para montar por completo o cubo mágico. Terminada a nossa apresentação para o professor, nos veio a ideia de aplicarmos esse desafio aos nossos alunos do Programa Novo Mais Educação, da Escola Estadual Doutor Trajano Nóbrega, na cidade de Soledade, onde o público alvo são crianças carentes e com grande dificuldade na disciplina de matemática e em língua portuguesa.

O intuito era ver as dimensões da linguagem utilizada por esses alunos e os caminhos seguidos por eles até montar o cubo. De início apresentamos outros desafios que exigem um pouco de raciocínio e leitura para então apresentarmos o algoritmo de Rubik. Logo depois falamos sobre o que fizemos na universidade, e então, lançamos o desafio para que eles fizessem o mesmo que nos foi pedido. Os resultados estão destacados ao longo deste trabalho.

Dessa forma, no primeiro capítulo discutimos as dimensões da linguagem matemática, segundo Carmen Gomes Granell (1997), Almeida (2016) e outros autores que defendem que a linguagem matemática não pode ser esquecida. Vimos que as dimensões da linguagem matemática são sintática, semântica e pragmática. O que esses autores defendem é que a matemática deve ser ensinada da mesma forma que qualquer outra qualquer língua, e o aluno precisa antes conhecer a linguagem envolvida e os caminhos até chegar-se a uma resposta para o que se que responder. O aluno, no geral, está acostumado a apenas decorar fórmulas, e resolver problemas matemáticos, fórmulas essas que lhe foi ensinado a decorá-las, para então chegar a um resultado esperado, porém raramente leva-se em consideração o que o aluno utilizou e o que fez até chegar ou não a esse resultado.

No segundo capítulo apresentamos algumas considerações acerca da historia do cubo de Rubik ("cubo mágico", escrito em alguns momentos deste trabalho), assim chamado em homenagem ao seu inventor Ernő Rubik. Falamos sobre alguns métodos para montar o cubo mágico e destacamos algumas versões disponíveis no mercado, para o estudo deste projeto foi dada ênfase à versão 3x3x3, por fim apresentamos todo o algoritmo para montar. Fomos mostrando cada passo e ensinando todo o algoritmo criado, para isto usamos a linguagem algorítmica, algumas vezes a linguagem natural e também a linguagem figural.

No terceiro capítulo apresentamos os dados e fizemos uma análise acerca de tudo que os alunos fizeram no trabalho. Foram considerados todos os registros feitos pelos alunos e, a partir deles, fomos tirando as nossas conclusões.

CAPÍTULO 2

AS DIMENSÕES DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Muito tem se discutido sobre a matemática e sua linguagem, mas uma coisa que não se pode negar é que uma não caminha sem a outra, tendo em vista que a matemática não deve ser apenas repetir algoritmos ou decorar fórmulas. Alguns autores defendem que a matemática e a linguagem devem caminhar juntas, uma ao lado da outra. Almeida (2016), por exemplo, defende que não tem como ensinar de forma que a linguagem e a matemática não sejam uma o complemento da outra. Segundo ele, quando tentamos ensinar matemática sem atentarmos para a linguagem ou uma linguagem sem atentarmos para matemática estamos criando monstros desconhecidos.

> Não sendo assim, os professores correrão o risco de ensinar duas coisas totalmente desvinculadas da Matemática: uma seria a Matemática sem linguagem (um monstro incomunicável), outra seria uma linguagem sem Matemática (algo como vozes do além-desconhecido). (ALMEIDA, 2016, p. 129)

Almeida (2016), concordando com Pimm (1990) e D'Amore (2007), defende que os professores não podem achar que conseguirão ensinar uma linguagem matemática a seus alunos se esses não conseguem se comunicar e utilizar essa linguagem no cotidiano. Um bom exemplo é das crianças ao serem confrontadas com situações-problema em que elas têm que ler e interpretar uma situação quando, na verdade, ainda nem sabem direito o significado de algumas palavras.

Vamos tomar como exemplo o seguinte enunciado*:

> Resolva e responda no caderno
> a) Pensei em um número, adicionei 25 a ele e obtive 81. Em que número pensei?
> b) Tinha uma quantia, gastei R$ 147,00 e fiquei com R$ 209,00. Que quantia eu tinha?

Temos notado que para a criança é um pouco complicado descobrir o que a questão realmente quer que seja respondido. Feito isso, outra dificuldade encontrada nos alunos é a forma de como encontrar esses números desconhecidos. Se o aluno não conhece a linguagem

---

* Problema retirado do livro *Matemática ápis*, 5º ano, Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 2016, p. 69.

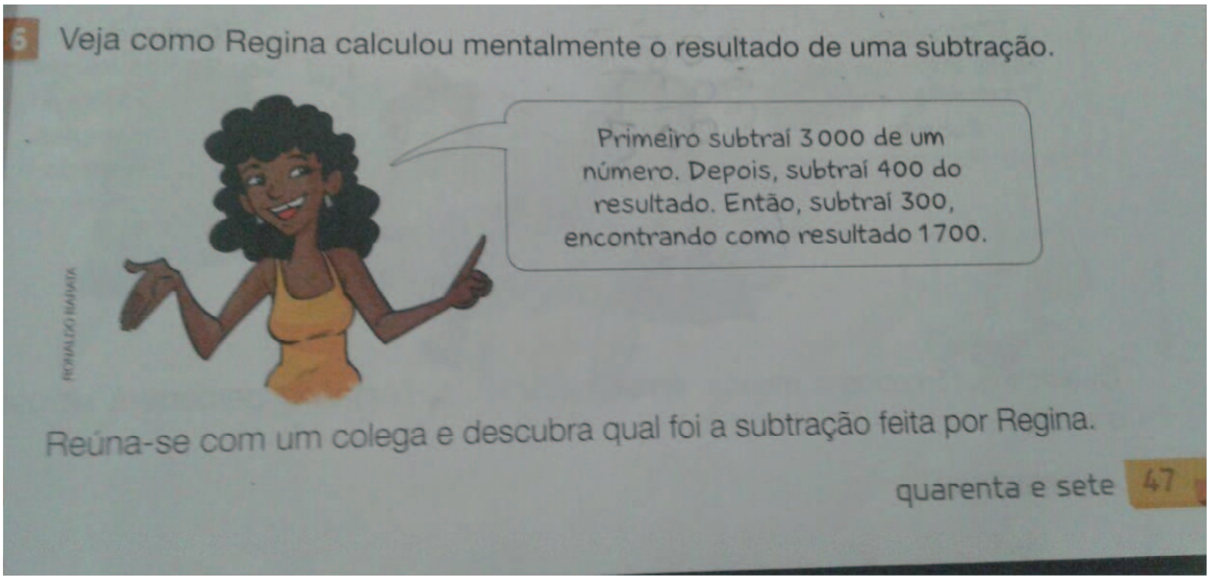
matemática, ao se defrontar com o problema anterior ele logo vai se perguntar, "se eu nem sei quanto eu tinha [na pergunta da letra b, por exemplo], então como irei gastar essa quantia?".

Outro ponto que temos observado nas crianças dos anos iniciais do ensino fundamental é o de saber qual operação usar em uma determinada pergunta. Não é de estranhar se uma delas vir a perguntar: "essa é de mais ou de menos?". Alguns alunos ainda sentem dificuldades quando se deparam com um determinado problema que exija uma ampla visão do cotidiano. Talvez esse seja um dos fatores que também contribuem para o chamado fracasso escolar tendo em vista que até no Ensino Médio encontramos alunos com muita dificuldade em uma das quatro operações.

Conforme argumenta Almeida (2016, p. 129), "deveríamos aprender, a nos comunicar matematicamente para depois aprender a sintaxe da linguagem". Logo depois o autor faz uma crítica sobre como os professores e os livros didáticos fazem para ensinar matemática, a numerologia é mais importante que a linguagem, o que ele chama de ensinar o caminho inverso.

Ensinar ao aluno a desenvolver operações quando na verdade ele ainda não tem o domínio da linguagem. Alguns livros didáticos, por exemplo, trazem como enunciado perguntas que exigem dos alunos saber o significado de subtrair, adicionar, diferença, quando na verdade alguns alunos ainda não sabem identificar o que significam essas palavras. No excerto abaixo, temos um exemplo disto.

Figura 1: Atividade de um livro didático envolvendo subtração.



Fonte: Projeto Buriti, Matemática, 4º ano. São Paulo: Moderna, 2014. p. 47.

Note a ampla visão que o aluno precisa ter. Difícil não é a criança ler, mas interpretar qual é o objetivo do enunciado. Nesta questão, o aluno tem que está conhecendo a linguagem e o que significa cada uma das operações matemáticas, para só depois encontrar um valor que seja o resultado dessa pergunta. Quando o autor diz que Regina pegou um número e fez várias subtrações até encontrar o resultado 1700, deixa a entender que o aluno já sabe o significado da palavra subtrair. Então antes do aluno ser desafiado a descobrir esse numero desconhecido, ele tem que ser ensinado a se familiarizar com a linguagem. Pois acreditamos que quando uma criança não entende a mensagem que quer ser passada para ele e não está adaptado a maneira que foi exposta, dificilmente ele irá saber como sair de determinados problemas que exijam esse conhecimento. No exceto anterior, por exemplo, alguns alunos não sabem expressar o que seria subtrair, e é isso que estamos defendendo aqui, antes deve ser trabalhado esse sentido da palavra.

A linguagem matemática é um complemento que precisamos para ensinar matemática. Quando nós não a levamos em consideração, estamos correndo o risco de ensinar algo incompleto, pois se o aluno não conhece a linguagem então haverá momentos em que ele não saberá o que deve responder, pois se ele não consegue compreender o que a questão quer, logo ele não saberá como responder o que o leva a desistir de responder e dizer que não sabe a resposta.

Muitos alunos perdem o interesse por aprender matemática porque sempre se deparam com enormes equações a serem resolvidas enquanto isso, parte dos professores que pouco levam em consideração o pensamento do aluno, alguns dizem que a matemática é algo concreto ou que o resultado de uma determinada questão é apenas um e não tem outro caminho a seguir, mas a cada dia esse pensamento vem perdendo força. Almeida (2016) cita Pimm (1990) e diz que para ensinar matemática deve-se ter algo que queira expressar e sugere que as aulas de matemática sejam mais dinâmicas, com mais oportunidades de dialogo, que não haja apenas o treinamento excessivo de fórmulas matemáticas.

Conforme Almeida (2016), Barton (2009), em seu livro *The language of mathematics: telling mathematical tales,* argumenta que a matemática e a língua caminham juntas e uma afeta a outra, que a linguagem matemática evolui dos ambientes físico e social e ainda que aprender e fazer matemática envolve conversar matemática. esclarecendo o que já foi dito até aqui. Daí, podemos falar que o discurso pode contribuir para o ensino dessa linguagem. Vamos considerar algumas dimensões da linguagem matemática para entendermos melhor.

Dimensões da linguagem matemática

A parte em que utilizamos a representação é a que chamamos de *dimensão sintática*, ela é a que caracteriza tudo que podemos representar matematicamente, uma operação quando está sendo expressa, estamos fazendo uso de uma representação, uma operação de subtração, por exemplo, que alguns alunos ainda não sabem expressar qual o sinal, aí estamos expressando sintaticamente a linguagem matemática.

Quando seguimos um referencial para identificar qual operação significa a subtração, esse referencial é o que chamamos de *dimensão semântica*. Ao interpretar uma determinada questão precisamos de um referencial, por que se não sabemos o que a questão quer saber, então não sabemos o que responder e todo enunciado de uma determinada questão deve ter alguns referenciais que nos ajudem a identificar o que se deve ser respondido, daí a dimensão semântica é que se faz presente na matemática.

E por último, porém não menos importante, temos a *dimensão pragmática* que a que nos permite o diálogo com outras pessoas sobre o conteúdo, esse texto sobre linguagem matemática, por exemplo, existem vários outros que concordam ou que discordam sobre as ideias nele expostas, que falam da matemática diferente ou não do que já foi lido até aqui, é a dimensão pragmática que caracteriza todos os pensamentos dos alunos em uma determinada questão, e leva em consideração todos os caminhos de cada aluno sobre uma determinada questão.

Como ocorre com qualquer outra linguagem, o domínio da linguagem matemática implica em conhecimentos de aspectos sintáticos e semânticos, não esquecendo que a linguagem matemática é uma linguagem específica de discurso que, embora seus significados referenciais, possui a sua própria especificidade como um discurso linguístico (ALMEIDA, 2016,p.138).

Para Gomes-Granell (1997), não se pode não se pode aprender qualquer linguagem apenas usando regras ou utilizando sequências, deve antes de tudo adquirir um grau de competência que permita utilizar corretamente essa linguagem.

Segundo Almeida (2016), Morgan diz que textos matemáticos não consistem apenas em sequências de símbolos, vocabulário específico e nomeação de coisas, que eles são como qualquer outro texto, ele tem um alvo a ser persuadido, ou seja, a intenção é passar uma mensagem para alguém que o leia. Podemos dizer então que a linguagem matemática é como um resultado da linguagem natural com o acréscimo de características matemáticas, como descrevem alguns autores. Nem, sempre devemos dizer isso, pois não é apenas a linguagem natural que possui características matemáticas, o inverso também acontece segundo Almeida (2016). Assim, para ele a linguagem natural podem também possuir aspectos matemáticos, citando o exemplo das expressões “se, e somente se”, “se...então”. Logo essas expressões que demonstram as dificuldades encontradas na linguagem matemática podem ter tido origem na linguagem ordinária ou natural.

Um texto matemático não traz apenas um vocabulário específico e uma boa estrutura, mas um texto matemático quando estudado a fundo, traz bem mais coisas a serem descobertas. É o que fala Almeida (2016) quando cita que, segundo Morgan, essas características tendem a concentrar a atenção do leitor na demonstração de um resultado, quanto mais interessante for a pergunta ou o desafio proposto, mais o leitor terá curiosidade em desvendar a resposta. Porém, a matemática ainda é vista por muitos como uma disciplina apenas de cálculo e de fórmulas a serem demonstradas e acabam que esquecem todas as outras características que ela tem, como, por exemplo, o aspecto lúdico, que tem como principal característica o brincar matematicamente.

Quando o dia a dia do aluno é posto em prática dentro do ensino da matemática, é notável o quanto o aprendizado flui, basta olhar em volta da sala e mostrar o mundo e como a matemática está aos vossos olhos, ventiladores, cadeiras, pedir para o aluno calcular o preço do lanche, por exemplo, a idade dos pais, esses e outros exemplos são visíveis, e que contribui muito mais que aqueles quadros cheios de macetes para resolver uma determinada questão. O aluno é muito curioso ao que se diz respeito a vida dele próprio. Quando o aluno se depara perguntas, ou situações do seu cotidiano, percebe um maior interesse, por parte dele, para descobrir o resultado de deixar ele procurar um caminho para uma determinada pergunta pode ser o caminho.

Almeida (2016) citando D’Ambrosio(2009), argumenta que a aprendizagem matemática deve ocorrer a partir do cotidiano, tendo a familiarização com o real, o concreto, a curiosidade sobre fatos e fenômenos, como pontos de partida para, depois, representar esses fatos e fenômenos, criar sinais e códigos para essas representações. Segundo D’Ambrosio é tarefa do professor deixar o aluno aflorar a sua criatividade e também é dever dele ir acompanhar o crescimento tecnológico e analisar o raciocínio do aluno. Almeida por sua vez diz que a matemática se realiza em cada momento nos processos dialógicos que ocorrem no cotidiano das pessoas, quando discutem sobre algo envolvendo ideias matemáticas, o que necessariamente envolve algo de sua linguagem.

Sem dúvidas estudar matemática não é e nem deve ser apenas decorar fórmulas, resolver problemas, aprender operações, mas também se inclui o pensar, o descobrir algo novo, não se pode ensinar matemática com o pensamento de que já existe uma formula de resolver uma determinada questão, deve-se atentarmos para outros caminhos e deixar o aluno abrir espaço para a sua criatividade e o seu raciocínio em cada situação, o aluno é muito curioso e quando se deparado com o seu cotidiano ele desperta uma curiosidade muito grande de desvendar o mistério para assim resolver um determinado problema, por isso alguns autores defendem tanto o ensino da linguagem matemática, porque o aluno deve primeiro aprender falar matematicamente para só depois aprender os outros requisitos.

Segundo Almeida (2016), Gómez-Granell (1997) em sua proposta de integração de aspectos sintáticos e semânticos da linguagem matemática. Para Granell a linguagem matemática possui três dimensões, sintática, semântica e a pragmática. Ambas com fundamental importância e nos deixam bem claro que não existe matemática sem linguagem. Uma coisa é fato, não se pode ensinar matemática a um aluno que não entenda a linguagem.

É nítido que para o aluno aprender matemática, deve antes de tudo saber falar matematicamente, ou seja, primeiro ele deve aprender uma linguagem adequada para daí poder pensar e falar matematicamente. Para ensinar matemática da mesma forma, deve-se primeiro ensinar uma linguagem que os alunos entendam e que compreendam o que se está sendo dito, para não criar barreiras na relação professor/aluno. A matemática, como qualquer outra língua, possui características próprias e deve ser ensinada como todas as outras, pois matemática não é difícil, difícil é encontrar a forma certa de ensinar.

CAPÍTULO 2

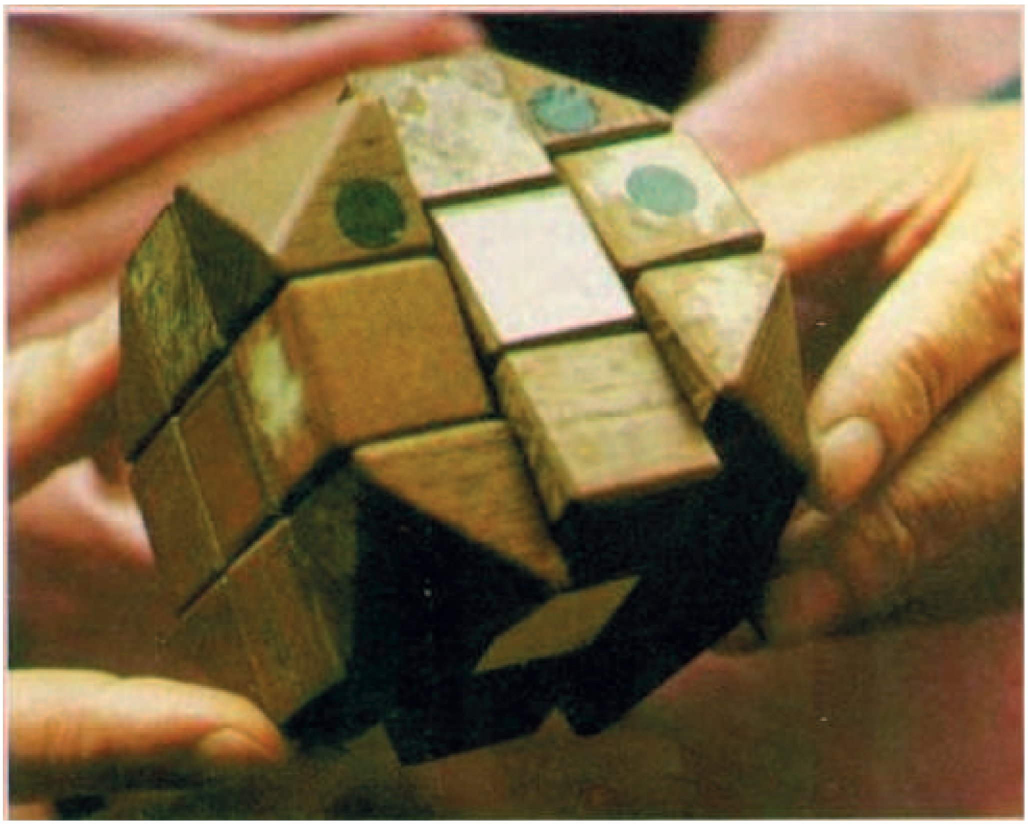
CUBO MÁGICO – BREVE HISTÓRICO

Cubo de Rubik, também conhecido como cubo mágico, é um quebra-cabeça tridimensional, inventado pelo húngaro Ernő Rubik em 19 de maio de 1974. Originalmente foi chamado "Cubo Mágico" pelo seu inventor, mas o nome foi alterado pela Ideal Toys para "cubo de Rubik". Nesse mesmo ano, ganhou o prémio alemão do "Jogo do Ano" (Spiel des Jahres). Ernő Rubik demorou um mês para resolver o cubo pela primeira vez. O cubo de Rubik tornou-se um ícone dos anos 1980, década em que foi mais difundido.

Silva (2015) conta que Ernő Rubik tinha a intenção de criar um protótipo de cubo para ilustrar o conceito de terceira dimensão para os seus alunos do curso de arquitetura. Segundo Silva, a primeira peça criada por Erno Rubik era feita de madeira e teve todos os seus lados pintados pelo próprio professor, que se inspirou em quebra-cabeças conhecidos para inventar o objeto, como por exemplo, o tangram.

O autor, no entanto, conta que no início não foi fácil, que depois de mostrar o protótipo para seus alunos e amigos, o próximo passo era fabricá-lo. Os primeiros cubos foram fabricados e distribuídos na Hungria, e logo obtiveram grande aceitação por parte da população, porém seu peso era o dobro dos que seriam fabricados mais tarde. Um fato que dificultou foi que a Hungria pertencia ao regime comunista, o que impedia o objeto de ser exportado para outros países durante esses anos. Só no ano de 1977 o cubo mágico foi lançado no mercado húngaro e, três anos depois, alcançou sua fama mundial quando alguns matemáticos da época ajudaram a divulgar o objeto, o apresentando em conferências e a uma feira de brinquedos em Nuremberg, em 1979. Foi nesta feira que o objeto encantou os participantes e a um especialista no mundo dos brinquedos, Tom Kremer, que concordou distribuir e comercializar em todo o mundo através de uma pequena empresa chamada Toys Company, e daí então o batizaram com o nome de ‘Cubo de Rubik’ em homenagem ao seu inventor. O cubo de Rubik tornou-se parte da cultura pop e pessoas conhecidas como Cubes já começavam a se reunir para resolver o cubo o mais rápido possível.

Figura 2: Protótipo de Rubik



Fonte: Siscube – O cubo mágico virtual. Disponível em: http://cubomagicobrasil.com/siscube/sobreocubomagico.html. Acessado em 03 nov. 2017.

Nos dias atuais, o cubo mágico vem crescendo muito no espaço de materiais lúdicos, pessoas que disputam para ver quem monta mais rápido o objeto. Sites ensinam passos, alguns explicam o que chamamos de “algoritmo”. O objetivo é deixar todas as cores correspondentes de um mesmo lado, e dificilmente quem não entende um pouco sobre linguagens irá entender esse algoritmo que ajuda a montar o cubo mágico.

Quem ainda não conhece o cubo de Rubik pode achar estranho o que estamos dizendo aqui, entretanto tentaremos expor algumas características do objeto para uma melhor compreensão do que vem a ser esse simples brinquedinho que nos desafia há alguns anos.

O cubo de Rubik é um brinquedo que normalmente é acessível ao público e alguns tem baixo custo. É geralmente confeccionado em plástico e possui várias versões, sendo a versão 3x3x3 a mais comum, composta por 6 faces de 6 cores diferentes, com arestas de aproximadamente 5,7 cm. Outras versões menos conhecidas são a 2x2x2, 4x4x4 e a 5x5x5. É considerado um dos brinquedos mais populares do mundo, atingindo um total de 900 milhões de unidades vendidas, bem como suas diferentes imitações. Após misturadas, o objetivo do jogo é deixar novamente cada face com apenas uma cor e, como já foi dito anteriormente, existem várias versões do brinquedo, porém a mais conhecida, a qual vamos estudar aqui será a versão 3x3x3.

> Vários objetivos cognitivos podem ser alcançados pelo uso de jogos, Grando destaca que nos jogos os procedimentos de raciocínio, as regras, as tomadas de decisões e a elaboração de estratégias são equivalentes aos elementos necessários ao pensamento matemático. (SILVA, 2015, p. 18)

Trabalhar jogos matemáticos durante as aulas de matemática, além de tornar as aulas mais dinâmicas, desafia o aluno a trabalhar o seu cérebro. A seguir, serão expostas as considerações obtidas da nossa investigação sobre o que fazer para conseguir montar o cubo, quais os procedimentos, como montar em menos tempo e de que forma faz o aluno se interessar mais por aprender a linguagem para lograr êxito na montagem, aflorando a curiosidade e a tentativa de encontrar caminhos menores para se chegar a um resultado esperado.

Montando o cubo de Rubik

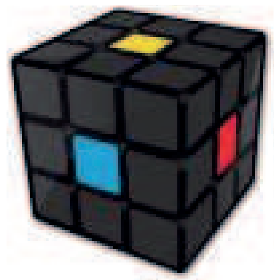
O cubo 3x3x3 é constituído por vinte e seis cubinhos, nove em cada face, sendo um desses fixo no centro do cubo. São três tipos de peças: centros, meios e cantos. Os centros possuem apenas uma cor, os meios possuem duas cores e os cantos possuem três cores, ou seja, os 26 cubinhos dividem-se em seis centros, doze meios e oito cantos, como mostra a figura a abaixo.

Figura 3: Cubo mágico (cubo de Rubik)

Fonte: APRENDDA. Disponível em https://www.aprendda.com/como-montar-cubo-magico.html. Acessado em 03 de nov. 2017.

O cubo possui cores tradicionais: verde, vermelho, amarelo, azul, branco e laranja. As cores do centro são parafusadas e sem núcleo, e consequentemente, fixas, o que significa que as cores opostas também serão sempre as mesmas, ou seja, cada cor tem uma única cor oposta**.** Existem cubos com cores diferentes destas, porém o método de resolver é o mesmo e, para saber qual é a cor de uma face, basta olhar a cor da peça do centro.

Figura 4: Centros do cubo



Fonte: Cubo Velocidade. Disponível em: http://www.cubovelocidade.com.br/tutoriais/cubo-magico-basico-pecas.html. Acessado em 03 de Nov. de 2017.

Como estamos falando em linguagens, para executar o algoritmo antes deve-se conhecer a notação do cubo, que indicará qual lado e qual sentido devemos girar o cubo. O lado é dado de acordo com cada nome e, para o sentido, usaremos o apostrofo (’) ou a ausência dele. Cada lado do cubo chamamos de uma letra correspondente a seu nome: F - (frente) a que fica na frente do usuário, a face posterior que fica oposta à frente chamamos de T - (trás), a face superior C - (cima), a face oposta a que está em cima B – (baixo), a face esquerda chamamos de E - (esquerda) e a sua oposta chamamos de D - (direita). Usaremos também outras notações como, por exemplo, D’ representa um giro de 90° da face direita no sentido anti-horário e D2 significa dois quartos de volta em qualquer sentido, ou seja, um giro de 180°, e D um giro de 90° no sentido horário, M - (meio).

Notemos que há sim uma linguagem matemática envolvida, por exemplo, aplicar os movimentos fazem diferença ou não. Aplicar o movimento E seguido de D é diferente de aplicarmos o movimento D seguido de E. Em alguns casos, as combinações dos movimentos podem ser comutativa, de modo geral temos que, se m e n são números reais quaisquer então m x n = n x m, a que chamamos de propriedade comutativa.

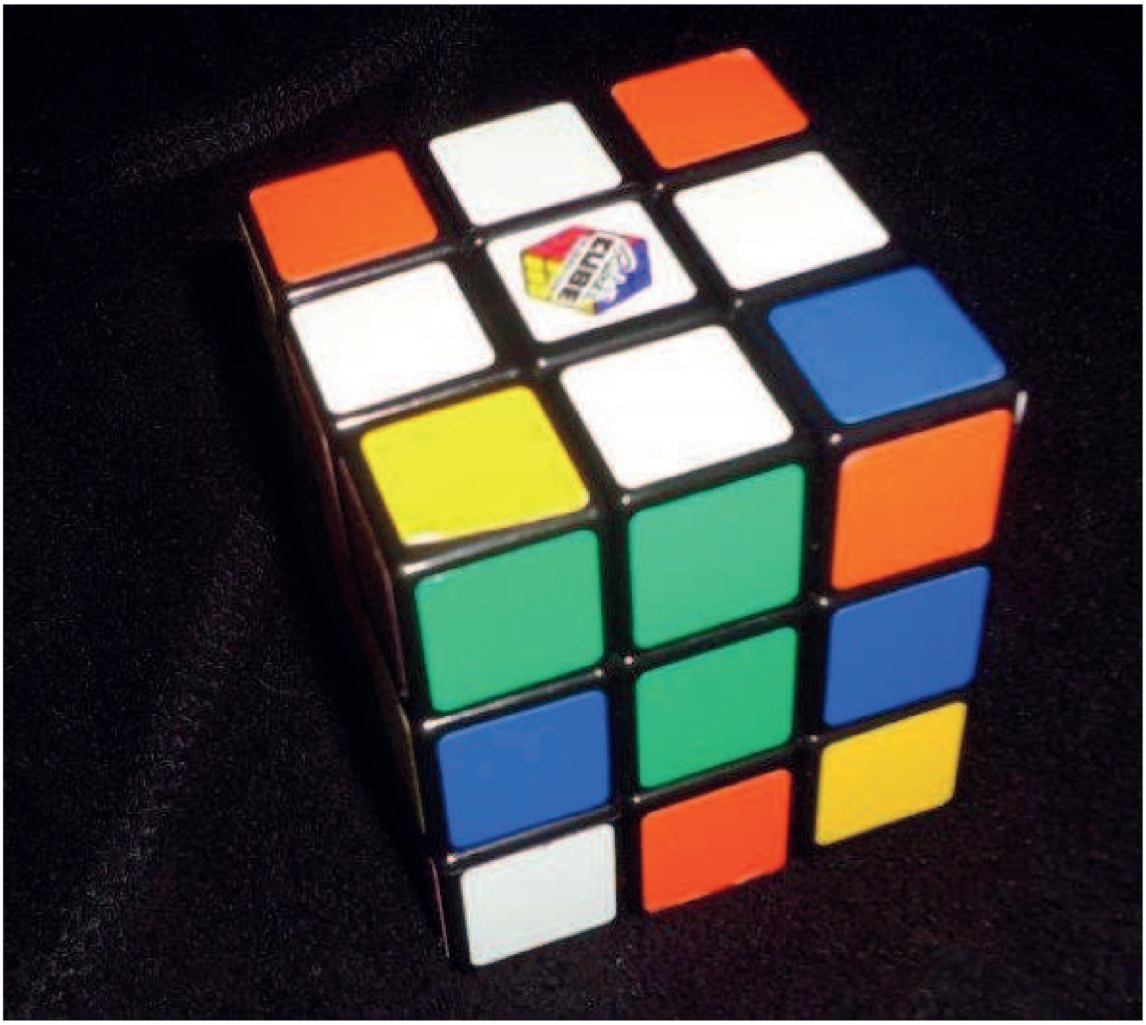
Para resolver o cubo mágico, há varias maneiras distintas, citamos o método chave-de-fenda, o método empírico, o método estratégico — método de camadas que apresentaremos a seguir — e o método algébrico. O método de camadas consiste em tomar um conjunto de algoritmos realizando tarefas num sistema tutorial passo a passo para a solução do cubo.

“A opção ideal para quem está iniciando é o método de camadas. Ele consiste em sete passos e devem ser decorados para finalizar a montagem do cubo” (SILVA, José Vinícius Nascimento, 2015, p 24). São sete passos necessários para conseguir completar todo o cubo mágico, listamos aqui todos eles.

1º PASSO: Começando a explorar o cubo

Escolher uma face (cor, sugerimos que seja escolhida a cor branca) e construir uma cruz nela, respeitando os centros do cubo, essa cruz é bastante intuitiva, existe um algoritmo, porém apenas com uma simples observação pode-se construí-la facilmente. Procure as peças do meio com a cor branca e veja se consegue movê-las até o seu lugar, de modo que, por exemplo, a peça do meio, que possui as cores branca e azul, deve estar na posição correta de suas respectivas peças do centro, como mostra a figura abaixo. Caso a peça do meio não esteja no lugar certo, basta fazer os movimentos F’ C E’ C’.

Figura 5: Cruz branca na parte superior

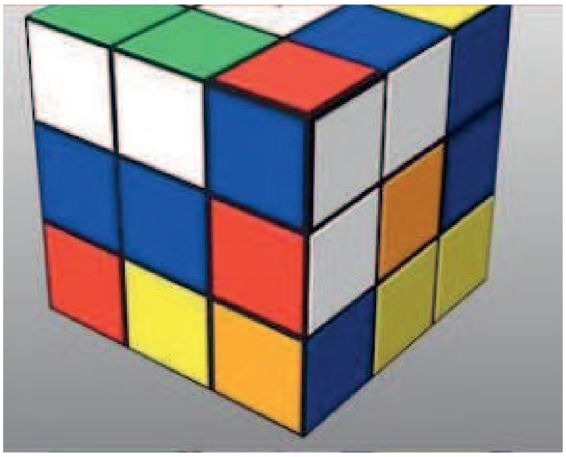


Fonte: PALPITE DIGITAL. Disponível em: https://www.palpitedigital.com.br/wp/2016/03/08/como-resolver-cubo-magico/. Acessado em: 03 de Nov. de 2017.

2º PASSO: Montando a primeira camada

Temos quatro peças em seus devidos lugares e queremos colocar as outras quatro peças no canto para completar uma face e passarmos ao passo seguinte. Temos que levar em consideração que iremos preservar a cruz branca na parte de baixo do cubo e buscaremos as peças de canto com três cores, de modo que na camada de cima encontraremos um cubinho com a cor branca e outra cor também na camada que, ao girarmos o cubo, uma delas ficará em nossa frente, coloque o cubinho com a cor diferente do branco no seu respectivo centro, de frente para este determinado centro, e execute um desses algoritmos: D C D' (se o cubinho branco estiver do lado direito) ou EC'E' (se o cubinho branco estiver do lado esquerdo).

Figura 6: Branco na camada de cima



Fonte: WikiHow. Disponível em: https://pt.wikihow.com/Resolver-um-Cubo-M%C3%A1gico. Acessado em 03 de Nov. de 2017.

A figura acima mostra bem o que foi dito, de frente para o centro azul, o cubinho com as cores azul, branco e vermelho ficará no lado direito, daí é só aplicar o algoritmo D C D', caso fique do lado esquerdo usa-se o outro algoritmo mencionado a cima.

3º PASSO Montando a segunda camada

O objetivo é construir a segunda camada do cubo. Com a face branca sempre para baixo, execute o algoritmo de acordo com as figuras abaixo:

Figura 7: CDCD'

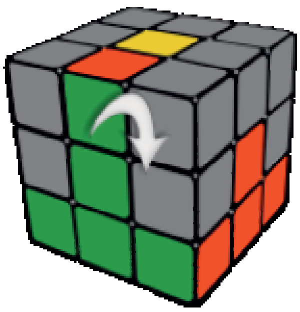


Figura 8: C'EC'E'

Fonte: HOW TO SOLVE. Disponível em https://how-to-solve-a-rubix-cube.com/f2l/. Acessado em: 04 de nov. de 2017.

Após executar um desses dois algoritmos, você irá se deparar novamente com algo parecido com o segundo passo, então é só executar o algoritmo do segundo passo. Note que o algoritmo move o meio de cima para a camada do meio sem desmanchar a primeira camada.

4º PASSO: Cruz da última camada

Neste, o alvo é construir a cruz da última camada. Com a face branca para baixo, agora basta executar um dos dois algoritmos abaixo.

Figura 9: FCDC'D'F'

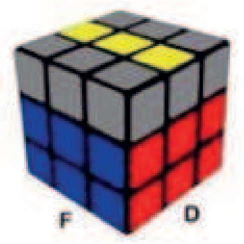
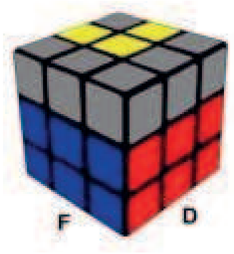


Figura 10: FCDC'D'F'



Fonte: CUBOMÁGICOFÁCIL. Disponível em http://www.cubomagicofacil.com/2013/03/. Acessado em: 04 de Nov. de 2017.

Se a última camada não existir meios com a cor amarela, execute o primeiro algoritmo e depois o segundo. Existem alguns casos em que não se pode executar nenhum dos dois algoritmos acima, nesses casos basta girar o cubo de modo que o cubinho amarelo não fique em cima da face de frente.

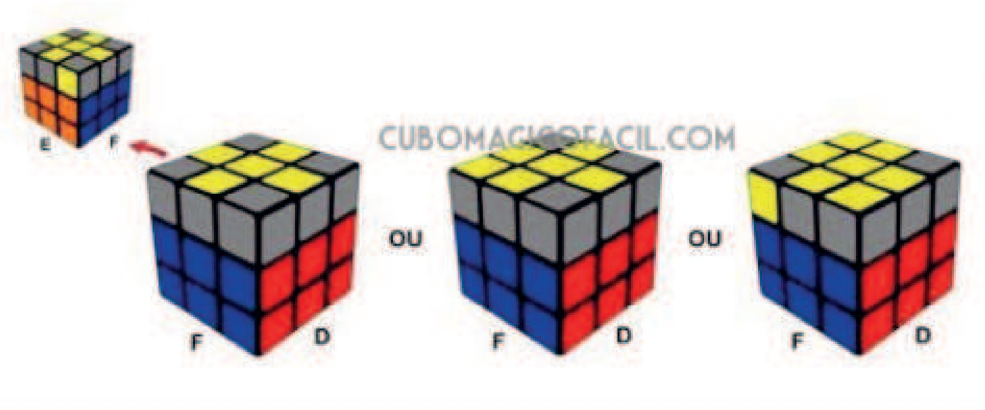
Figura 11: cubinho amarelo em cima da face da frente

Fonte: CUBOMÁGICOFÁCIL. Disponível em http://www.cubomagicofacil.com/2013/03/. Acessado em: 04 de Nov. de 2017.

5º PASSO: Face amarela em cima

O objetivo aqui é consertar as peças do meio da face amarela. Consideramos então alguns casos:

Figura 12: Onde fica o canto amarelo?



Fonte: CUBOMÁGICOFÁCIL. Disponível em: http://www.cubomagicofacil.com/2013/03/montar-cubo-magico-etapa-6.html#.Wf0iWltSzIU. Acessado em 04 de Nov. de 2017.

A figura acima mostra bem onde devemos deixar os cantos amarelos. Devemos considerar os casos em que a face de cima contém um canto, dois ou nenhum canto amarelo, feito isso basta em qualquer um desses casos aplicar o algoritmo DCD'CDC2D', uma, duas ou três vezes e toda a face amarela estará pronta.

6º PASSO: Permutação dos cantos

Agora, vamos preparar os cantos da última camada com um algoritmo chamado de "L". Ainda com a face branca voltada para baixo e considerando os casos a seguir, se a última camada possui uma face com os cantos corretos, coloque essa face para traz do seu cubo e execute o algoritmo D'FD'T2DF'D'T2D2, agora é só girar a camada de cima e colocar em seus devidos cantos. Caso não tenha nenhuma face com os cantos prontos quando você executar o algoritmo acima, uma vez considerando qualquer face de frente, você irá se deparar com o caso anterior, então é só executar o algoritmo mais uma vez e estarão prontos os cantos da face de cima.

Figura 13: cantos prontos

Fonte: CUBOMÁGICOFÁCIL. Disponível em: http://www.cubomagicofacil.com/2013/03/montar-cubo-magico-etapa-7.html#. WjUDBFWnHIU. Acessado em 05 de Nov. de 2017.

7º PASSO: Finalizando o cubo

Ao fim do 6º passo e com a face amarela voltada para cima do cubo, consideraremos algumas possibilidades: Se a última camada possuir os cantos corretos, o cubo estará montado. Se alguma das outras faces (que não seja a face branca e a amarela), está montada, coloca-se essa face para traz e executa-se o algoritmo que chamamos de “minerva’, F2C ou C’ (de modo que a cor do meio corresponda com o centro de sua frente), MC2M’C ou C’. Se nenhuma face estiver pronta, então basta executar o algoritmo F2CMC2M’C, e então você irá chegar ao caso anterior e basta executar o algoritmo correspondente.

Feitos todos esses passos, seu cubo mágico estará montado, ou seja, ele está em sua configuração inicial.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Ao conhecer o cubo mágico, percebe-se uma grande relação com a linguagem matemática, tendo em vista que os algoritmos nada mais são do que linguagens codificadas para montar o cubo. O uso de jogos nas aulas de matemática, como por exemplo, quebra-cabeças, desafios matemáticos e outros do tipo, ajudam o aluno a desenvolver melhor seu raciocínio. Silva (2015) diz que a prática regular desses tipos de jogos prepara a nossa mente para processar a informação de uma maneira mais lógica e rápida, buscando soluções cada vez mais eficazes e seguras.

Fizemos uma pesquisa de campo para analisar como alguns alunos lidam o quanto eles reconhecem e irão utilizar a linguagem matemática. A escola escolhida foi a Escola Estadual Doutor Trajano Nóbrega, na cidade de Soledade, no estado da Paraíba. Escolhemos alunos dos anos finais do ensino fundamental, esses por serem nossos alunos do Programa Novo Mais Educação.

Primeiro, começamos aplicando o desafio de palitos de fósforo, no qual o aluno tem que mover ou retirar palitos para montar algumas figuras, veja:

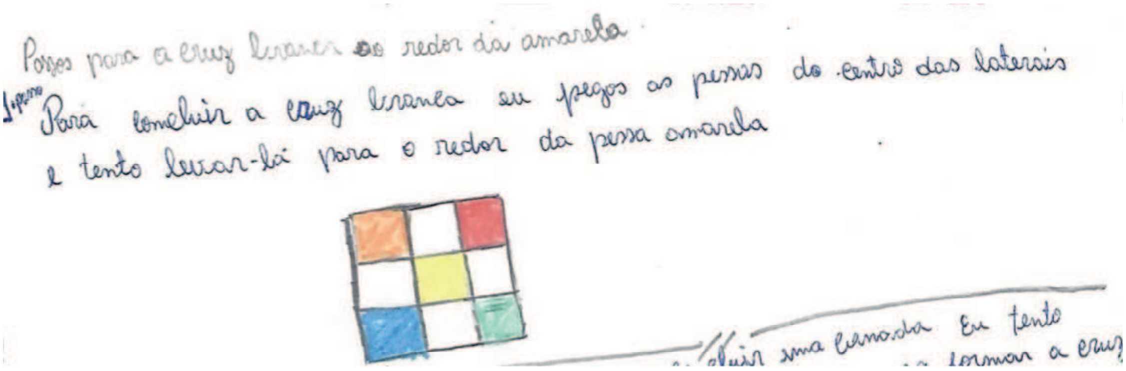
Figura 14: Desafio com palitos de fósforo

Fonte: PIBID MATEMÁTICA. Disponível em: http://pibidmath.blogspot.com.br/2014/03/desafio-com-palitos.html. Acessado em 06 nov. 2017.

Outro desafio foi um bem conhecido, o do quadrado mágico. Após aplicarmos esses jogos, notamos a curiosidade se aflorando a cada desafio. Foi então que decidimos aplicar o cubo de Rubik. Explicamos cada característica que o cubo tem e explicamos o método de camadas, mostramos o algoritmo de Rubik para eles depois mostramos o que construímos na universidade e logo após lançamos a proposta para os alunos irem escrevendo como iam montando cada passo o cubo mágico, com o intuito de vê-los criar os seus próprios algoritmos. Os resultados estão destacados a seguir:

Figura 15: Representação do 1º passo pelo Aluno 1:

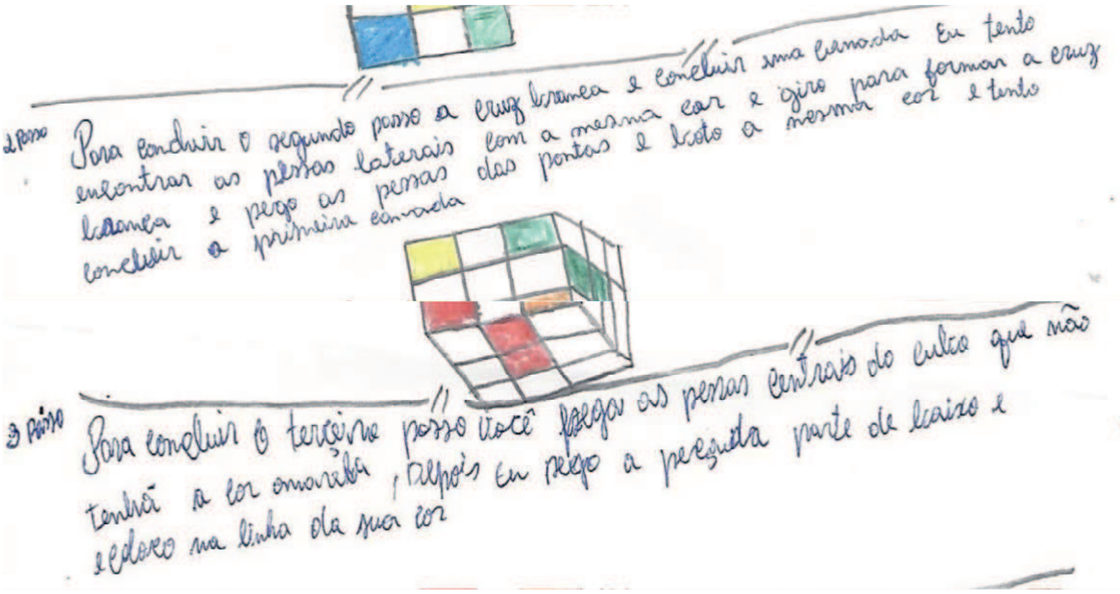
.



Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

Neste, nota-se que o Aluno 1 utiliza a linguagem natural, ou seja, a materna — uma linguagem que estamos habituados a usar — e ao longo da atividade fomos percebendo que esse aluno, além da linguagem, utiliza figuras para ilustrar o que ele fez e como fez em um determinado passo.

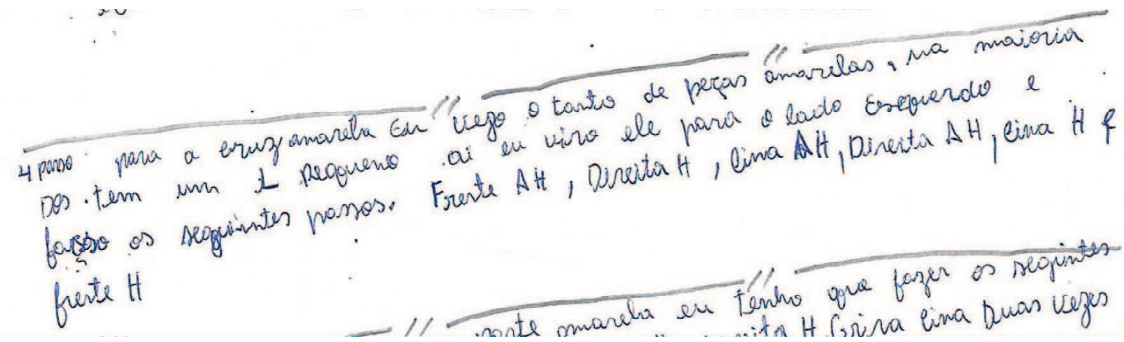
Figura 16: representação do 2°, 3° passo pelo Aluno 1:



Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

Como podemos notar, para montar o primeiro, o segundo e o terceiro passo, o aluno utiliza mais fortemente a linguagem natural, no entanto ele usa alguns termos que se referem à linguagem matemática, como quando diz: “peças laterais”, “uma camada”, “segundo passo”, são todos termos que se referem de alguma maneira à linguagem necessária para a construção do algoritmo, pois mesmo sendo uma linguagem natural ela é essencial para se construir a linguagem algorítmica. O Aluno 1 consegue montar o cubo mágico dentro de quatro a cinco minutos, porém quando foi escrever e montar o algoritmo, escreveu alguns movimentos que digamos que estão incompletos. É o caso desse 3° passo acima, que está faltando finalizar.

Figura 17: representação do 4° passo pelo Aluno 1:

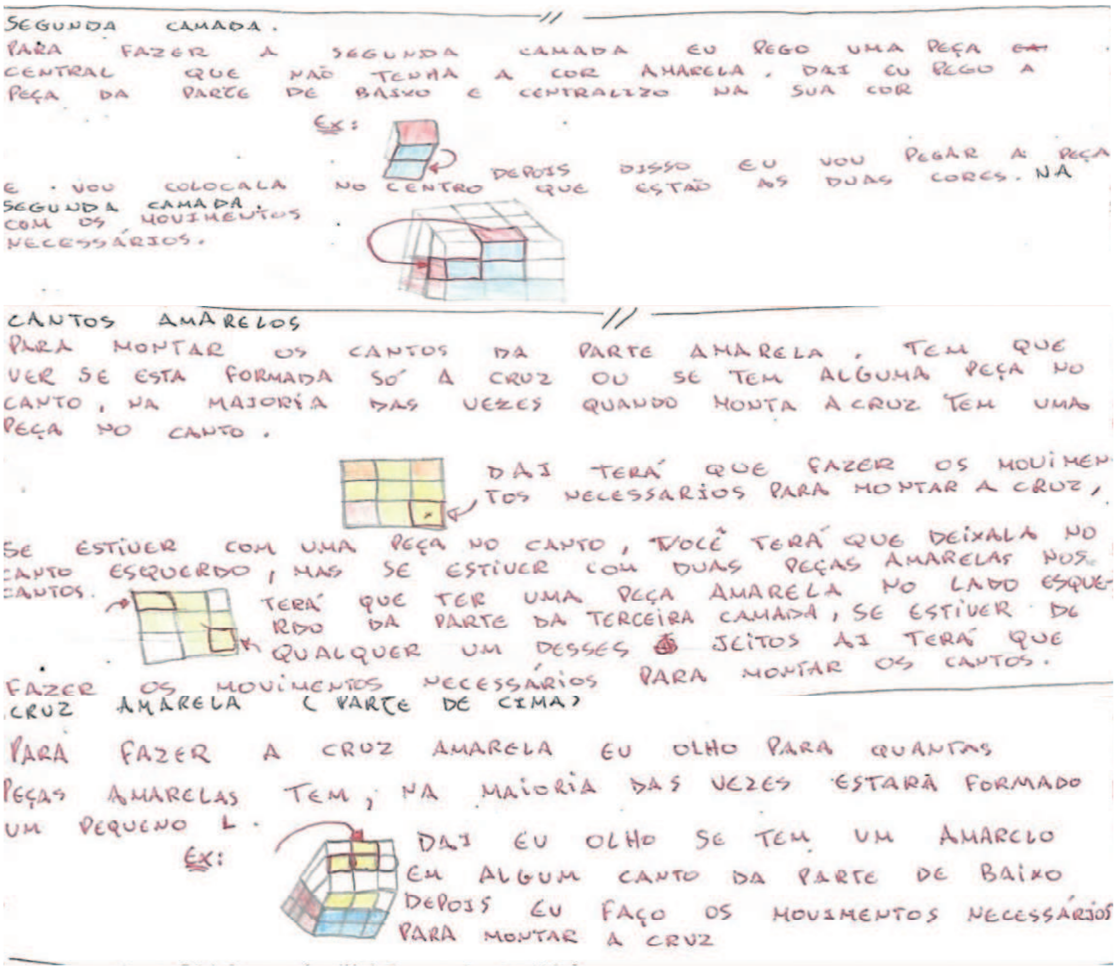


Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

Aqui o Aluno 1 já demonstra uma construção da autonomia, pois ao longo dos passos ele vai juntando a linguagem natural com a linguagem algorítmica. Quando ele vai escrevendo, por exemplo, “frente AH, direita H”, está, mesmo sem perceber, criando sequências pelas quais seguiu até que chegasse a um resultado. Neste 4° passo, o aluno fala em um L pequeno, mas não especifica como é, seria o espaço para ele utilizar novamente a linguagem figural, tendo em vista que mais adiante ele irá comentar sobre outro L. Enfim, a dificuldade desse aluno em relação à linguagem é que algumas vezes ele não sabe a maneira correta de qual linguagem usar, tanto que a predominante é sempre a linguagem natural.

Já outros alunos seguiram caminhos parecidos, porém sempre íamos descobrindo algo novo em cada um deles. Vamos, abaixo, destacar alguns passos dos alunos:

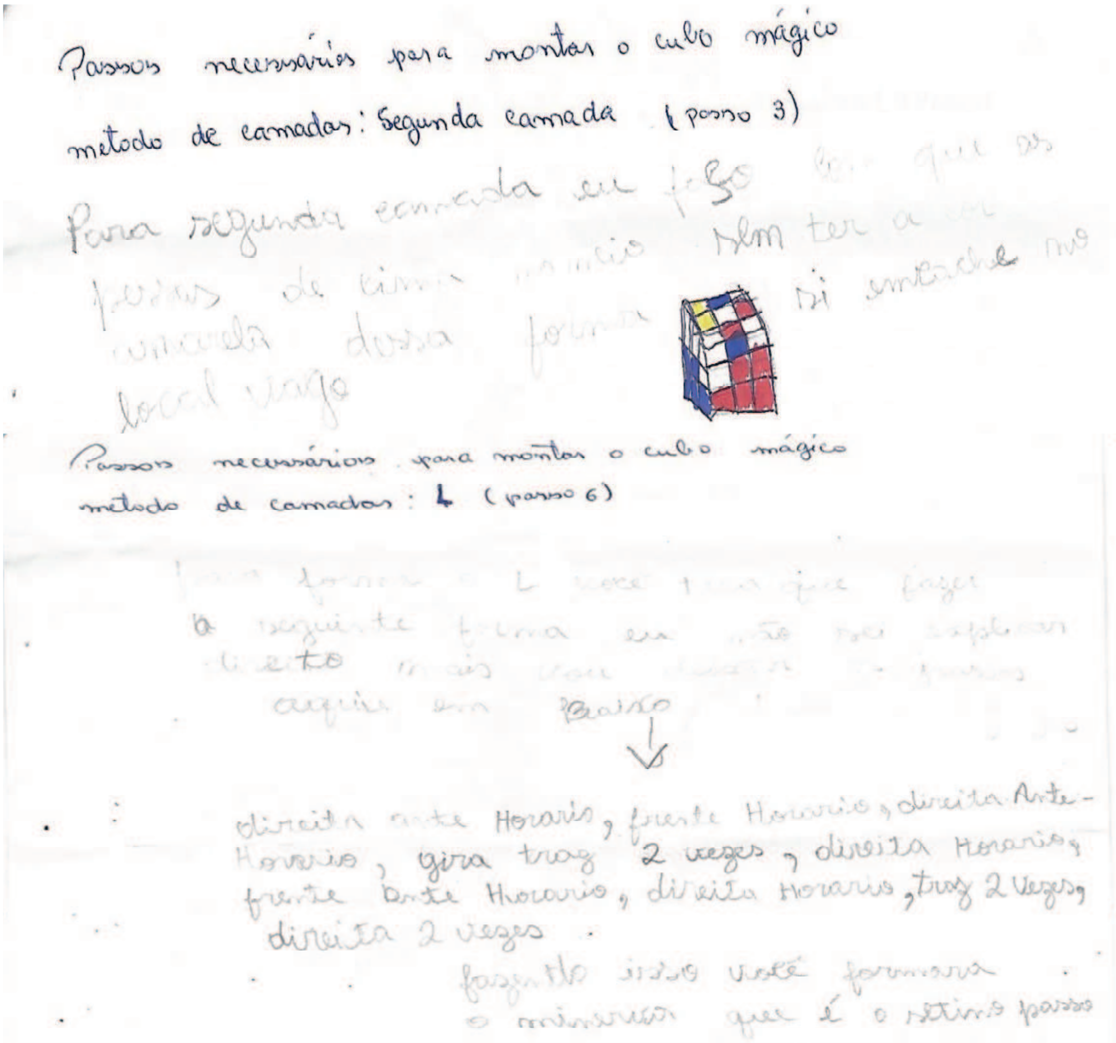
Figura 18: Representação do 2º e 5° passo pelo Aluno 2.



Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

Esse aluno utiliza apenas linguagem natural junto à linguagem figural. O que o diferencia do Aluno 1 é o fato dele não ter utilizado a linguagem algorítmica em nenhum dos passos, ele utiliza a linguagem e as figuras para expressar o que deve ser feito em alguns passos, porém não diz quais os passos que deve-se fazer, só explica algumas regras que ele seguiu e, ao fazer o algoritmo, estará montado o cubo mágico. O aluno ainda não consegue perceber nem identificar uma linguagem algorítmica, e quando não acredita que apenas a linguagem materna é suficiente para o entendimento, o mesmo utiliza figuras e assim mostra o que foi feito até que chegasse a um determinado resultado. As figuras abaixo servem como alternativa para expressar um determinado movimento:

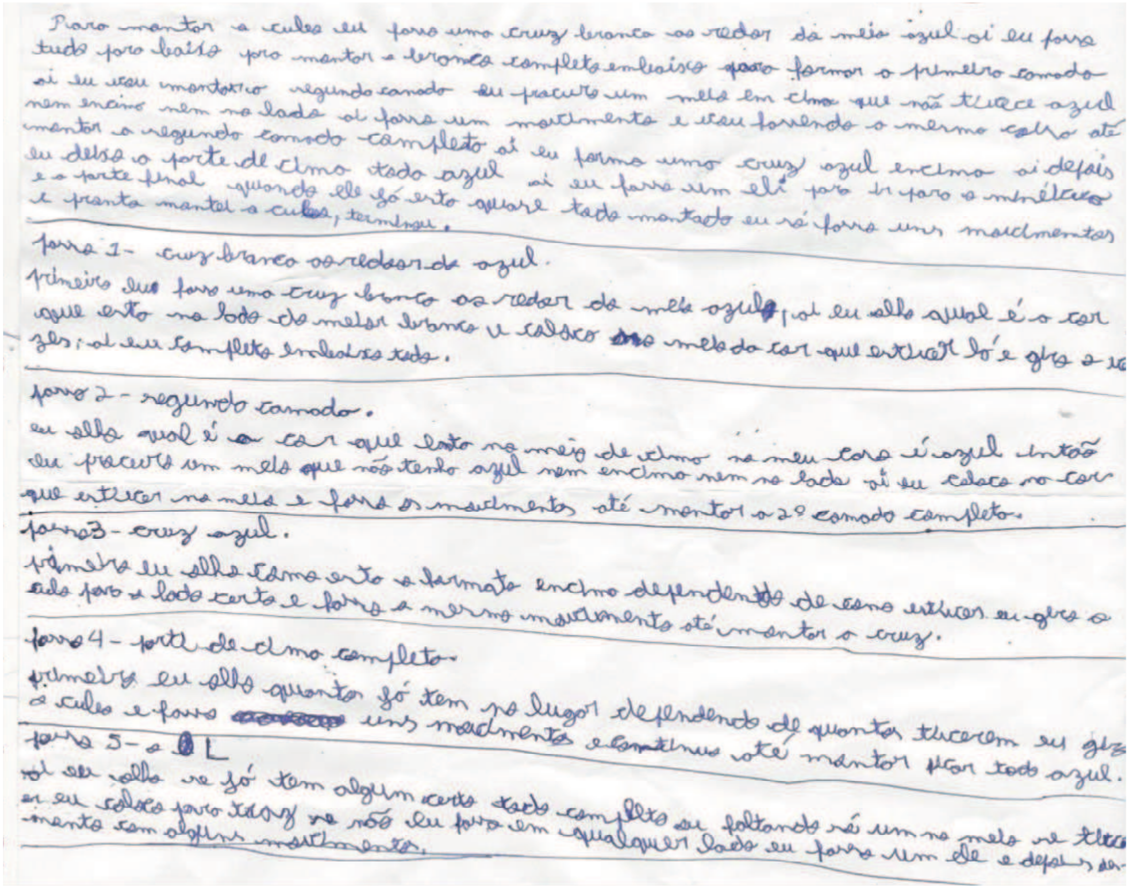
Figura 19: Representação do 2º, 3° e 6° passo pelo Aluno 3.



Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

De novo, esse aluno usa figuras como artifício para montar um algoritmo que possibilite explicar melhor o que deve ser feito, perceba que ele montou um algoritmo para o 6º passo, artifício parecido com o que o Aluno 1 utilizou, porém de uma maneira diferente: utiliza a linguagem natural nesse algoritmo. O aluno não tem o domínio das dimensões da linguagem, porém as utiliza mesmo de forma desconhecida por ele e assim conseguiu montar o cubo mágico. No 1º passo, em linguagem natural e figural, ele expressa o que faz. Um fato curioso é que no 6° passo o mesmo fala que não sabe aplicar direito, mas escreve o algoritmo corretamente e idêntico com o do método de camadas exposto anteriormente em sala de aula, porém em linguagem natural e não em linguagem algorítmica como lhe foi ensinado, ou seja, o aluno já está criando sua própria autonomia em relação à linguagem: não sabe quais as dimensões, mas faz o uso e assim consegue montar seu próprio algoritmo.

Figura 20: Representação até o 6º passo pelo Aluno 4.

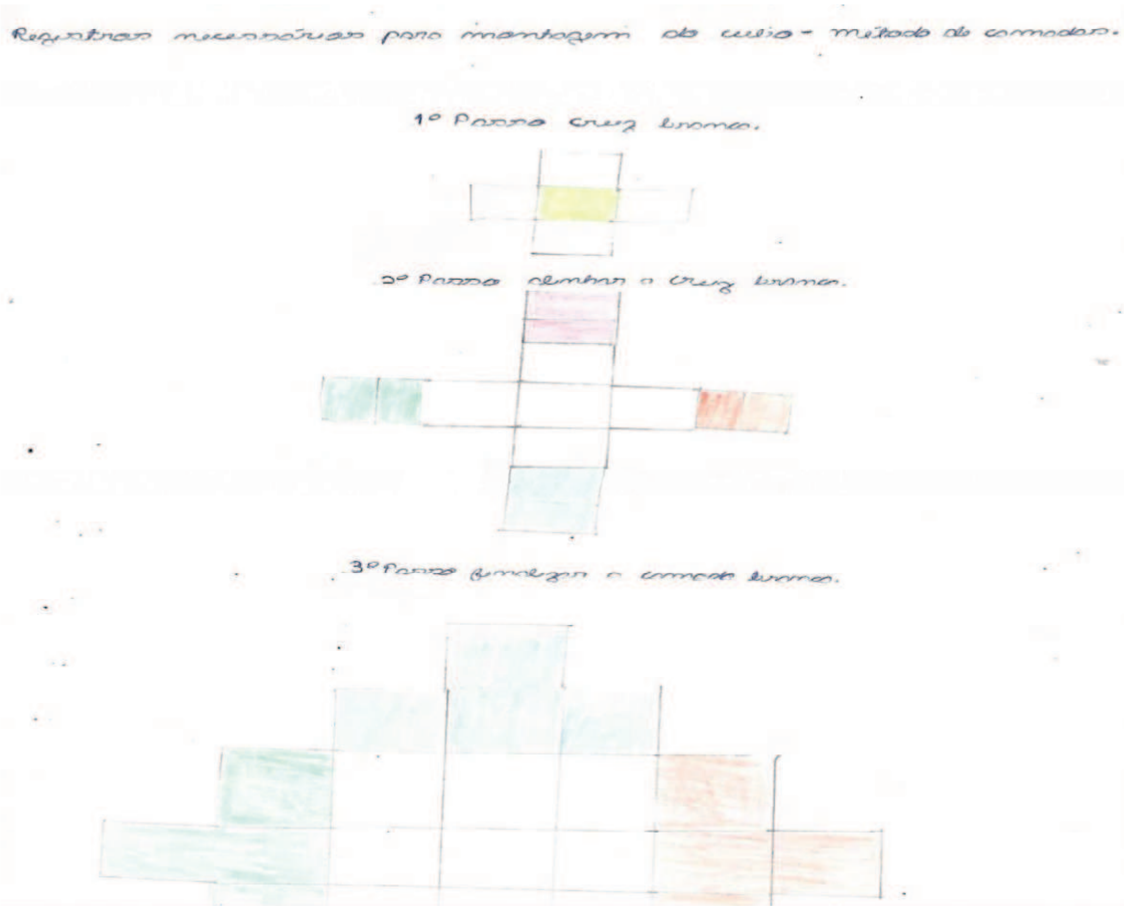


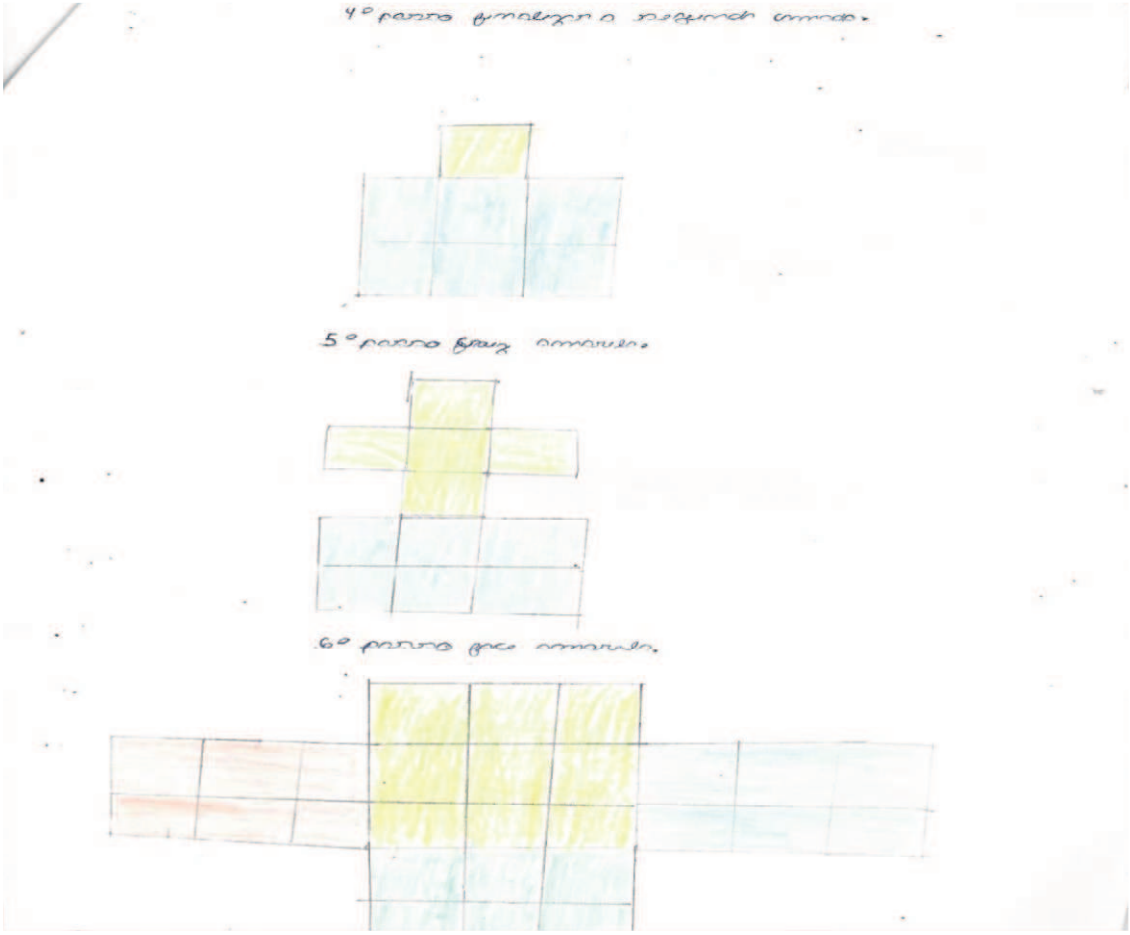
Fonte: Atividade escrita pelo aluno

Já neste aluno, percebemos apenas o uso da linguagem natural, o que nos leva a reforçar ainda mais o que estamos tentando responder neste trabalho, que a dimensão sintática, semântica e a pragmática estão bem presentes e são de essencial importância para se compreender critérios matemáticos. Primeiro, o aluno faz um breve resumo sobre tudo que ele fará mais adiante, logo depois começa escrevendo os passos em linguagem natural, não utiliza linguagem algorítmica, apenas escreve o que precisa ser considerado para aplicar o algoritmo, porém não especifica como é o algoritmo. O aluno sabe montar o cubo mágico, mas não consegue expressar a forma utilizada por ele, só fala algumas coisas que considerou para conseguir montar o cubo mágico.

Agora veja como o Aluno 5 montou o algoritmo:

Figura 21: Representação dos passos para montar o cubo pelo Aluno 5.





Fonte: Atividade escrita pelo aluno.

Esse aluno utiliza apenas figuras para expressar o algoritmo que conseguiu montar. Vê-se que ele tem habilidade para montar o cubo, leva entre três e quatro minutos, no entanto a representação feita foi apenas geométrica, uma linguagem figural, registro que não é claro o suficiente para compreender como o aluno está fazendo a montagem do cubo. Comprovamos que ele realmente conseguia montar apenas com essas figuras, ou seja, esse é o algoritmo que ele construiu, porém é insuficiente para identificarmos se o mesmo consegue montar apenas com tais registros.

O aluno e os outros já mencionados, todos foram montando os algoritmos de acordo com o que iam fazendo, foi isso que pedimos antes de passarmos a atividade. Os alunos não utilizam muito a dimensão sintática porque se baseiam mais na linguagem natural ("língua materna"), ou nas figuras, no entanto eles têm uma compreensão disto, ou seja, têm um domínio da dimensão semântica sobre a atividade.

Alguns alunos acabam aprendendo por outros meios, inclusive através de historinhas, alguns montam de um jeito, outros montam de outra forma e assim por diante. Outra coisa que podemos perceber é que os alunos foram criando algoritmos próprios, e que diferenciavam dos que lhes foram ensinados um exemplo é a maneira que é feita a cruz branca no início. O algoritmo de Rubik que mostramos para eles e o que nós criamos enquanto alunos da universidade já diferenciavam um do outro em certos aspectos. Os algoritmos criados por nossos alunos também se diferenciam uns dos outros. Nós os ensinamos montar cruz branca ao redor do centro amarelo e depois girar para parte de baixo, onde estaria o centro branco, e, só então estaria pronta a cruz toda branca, e os nossos alunos conseguiram montar a cruz branca sem que fizessem primeiro a cruz branca ao redor do centro amarelo. Outros passos também muitas vezes estavam diferentes dos que lhes foram ensinados, o que mostra que eles conseguiram construir seus próprios caminhos, partindo, claro, de uma ideia já conhecida.

CONCLUSÃO

Tínhamos por objetivo investigar quais são as dimensões da linguagem matemática a partir da montagem do cubo mágico, vimos que, segundo alguns autores, para o aluno aprender matemática, ele deve antes de tudo saber falar matematicamente. É necessário que o professor estimule no estudante tal linguagem, pois só assim entenderão e compreenderão o conteúdo da maneira esperada. Se pensarmos bem, a linguagem matemática é complexa e possui características específicas e deve ser tratada e trabalhada de forma adequada. Aliás, matemática não é difícil, o desafio está em encontrar a melhor maneira de ensinar a matéria.

Foi feita uma pesquisa com alunos do Programa Novo Mais Educação da Escola Estadual Doutor Trajano Nóbrega, na cidade de Soledade, que pouco conhecem sobre trabalhar a linguagem na disciplina de matemática, pois em sua maioria estão acostumados a apenas resolver equações e fórmulas para chegarem a um resultado, sem aplicação prática no cotidiano. Ao analisarmos todos os resultados, chegamos à conclusão de que, apesar de não terem um domínio sobre a dimensão sintática, os alunos do estudo conseguem dialogar sobre a montagem do cubo e conseguem percorrer os caminhos necessários para que se chegue ao resultado esperado, que no caso é finalizar a montagem o cubo, cada qual explicando da sua maneira mesmo sem ter esse domínio sobre a dimensão sintática da linguagem, pois a grande maioria se baseia na linguagem natural, ou na linguagem figural. Por outro lado, eles têm uma compreensão do que estão fazendo, o que significa que possuem um domínio semântico sobre a atividade que lhes foi passada, mesmo sem saber que tem, o que nos dá um indicativo para o ensino da matemática, já que um dos caminhos para se compreender essa parte sintática é ter uma compreensão das ideias e dos procedimentos, e daí o aluno pode aprender a linguagem envolvida, uma proposta contrária, tendo em vista que estamos acostumados a ensinar primeiro os algoritmos, e alguns alunos podem compreender ou não para conversar sobre ou simplesmente resolver problemas.

Realmente existe uma linguagem dentro da matemática, linguagem esta tantas vezes esquecida por parte dos educadores, prejudicando o ensino da disciplina. É fundamental entender a matemática em seu contexto amplo e interdisciplinar, não apenas limitar-se a números e regras sem porquê. Assim a educação formará cidadãos de fato pensantes, capazes de associar fatos a significados, aplicando-os no dia a dia.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Joelson P. *Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática.* São Paulo: Livraria da Física, 2016.

D'AMORE, Bruno. Elementos de didática da matemática: matemática, didática da matemática e linguagens. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GOMEZ-GRANELL, Carmen. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: A.TEBEROSKY E L. TOLCHINSKI (Orgs.). *Além da alfabetização:* a aprendizagem fonográfica, ortográfica, textual e matemática. Trad. Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1997. p. 257-282.

PIMM, David. *El lengguage matemática en el aula.* Madrid: Ediciones Morata, 1990.

SILVA, José Vinicius do Nascimento. *Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta – PB.* Campina Grande: UEPB/PROFMAT, 2015. (Dissertação de mestrado). Disponível em http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2390/2/PDF%20-%20Jos%C3%A9%20Vin%C3%ADcius%20do%20Nascimento%20Silva.pdf. Acessado em 15 out. 2017.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Matemática acadêmica e matemática escolar: as mesmas ou diferentes? In: VI Congresso Ibero-Americano de Educación Matemática (VI CIBEM). *Conferências, cursillos y ponências.* Enero, 4 al 9 de 2009, Puerto Montt, Chile. 2009. P. 65-75.