UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Pedro Victor Rodrigues de Farias

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Campina Grande/PB
DEZEMBRO/2017

PEDRO VICTOR RODRIGUES DE FARIAS

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Campina Grande/PB
Dezembro/2017

F224t Farias, Pedro Victor Rodrigues de.

O Teorema fundamental do cálculo e aplicações [manuscrito] : / Pedro Victor Rodrigues de Farias. - 2017.

43 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, Departamento de Matemática - CCT."

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Teorema Fundamental do Cálculo.

21. ed. CDD 515.33

PEDRO VICTOR RODRIGUES DE FARIAS

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 15/12/2017

BANCA EXAMINADORA:

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Departamento de Matemática

Orientador

Luciana Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas

Departamento de Matemática

Examinadora

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr.Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Departamento de Matemática

Examinador

Campina Grande,

dezembro de 2017

Dedicatória

Dedico este presente trabalho a minha família, minha namorada Beatriz dos Santos, minha irmã Amanda Regina, aos meus amigos e professores. Mas em especial, dedico à minha mãe, Rita Rodrigues de Farias, e ao meu pai, Armando Epitácio Ferreira de Farias, que fizeram de tudo para que continuasse estudando e chegasse em um momento tão especial como esse.

"A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento e não na vitória propriamente dita."

(Mahatma Gandhi)

Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia, socorro presente nas horas de angustias, pois sem Ele eu não teria traçado o meu caminho e feito a minha escolha pela matemática. É difícil agradecer todas as pessoas que de algum modo, nos momentos serenos ou apreensivo, fizeram ou fazem parte na minha vida, por isso agradeço a todos de coração.

Dedico esse trabalho em especial a minha mãe Rita Rodrigues de Farias, heroína que me deu todo apoio, nas horas mais difíceis, de desânimo e cansaço. Que se doou bastante durante esses quatro anos, sem ela nada disso seria possível, essa guerreira foi peça fundamental para a concretização do meu trabalho. Ao meu pai Armando Epitácio Ferreira de Farias que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que pra mim foi muito importante. A vocês expresso o meu maior agradecimento.

Agradeço também a minha irmã Amanda Regina e meus sobrinhos lindos Maria Regina e Antônio Sérgio. Muito obrigado a minha namorada Beatriz dos Santos Batista que é uma pessoa muito especial que compartilhou comigo esse momento, me ajudou bastante me dando dicas e apoio moral para meu desenvolvimento e de todos os outros trabalhos, a você agradeço pelo amor que tem comigo. Agradeço a todos os meus professores desde a educação básica ao ensino superior por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. Com muita gratidão em especial ao meu orientador Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, por exigir de mim muito mais do que eu suponha ser capaz de fazer, agradeço por transmitir seus conhecimentos e por fazer da minha monografia uma experiência positiva e por ter confiado em mim, sempre estando ali me orientando e dedicando parte do seu tempo para mim.

Não poderei deixar de agradecer também também aos meus amigos de graduação, Franklyn, Dayse Xavier, Ernanda, Renan Isneri, Camila Rochana, Sintia e Daniele. Muito obrigado por tudo, pela paciência, pela amizade e pelos ensinamentos que levarei para o resto da minha vida.

Resumo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma grande conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de se encontrar a área de uma figura plana. Neste trabalho faremos um estudo detalhado do teorema acima mencionado. Inicialmente, iremos abordar as noções de topologia, que vão servir de pilar para o desenvolvimento do trabalho, e, em seguida, trabalharemos as noções de limite, continuidade de uma função real, derivada e suas propriedades, até chegarmos no Teorema Fundamental do Cálculo, o qual será enunciado e demonstrado rigorosamente. Por fim mostraremos algumas aplicações decorrente do mesmo.

Palavras Chaves: Cálculo Diferencial e Integral, Teorema Fundamental do Cálculo, aplicações.

Abstract

The Fundamental Theorem of Calculus establishes a great connection between Differential and Integral Calculus. The first one arose from the problem of determining the tangent line to a curve at one point, while the second arose from the problem of finding the area of a plane figure. In this work we will make a detailed study of the aforementioned theorem. First, we will approach the notions of topology, which will be the pillar for the development of this text, and then we will work the notions of limits, continuity of a real function, derivatives and their properties, until we arrive at the Fundamental Theorem of Calculus, which will be stated and rigorously demonstrated. Finally we will show some applications from such a theorem.

Palavras Chaves: Differential and Integal Calculus, Fundamental Theorem of Calculus, applications.

Sumário

Introdução

O cálculo surgiu aos poucos, nas obras de vários matemáticos do século XVII. Ao longo do tempo foram amadurecendo gradualmente adquirindo forma mais acabada nos trabalhos de Newton e Leibniz. Esses dois sábios vieram mais tarde, na segunda metade do século XVII, e realizaram, independente um do outro, o trabalho de sistematização das idéias e métodos, chamado "Teorema Fundamental do Cálculo". Esse Teorema retrata a importância para a aplicação em diversos ramos do conhecimento, ele estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração e, sendo assim, é chave de todo o cálculo diferencial e integral.

Este trabalho constitui-se em uma pesquisa bibliográfica, tendo como principal objetivo um estudo detalhado sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. O manuscrito passou por um processo de evolução, no primeiro capítulo apresenta-se noções de topologia onde, definimos conjuntos abertos e fechados, ponto de acumulação e conjunto compactos, em seguida foi abordado limite de funções e funções contínuas.

No capítulo 2 realizamos uma bordagem sobre derivadas, onde foi visto noções de derivadas, derivada e crescimento local e funções deriváveis num intervalo. Na segunda parte desse capítulo foi abordado integral de Riemann, propriedade da integral, condições suficiente de integrabilidade e, por último, foi trabalhado exclusivamente para a demonstração do "Teorema Fundamental do Cálculo".

No capítulo 3, apresentamos algumas aplicações importantes do Teorema Fundamental do Cálculo, como, por exemplo, o Teorema da Mudança de Variável e a Fórmula de Taylor com resto integral.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Noções de topologia na reta

A topologia é um ramo da matemática no qual são estudadas com grande generalidade as noções de limite, continuidade e as ideias com elas relacionadas. Sua finalidade é estudar as estruturas dos objetos sem preocupação com o seu tamanho e formato, assim como a geometria. A geometria descreve matematicamente uma figura, já a topologia analisa a possibilidade das figuras. Como a topologia estuda a estrutura dos objetos, adotaremos uma notação geométrica, dizemos *ponto* em vez de *número real*, *a reta* em vez de *o conjunto* $\mathbb{R}$. Os resultados contidos neste capítulo podem ser encontrados em [2, 4, 6].

Conjuntos Abertos

Definimos a como um ponto *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X \subset \mathbb{R}$. O conjunto de todos os pontos interiores de X, chama-se o interior do conjunto X e é representado pela notação $intX$. Quando $a \in intX$, então o conjunto X é chamado de vizinhança de a. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se aberto quando $A = intA$, isto é todos os pontos de A são interiores a A.

Exemplo 1.1.1 (Três representações de pontos interiores)

i) [$a \in X$ é um ponto interior] $\Longleftrightarrow$ *[$\exists (x, y); a \in (x, y) \subset X$]*

ii) [$a \in X$ é um ponto interior] $\Longleftrightarrow$ *[$\exists \varepsilon > 0; (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$]*

iii) [$a \in X$ é um ponto interior]$\Longleftrightarrow$*[$\exists \varepsilon > 0; |b\text{-}a| < \varepsilon \Longrightarrow b \in X$]*

Teorema 1.1.1 *a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.*

b) A reunião qualquer de conjuntos abertos é aberto.

Conjuntos Fechados

Definimos a como um ponto *aderente* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, quando a for o limite de uma sequência $x_n \subset X$. Definiremos o *fecho* de um conjunto X, o conjunto $\bar{X}$, esse conjunto é formado por todos os pontos aderentes de X. Dizemos que um conjunto é *fechado* quando todos os pontos aderentes de X pertencem a X, ou melhor, $X = \bar{X}$. Denotamos que X é *denso* em Y quando $Y \subset \bar{X}$, ou seja, quando todo ponto $b \in Y$ é aderente a X. Um exemplo bastante comum é que $\mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1.2 *Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X.*

Corolário 1.1.1 *O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.*

Teorema 1.1.3 *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração: Sejam F fechado e $a \in A$, isto é, $a \notin F$. Pelo teorema 1.1.2 existe uma vizinhança $V \ni a$ que não contém pontos de F, isto é, $V \subset A$. Assim, todo ponto $a \in A$ é interior a A, ou seja, A é aberto. Reciprocamente, se o conjunto A é aberto e o ponto a é aderente a $F = \mathbb{R} - A$ então toda vizinhança de a contém pontos de F, logo a não é interior A. Sendo A aberto, temos $a \notin A$, ou seja, $a \in F$. Assim, todo ponto a é aderente a F pertence a F, logo F é fechado. ∎

Exemplo 1.1.2 *Para a e b em $\mathbb{R}$, com $a < b$, o intervalo fechado $[a,b]$ é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}$. Para ver isto basta observar que*

$$\mathbb{R} - [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty).$$

Teorema 1.1.4 *a) Se A_1 e A_2 são fechados então $A_1 \cup A_2$ é fechado.*
b) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \cap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Definição 1.1.1 *Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \bar{B} = \varnothing$ e $\bar{A} \cap B = \varnothing$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A. (Em particular, A e B são disjuntos.) A decomposição $X = X \cup \varnothing$ chama-se cisão trivial.*

Teorema 1.1.5 *Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.*

Corolário 1.1.2 *Os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente aberto e fechado são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.*

Ponto de Acumulação

Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X se para cada $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. O conjunto dos pontos de acumulação de X é chamado de derivado de X e é denotado por X'.

Exemplo 1.1.3 *Para o intervalo I=(0,1) os pontos 0 e 1 são pontos de acumulação do conjunto. Na realidade qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x \leq 1$ é ponto de acumulação de (0,1), ou seja, $I' = [0, 1]$.*

Teorema 1.1.6 *Dado $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *a é um ponto de acumulação de X;*

2. *a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$.*

3. *Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Teorema 1.1.7 *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Conjuntos Compactos

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se compacto quando é limitado e fechado. Todo conjunto finito é compacto.

Exemplo 1.1.4 *Todo intervalo [a,b] de $\mathbb{R}$ é compacto pois é limitado e fechado. Intervalos do tipo (a,b] ou [a,b) não são compactos pois são limitados mas não são fechados e intervalos do tipo $[a, +\infty)$ ou $(-\infty, a)$ não são compactos pois são fechados mas não limitados.*

Teorema 1.1.8 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.*

Teorema 1.1.9 *Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ...$ de conjuntos compactos não-vazios, existe pelo menos um número real que pertence a todos os X_n.*

Demonstração: Definimos uma sequência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X_n$. Esta sequência está no compacto X_1, logo possui uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., z_{n_k}, ...)$ convergindo para um ponto $a \in X_1$. Dado qualquer $n \in \mathbb{R}$, temos $x_{n_k} \in X_n$ sempre que $n_k > n$. Como X_n é compacto, segue-se que $a \in X_n$. Isto prova o teorema. ∎

Definição 1.1.2 *Chama-se cobertura de um conjunto X a uma família C de conjuntos C_λ cuja reunião contém X. A condição $X \subset \cup_{\lambda \in L} C_\lambda$ significa que, para cada $x \in X$, deve existir (pelo menos) um $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Se os C_λ são abertos, diz-se que C é uma cobertura aberta.*

Teorema 1.1.10 (Borel-Lebesgue) *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto possui uma subcobertura finita.*

1.2 Limite

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que f é $limitada\ superiormente$ se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, $\forall x \in X$, e diz-se que f é $limitada\ inferiormente$ se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$, $\forall x \in X$. A função f é denominada limitada se ela é limitada superiormente e inferiormente. Ou seja, quando existe m e M em $\mathbb{R}$ tais que

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in X,$$

ou, equivalentemente, exite $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C, \forall x \in X$.

Teorema 1.2.1 *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções reais.*

i) Se f e g são limitadas então f+g e f.g são limitadas.

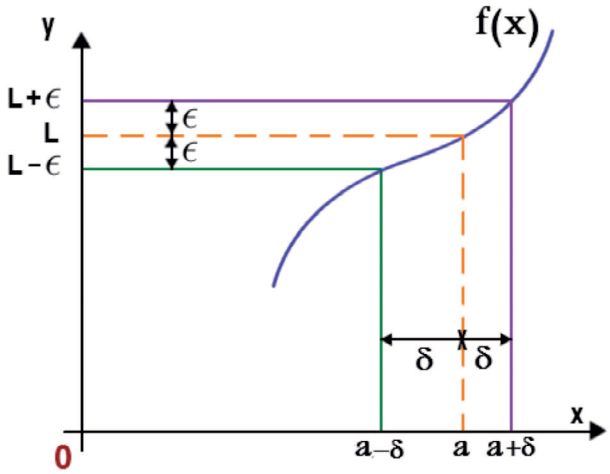
ii) Se f é limitada e existe $\alpha > 0$ tal que $|g(x)| \geq \alpha, \forall x \in X$ então $\frac{f}{g}$ é limitada.

Limites de Funções

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo o domínio é o conjunto X e a é um ponto de acumulação do conjunto X, ou seja $a \in X'$. Diz-se que o número real L é o limite de $f(x)$ quando $x \subset X$ tende à a, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.



Informalmente: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quer dizer que se pode tomar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente de a.

Teorema 1.2.2 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.*

Demonstração: Sejam $K = \frac{(L+M)}{2}$. Pondo $\epsilon = K - L = M - K$ temos $\epsilon > 0$ e $K + L = \epsilon + M - \epsilon$. Pela definição de limite, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < K$ e $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow K < g(x) < M + \epsilon$. Portanto, pondo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ vem: $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < K < g(x)$, o que prova o teorema. ∎

Corolário 1.2.1 *Se $\lim_{x \to a} f(x) = L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.*

Corolário 1.2.2 *Sejam $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $L \leq M$.*

Teorema 1.2.3 (Teorema do sanduíche) *Sejam $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim_{x \to a} h(x) = L$.*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e $x \in X$,

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então se $x \in X$,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

■

Observação 1.2.1 *A noção de limite é local, isto é, dadas as funções* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e dado* $a \in X'$, *se existir uma vizinhança* V *do ponto* a *tal que* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \neq a$ *em* $V \cap X$ *então existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *se, e somente se, existe* $\lim_{x\to a} g(x)$. *Além disso, se existirem, esses limites serão iguais. Assim, por exemplo, no* ***Teorema do Sanduíche****, não é necessário supor que vale* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in X - \{a\}$. *Basta que exista uma vizinhança* V *do ponto* a *tal que estas desigualdades valham para todo* $x \neq a$ *pertence a* $V \neq X$.

Teorema 1.2.4 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$. *Afim de que seja* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos* $x_n \in X - \{a\}$ *com* $\lim x_n = a$, *tenha-se* $\lim f(x_n) = L$.

Corolário 1.2.3 (Unicidade do limite) *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$ *então* $L = M$.

Corolário 1.2.4 (Operações com limites) *Sejam* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}, a \in X'$, *com* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$. *Então;*

i) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$;

ii) $\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = L.M$;

iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Teorema 1.2.5 *Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, a \in X'$. *Se existe* $\lim_{x\to a} f(x)$, *então* f *é limitada numa vizinhança de* a, *isto é, existem* $\delta > 0$ *e* $c > 0$ *tais que*

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq c.$$

Demonstração: *Seja* $\lim_{x\to a} f(x) = L$. *Tomando* $\epsilon = 1$ *na definição de limite resulta que* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$ $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x)-L+L| \leq |f(x)-L|+|L| < |L|+1$. *Basta então tomar* $c = |L| + 1$. ■

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que a é um *ponto de acumulação a direita* para X e escreve-se $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contem algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a+\varepsilon) \neq \emptyset$. Analogamente, se define ponto de acumulação a esquerda. Por definição $a \in X'_-$, significa que para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a-\varepsilon, a) \neq \emptyset$. Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

uma função cujo o domínio é o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é limite a direita da função $f(x)$, quando x tende à a e se escreve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente se obtém $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $0 < x - a < \delta$. Analogamente se define o limite à esquerda e se escreve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, com $a \in X'_-$.

1.3 Funções contínuas

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo o domínio é o conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se *contínua no ponto* $x_0 \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Chama-se *descontínua no ponto* $x_0 \in X$ uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Dizemos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua quando f é continua em todos os pontos $x_0 \in X$. Para que f seja contínua no ponto $x_0 \in X$ devemos observar três itens:

1. f está definida em x_0;

2. Existe o limite de f em x_0;

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observação 1.3.1 *Quando definimos limite de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ em um ponto a, não exigimos que tal ponto fosse necessariamente um ponto de X, e sim que fosse um ponto de acumulação de X. Na definição de funções contínuas o ponto x_0 pertence a X, o domínio de f podendo ser ou não um ponto de acumulação de X.*

Teorema 1.3.1 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $x_0 \in X$, com $f(x_0) < g(x_0)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Corolário 1.3.1 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $x_0 \in X$. Se $f(x_0) \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo todo $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(x_0)$.*

Corolário 1.3.2 *Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$. Existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

Teorema 1.3.2 *A fim de que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto x_0 é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim\ x_n = x_0$, se tenha $\lim f(x_n) = f(x_0)$.*

Corolário 1.3.3 *Se $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $x_0 \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções:*

1. $f + g$;

2. $f.g$;

3. $\frac{f}{g}$, *caso* $g(x_o) \neq 0$.

Teorema 1.3.3 *A composta de duas funções contínuas é contínua. Mais precisamente, sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $x_0 \in X$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(x_0) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto x_0.*

Funções contínuas num intervalo

O Teorema do Valor Intermediário afirma que o gráfico de uma função contínua definida num intervalo, ao passar de um lado ao outro do eixo dos x, necessariamente tem que cortar esse eixo. Até o final do século XVIII esse resultado foi aceito como evidente, sem que ninguém pensasse em demonstrá-lo, uma atitude muito de acordo com o espírito da época. Foi Bolzano o primeiro matemático a demostrá-lo em 1817.

Teorema 1.3.4 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 1.3.4 *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f(I) é um intervalo.*

Teorema 1.3.5 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \longrightarrow I$ definida no intervalo $J = f(I)$ é contínua.*

Funções contínuas em conjuntos compactos

Diversos problemas matemáticos consistem em procurar pontos de um conjunto X nos quais uma certa função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou mínimo. Para resolvermos esses problemas é necessário saber se esses pontos existem. Para começar, a função f pode ser ilimitada inferiormente (então não possui valor máximo) ou inferiormente (não terá valor mínimo). Entretanto, mesmo limitada, f pode não assumir valor máximo em X, ou mínimo, ou nenhum dos dois.

Teorema 1.3.6 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Teorema 1.3.7 (Weierstrass) *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, $f(X)$ é compacto e, sendo compacto, possui um menor elemento $f(x_0)$ e um maior elemento $f(x_1)$. Isto que dizer que existem x_0, $x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. ■

Corolário 1.3.5 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.3.8 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f : X \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \longrightarrow X$.*

Demonstração: Tomemos um ponto arbitrário $b = f(a)$ em Y e mostremos que g é contínua no ponto b. Se não fosse assim, existiriam um número $\epsilon > 0$ e uma sequência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y$ com $\lim y_n = b$ e $|g(y_n) - g(b)| \geq \epsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a' \in X$, pois X é compacto. Tem-se $|a' - a| \geq \epsilon$. Em particular, $a' \neq a$. Mas pela continuidade de f, $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a')$. Como já temos $\lim y_n = b = f(a)$, daí resultaria $f(a) = f(a')$, contradizendo a injetividade de f. ■

Continuidade uniforme

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in X$ pode-se achar $\delta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - x| < \varepsilon$ implicam $|f(y) - (x)| < \varepsilon$. O número positivo δ depende não apenas do $\varepsilon > 0$ dado mas também do ponto x no qual a continuidade de f é examinada. Nem sempre, dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta > 0$ que sirva em todos os pontos $x \in X$.

Exemplo 1.3.1 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|}$, logo $f(x) = 1$ se $x > 0$ e $f(x) = -1$ para $x < 0$. Esta função é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$ pois é constante numa vizinhança de cada ponto $x \neq 0$. Entretanto, se tomarmos $\varepsilon < 2$, para todo $\delta > 0$ que escolhermos, existirão sempre pontos $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que $|y - x| < \delta$ e $|f(y) - f(x)| \geq \epsilon$. Basta tomar $x = \frac{\delta}{3}$ e $y = -\frac{\delta}{3}$.*

Definição 1.3.1 *Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua no conjunto X quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$, $|y - x| < \delta$ implicam $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Uma função uniformemente contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos do conjunto X. A recíproca é falsa como se ver no exemplo 5 acima.*

Definição 1.3.2 *Uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *chama-se lipschitziana quando existe uma constante* $k > 0$ *(chamada constante de Lipschitz da função* f*) tal que* $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ *sejam quais forem* $x, y \in X$*. A fim de que* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja lipschitziana é necessário e suficiente que o quociente* $\frac{|f(y)-f(x)|}{y-x}$ *seja limitado, isto é, que exista uma constante* $k > 0$ *tal que* $x, y \in X$*,* $x \neq y \Rightarrow \frac{|f(y)-f(y)}{|y-x|} \leq k$.

Teorema 1.3.9 *A fim de que* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja uniformemente contínua é necessário e suficiente que, para todo par de sequências* $(x_n), (y_n)$ *em* X *com* $\lim(y_n - x_n) = 0$*, tenha-se* $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$*.*

Teorema 1.3.10 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ *compacto. Toda função contínua* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua.*

Demonstração: Se f não fosse uniformemente contínua, existiriam $\epsilon > 0$ e duas sequências (x_n), (y_n) em X satisfazendo $\lim(y_n - x_n) = 0$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando para uma subsequência, se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de X, que $\lim x_n = a \in X$. Então, como $y_n = (y_n - x_n) + x_n$, vale também $\lim y_n = a$. Sendo f contínua no ponto a, temos

$$\lim[f(y_n) - f(x_n)] = \lim f(y_n) - \lim f(x_n) = f(a) - f(a) = 0,$$

contradizendo que seja $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 1.3.11 *Toda função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uniformemente contínua num conjunto limitado* X *é uma função limitada.*

Demonstração: Se f não fosse limitada (digamos superiormente) então existiria uma sequência de pontos $x_n \in X$ tais que $f(x_{n+1}) > f(x_n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X é limitado, podemos (passando a uma subsequência se necessário) supor que a sequência (x_n) é convergente. Então, pondo $y_n = x_{n+1}$, teríamos $lim(y_n - x_n) = 0$ mas, como $f(y_n) - f(x_n) > 1$, não vale $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$, logo f não é uniformemente contínua. ■

Teorema 1.3.12 *Se* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uniformemente contínua então, para cada* $a \in X'$*(mesmo que* a *não pertença a* X*), existe* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$*.*

Capítulo 2

O Teorema Fundamental do Cálculo

2.1 Derivadas

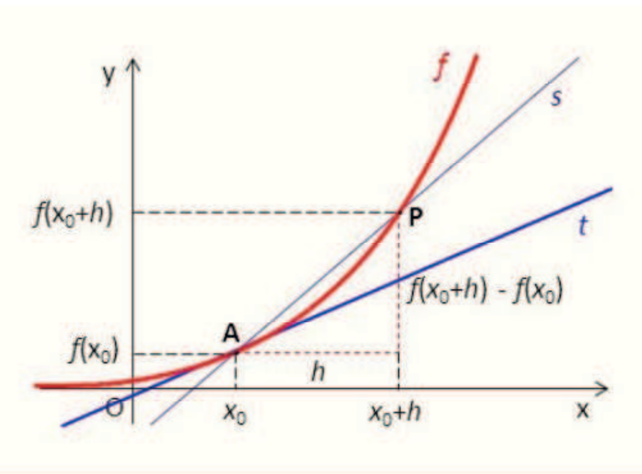
Nesta presente seção faremos uma apresentação rigorosa de alguns importantes conceitos do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral que serão fundamentais para apresentarmos o Teorema Fundamental do Cálculo. Os resultados que contém nesse capítulo podem ser facilmente encontrados em [2, 4, 5, 6, 7]

2.1.1 Noções de derivadas

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. Diz-se que f é derivável em x_0 se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Neste caso diz-se que a derivada de f em x_0 é $f'(x_0)$. Dizemos que f é derivável em X se f é derivável em cada $x_0 \in X$. Se $f'(x_0)$ é contínua dizemos que f é de classe C^1. Existem outras notações para derivadas de f no ponto x_0, como, por exemplo, $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ e $\frac{df}{dx}|_x = x_0$.



Teorema 2.1.1 *A fim de que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto x_0 é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + h \in X \Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + c.h + r(h)$, onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(x_0)$.*

Corolário 2.1.1 *Uma função é contínua nos pontos que é derivável.*

Regras operacionais

Teorema 2.1.2 *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto x_0. As funções $f \pm g$, $f.g$ e $\frac{f}{g}$ com $g \neq 0$ são também deriváveis no ponto x_0, com*

i) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

ii) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0)$;

iii) $(\frac{f}{g}) = \frac{f'(x_0).g(x_0) - f(x_0).g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Regra de L'Hôpital: Esta regra constitui uma das mais populares aplicações da derivada. Em sua forma mais simples, ela se refere ao cálculo de um limite da forma $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ no caso em que f e g são deriváveis no ponto x_0 e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0 = g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Pela definição de derivada, $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0}$ e $g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0}$. Supondo $g'(x_0) \neq 0$, a Regra de L'Hopital diz que $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. A prova é direta:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{(x-x_0)}}{\frac{g(x)}{(x-x_0)}} = \frac{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)}}{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Teorema 2.1.3 (Regra da Cadeia) *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ e $f(x_0) = y_0$. Se f é derivável no ponto x_0 e g é derivável no ponto y_0 então $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto x_0 com $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$.*

Demonstração: Consideremos uma sequência de ponto $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ e ponhamos $y_n = b$. Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$ então $y_n \in Y - \{b\}$ e

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b}.\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Portanto, se $\mathbb{N}_1$ é infinito, tem-se

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)).f'(a).$$

Se $\mathbb{N}_2$ é infinito tem-se

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_2} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0,$$

logo $f'(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)).f'(a) = 0.$$

Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale

$$\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{x_n - a} = g'(f(a)).f'(a),$$

o que prova o teorema.

■

Corolário 2.1.2 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção entre os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, com inversa $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Se f é derivável no ponto $x_0 \in X$ e g é contínua no ponto $y_0 = f(x_0)$ então g é derivável no ponto y_0 se, e somente se, $f'(x_0) \neq 0$. No caso afirmativo, tem-se $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

2.1.2 Derivada e crescimento local

As seguintes proposições que se referem a derivadas laterais e a desigualdades, têm análogas com f'_+ trocada por f'_-, com $>$ substituído por $<$.

Teorema 2.1.4 *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável a direita no ponto x_0, com $f'_+(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ implicam $f(x_0) < f(x)$.*

Corolário 2.1.3 *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótoma não decrescente então suas derivadas laterais, onde existem são ≥ 0.*

Corolário 2.1.4 *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X, a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Corolário 2.1.5 *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável a direita no ponto x_0 e tem aí um máximo local então $f'_+(x_0) \leq 0$.*

Corolário 2.1.6 *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo ou mínimo local então $f'(a) = 0$.*

2.1.3 Funções deriváveis num intervalo

O Teorema de Rolle é um evidente conteúdo geométrico. Ele nos servirá como lema para a demonstração do Teorema do Valor Médio de Lagrange, que, pelas suas varias consequências, é um dos resultados centrais do Cálculo Diferencial.

Teorema 2.1.5 (Darboux) *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável. Se* $f'(a) < d < f'(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ $f'(c) = d$*.*

Teorema 2.1.6 (Rolle) *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, com* $f(a) = f(b)$*. Se* f *é derivável em* (a, b)*, existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração: Pode ser que f seja constante, em cujo caso f' se anula em todos os pontos internos. Se não for constante, terá que assumir valores maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo contínua num intervalo fechado, f assume um valor máximo e um valor mínimo. Então, se f assumir valores maiores do que $f(a)$, ela assumirá seu máximo num ponto interno c; e se assumir valores menores do que $f(a)$, assumirá seu mínimo num ponto interno c. Em qualquer caso, $f'(c) = 0$. ∎

Teorema 2.1.7 (Teorema do Valor Médio, de Lagrange) *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *é derivável em* (a, b)*, existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Consideremos uma função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por, $g(x) = f(x) - dx$ onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja

$$d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

∎

Corolário 2.1.7 *Uma função* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, contínua no intervalo* I*, com derivada* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in int\ I$*, é constante.*

Corolário 2.1.8 *Se* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções contínuas, deriváveis em* $int\ I$*, com* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in int\ X$*, então existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = f(x) + c$ *para todo* $c \in I$*.*

Corolário 2.1.9 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então $x, y \in I \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.*

Corolário 2.1.10 *A fim de que a função derivável $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seja monótona não decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \longrightarrow I$ é derivável, com $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ para todo $y = f(x) \in J$.*

2.2 Integral

O objetivo dessa seção é mostrar como definir rigorosamente a integral como soma de Riemann, e demonstrar que toda função contínua é integrável. Esta é uma tarefa que dificilmente pode ser feita nos cursos de Cálculo, por exigir o conceito mais delicado de continuidade.

2.2.1 Integral de Riemann

Uma partição do intervalo $[a, b]$ é um conjunto de pontos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subset [a, b]$ tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Notações:

1. $P_{[a,b]}$=$\{P; P$ é uma partição de $[a, b]\}$

2. $[t_{i-1}, t_i]$ é o i-ésimo subintervalo da partição P.

3. $(t_i - t_{i-1})$ é o comprimento do i-ésimo intervalo. Observe que

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + ... + t_n - t_{n-1} = t_n - t_0 = b - a$$

No que segue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada, isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que,

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Definição 2.2.1 *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Tendo que f é limitada em cada subintervalo $[xi - 1, x_i]$ de P, desta forma existe o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$ que denotamos respectivamente por m_i e M_i. Logo,*

$$m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\};$$

$$M_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Notações:

1. $m = \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$;

2. $M = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$;

3. $m_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}$;

4. $M_i = \inf\{f(x); x \in [t_{i-1}, t_i]\}$.

A soma inferior de f relativamente a partição P é o número

$$s(f,P) = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + ... + m_n(t_{n-1} - t_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

A soma superior de f relativamente a partição P é o número

$$S(f,P) = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + ... + M_n(t_{n-1} - t_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

A $integral\ inferior$ e a $integral\ superior$ da função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidas, respectivamente, por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup s(f;P) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf S(f;P),$$

o sup e o inf sendo tomados relativamente a todas as partições P do intervalo.

Observação 2.2.1 *Sejam P e Q partições de um intervalo $[a,b]$. Diz-se que Q refina P quando $P \subset Q$.*

Teorema 2.2.1 *Quando se refina uma partição, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Ou seja, $P \subset Q \Rightarrow s(f;P) \leq s(f;Q)$ e $S(f;Q) \leq S(f;P)$.*

Demonstração: Provemos inicialmente que

$$s(f,P) \leq s(f,Q)$$

Seja $P = \{t_0, t_1, ..., t_j, t_{j+1}, ..., t_n\}$ e suponhamos que Q refina P por acréscimo de um ponto, ou seja,

$$Q = \{t_0, t_1, ..., t_j, t_r, t_{j+1}, ..., t_n\}.$$

Observemos que

$$s(f,P) = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + ... + m_j(t_{j+1} - t_j) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}) =$$
$$m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + ... + m_j(t_r - t_j) + m_j(t_{j+1} - t_r) + ... + m_n(t_n - t_{n-1}).$$

Sejam

$$m'_r = \inf\{f(x); x \in [t_j, t_r]\}$$

e

$$m''_r = \inf\{f(x); x \in [t_r, t_{j+1}]\}.$$

Por propriedade de $nfimo$ temos,

$$m_j \leq m'_r \text{ e } m_j \leq m''_r.$$

Portanto,

$$s(f,P) \leq m_1(t_1-t_0)+m_2(t_2-t_1)+...+m'_r(t_r-t_j)+m''_r(t_{j+1}-t_r)+...+m_n(t_n-t_{n-1}) = s(f,Q).$$

Logo,

$$s(f,P) \leq s(f,Q).$$

Provemos agora que

$$S(f,P) \geq S(f,Q.)$$

Observemos que,

$$S(f,P) = M_1(t_1-t_0) + M_2(t_2-t_1) + ... + M_j(t_{j+1}-t_j) + ... + M_n(t_n-t_{n-1}) =$$
$$M_1(t_1-t_0) + M_2(t_2-t_1) + ... + M_j(t_r-t_j) + M_j(t_{j+1}-t_r) + ... + M_n(t_n-t_{n-1}).$$

Sejam

$$M'_r = sup\{f(x); x \in [t_j, t_r]\}$$

e

$$M''_r = sup\{f(x); x \in [t_r, t_{j+1}]\}.$$

Por propriedade de sup temos,

$$M_j \geq M'_r \text{ e } M_j \geq M''_r.$$

Portanto,

$$S(f,P) \geq M_1(t_1-t_0)+M_2(t_2-t_1)+...+M'_r(t_r-t_j)+M''_r(t_{r+1}-t_r)+...+M_n(t_n-t_{n-1}) = S(f,Q).$$

Logo,

$$S(f,P) \geq S(f,Q).$$

Se Q refina P por acréscimo de k pontos então podemos fazer este procedimento k vezes em cada intervalo que se acrescentou pontos. $\blacksquare$

Corolário 2.2.1 *Para quaisquer partições P, Q do intervalo $[a,b]$ e qualquer função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.*

Corolário 2.2.2 *Dada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ então*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P s(f;P) \leq M(b-a).$$

Corolário 2.2.3 *Seja P_0 uma partição de $[a,b]$. Se considerarmos as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ apenas relativas as partições P que refinam P_0, obteremos os mesmos valores para $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$.*

Definição 2.2.2 *Uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se $integrvel$ quando sua integral inferior e sua integral superior são iguais. Esse valor comum chama-se a $integral\ de\ Riemann$ de f e é indicado por $\int_a^b f(x)dx$. No símbolo $\int_a^b f(x)dx$, x é o que se chama uma "variável muda", isto é, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$, etc.*

Teorema 2.2.2 (Condição imediata de integrabilidade) *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é integrável;*

2. *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $S(f;P) - s(f;Q) < \varepsilon$;*

3. *Para todo $\varepsilon > 0$, existem uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$.*

Demonstração: Seja $A = \{s(f,P); P$ é partição de $[a,b]\}$ e $B = \{S(f;P); P$ é partição de $[a,b]\}$. Sabemos que $s(f,Q) \leq S(f,P)$ para todo $s(f,Q) \in A$ e $S(f,P) \in B$. Supondo (1), temos que $\sup A = \inf B$. Logo para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existem $s(f,Q) \in A$ e $S(f,P) \in B$ com $S(f,P) - s(f,Q) < \varepsilon$. Para provar que $(2) \Rightarrow (3)$ basta observarmos que se $S(f,Q) - s(f,P) < \varepsilon$ então, como a partição $P_0 = P \cup Q$ refina ambas P e Q, pelo teorema 2.2.1 que $s(f,Q) \leq s(f,P_0) \leq S(f,P_0) \leq S(f,P)$ de onde conclui-se que $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$. Para provar $(3) \Rightarrow (1)$, se para todo $\epsilon > 0$, existem uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f,Q) < \epsilon$, com isso sabemos que $\sup A = \inf B$, portando f é integrável. $\blacksquare$

2.2.2 Propriedades da integral

Teorema 2.2.3 *Uma função limitada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para todo $c \in (a, b)$ suas restrições $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : [c, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis. No caso afirmativo, tem-se*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Sejam A e B, respectivamente, os conjuntos das somas inferiores de $f|[a, c]$ e $f|[c, b]$. Vê-se facilmente que $A + B$ é o conjunto das somas inferiores de f relativamente as partições de $[a, b]$ que contém o ponto c. Pelo corolário 2.2.3, ao calcular a integral inferior de f, basta considerar as partições desse tipo, pois elas são que refinam $P_0 = \{a, c, b\}$. Logo, por propriedade de *sup*, temos $\sup C = \sup A + \sup B$. Então,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup(A + B) = \sup A + \sup B = \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Analogamente

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx.$$

Subtraindo temos,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = \left(\overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)dx - \underline{\int_c^b} f(x)dx\right),$$

logo

$$f(x) \text{ é integrável} \Leftrightarrow$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_a^c} f(x)dx - \underline{\int_a^c} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \overline{\int_c^b} f(x)dx - \underline{\int_c^b} f(x)dx = 0$$

com isso temos,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

∎

Teorema 2.2.4 *Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Então:*

1. *A soma $f + g$ é integrável e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. *O produto $f.g$ é integrável. Se $c \in \mathbb{R}$.*

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx.$$

3. *Se* $0 < k \leq |g(x)|$ *para todo* $x \in [a, b]$ *então o quociente* $\frac{f}{g}$ *é integrável.*

4. *Se* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5. $|f|$ *é integrável e*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Demonstração: Dada uma partição arbitraria P de $[a, b]$, se indicarmos com m'_i, m''_i e m_i respectivamente os ínfimos de f, g e $f + g$ no i-ésimo intervalo P, teremos $m'_i + m''_i \leq m_i$, logo $s(f, P) + s(g, P) \leq s(f + g, P) \leq \underline{\int_a^b}(f + g)$ para toda partição P. Se tomarmos duas partições P e Q teremos ainda

$$s(f, P) + s(g, Q) \leq s(f; P \cup Q) + s(g, P \cup Q) \leq \underline{\int_a^b}(f + g)$$

por conseguinte,

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \sup_P s(f, P) + \sup_Q s(g; Q)$$
$$= \sup_{P,Q}[s(f, P) + s(g, Q)] \leq \underline{\int_a^b}(f + g),$$

isto prova a primeira das desigualdades abaixo. A terceira se demonstra de modo análogo e a segunda é óbvia:

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f + g) \leq \overline{\int_a^b}(f + g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Quando f e g são integráveis, as três desigualdades são igualdades o que prova (1). Para provar a (2), seja K tal que $|f(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Dada uma partição P, sejam w'_i, w''_i e w_i respectivamente as oscilações de f, g e $f.g$ no i-ésimo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Temos,

$$|f(y).g(y) - f(x).g(x)| = |(f(y) - f(x))g(y) + f(x)(g(y) - g(x)|$$

$$\leq |f(y) - f(x)||g(y)| + |f(x)||g(y) - g(x)|$$

$$\leq K(w'_i + w''_i).$$

Daí,

$$\sum w_i(t_i - t_{i-1}) \leq K.[\sum w'_i(t_i - t_{i-1}) + \sum w''_i(t_i - t_{i-1})].$$

A integrabilidade de $f.g$ segue-se então da integrabilidade de f e g. Quanto a cf, sua integrabilidade resulta do que acabamos de provar. Além disso, se $c \geq 0$, temos $s(cf, P) = c.s(f, P)$ para toda partição P, donde,

$$\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c.\underline{\int_a^b} f = c.\int_a^b f.$$

caso $c < 0$, temos $s(cf, P) = c.S(f, P)$, logo

$$\int_a^b cf = \underline{\int_a^b} cf = c.\overline{\int_a^b} f = c.\int_a^b f.$$

Prova de (3). Como $\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$, basta provar que $\frac{1}{g}$ é integrável se g é integrável e $0 < k \leq |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$. Indiquemos com w_i e w_i' respectivamente as oscilações de g e $\frac{1}{g}$ no i-ésimo intervalo de uma partição P. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar P de modo que $\sum w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.k^2$. Para quaisquer x, y no i-ésimo intervalo P tem-se

$$\left|\frac{1}{g(y)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x) - g(y)|}{|g(y).g(x)|} \leq \frac{w_i}{k^2},$$

portanto $w_i' \leq \frac{w_i}{k^2}$. segue-se que $\sum w_i'(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$ logo $\frac{a}{g}$ é integrável. Para provar (4), se $f(x) \leq g(x)$para todo $x \in [a, b]$ então $s(f, P) \leq s(g, P)$ e $S(f, P) \leq S(g, P)$ para toda partição P, donde

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Provar (5), A desigualdade evidente $||f(y)| - |f(x)|| \leq |f(y) - |f(x)|$ mostra que a oscilação $|f|$ em qualquer conjunto não supera a de f. Logo, f integrável$\Rightarrow$ $|f|$ integrável. Alem disso, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$ resulta de 4 que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ou seja,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx.$$

$\blacksquare$

Corolário 2.2.4 *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável e $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$ então $|\int_a^b f(x)dx| \leq K(b - a)$.*

2.2.3 Condição suficiente de integrabilidade

Teorema 2.2.5 *Toda função contínua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$ e $[a, b]$ é compacto então f é uniformemente contínua , isto é, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Além disso, existem $x_i, y_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tais que

$$m_i = f(x_i) = \min\{f(x),\, x \in [a, b]\}$$

$$M_i = f(y_i) = max\{f(x),\, x \in [a, b]\}.$$

Tomemos P tal que $t_i - t_{i-1} < \delta\ \forall i = 1, ..., n$. Assim,

$$|t_{i-1} - t_i| < \delta \Rightarrow |y_i - x_i| < \delta \Rightarrow |f(y_i) - f(x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (f(y_i) - f(x_i))(t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b - a}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b - a}.(b - a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

donde concluímos que f é integrável. ■

Teorema 2.2.6 *Toda função monótona $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração: Suponha que f é não-decrescente. Dado $\varepsilon > 0$, considere uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\} \in P_{[a,b]}$ tal que

$$(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Neste caso, $M_i = f(t_i)$ e $m_i = f(t_{i-1})$. Além disso,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

Então,

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.\sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.(f(b) - f(a)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

ou seja, f é integrável. ■

Definição 2.2.3 *Diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe uma cobertura finita ou infinita enumerável $X \subset \cup I_k$ de X por intervalos abertos I_k cuja soma dos comprimentos é $\sum |I_k| < \epsilon$.*

Teorema 2.2.7 *Se o conjunto D dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tem medida nula então f é integrável.*

2.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

O problema inverso da derivação consiste em dada uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida em um intervalo I, procurar uma função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja derivável em I e tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Uma tal função F é chamada uma primitiva de f. Antes de falarmos propriamente o Teorema Fundamental do Cálculo, faremos alguns estudos a respeito das questões centrais relativas aos problemas inversos da derivação.

2.3.1 Existência de primitivas

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função (limitada) integrável e $[c,d]$ um intervalo fechado contido em $[a,b]$. Sabemos que a restrição de f a $[c,d]$ é integrável e, em virtude disto, a função $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

está bem definida para todo $x \in [a,b]$.

Teorema 2.3.1 *A função F definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em $[a,b]$.*

Demonstração: Sejam x_1 e $x_2 \in [a,b]$ tais que $x_1 < x_2$. Assim,

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_2} f(t)dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt. \end{aligned}$$

Como f é limitada, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$, para todo $x \in [a,b]$, e , portanto,

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \\ &\leq C(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Desta forma, F é lipschitziana e, consequentemente, contínua, como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Exemplo 2.3.1 *Seja* $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 0$ *se* $0 \leq x \leq 1$ *e* $f(x) = 1$ *se* $1 \leq x \leq 2$*. Tomando* $F : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, *temos* $F(x) = 0$ *se* $0 \leq x \leq 1$ *e* $F(x) = x - 1$ *se* $1 \leq x \leq 2$*. Com isso vemos que* F *é contínua, mas não é derivável no ponto* $x = 1$, *que corresponde a uma descontinuidade de* f*. Logo* F *não é uma primitiva de* f*.*

Mostraremos agora que f contínua implicará F derivável. Em alguns livros clássicos (ver, por exemplo, [1]), esse resultado é conhecido como 1^{a} versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.3.2 *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrável. Se* f *é contínua num ponto* $c \in [a,b]$*, então a função* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*, é derivável em* c *e tem-se* $F'(c) = f(c)$*.*

Demonstração: Pela continuidade de f em c, dado $\varepsilon > 0$. existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a,b]$, $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Então , se $0 < h < \delta$ e $c + h \in [a,b]$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_a^{c+h} f(x) - hf(c) \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_c^{c+h} f(x) - hf(c) \right| \\
&= \frac{1}{h} \left| \int_c^{c+h} [f(x) - hf(c)]dx \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \left| \int_c^{c+h} |f(x) - hf(c)|dx \right| \leq \frac{1}{h}\varepsilon h = \varepsilon
\end{aligned}$$

e, desta forma,

$$F'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

De modo análogo fazemos com h negativo, para concluir que $F'(c) = f(c)$ e, consequentemente, $F'(c) = f(c)$. $\blacksquare$

Corolário 2.3.1 *Dado* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, existe* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável tal que* $F'(x) = f(x)$*, para todo* $x \in [a,b]$*.*

Demonstração: Basta tomar $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. $\blacksquare$

Observação 2.3.1 *O corolário acima garante que toda função contínua definida num intervalo compacto possui primitiva.*

Exemplo 2.3.2 *A recíproca de tal corolário não é verdadeira um exemplo clássico que ilustra tal situação é considerar a função* $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por.*

$$f(x) = \begin{cases} 2xsen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

que não é contínua em $x = 0$*. Entretanto, tomando* $F : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $\int_a^x f(t)d(t)$*, temos*

$$f(x) = \begin{cases} x^2sen\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

que é derivável e $F'(x) = f(x)$*, para todo* $x \in [-1, 1]$*.*
Conclusão: f *é limitada, integrável, descontínua e possui primitiva, como queríamos demonstrar.*

2.3.2 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral, sendo assim é chave de todo cálculo diferencial e integral.. Foram Newton e Leibniz, que realizaram, independente um do outro, o trabalho de sistematização das idéias e métodos, chamado "Teorema Fundamental do Cálculo". Este Teorema retrata a importância para a aplicações em diversos ramos do conhecimentos.

Observemos inicialmente que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva, então possui uma infinidade delas (isso é óbvio, pois se F é uma primitiva de f, então $G = F + C$ é derivável e $G' = F' = f$. Logo G também é contínua). Observe também que se F e G são duas primitivas de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, então $F - G = cte$. De fato, como $F' = G' = f$, segue que $(F - G)' = 0$ e, portanto $F - G = C$, como queríamos. Dessas observações podemos concluir que se conhecermos uma primitiva de f, então conhecemos todas as outras, que serão obtidas, adicionando-se constantes a ela.

Deste fato, concluímos que, se $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 (ou equivalentemente, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua), então

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Com efeito, do corolário da seção anterior, vimos que se f é contínua, então

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

será uma primitiva de f. Seja G outra primitiva de f. Então existe uma constante C tal que $G(x) = C + F(x)$. Logo,

$$G(x) = C + F(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Tomando os valores de G em a e b, temos

$$G(a) = C \text{ e } G(b) = C + \int_a^b f(t)dt$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= G(b) - G(a)\\ &= C + F(b) - C - F(a)\\ &= F(b) - F(a),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Entretanto, tal resultado é também válido mesmo se f não for contínua, mas apenas integrável. Esse é o conteúdo do Teorema Fundamental do Cálculo que damos a seguir.

Teorema 2.3.3 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se uma função integrável $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ então $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. Em outros termos, se uma função $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

Demonstração: Para qualquer partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a, b]$, o Teorema do Valor Médio nos dá

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

onde $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Indicando com m_i' e M_i', respectivamente, o ínfimo e o supremo de F' em $[t_{i-1}, t_i]$, temos $m_i' \leq F'(\xi) \leq M_i'$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}s(F', P) &= \sum_{i=1}^n m_i'(t_i - t_{i-1})\\ &\leq \sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\\ &= F(b) - F(a)\\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i'(t_i - t_{i-1})\\ &= S(F', P),\end{aligned}$$

donde,

$$s(F', P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F', P),$$

onde $s(F', P)$ e $S(F', P)$ são, respectivamente a *soma* inferior e superior de F' em relação a partição P. Como F' é integrável, tais somas tornam-se $\int_a^b F'(x)dx$ e, daí, pelo Teorema do Sanduíche, teremos

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt,$$

como queríamos demonstrar.

■

Capítulo 3

Aplicações

3.0.1 O cálculo de integrais

Com a definição de integral de uma função, o cálculo de integrais torna-se uma tarefa extremamente complicada, pois teríamos que obter

$$\sup_P s(f;P)$$

ou

$$\inf_P S(f;P),$$

onde $s(f,P)$ é a soma inferior e $S(f,P)$ a soma superior de f com relação a partição P. O Teorema Fundamental no Cálculo reduz a avaliação de $\int_a^b f(x)dx$ á obtenção de uma primitiva de f, trabalho que ocupa uma boa porção dos cursos tradicionais de cálculo. Assim, o cálculo de integrais comumente utilizado nos cursos de cálculo nada mais é do que uma aplicação direta de tal teorema.

Exemplo 3.0.1 *Seno é uma primitiva de cosseno, pois* $\sin' x = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo*

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

3.0.2 Mudança de variável

Teorema 3.0.1 *Sejam* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável que possui primitiva e* $g : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável com* g' *integrável e* $g([c,d]) \subset [a,b]$. *Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

Demonstração: Sendo contínua, f possui primitiva $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e o Teorema Fundamental do Cálculo nos dá

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia,

$$(F \circ g)'(t) = f(g(t)).g'(t), \forall t \in [a, b].$$

Assim, $F \circ g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $t \longrightarrow f(g(t))g'(t)$. Logo, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx.$$

■

3.0.3 Integração por partes

Teorema 3.0.2 (Integração por partes) *Se* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *possuem derivadas integráveis então*

$$\int_a^b f(t).g'(t)dt = f.g|_a^b - \int_a^b f'(t).g(t)dt,$$

onde

$$f.g|_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a).$$

Demonstração: Basta lembrar que

$$(f.g)' = f'g + fg'.$$

Portanto, fg é uma primitiva de $f'g + fg'$ e, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\int_a^b (f'g + fg')(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g'(t)dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

■

3.0.4 Valor médio para integrais

Teorema 3.0.3 (Fórmula do valor médio para integrais) *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua então existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b - a).$$

Demonstração: Seja F uma primitiva de f. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$$

$$= f(c)(b-a).$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

3.0.5 Formula de Taylor com resto integral

Teorema 3.0.4 (Formula de Taylor com resto integral) *Considere $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua juntamente com suas derivadas até ordem $n+1$. Então para x e x_0 no intervalo $[a,b]$, temos,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0).(x-x_0)^j + R_{n+1}$$

onde,

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^n f^{n+1}(t)dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do cálculo

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Escolha $\varphi(t) = x - t$ e $g(t) = f'(t)$ de modo que $\varphi'(t) = -1$ e,

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)g(t)dt$$

daí,

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt = f'(t)(x-t)|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t).f''(t)dt$$

onde foi utilizado integração por parte. Logo temos,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t).f''(t)dt$$

suponha que vale para n, isto é,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}.f^{(j)} + R_n + 1$$

onde

$$R_n + 1 = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}.(t)dt$$

assim,

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt &= -\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}.(t).[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}]'dt \\ &= -f^{(n+1)}.(t).\frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!}|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!}.f^{(n+2)}(t)dt \\ &= f^{(n+1)}.(x_0)\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}.f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$

pela hipótese de indução temos que,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}f^{(j)}(x_0)..(x-x_0)^j + f^{(n+1)}(x_0).\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \int_{x_0}^{x} (x-t)^{(n+2)}(t)dt$$

logo,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!}f^{(1)}.(x_0).(x-x_0)^j + R_{n+2}$$

onde,

$$R_{n+2} = \frac{1}{n+1}\int_{1}^{n+1}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{(n+1)} f(t)^{(n+2)}dt.$$

Portanto, por indução temos o resultado. ∎

Considerações Finais

A realização desta pesquisa bibliográfica contribui para o aprendizado sobre o teorema de maior importância do Cálculo Diferencial e Integral: o Teorema Fundamental do Cálculo. O principal objetivo deste trabalho foi demonstrar detalhadamente o Teorema Fundamental do Cálculo de duas maneiras distintas. Na primeira demonstração desse resultado usamos a hipótese de continuidade da função, porém vimos posteriormente que tal hipótese era desnecessária e que o teorema continuava válido mesmo sem ela. Na segunda demonstração enfraquecemos a hipótese tirando a continuidade da função e supomos apenas que ela fosse integrável e que possuísse uma primitiva. Com esses resultados obtidos, foi possível demonstrar as aplicações desse trabalho, como o Teorema da Mudança de Variável, a Fórmula de Integração por Partes, a Fórmula de Taylor com Resto Integral e Teorema do Valor Médio para Integrais.

Em Vista disso, encerro com a sensação de ter cumprido com compromisso, pois busquei ao máximo aprender e abranger o conhecimento matemático, diante da exatidão da linguagem rebuscada da matemática pura, assim como sua grandiosa riqueza enquanto ciências exata.

Referências Bibliográficas

[1] APOSTOL, Tom M. *Cálculo*, Rio de Janeiro., Editora Reverté, 1979.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Análise matemática para licenciatura*, 3ª ed., Edgard Blücher, São Paulo, 1999.

[3] BARTLE, Robert; SHERBERT, Donald. *Introduction to real analysis*, 3ª ed., John Wiley & Sons, Estados Unidos, 2000.

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise I*, 2ª ed., LTC, Rio de Janeiro, 1999.

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1., 2ª ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), CNPq, Rio de janeiro, 1993.

[6] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1., 13ª ed., Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), CNPq, Rio de janeiro, 2011.

[7] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves. *Introdução a Análise*, EDUEP, Campina Grande, 2005.

[8] THOMAS, Georege B. *Cálculo*, 10ª ed. Pearson Addioson Wesley, São Paulo, 2000.