



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT**  
**CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**FRANKLYN OLIVEIRA NÓBREGA**

**A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E APLICAÇÕES**

**CAMPINA GRANDE – PB**  
**2017**

**FRANKLYN OLIVEIRA NÓBREGA**

**A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia – CCT, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduação no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo**

Campina Grande – PB  
2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N337f Nóbrega, Franklyn Oliveira.  
A Fórmula Integral de Cauchy e aplicações [manuscrito] : /  
Franklyn Oliveira Nobrega. - 2017.  
76 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Fórmula Integral de Cauchy. 2. Números complexos. 3. Função analítica.

21. ed. CDD 512.72

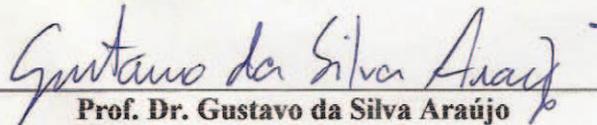
**FRANKLYN OLIVEIRA NÓBREGA**

**A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E APLICAÇÕES**

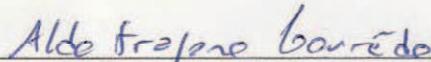
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia – CCT, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduação no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovado em: 15 de dezembro de 2017.

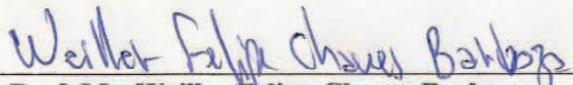
**BANCA EXAMINADORA**



**Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo**  
Departamento de Matemática – *Campus I*  
**Orientador**



**Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo**  
Departamento de Matemática – *Campus I*  
**1º Examinador**



**Prof. Ms. Weiller Felipe Chaves Barboza**  
Departamento de Matemática – *Campus I*  
**2º Examinador**

*A Deus, que me deu discernimento durante  
esta etapa de minha vida.  
Aos meus pais, à minha esposa e à minha  
filha, que sempre me apoiaram.*

Dedico.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiro a Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida universitária, mas que em todos os momentos é o maior Mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço à minha família, minha mãe Marlene, meu pai Ivanildo, minha esposa Rubênia, minha filha Rayla, que sempre me deram apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Agradeço também a todos os professores e em especial ao meu professor orientador Gustavo Araújo, pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado!

*O fruto de um trabalho de amor atinge sua plenitude na colheita e esta chega sempre no seu tempo certo.*

Autor desconhecido.

## RESUMO

O presente trabalho trata de forma preliminar um dos principais teoremas da análise complexa. Primeiramente, abordaremos a necessidade dos números complexos, suas funções e definições. Posteriormente, abordaremos as funções de variável complexa, limite e continuidade, com suas propriedades, função analítica, regras de derivação, além das equações de Cauchy-Riemann. Trabalharemos também funções exponencial, trigonométricas, hiperbólicas, o logaritmo e suas propriedades. Na sequência, apresentaremos arcos regulares e contornos, a integral curvilínea ou de contorno e, em seguida, estudaremos o teorema de Jordan, o teorema de Cauchy e o teorema de Green, que são de fundamental importância ao nosso trabalho. Finalizaremos com a Fórmula Integral de Cauchy, foco principal desse trabalho, sendo apresentada sua demonstração e mostrando algumas aplicações, como o teorema de Morera, o teorema de Liouville e o teorema fundamental da Álgebra.

**Palavras-chave:** Números complexos. Função analítica. Fórmula integral de Cauchy.

## ABSTRACT

The present work treats in a preliminary way one of the main theorems of the complex analysis. Firstly, we will approach the need of the complex numbers, their functions and definitions. Later, we will approach the functions of complex variable, limit and continuity, with their properties, analytical function, derivation rules, besides the equations of Cauchy-Riemann. We also will work exponential function, trigonometrical functions, hyperbolic, the logarithm and their properties. In the sequence, we will present regular and contours arcs, line or contours integral and then we will study Jordan's theorem, the theorem of Cauchy and the theorem of Green, which are from fundamental importance to our work. We will conclude with Cauchy's Integral Formula, main focus of our work. We will present the demonstration and will show some applications of it, as the theorem of Morera, the theorem of Liouville and the fundamental theorem of Algebra.

**Keywords:** Complex numbers. Analytical function. Cauchy's integral formula.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO E O ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS</b> .....	11
1.1 HISTÓRIA DO CÁLCULO .....	11
1.1.1 Antiguidade .....	11
1.1.2 Idade Média .....	11
1.1.3 Idade Moderna .....	12
1.1.4 Idade Contemporânea .....	12
1.2 NECESSIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....	14
1.3 NÚMEROS COMPLEXOS .....	15
1.4 OS NÚMEROS REAIS COMO SUBCORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS .....	16
1.5 O PLANO COMPLEXO .....	16
1.6 MÓDULO E COMPLEXO CONJUGADO .....	17
1.7 REPRESENTAÇÃO POLAR .....	18
1.8 RAÍZES $n$ -ÉSIMAS .....	20
1.9 RAÍZES DA UNIDADE .....	22
1.10 RAÍZES PRIMITIVAS .....	23
1.11 A EXPONENCIAL .....	23
1.12 CONJUNTOS DE PONTOS NO PLANO .....	26
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>FUNÇÕES ANALÍTICAS</b> .....	29
2.1 FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA .....	29
2.2 LIMITE E CONTINUIDADE .....	30
2.3 PROPRIEDADES DO LIMITE .....	36
2.4 FUNÇÃO CONTÍNUA EM UM PONTO DO PLANO .....	39
2.5 FUNÇÃO ANALÍTICA .....	41
2.6 REGRAS DE DERIVAÇÃO .....	43
2.7 AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN .....	44
2.7.1 Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares .....	48
2.7.2 Interpretação Geométrica .....	49

<b>2.7.3 A Função Exponencial</b> .....	51
2.8 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS .....	52
2.9 O LOGARITMO .....	53
<b>2.9.1 Propriedades do Logaritmo</b> .....	55
<b>2.9.2 Definição de <math>z^\alpha</math></b> .....	56

### **CAPÍTULO 3**

<b>A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E APLICAÇÕES</b> .....	58
3.1 ARCOS E CONTORNOS.....	58
3.2 TEOREMA DE JORDAN E CONECTIVIDADE SIMPLES.....	59
3.3 ARCO REGULAR E CONTORNOS .....	60
3.4 INTEGRAL DE CONTORNO .....	61
3.5 INTEGRAL CURVILÍNEA OU DE CONTORNO .....	62
3.6 TEOREMA DE CAUCHY .....	63
3.7 A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY .....	70

### **CAPÍTULO 4**

<b>APLICAÇÕES</b> .....	72
4.1 DERIVADA DE TODAS AS ORDENS .....	72
4.2 TEOREMA DE MORERA.....	75
4.3 TEOREMA DE LIOUVILLE .....	76
4.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA .....	76

<b>REFERÊNCIAS</b> .....	78
--------------------------	----

## INTRODUÇÃO

A fórmula integral de Cauchy, nomeada em homenagem a Augustin Louis Cauchy, é um teorema central na análise complexa. Ela pode ser expressa pelo fato de que uma função holomorfa, definida sobre e dentro de uma curva simples fechada  $C$ , é completamente determinada pelos seus valores na fronteira da região determinada por essa curva.

Este trabalho constitui-se em uma pesquisa bibliográfica, tendo como principal objetivo um estudo detalhado sobre a fórmula integral de Cauchy. Ela afirma que se uma função é analítica em um ponto, então suas derivadas de todas as ordens existem nesse ponto e, além disso, são analíticas nesse ponto. É oportuno lembrar que este resultado não é válido para funções reais.

Dessa forma, o 1º Capítulo aborda a necessidade dos números complexos, sua representação por pontos no plano, além de suas funções e definições. Já o 2º Capítulo trata de funções analíticas, limite e continuidade com suas propriedades e, também, as regras de derivação, além disso, mostra as equações de Cauchy-Riemann e ainda aborda as equações exponenciais e logaritmos, tudo dentro do conjunto dos números complexos. Por fim, o 3º Capítulo apresenta o conceito de arcos e contornos, as integrais de contornos e curvilínea e, posteriormente, as definições e teoremas de Jordan, Cauchy e Green, de suma relevância para demonstração da fórmula da integral de Cauchy que é o ponto principal desse trabalho. Com isso, demonstrou-se a fórmula integral de Cauchy e algumas aplicações como o teorema de Morera, o teorema de Liouville e o teorema fundamental da Álgebra.

## CAPÍTULO 1

### BREVE HISTÓRIA DO CÁLCULO E O ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

#### 1.1 HISTÓRIA DO CÁLCULO

A história do cálculo encaixa-se em vários períodos distintos, de forma notável nas eras antiga, medieval e moderna.

##### 1.1.1 Antiguidade

Na Antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática. A função básica do cálculo integral (calcular volumes e áreas) pode ser remontada ao Papiro Egípcio de Moscou (1800 a.C.), no qual um egípcio trabalhou o volume de um *frustum*<sup>1</sup> piramidal. Eudoxus (408-355 a.C.) usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes (287-212 a.C.) levou essa ideia além, inventando a heurística, que se aproxima do cálculo integral. O método da exaustão foi redescoberto na China por Liu Hui no século III, que o usou para encontrar a área do círculo. O método também foi usado por Zu Chongzhi no século V, para achar o volume de uma esfera.

##### 1.1.2 Idade Média

Na Idade Média, o matemático indiano Aryabhata usou a noção infinitesimal em 499 d.C., expressando-a em um problema de astronomia na forma de uma equação diferencial básica. Essa equação levou Bhāskara II, no século XII, a desenvolver uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e ele desenvolveu também o que seria uma forma primitiva do “Teorema de Rolle”.

No século XII, o matemático persa Sharaf al-Din al-Tusi descobriu a derivada de polinômios cúbicos, sendo considerado um resultado importante no cálculo diferencial. No século XIV, Madhava de Sangamagrama, juntamente com outros matemáticos-astrônomos da Escola Kerala de Astronomia e Matemática, descreveu casos especiais da Série de Taylor, que no texto são tratadas como Yuktibhasa.

---

<sup>1</sup>Frustum é a porção de um sólido que mora entre um ou dois planos paralelos que o cortam.

### **1.1.3 Idade Moderna**

Na Idade Moderna, descobertas independentes no cálculo foram feitas no início do século XVII, no Japão, por matemáticos como Seki Kowa, que expandiu o método de exaustão. Na Europa, a segunda metade do século XVII foi uma época de grandes inovações. O Cálculo abriu novas oportunidades na física-matemática de resolver problemas muito antigos que até então não haviam sido solucionados. Muitos matemáticos contribuíram para essas descobertas, notavelmente John Wallis e Isaac Barrow. James Gregory proveu um caso especial do segundo teorema fundamental do cálculo em 1668.

Coube a Gottfried Wilhelm von Leibniz e a Isaac Newton recolher essas ideias e juntá-las em um corpo teórico que viria a constituir o cálculo. A ambos é atribuída a simultânea e independente invenção do cálculo. Leibniz foi originalmente acusado de plagiar os trabalhos não publicados de Isaac Newton; hoje, porém, é considerado o inventor do cálculo, juntamente com Newton. Historicamente, Newton foi o primeiro a aplicar o cálculo à física, ao passo que Leibniz desenvolveu a notação utilizada até os dias de hoje. O argumento histórico para conferir aos dois a invenção do cálculo é que ambos chegaram de maneiras distintas ao teorema fundamental do cálculo.

Quando Newton e Leibniz publicaram seus resultados, houve uma grande controvérsia de qual matemático (e, portanto, que país: Inglaterra ou Alemanha) merecia o crédito. Newton derivou seus resultados primeiro, mas Leibniz publicou primeiro. Newton argumentou que Leibniz roubou ideias de seus escritos não publicados, que Newton à época compartilhara com alguns poucos membros da Sociedade Real. Esta controvérsia dividiu os matemáticos ingleses dos matemáticos alemães por muitos anos. Um exame cuidadoso dos escritos de Leibniz e Newton mostra que ambos chegaram a seus resultados independentemente, com Leibniz iniciando com integração e Newton com diferenciação. Nos dias de hoje tem-se que Newton e Leibniz descobriram o cálculo independentemente. Leibniz, porém, foi quem deu o nome cálculo à nova disciplina, enquanto que Newton a chamara de “A ciência dos fluxos”.

### **1.1.4 Idade Contemporânea**

Na Idade Contemporânea, já no século XIX, o cálculo foi abordado de uma forma muito mais rigorosa. Foi também durante este período que ideias do cálculo foram

generalizadas ao espaço euclidiano e ao plano complexo. Lebesgue, mais tarde, generalizou a noção de integral. Sobressaíram matemáticos como Cauchy, Riemann, Weierstrass e Maria Gaetana Agnesi. Esta foi autora da primeira obra a unir as ideias de Isaac Newton e Gottfried Leibniz; escreveu também um dos primeiros livros sobre cálculo diferencial e integral. É dela também a autoria da chamada “curva de Agnesi”.

Quando Augustin Louis Cauchy (1789-1857) assumiu a reforma total do cálculo para seus alunos de engenharia na École Polytechnique, na década de 1820, a integral era uma de suas pedras fundamentais.

No cálculo integral, foi necessário demonstrar com generalidade a existência das *integrais* ou *funções primitivas* antes de tornarem-se conhecidas suas diversas propriedades. Para alcançar este objetivo, também foi necessário estabelecer no começo a noção de *integrais tomadas entre limites dados* ou *integrais definidas*.

Cauchy definiu a *integral* de qualquer função contínua no intervalo  $[a, b]$  sendo o limite da soma das áreas de retângulos finos. Sua primeira obrigação era provar que este limite existia para todas as funções contínuas sobre o intervalo dado. Infelizmente, embora Cauchy tenha usado o Teorema do Valor Intermediário, não conseguiu seu objetivo, porque não observou dois fatos teóricos sutis, mas cruciais. Ele não tinha noção das falhas lógicas no seu argumento e prosseguiu para justificar o Teorema do Valor Médio para Integrais e para provar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas. Niels Henrik Abel (1802-1829) também apontou certos erros delicados ao usar a integral de Cauchy para integrar todo termo de uma série infinita de funções.

Foi o matemático francês Édouard Goursat (1858-1936) quem descobriu que o teorema de Cauchy pode ser demonstrado sem a hipótese de que  $f'$  seja contínua. Por causa dessa demonstração de Goursat, é também conhecido como “teorema de Cauchy- Goursat”.

A primeira prova rigorosa da convergência da Série de Fourier geral foi feita por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) em 1829. Dirichlet também é responsável pela definição moderna de *função* (1837). Em 1855, Dirichlet sucedeu Carl Friedrich Gauss (1777-1855) como professor na Universidade de Göttingen. Posteriormente, Georg F. B. Riemann (1826-1866) sucedeu Dirichlet (1859) em Göttingen.

No processo de extensão do trabalho de Dirichlet sobre Séries de Fourier, Riemann generalizou a definição de Cauchy da integral para funções arbitrárias no intervalo  $[a, b]$ , e o limite das *somas de Riemann* é a formulação no texto. Imediatamente, Riemann perguntou, “em que casos uma função é integrável?”. A maior parte do desenvolvimento da teoria de integração foi subsequentemente verificada por Riemann e outros, mas ainda havia

dificuldades com integrais de séries infinitas que não foram trabalhadas até o início do século 20.

## 1.2 NECESSIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são comumente estudados nos cursos de álgebra, ou em cursos que tratam das construções numéricas, aí incluídos os números inteiros, racionais e reais.

Como se sabe, as raízes de uma equação do 2º grau,  $ax^2 + bx + c = 0$ , são dadas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

**Demonstração.** Considere uma equação do 2º grau do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$ , são números reais quaisquer, com  $a \neq 0$ . Assim, temos que:  $ax^2 + bx = -c$ .

Dividindo os dois lados da igualdade por  $a$ , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Agora vamos completar quadrados do lado esquerdo da igualdade. Dessa forma, teremos que somar  $\frac{b^2}{4a^2}$  em ambos os lados da igualdade:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser reescrito como  $x + \frac{b}{2a}$ , pois completamos a expressão para que aparecesse um quadrado perfeito. O lado direito da igualdade pode ser reescrito efetuando a adição das duas frações:

$$-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Logo, ficamos com a seguinte igualdade:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Vamos extrair a raiz quadrada dos dois lados da igualdade:

$$\overline{x + \frac{b}{2a}} = \frac{\overline{b^2 - 4ac}}{4a^2}$$

Lembrando que  $\overline{x^2} = \overline{x} = \pm x$ , temos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\overline{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Isolando  $x$  obtemos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\overline{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x = \frac{-b \pm \overline{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolvente de uma equação do 2º grau. ■

Quando o discriminante  $b^2 - 4ac > 0$  obtemos duas raízes, se ele for nulo, apenas uma raiz. Quando o discriminante é negativo, a fórmula acima não conduz a nenhuma raiz real, neste caso, o trinômio  $ax^2 + bx + c$  é sempre diferente de zero.

### 1.3 NÚMEROS COMPLEXOS

Dessas considerações anteriores, segue-se que é possível resolver a equação de 2º grau mesmo no caso em que  $b^2 - 4ac < 0$ , se operarmos com o símbolo  $i = \sqrt{-1}$  como se fosse um número. Com a propriedade de que  $i^2 = -1$  e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais que regem estes números.

Assim, os números complexos são da forma  $a + bi$ , como:  $3 + 5i, \frac{2}{3} - 2i, -3 - \frac{2}{5}i$ .

O novo elemento  $i = \sqrt{-1}$  é chamado unidade imaginária,  $a$  é chamado de parte real e  $b$  de parte imaginária do número complexo  $a + bi$ .

Vemos assim que, ao introduzirmos os números complexos, devemos definir adição e multiplicação de maneira que permaneçam válidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva que essas operações possuem quando referidas aos números reais.

$$i^2 = -1; ai = ia$$

$$(a + bi) = c + di \text{ significa } a = c \text{ e } b = d;$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i.$$

#### 1.4 OS NÚMEROS REAIS COMO SUBCORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Observe que os números complexos da forma  $a + i0$  se comportam, com relação à adição e à multiplicação, do mesmo modo que os números reais  $a$ , em outras palavras, fazendo corresponder o número complexo  $a + i0$  ao número real  $a$ . Então, a soma  $a + b$  corresponderá  $(a + b) + i0$ , que é o mesmo que  $(a + i0) + (b + i0)$ ; e ao produto  $ab$  corresponderá  $ab + i0$ , que é o mesmo que  $(a + i0)(b + i0)$ .

Desse modo, os números complexos se apresentam como uma extensão natural dos números reais.

#### 1.5 O PLANO COMPLEXO

**Definição 1.1.** Dado o número complexo  $z = x + iy$ , sua parte real  $x$  é denotada por  $\text{Re } z$  e sua parte imaginária  $y$ , por  $\text{Im } z$ .

O plano complexo é o conjunto das representações de todos os números complexos  $z = x + iy$  pelos pontos  $P = (x, y)$  do plano. É conveniente identificar o número complexo  $z = x + iy$  com o ponto  $P = (x, y)$ , o que é possível através das seguintes definições:

$$(a, b) = (c, d) \text{ significa } a = c, b = d;$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente (isto se dá, pois  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$  são isomorfos). Por meio dela, o número complexo  $z = x + iy$  é identificado com o ponto  $(x, y)$ , ou com o vetor  $Oz$  de componentes  $x$  e  $y$  (Figura 1).

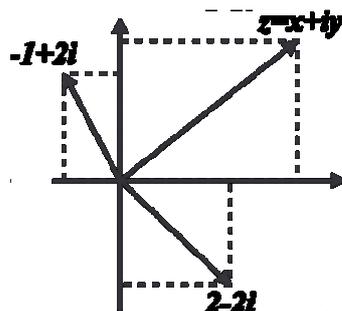


Figura 1- Representação de números complexos por pontos do plano

## 1.6 MÓDULO E COMPLEXO CONJUGADO

**Definição 1.2.** Definimos o módulo, valor absoluto ou norma de um número complexo  $z = x + iy$  como sendo o número não-negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Não é difícil observar que o módulo de um número complexo  $z$  é a distância do ponto  $z$  à origem.

O complexo conjugado de  $z = x + iy$  é definido como sendo  $\bar{z} = x - iy$ . A Figura 2 ilustra exemplos de complexos conjugados.

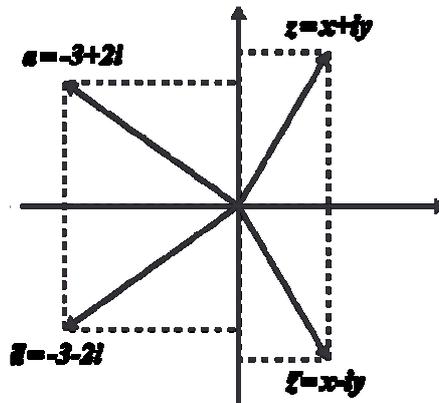


Figura 2- Exemplos de complexos conjugados.

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 + i(-xy + xy) \\ &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

isto é,  $z\bar{z} = |z|^2$ . Esta propriedade permite calcular o quociente  $w = \frac{z_1}{z_2}$  de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ ,  $z_2 \neq 0$ , que é definido pela condição  $wz_2 = z_1$ , para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

**Exemplos:**

$$\frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-3 - 6i + i + 2i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} = \frac{-3 - 5i - 2}{1^2 + 2^2} = \frac{-5 - 5i}{5} = -1 - i$$

Em geral, como  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ , temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2}{z_2 z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

## 1.7 REPRESENTAÇÃO POLAR

**Definição 1.3.** Considerando a representação geométrica de um número complexo  $z \neq 0$ , chama-se argumento de  $z$  o ângulo  $\theta$  formado pelo eixo  $Ox$  e o vetor  $Oz$  (Figura 3).

Como em Trigonometria, os ângulos aqui são orientados: consideramos positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

O argumento de  $z$  só pode ser definido quando  $z \neq 0$ ; mesmo nesta hipótese, o argumento só fica determinado a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Como  $x = |z| \cos \theta$  e  $y = |z| \sin \theta$ , temos a seguinte representação polar ou representação trigonométrica:

$$z = r \cos \theta + i \sin \theta, \quad r = |z|;$$

$r$  e  $\theta$  são designados as coordenadas polares de  $z$ .

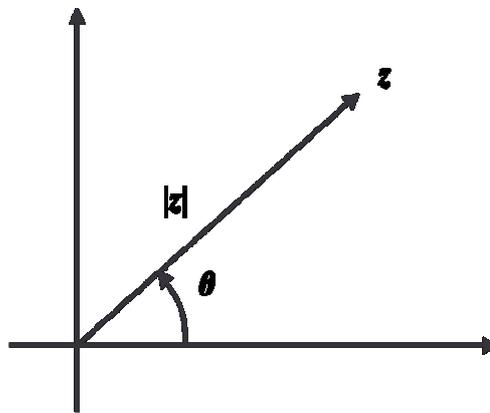


Figura 3- Representação polar.

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$$

dois números complexos quaisquer. Então:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \\ &= r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Vemos assim que o produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores (Figura 4). Observe que os triângulos de vértices  $0, 1, z_1$  e  $0, z_2, z_1 z_2$  são semelhantes, o que facilita a construção do produto  $z_1 z_2$  a partir dos dados  $0, 1$  e  $z_2$ .

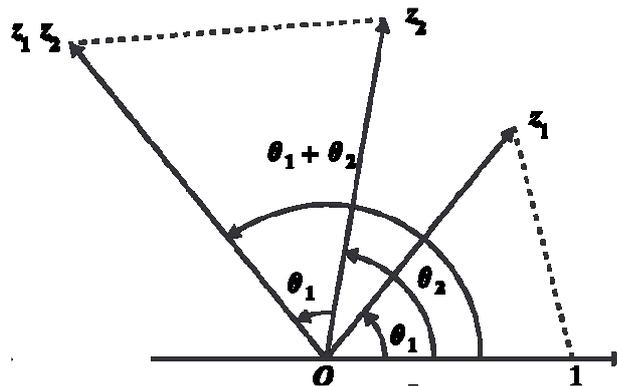


Figura 4- Produto de complexo.

Vamos deduzir resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2),$$

isto é, para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos (Figura 5). Também aqui, como no caso do produto, a construção do quociente é facilitada pela semelhança dos triângulos de vértices  $0, 1, z_1/z_2$  e  $0, z_2, z_1$ .

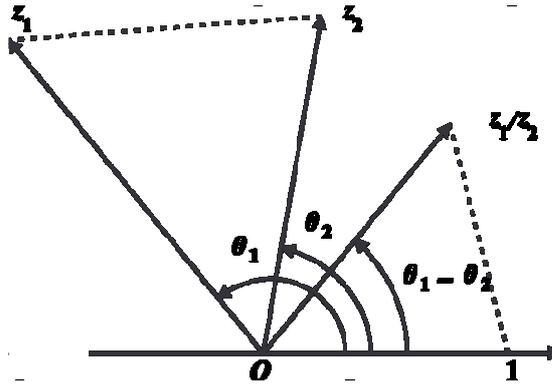


Figura 5- Divisão de complexos.

A fórmula da multiplicação acima estende-se para um número qualquer de fatores.

Sendo

$$z_j = r_j \cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

por indução finita, é possível provar que

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n).$$

Em particular, quando todos os fatores são iguais e de módulo unitário, obtemos a fórmula seguinte, chamada fórmula de De Moivre:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta fórmula é válida também para expoentes negativos. De fato,

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \\ &= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta = \cos -n\theta + i \operatorname{sen} -n\theta. \end{aligned}$$

## 1.8 RAÍZES $n$ -ÉSIMAS

Dado um número complexo  $a$ , dizemos que  $z$  é raiz  $n$ -ésima de  $a$  se  $z^n = a$ . Como veremos logo a seguir, um número complexo ( $z \neq 0$ ) possui  $n$  raízes distintas. Para isso, consideremos o número dado  $a \neq 0$  em sua forma polar:  $a = \gamma (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ ; e representemos também em forma polar, a raiz que desejamos encontrar:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Utilizando a fórmula de De Moivre, a equação  $z^n = a$  assume a forma seguinte:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = \gamma (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Como a igualdade de números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, separadamente, devemos ter:

$$\rho^n \cos n\varphi = \gamma \cos \theta \quad \text{e} \quad \rho^n \operatorname{sen} n\varphi = \gamma \operatorname{sen} \theta.$$

Estas equações, por sua vez, equivalem a:

$$\rho^n = \gamma, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

onde  $k$  é um inteiro. Daqui segue-se que  $\rho$  é a raiz  $n$ -ésima positiva de  $\gamma$ , donde

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Esta fórmula produz  $n$  raízes distintas, quando a  $k$  se atribuem os valores  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Verifica-se que qualquer outro valor atribuído a  $k$  conduz a uma raiz já obtida com um dos valores acima, precisamente aquele que é o resto da divisão de  $k$  por  $n$ . Vemos, assim, que um número complexo  $a \neq 0$  possui  $n$  raízes  $n$ -ésimas  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ , todas com o mesmo módulo  $\rho = \sqrt[n]{a}$  (Figura 6) e com argumentos:

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

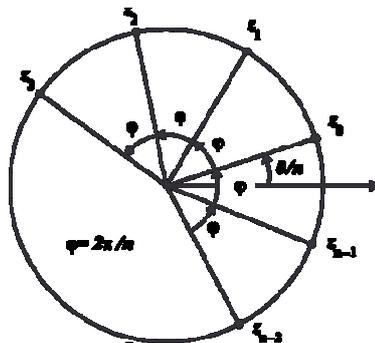


Figura 6- Raízes  $n$ -ésimas.

## 1.9 RAÍZES DA UNIDADE

No caso particular em que  $a = 1$ , o ângulo  $\theta$  assume o valor zero e a fórmula  $z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta+2k\pi}{n}$  se reduz a:

$$z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n},$$

que são as raízes  $n$ -ésimas da unidade. Pondo

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

e utilizando a fórmula de De Moivre, vemos que as raízes  $n$ -ésimas da unidade são dadas por:

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

Observe que, representadas no plano complexo, essas raízes são os vértices de um polígono regular de  $n$  lados. A Figura 7 ilustra as raízes da unidade no caso  $n = 6$ . Aqui,

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega^2 = -\omega, \omega^3 = -1, \omega^4 = -\omega, \omega^5 = \omega.$$

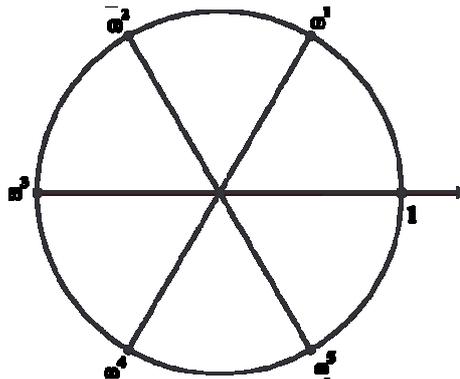


Figura 7- Raízes da unidade.

A fórmula  $z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta+2k\pi}{n}$  pode ser escrita assim:

$$z = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)^{2k\pi/n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n},$$

ou seja,

$$a = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)^k, \omega^k, k = 0, 1, \dots, n-1$$

Esta expressão nos diz que as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,

$$z_0 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$$

pelas raízes  $n$ -ésimas da unidade,  $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ .

## 1.10 RAÍZES PRIMITIVAS

**Definição 1.4.** Chama-se raiz  $n$ -ésima primitiva da unidade qualquer raiz  $n$ -ésima  $z \neq 1$  tal que  $n$  é o menor inteiro positivo tal que  $z^n = 1$ .

Para qualquer  $n$  natural, obtemos que

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

é raiz primitiva. Ela é a primeira raiz primitiva quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real. Mas pode não ser a única raiz primitiva, por exemplo, nos casos das raízes triplas da unidade, como vimos há pouco,  $\omega$  é raiz primitiva, mas  $\omega^2$  também é. Já no caso das raízes sêxtuplas,  $\omega$  e  $\omega^5$  são raízes primitivas, enquanto  $\omega^2$ ,  $\omega^3$  e  $\omega^4$  não o são.

## 1.11 A EXPONENCIAL

Admitimos que o leitor tenha familiaridade com as funções trigonométricas, a constante de Euler  $e$  e a função exponencial  $e^x$ , conceitos estes que são estudados nos cursos de Cálculo. Lembramos, em particular, os desenvolvimentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidos para todos os valores reais da variável  $x$ :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (1.1)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (1.2)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad (1.3)$$

A constante de Euler  $e$ , que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 ( $e \approx 2,71828\dots$ ), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

que se obtém de (1.1) com  $x = 1$ .

Vamos tomar o desenvolvimento (1.1) como base para definir  $e^z$  com  $z$  complexo. Se  $e^z$  já tivesse significado para  $z$  complexo, e o desenvolvimento (1.1) fosse válido neste caso, então teríamos, com  $y$  real,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + iy + \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Admitindo ainda que seja possível rearrumar os termos desta série, pondo junto os termos reais e separadamente os termos imaginários, obtemos

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right)$$

e, portanto, de (1.2) e (1.3), segue que

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

Essas considerações, que são puramente formais, não estabelecem a relação (1.4), mas servem como motivação para definirmos a função exponencial. Fazemos isso tomando a

relação (1.4) como ponto de partida; ela é aqui usada para definir a exponencial no caso de expoente puramente imaginário  $iy$ . Por outro lado, a definição da exponencial no caso de um expoente qualquer  $z = x + iy$  é feita de maneira a manter a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2},$$

Definimos, então, a exponencial  $e^z$ , para um número complexo qualquer  $z = x + iy$ , mediante a expressão

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad (1.5)$$

**Teorema 1.1.** Sejam  $z_1, z_2$  em  $\mathbb{C}$ . Então vale as seguintes propriedades da exponencial complexa:

1.  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ;
2.  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ ;
3.  $e^{z \cdot n} = e^{nz}$ ,  $n$  inteiro;
4.  $e^z \neq 0, \forall z$ ;
5.  $e^z = e^{\operatorname{Re} z}$ ;
6.  $e^z = 1$  se, e somente se,  $z = 2k\pi i$ ,  $k$  inteiro.

Com a notação exponencial, a representação polar de um número complexo assume a forma compacta,  $z = \gamma e^{i\theta}$ , onde  $\gamma = |z|$  e  $\theta = \arg z$ .

**Exemplos:**  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $-2 = 2e^{i\pi}$ ,  $-4i = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$ .

A mesma notação permite escrever a fórmula de De Moivre assim:

$$e^{i\theta \cdot n} = e^{in\theta},$$

Observamos também que é costume usar a notação  $\exp z$  em lugar de  $e^z$ , principalmente quando o expoente é muito carregado. Por exemplo, costuma-se escrever:

$$\exp \frac{z}{2} t - \frac{1}{t} \quad \text{em vez de } e^{\frac{z}{2} t - \frac{1}{t}}.$$

## 1.12 CONJUNTOS DE PONTOS NO PLANO

**Definição 1.5.** Dados os números  $\gamma > 0$  e  $z_0$  um número complexo qualquer, chama-se disco aberto de centro  $z_0$  e raio  $r$  ao conjunto  $D_r(z_0)$  de todos os números complexos que estão a uma distância menor do que  $r$  do ponto  $z_0$ , isto é,

$$D_r z_0 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \} .$$

O disco fechado é o conjunto  $\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$ , que inclui a fronteira, isto é, o círculo  $\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$  (Ver Figura 8).

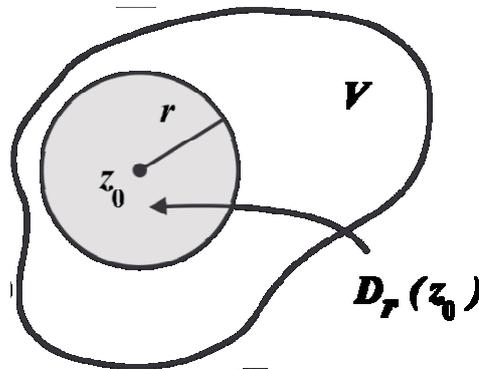


Figura 8- Disco fechado.

**Definição 1.6.** Chama-se vizinhança de um ponto  $z_0$  a todo conjunto  $V$  que contém um disco de centro  $z_0$ .

Em particular, qualquer disco  $D_r(z_0)$  é uma vizinhança de  $z_0$ , que frequentemente denotaremos por  $V_r(z_0)$ . Usaremos  $V_r'(z_0)$  para denotar a vizinhança  $V_r(z_0)$ , da qual excluimos o ponto  $z_0$ , isto é,  $V_r'(z_0) = V_r(z_0) - \{z_0\}$ . Costuma-se chamar  $V_r'(z_0)$  de vizinhança perfurada.

**Definição 1.7.** Dizemos que  $z_0$  é ponto interior de um conjunto  $C$  se  $C$  é vizinhança de  $z_0$ , isto é, se existe um disco de centro  $z_0$  todo contido em  $C$ . Dizemos que  $C$  é aberto se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se  $C$  é vizinhança de cada um de seus pontos.

**Definição 1.8.** Dizemos que um conjunto  $F$  é fechado quando o seu complementar é aberto. Lembramos que o complementar de um conjunto  $C$  é o conjunto  $C'$  dos pontos que não pertencem a  $C$ .

Não é difícil observar que o complementar do complementar de  $C$  é o próprio  $C$ .

**Definição 1.9.** Chama-se fronteira de um conjunto  $C$  ao conjunto dos pontos  $z$  tais que qualquer vizinhança de  $z$  contém ponto de  $C$  e pontos do seu complementar  $C'$  (Figura 9).

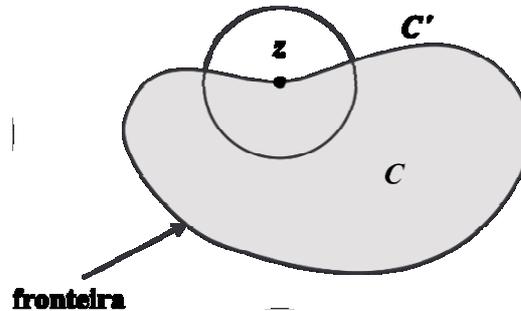


Figura 9- Fronteira.

Desta definição segue-se que a fronteira de  $C$  é também a fronteira de  $C'$ . Um ponto da fronteira pode ou não pertencer ao conjunto em questão.

Mostra-se que nenhum ponto interior a um conjunto pode ser ponto de sua fronteira, e nenhum ponto da fronteira pode ser ponto interior. Destas observações, pode-se provar que um conjunto é aberto se, e somente se, ele não contém pontos de sua fronteira.

**Definição 1.10.** Dizemos que  $z_0$  é ponto de acumulação de um conjunto  $C$  se qualquer vizinhança de  $z_0$  contém infinitos pontos de  $C$ .

Mostra-se que um ponto interior a um conjunto, bem como todo ponto da fronteira que não pertence ao conjunto, são pontos de acumulação do conjunto; todo ponto de acumulação que não pertence ao conjunto é ponto da fronteira; em consequência, um conjunto é fechado se, e somente se, ele contém todos os seus pontos de acumulação.

**Definição 1.11.** Dizemos que um conjunto aberto é conexo se quaisquer dois pontos de seus pontos podem ser ligados por um arco todo contido no conjunto. Chama-se região a todo conjunto aberto e conexo.

É frequente, na literatura, o uso do vocábulo “domínio” com o mesmo significado de “região”, caso em que se deve tomar cuidado para não confundir “domínio” com “domínio de

função”; por isso mesmo usaremos sempre o vocábulo “região” com o significado que lhe damos aqui, e não “domínio”.

**Definição 1.12.** Diz-se que um conjunto  $C$  menor ou igual ao conjunto dos números complexos é limitado se existe um número positivo  $K$  tal que  $|z| \leq K$  para todo  $z$  em  $C$ . Chama-se conjunto compacto a todo conjunto limitado e fechado.

**Definição 1.13.** Chama-se ponto isolado de um conjunto  $C$  a todo ponto de  $C$  que não é ponto de acumulação desse conjunto.

Por exemplo, todos os pontos do conjunto infinito

$$C = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots\}$$

são pontos isolados; 1 é o único ponto de acumulação desse conjunto e não pertence a ele.

Todas essas noções são as mesmas do plano euclidiano. Elas se baseiam apenas na noção de distância de dois pontos  $z_1$  e  $z_2$ , dada por  $d_{z_1, z_2} = |z_1 - z_2|$ , que é o mesmo que a distância euclidiana  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ , onde  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ . Aliás, mesmo do ponto de vista algébrico, o plano complexo e o plano euclidiano só diferem um do outro devido ao fato de termos definido a multiplicação de números (ou pontos) complexos, enquanto no plano euclidiano não temos tal operação.

## CAPÍTULO 2

### FUNÇÕES ANALÍTICAS

Neste capítulo faremos um estudo das funções de variáveis complexas e estudaremos suas principais propriedades.

#### 2.1 FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

**Definição 2.1.** Seja  $D$  um conjunto de números complexos e seja  $f$  uma lei que faz corresponder, a cada elemento  $z$  do conjunto  $D$ , um único número complexo, que denotamos por  $f(z)$ . Nestas condições, diz-se que  $f$  é uma função com domínio  $D$ . O conjunto  $I$  dos valores  $w = f(z)$ , correspondentes a todos os valores de  $z$  em  $D$ , é chamado a imagem de  $D$  pela função  $f$  (Figura 10);  $z$  é chamada variável independente, e  $w$ , a variável dependente.

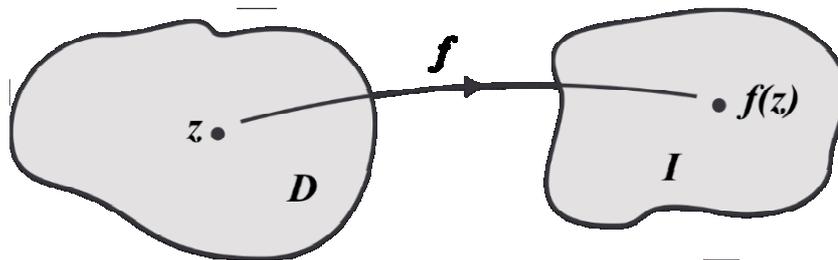


Figura 10- Função complexa.

Deve-se notar que para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência  $f$ ; é preciso especificar também o domínio de definição  $D$ . Entretanto, frequentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas  $w = f(z)$ , sem especificar o domínio de definição. Nestes casos, fica então subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores  $z$  para os quais faz sentido a expressão analítica  $f(z)$ . Por exemplo, quando falamos “seja a função  $w = \frac{3z-5i}{(z-i)(z+7)}$ ”, estamos usando esta relação para especificar a lei que faz corresponder um valor  $w$  a cada valor  $z$ ; ao mesmo tempo, fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, excetuados os pontos  $z = i$  e  $z = -7$ , já que nestes pontos o denominador se anula.

**Definição 2.2.** Diz-se que uma função  $f_1$  com domínio  $D_1$  é restrição de uma função  $f_2$  com domínio  $D_2$  se  $D_1$  estiver contido em  $D_2$  e  $f_1(z) = f_2(z)$  para todo  $z$  em  $D_1$  (Figura 11). Nestas mesmas condições, diz-se que  $f_2$  é uma extensão de  $f_1$ .

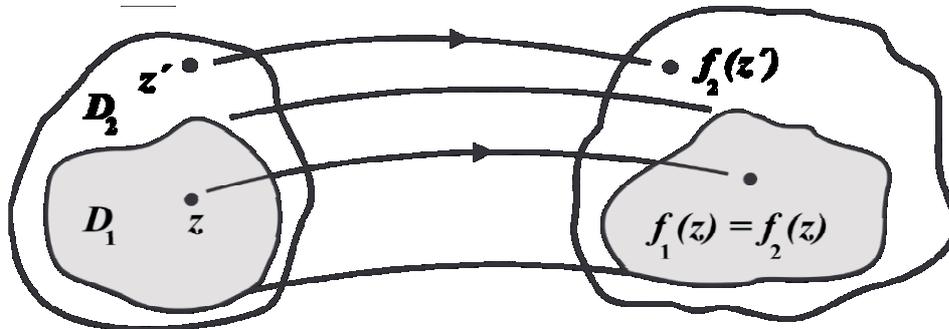


Figura 11- Restrição de funções.

Por exemplo, a expressão  $w = e^z$ ,  $z$  complexo, define uma função em todo o plano complexo, a qual é uma extensão da função  $y = e^x$ ,  $x$  real.

Uma função da variável complexa  $z$  pode assumir valores puramente reais. Por exemplo,  $f(z) = z = \overline{x^2 + y^2}$ ,  $z = x + iy$ , é uma função real da variável complexa  $z$ . A cada função  $w = f(z)$  de uma variável complexa  $z = x + iy$  estão associadas duas funções reais das variáveis reais  $x$  e  $y$  dadas por:

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \text{ e } v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

## 2.2 LIMITE E CONTINUIDADE

A definição de limite que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo e Análise na Reta.

Seja  $f$  uma função com domínio  $D$ . Desejamos atribuir significado preciso à expressão “ $f$  tem limite  $L$  com  $z$  tendendo a  $z_0$ ”. Isto deverá significar que a distância  $|f(z) - L|$  entre  $f(z)$  e  $L$  pode ser feita arbitrariamente pequena, à custa de restringir  $z$  a uma vizinhança conveniente de  $z_0$ . Mas a variável  $z$  apenas aproxima  $z_0$ , sem nunca assumir este valor. Observe que  $z$  deve pertencer ao domínio da função e  $z_0$  deve ser ponto de acumulação desse domínio. Essas observações ajudam a bem compreender a definição que damos a seguir (Figura 12).

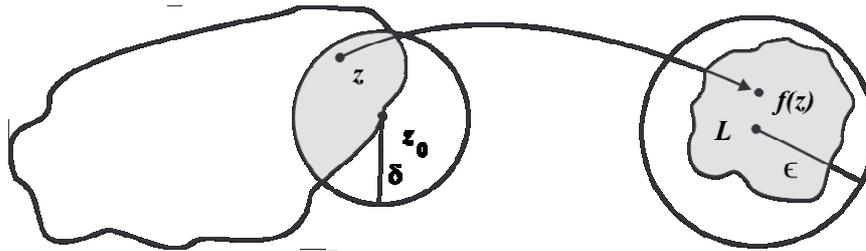


Figura 12- Definição de limite.

**Definição 2.3.** Seja  $z_0$  um ponto de acumulação do domínio  $D$  de uma função  $f$ . Diz-se que  $f$  tem limite  $L$  com  $z$  tendendo a  $z_0$  se dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \quad |f(z) - L| < \varepsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente,

$$z \in D \cap V_\delta'(z_0) \quad f(z) \in V_\varepsilon(L).$$

Escreve-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Sendo essa definição formalmente a mesma que damos para funções reais, ela se reduz a este caso quando todos os números envolvidos são reais. Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  está definida para todo número real  $x \neq 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Este é um exemplo típico de função que tem limite num ponto sem estar definida neste ponto; ele evidencia bem o fato de que o limite  $L$  nada tem a ver com o valor da função no ponto  $z_0$ .

Quando o ponto  $z_0$  pertence ao domínio de  $f$  e  $L = f(z_0)$ , dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $z_0$  e escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Neste caso não há por que excluir o ponto  $z = z_0$  na definição de limite. Com essa definição de continuidade, a função que consideramos há pouco,

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

seria contínua no ponto  $x = 0$  se ela fosse definida nesse ponto com valor  $f(0) = 1$ . É por isso que se costuma estender a função  $f$  aqui considerada, atribuindo-lhe o valor 1 na origem.

Por exemplo, usando a definição 2.3, vamos mostrar que a função

$$f(z) = \frac{z + 3i}{2}$$

é contínua no ponto  $z_0 = 2 - i$ . Temos:

$$f(z) - f(z_0) = \frac{z + 3i}{2} - (1 + i) = \frac{z - (2 - i)}{2}.$$

Daqui segue-se que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $\delta = 2\varepsilon$  para termos

$$|z - (2 - i)| < \delta \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Observe que esta implicação vale também no sentido inverso, mas nem sempre é assim, como veremos no exemplo a seguir.

Se, ao invés da função  $f$  anterior, considerarmos a função

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{para } z = 2 - i \\ \frac{z + 3i}{2}, & \text{para } z \neq 2 - i \end{cases}$$

o limite com  $z \rightarrow 2 - i$  será o mesmo que no caso da função  $f$ , porém diferente do valor de  $g$  no ponto  $z = 2 - i$ .

**Exemplo.** Mostraremos usando a definição 2.3 que

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z) = -4 + 6i.$$

Solução. De fato, temos:

$$\begin{aligned} |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| &= |(z^2 + 4) + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| \\ &= |z - 2i||z + 3 + 2i| \leq |z - 2i|(|z| + |3| + |2i|) \\ &= |z - 2i|(|z| + 5). \end{aligned}$$

Como  $z$  ficará restrito a uma vizinhança de  $2i$ , podemos, desde agora, supor  $|z| < 3$ , portanto,

$$|(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| \leq 8|z - 2i|.$$

Esta última expressão será menor do que  $\varepsilon$ , desde que  $|z - 2i| < \frac{\varepsilon}{8}$ . Isto parece indicar que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ ; mas não podemos nos esquecer de que  $z$  deve satisfazer a restrição  $|z| < 3$ . Observando a Figura 13, vemos que esta condição ficará satisfeita se tomarmos  $\delta < 1$ . Para provar isto, usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|z| = |(z - 2i) + 2i| \leq |z - 2i| + 2 \leq \delta + 2 < 1 + 2 = 3.$$

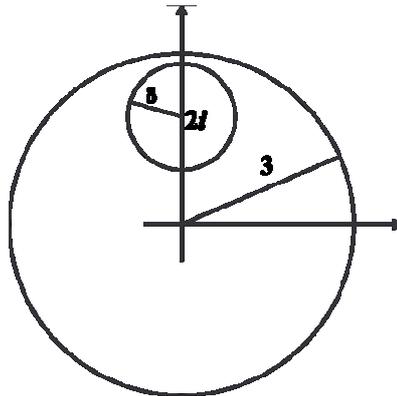


Figura 13- Gráfico do exemplo anterior.

Concluimos que  $\delta$  deve ser o menor dos números 1 e  $\frac{\varepsilon}{8}$ , garantindo-nos o resultado desejado:

$$|z - 2i| < \delta \quad |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| < \varepsilon.$$

Observe que esta última implicação não vale no sentido inverso, da direita para a esquerda. E não tem de valer mesmo, pois, para chegarmos a ela utilizamos a desigualdade do triângulo e a estimativa  $|z| < 3$ . Por exemplo, tomando  $\varepsilon = 8$ ,  $\delta = 1$  e  $z = 0,9i$ , a última desigualdade fica satisfeita, mas não a primeira.

Como no caso de funções de variável real, a definição 2.3 pode ser facilmente adaptada ao caso em que  $z$  ou  $f(z)$  tende ao infinito, resultando nas definições que damos a seguir.

**Definição 2.4.** Diz-se que uma função  $f(z)$  com domínio  $D$  tem limite finito  $L$  com  $z \rightarrow \infty$  se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f(z) - L| < \varepsilon$  para todo  $z \in D$ ,  $|z| > M$ .

**Definição 2.5.** Diz-se que  $f(z)$  tende a infinito com  $z$  tendendo a  $z_0$  se, dado qualquer  $K > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(z)| > K$  para todo  $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ .

**Definição 2.6.** Diz-se que  $f(z)$  tende a infinito com  $z$  tendendo a infinito se, dado qualquer  $K > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| > K$  para todo  $z \in D$ ,  $|z| > M$ .

**Exemplo.** A função

$$f(z) = \frac{5z}{2z - 8i} = \frac{5z}{2(z - 4i)}$$

tende a infinito quando  $z \rightarrow 4i$ .

Solução. Vemos que deve ser assim porque o denominador estará se aproximando de zero. Mas temos de nos certificar de que o numerador permanecerá afastado de zero, daí exigirmos que  $|z| > r$ , onde  $r$  é qualquer número positivo, porém menor do que 4, para que  $z$  possa se acomodar numa vizinhança  $\delta$  de  $4i$  (Figura 14).

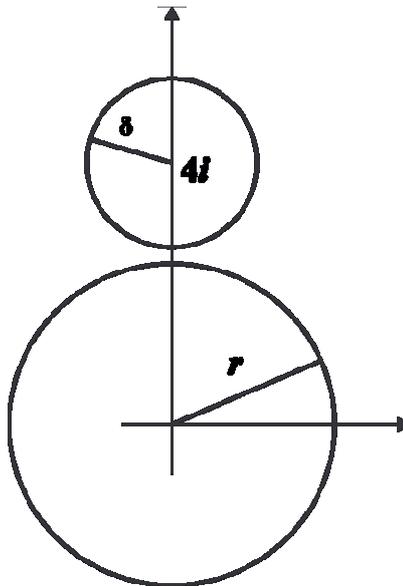


Figura 14- Gráfico do exemplo anterior.

Fixando esse  $r$ , temos:

$$|f(z)| = \frac{5|z|}{2|z - 4i|} > \frac{5r}{2|z - 4i|}$$

Daqui segue-se que, dado qualquer  $K > 0$ ,  $|f(z)|$  será maior do que  $K$  se

$$\frac{5r}{2|z - 4i|} > K, \text{ ou seja, } 0 < |z - 4i| < \frac{5r}{2K}.$$

Esta condição deve ser satisfeita juntamente com a condição  $|z| > r$ . Tomando então  $0 < |z - 4i| < \delta$ , onde  $\delta = \min \left\{ \frac{5r}{2K}, 4 - r \right\}$ , obtemos

$$|z| = |4i + (z - 4i)| \geq 4 - |z - 4i| > 4 - \delta > 4 - (4 - r) = r,$$

e, conseqüentemente,

$$0 < |z - 4i| < \delta \quad |f(z)| > K,$$

como queríamos provar.

**Exemplo.** Mostre que

$$f(z) = \frac{3iz+5}{2z-i} \rightarrow \frac{3i}{2} \text{ com } z \rightarrow \infty$$

Solução. De fato,

$$f(z) - \frac{3i}{2} = \frac{3iz+5}{2z-i} - \frac{3i}{2} = \frac{7}{2|2z-i|} \leq \frac{7}{2|2z-1|},$$

Observe que esta última desigualdade só é correta no pressuposto de que  $|z| > \frac{1}{2}$ , como admitimos a partir de agora. Observe também que

$$f(z) - \frac{3i}{2} \leq \frac{7}{2(2|z|-1)} < \varepsilon \text{ se } |z| > \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right).$$

Assim, com

$$M = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right) \right\}$$

obtemos o resultado desejado:

$$|z| > M \quad \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

Poderíamos também ter simplificado um pouco mais, tomando  $|z| > 1$ , donde  $2|z| - 1 > |z|$ ; portanto,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{2|2z-1|} < \frac{7}{2|z|},$$

que é  $< \varepsilon$  se  $|z| > \frac{7}{2\varepsilon}$ , de forma que, pondo  $M = \max \left\{ 1, \frac{7}{2\varepsilon} \right\}$ , teríamos, como antes,

$$|z| > M \quad \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

**Exemplo.** Mostre que

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{3z + 5} \rightarrow \infty \text{ com } z \rightarrow \infty$$

Solução: Com a restrição  $|z| > 5$ , teremos:

$$|f(z)| = \frac{|z^2 - i|}{|3z + 5|} \geq \frac{|z^2 - 1|}{3|z| + 5} > \frac{|z^2 - 1|}{4|z|} > \frac{|z^2| - \frac{|z|^2}{2}}{4|z|} = \frac{|z|}{8}.$$

Dado  $K > 0$ , basta então fazer  $|z| > 8K$  e  $|z| > 5$  para termos  $|f(z)| > K$ , isto é, sendo  $M$  o maior dos números 5 e  $8K$ , teremos:

$$|z| > M \quad |f(z)| > K,$$

o que prova o desejado.

Como ilustram esses exemplos, para demonstrar, diretamente da definição de limite, que  $f(z) \rightarrow L$  com  $z \rightarrow z_0$ , temos de obter uma desigualdade do tipo  $|f(z) - L| < K|z - z_0|$ . Conseguimos isto por meio de simplificações, à custa de desigualdades triangulares do tipo  $|a + b| \geq |a| - |b|$  em denominadores. Evidentemente, neste último caso é preciso que  $|a|$  seja maior do que  $|b|$ . Para obter uma desigualdade do tipo  $|f(z)| > K$ , devemos inverter o uso das desigualdades triangulares.

### 2.3 PROPRIEDADES DO LIMITE

As propriedades do limite, relativas ao limite da soma, do produto e do quociente, já conhecidas no caso de funções de variáveis reais, permanecem válidas para funções de variável complexa, e são estabelecidas como no caso de variável real. É o que veremos agora.

**Teorema 2.1.** Se  $f$  e  $g$  têm limites finitos com  $z \rightarrow z_0$  (digamos,  $\lim f = F$  e  $\lim g = G$ ), então

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = F + G$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = FG$$

(3) Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$ , então  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{F}{G}$

**Demonstração. (1)** Devemos mostrar que para  $\epsilon > 0$  dado, existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - z_0| \leq \delta$ , então  $|f(z) + g(z) - (F + G)| < \epsilon$ . Observe que

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z) - (F + G)| &= |(f(z) - F) + (g(z) - G)| \\ &\leq |f(z) - F| + |g(z) - G|. \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, dado  $\epsilon$ , existem  $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2}$  e  $\delta_2 = \frac{\epsilon}{2}$  tais que

$$0 < |z - z_0| \leq \delta_1 \text{ então } |f(z) - F| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |z - z_0| \leq \delta_2 \text{ então } |g(z) - G| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim,

$$|f(z) + g(z) - (F + G)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

completando a demonstração.

**(2)** Pela definição de limite, existem  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tais que  $|f(z) - F| < \frac{\epsilon}{2(G+1)}$  se  $0 < |z - z_0| < \delta_1$  e  $|g(z) - G| < \frac{\epsilon}{2|F|}$  se  $0 < |z - z_0| < \delta_2$ . Tomamos  $\delta_2$  de forma que  $|g(z) - G| < 1$  se  $0 < |z - z_0| < \delta_2$ . Agora diminuindo o valor de  $\delta_2$  se necessário. Neste caso, se  $0 < |z - z_0| < \delta_2$ , então

$$|g(z)| = |G + g(z) - G| \leq |G| + |g(z) - G| < |G| + 1.$$

Logo, se tomarmos  $\delta > 0$  tal que  $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$  teremos que, se  $0 < |z - z_0| < \delta$ , então

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - FG| &= |f(z)g(z) - Fg(z) + Fg(z) - FG| \\ &= |f(z) - F| |g(z)| + |F(g(z) - G)| \\ &\leq |f(z) - F| |g(z)| + |F| |g(z) - G| \\ &< \frac{\epsilon}{2(G+1)} (|G| + 1) + |F| \frac{\epsilon}{2|F|} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = FG$ .

(3) Para demonstrar a propriedade relativa ao quociente de funções, em primeiro lugar, observamos que:  $\frac{f(z)}{g(z)} = f(z) \cdot \frac{1}{g(z)}$ , isto é, basta provar que, sendo  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$ , então

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{L_2}$  e depois utilizar o resultado obtido em (2). Agora para provar que

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{L_2}$ , consideremos o módulo seguinte:

$$\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{L_2} = \frac{L_2 - g(z)}{g(z) \cdot L_2} = \frac{1}{g(z) \cdot |L_2|} \cdot |g(z) - L_2| \quad (I)$$

Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$ , dado  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon < \frac{|L_2|}{2}$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que se  $0 < z - z_0 < \delta_1$ , então

$|g(z) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$ . Assim para  $z$  tal que  $0 < z - z_0 < \delta_1$ , temos

$$L_2 = g(z) + L_2 - g(z) \leq |g(z)| + |L_2 - g(z)| < |g(z)| + \frac{|L_2|}{2},$$

e daí:  $|L_2| - \frac{|L_2|}{2} < |g(z)|$  e, portanto,  $|g(z)| > \frac{|L_2|}{2}$ , ou seja,  $\frac{1}{|g(z)|} < \frac{2}{|L_2|}$ .

Dessa maneira, substituindo na igualdade (I), para  $z$  tal que  $0 < z - z_0 < \delta_1$ , temos que:

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{1}{|g(z) \cdot |L_2||} \cdot |g(z) - L_2| < \frac{2}{|L_2|^2} \cdot |g(z) - L_2| \quad (II)$$

Novamente, como  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que se  $0 < z - z_0 < \delta_2$ , então

$$|g(z) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2} \cdot \epsilon \quad (III)$$

Tomando  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , ambas as desigualdades (II) e (III) são verdadeiras. Assim, se  $0 < z - z_0 < \delta$ , então  $\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{L_2} \right| < \epsilon$ , o que significa que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{L_2}$ , como queríamos provar. ■

**Teorema 2.2.** Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \neq 0$ , então existe uma vizinhança  $V'_\delta(z_0)$  na qual  $f(z)$  é limitada. Com a mesma hipótese, existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D_f \cap V'_\delta(z_0) \quad |f(z)| > \frac{|L|}{2}$$

**Demonstração.** Da hipótese segue-se que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D_f \cap V'_\delta(z_0) \quad |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Então, com as mesmas restrições em  $z$ ,

$$|f(z)| = L + |f(z) - L| \leq L + |f(z) - L| < L + \varepsilon.$$

Isto prova que a função é limitada pela constante  $L + \varepsilon$ .

Para provar a segunda parte, tomemos  $\varepsilon = \frac{L}{2}$ . Teremos, com as mesmas restrições em  $z$ :

$$\begin{aligned} |f(z)| &= L + |f(z) - L| \geq L - |f(z) - L| \\ &> L - \varepsilon = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

completando a demonstração. ■

## 2.4 FUNÇÃO CONTÍNUA EM UM PONTO DO PLANO

**Definição 2.7.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0$  um ponto de acumulação de  $D$  em  $D$ . Uma função  $f$  é contínua em  $z_0$ , se o limite de  $f$  no ponto  $z_0$  for igual a  $f(z_0)$ , isto é:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Três condições estão estabelecidas nesta definição:

1.  $f = f(z)$  deve estar definida em  $z_0$ ;
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  deve existir;
3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Os resultados apresentados a seguir podem ser obtidos como consequência dos resultados anteriores e uma prova detalhada por ser encontrada em [7].

**Teorema 2.3.** A soma e o produto de funções contínuas são funções contínuas. O quociente de duas funções  $f$  e  $g$ , contínuas num ponto  $z_0$ , é uma função contínua em  $z_0$ , desde que  $g(z_0)$  não se anule.

**Teorema 2.4.** Seja  $g$  uma função cujo domínio contenha um ponto  $z_0$  e cuja imagem esteja contida no domínio de uma função  $f$ . Nestas condições, se  $g$  for contínua em  $z_0$  e  $f$  contínua em  $g(z_0)$ , então a função composta  $f(g(z_0))$  será contínua no ponto  $z_0$ .

Existe uma importante relação entre o limite de uma função complexa e os limites de suas partes real e imaginária, que consideramos a seguir.

**Teorema 2.5.** Seja  $f = u + iv$  uma função com domínio  $D$ , e seja  $L = U + iV$ . Então  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$  se, e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = U \text{ e } \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = V, \quad (2.1)$$

**Demonstração.** Suponhamos a condição  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D \cap V_\delta(z_0) \implies |f(z) - L| < \epsilon, \quad (2.2)$$

Como  $u - U = \operatorname{Re}(f - L)$  e  $v - V = \operatorname{Im}(f - L)$ , temos:

$$|u - U| \leq |f - L| \text{ e } |v - V| \leq |f - L|.$$

Daqui e de (2.2) segue-se que para  $z \in D \cap V_\delta(z_0)$  tem-se

$$|u(x, y) - U| < \epsilon \text{ e } |v(x, y) - V| < \epsilon,$$

o que estabelece a condição (2.1).

Reciprocamente, supondo satisfeita a condição (2.1), dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $z \in D \cap V_\delta(z_0)$  implica

$$|u(x, y) - U| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |v(x, y) - V| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Combinando estas desigualdades com a desigualdade do triângulo, obtemos:

$$|f - L| = |u - U + i(v - V)| \leq |u - U| + |v - V|$$

Daqui e de (2.3) segue-se que  $z \in D \cap V_\delta(z_0)$  implica

$$|f(z) - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ou seja,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ . Isto completa a demonstração. ■

**Corolário 2.1.** Uma função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é contínua num ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  se e somente se suas partes real e imaginária forem contínuas nesse ponto.

**Demonstração.** Segue diretamente do teorema anterior. ■

## 2.5 FUNÇÃO ANALÍTICA

A definição de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma que no caso de função de variável real. Seja  $f$  uma função cujo domínio é uma região  $R$  (conjunto aberto e conexo) e seja  $z$  um ponto de  $R$ . Diz-se que  $f$  é derivável no ponto  $z$  se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ou, o que é equivalente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z},$$

Quando esse limite existe, ele define uma nova função de  $z$ , chamada de derivada ou função derivada da função  $f$ , denotada por  $f'$ . Assim,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Observe que, para a existência da derivada, o limite acima não pode depender do modo como  $\Delta z$  tende a zero ou  $w$  tende a  $z$ . Em particular,  $w$  pode tender a  $z$  ao longo de diferentes raios, todos com origem no ponto  $z$  (Figura 15) e o limite deve ser o mesmo.

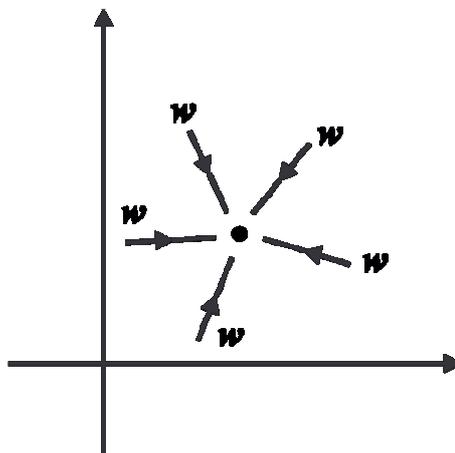


Figura 15-  $w$  tendendo a  $z$  ao longo de diferentes raios.

**Exemplo.** Vamos mostrar que a função  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$  só é derivável em  $z = 0$ . Com efeito, pondo  $\Delta z = re^{i\theta}$  (Figura 16), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{z\Delta z + \bar{z}\Delta z + \Delta z\bar{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= ze^{-2i\theta} + z + re^{-i\theta}. \end{aligned}$$

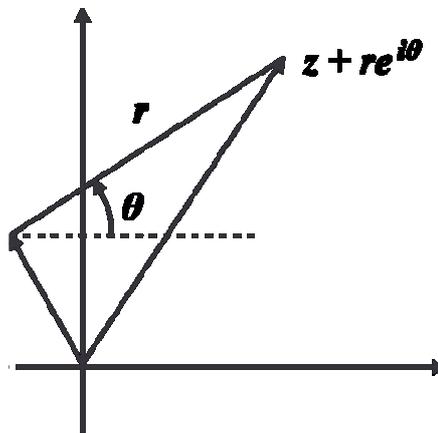


Figura 16- Gráfico de  $f(z)$ .

Passando ao limite com  $r \rightarrow 0$  e denotando este limite com  $f'_\theta(z)$ , obtemos:

$$f'_\theta(z) = ze^{-2i\theta} + z.$$

Esta é a expressão da derivada direcional<sup>1</sup> de  $f$  no ponto  $z$ . Ela depende do ângulo  $\theta$  para todo  $z \neq 0$ , de forma que  $f$  não possui derivada nesses pontos. A derivada de  $f$  só existe para  $z = 0$  e, neste caso,  $f'(0) = 0$ .

**Definição 2.8.** Diz-se que uma função  $f$  é analítica numa região  $R$  se ela é derivável em cada ponto de  $R$ ;  $f$  é analítica no ponto  $z_0$  se  $f$  é analítica numa região contendo  $z_0$ .

---

<sup>1</sup>Se  $v$  é um vetor qualquer em  $\mathbb{C}$ , a derivada direcional de  $f$  num ponto  $z$ , na direção de  $v$ , é, por definição,  $f'_v(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+tv) - f(z)}{t}$ .

As expressões função holomorfa e função regular são usadas como sinônimas de “função analítica”.

De acordo com essa definição, uma função que só possua derivadas em certos pontos isolados não é analítica; assim, a função  $f(z) = |z|^2$  considerada há pouco não é analítica, mesmo em  $z = 0$ , onde ela é derivável.

O conceito de analiticidade requer a existência da derivada em todos os pontos de um conjunto aberto. Sem dúvida, essa condição impõe fortes restrições à função  $f$  e tem como consequência uma série de resultados surpreendentes, como veremos gradualmente no decorrer do nosso estudo.

## 2.6 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Como veremos progressivamente em nosso estudo, todas as funções com que o leitor se familiarizou em seu curso de Cálculo são analíticas, quando convenientemente estendidas ao plano complexo. De verificação imediata é o fato de que uma função constante é analítica e sua derivada é zero. A função  $f(z) = z^n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo, é analítica e sua derivada é  $f'(z) = nz^{n-1}$ ; isto se demonstra exatamente como no caso real; por exemplo, usando a fórmula do binômio de Newton, segundo a qual

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^n = z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + \Delta z^n.$$

Daqui segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z + \dots + \Delta z^{n-1}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\Delta z \rightarrow 0$ , obtemos o resultado desejado.

Do mesmo modo, a soma e o produto de um número finito de funções analíticas são funções analíticas e as derivadas se calculam de acordo com as regras conhecidas; o quociente de funções analíticas é função analítica nos pontos onde o denominador não se anula e a derivada é dada pela conhecida regra de derivação de um quociente. Vale também a regra de derivação da função composta ou derivação em cadeia: se  $g$  é derivável no ponto  $z$  e  $f$  é derivável no ponto  $g(z)$ , então  $f(g(z))$  é derivável no ponto  $z$  e

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z)) g'(z).$$

Todos esses teoremas e outros mais se demonstram como no caso de variáveis reais. A título de ilustração, vamos demonstrar que se uma função  $f$  é derivável num ponto  $z_0$ , então  $f$  é contínua nesse ponto.

Como  $f$  é derivável no ponto  $z_0$ , a expressão  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = g$  tende a zero quando  $z \rightarrow z_0$ . Em consequência, o último termo da expressão

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0) g$$

tende a zero quando  $z \rightarrow z_0$ . Como o penúltimo termo também tende a zero, passando ao limite obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

ou seja,  $f$  é contínua em  $z_0$ .

**Definição 2.9.** Chama-se função inteira a toda função que é analítica em todo o plano.

Os polinômios são os exemplos mais simples de funções inteiras. A seguir vêm as funções racionais, definidas como o quociente de dois polinômios. Estas são analíticas em todos os pontos que não anulam o denominador. Por exemplo, a função

$$f(x) = \frac{(z + 3)(3z - 1)^2}{z(z - 3)(z + i)^2}$$

é analítica em todo o plano, excetuados os zeros do denominador, isto é,  $z = 0, 3, -i$ .

## 2.7 AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Seja  $f = u + iv$  uma função derivável num ponto  $z = x + iy$ . Então, o quociente

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite  $f' z$  com  $\Delta z \rightarrow 0$ , independentemente do modo como  $\Delta z$  tende a zero. Em particular, podemos fazer  $\Delta z$  tender a zero por valores reais  $\Delta z = k$  e, separadamente, por valores imaginários  $\Delta z = it$  (Figura 17). Obtemos, respectivamente,

$$f' z = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}$$

e

$$f' z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) + i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}$$

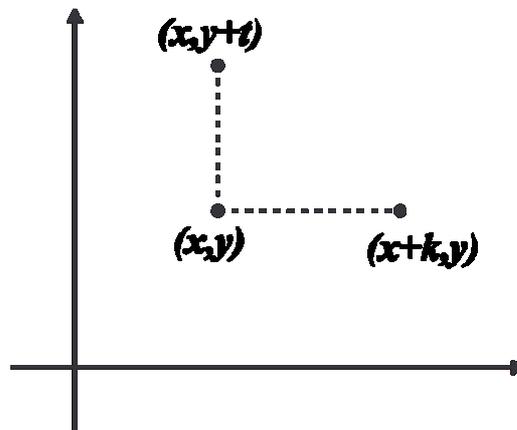


Figura 17-  $\Delta z$  tende a zero por valores reais  $\Delta z = k$  por valores imaginários  $\Delta z = it$ .

De acordo com o Teorema 2.5, a existência desses limites implica a existência, separadamente, dos limites das partes reais e das partes imaginárias das expressões sob limites, isto é,

$$f' z = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y)}{k} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x+k, y) - v(x, y)}{k}$$

e

$$f' z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}$$

Em consequência, as funções  $u$  e  $v$  possuem derivadas parciais no ponto  $(x, y)$ , e valem nesse ponto as seguintes relações:

$$f' z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \quad f' z = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias, obtemos daqui as chamadas equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.4)$$

A análise acima mostra que as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função  $f$ . Mas elas não são suficientes para garantir a existência dessa derivada. Como exemplo disto, consideremos a função

$$f(z) = \overline{xy},$$

onde, como sempre,  $z = x + iy$ . Temos aqui  $v = 0$  e, portanto,  $v_x = v_y = 0$ . Por outro lado,  $u = \overline{xy}$ , donde  $u(k, 0) = u(0, 0) = 0$ , logo,

$$u_x(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(k, 0) - u(0, 0)}{k} = 0,$$

Analogamente,  $u_y(0, 0) = 0$ . Vemos então que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas no ponto  $z = 0$ . Não obstante isto,  $f$  não é derivável em  $z = 0$ . De fato, pondo  $\Delta z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ , obtemos:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\overline{\cos\theta \sin\theta}}{e^{i\theta}} = \frac{2|\sin 2\theta|}{2e^{i\theta}}.$$

Esta é a expressão da derivada de  $f$  na direção  $(\cos\theta, \sin\theta)$ . Como se vê, ela depende de  $\theta$ ; logo,  $f'(0)$  não existe.

Como acabamos de ver, as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária, porém não suficiente, para que uma função  $f$  tenha derivada. Entretanto, se a elas juntarmos a condição de que as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  sejam contínuas numa região  $R$ , teremos uma equivalência muito importante sobre a analiticidade de  $f$  em termos das equações de Cauchy-Riemann.

**Teorema 2.6.** Sejam  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  funções reais com derivadas parciais contínuas numa região  $R$ . Então, uma condição necessária e suficiente para que a função  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  seja analítica em  $R$  é que as equações de Cauchy-Riemann estejam aí satisfeitas.

**Demonstração.** A necessidade da condição foi demonstrada acima, de forma que só nos resta provar que a condição é suficiente. Para isto vamos considerar um ponto  $z = x + iy \in R$  e um número  $\delta > 0$  tal que a vizinhança  $V_\delta = \{x + k + i(y + t) : k^2 + t^2 < \delta^2\}$  esteja toda

contida em  $R$ , em particular, os segmentos  $zz_1$  e  $z_1z_2$ , onde  $z_1 = (x + k, y)$  e  $z_2 = x + k, y + t$ , também estão contidos em  $R$ . Isto nos permite aplicar o conhecido teorema da média, segundo o qual,

$$\begin{aligned} u(x + k, y) - u(x, y) &= ku_x(x + \theta_1 k, y) \\ u(x + k, y + t) - u(x + k, y) &= tu_y(x + k, y + \theta_2 t) \end{aligned}$$

Onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são números convenientes do intervalo  $(0, 1)$ . Somando essas duas igualdades membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + k, y + t) - u(x, y) \\ &= ku_x(x + \theta_1 k, y) + tu_y(x + k, y + \theta_2 t) . \end{aligned} \quad (1)$$

Como as funções  $u_x$  e  $u_y$  são contínuas, podemos escrever:

$$u_x(x + \theta_1 k, y) = u_x(x, y) + \delta_1$$

e

$$u_y(x + k, y + \theta_2 t) = u_y(x, y) + \delta_2,$$

onde  $\delta_1$  e  $\delta_2$  tendem a zero com  $k^2 + t^2 \rightarrow 0$ . Substituindo (2) em (1) obtemos:

$$\Delta u = u(x + k, y + t) - u(x, y) = ku_x + tu_y + t\delta_2. \quad (2)$$

De modo inteiramente análogo, deduzimos:

$$\Delta v = v(x + k, y + t) - v(x, y) = kv_x + tv_y + k\delta_3 + t\delta_4 \quad (3)$$

onde  $\delta_3$  e  $\delta_4$  tendem a zero com  $k^2 + t^2 \rightarrow 0$ .

Introduzindo a notação  $\Delta z = h = k + it$  e usando (2) e (3), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{h} = \frac{(ku_x + itv_y) + i(kv_x - itu_y)}{h} \\ &\quad + \frac{k}{h} \delta_1 + i\delta_3 + \frac{t}{h} \delta_2 + i\delta_4 . \end{aligned}$$

Usando agora as equações de Cauchy-Riemann para substituir  $v_y$  e  $u_y$  por  $u_x$  e  $v_x$ , respectivamente. Assim,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x + iv_x + \frac{k}{h} \delta_1 + i\delta_3 + \frac{t}{h} \delta_2 + i\delta_4 \quad (4)$$

Finalmente, observamos que  $k/h \leq 1$  e  $t/h \leq 1$ , enquanto  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  e  $\delta_4$  tendem a zero com  $\Delta z = h \rightarrow 0$ , de forma que, passando ao limite em (4) com  $h \rightarrow 0$ , concluímos que a derivada  $f'(z)$  existe e é dada por  $u_x + iv_x$ . Isto completa a demonstração. ■

### 2.7.1 Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares

Veremos agora que as equações de Cauchy-Riemann, quando escritas em coordenadas polares, assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (2.5)$$

que é uma forma muito útil em várias aplicações.

Para a demonstração analítica das equações (2.5), utilizamos as fórmulas de transformação,

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta, \quad (2.6)$$

que definem implicitamente  $r$  e  $\theta$  como funções de  $x$  e  $y$ . Derivando-as com relação a  $x$ , obtemos:

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

e

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Daqui segue-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

De modo análogo, derivando (2.6) em relação a  $y$ , e resolvendo em relação a  $\frac{\partial r}{\partial y}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ , encontramos:

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

e

$$1 = \frac{\partial r}{\partial y} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Segue-se daí que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r},$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Substituindo nas equações de Cauchy-Riemann, obtemos:

$$\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Multiplicando a primeira destas equações por  $\cos\theta$  e a segunda por  $\operatorname{sen}\theta$  e somando-as, obtemos a primeira equação em (2.5). Analogamente, multiplicando a primeira equação acima por  $\operatorname{sen}\theta$  e a segunda por  $-\cos\theta$ , e somando-as, obtemos a segunda equação em (2.5).

### 2.7.2 Interpretação Geométrica

Antes de apresentarmos os resultados desta seção, lembremos alguns conceitos que serão úteis para tal propósito. Dada uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto, diferenciável num ponto  $x \in U$ , o gradiente de  $f$  em  $x$  (encontrado na literatura como  $\operatorname{grad}f(x)$  ou  $\nabla f(x)$ ) é o vetor  $(f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))$ . Dados dois vetores  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$ , o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^n$  é definido como  $u, v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .

As equações de Cauchy-Riemann têm um significado geométrico interessante, expresso no teorema seguinte.

**Teorema 2.7.** Se  $f = u + iv$  é analítica numa região  $R$ , então as curvas das famílias

$$u(x, y) = \operatorname{const.} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{const.},$$

se cruzam em ângulo reto em todo ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$  onde  $f'(z) \neq 0$ .

**Demonstração.** De fato, como o vetor  $\text{grad } u = (u_x, u_y)$  é normal à curva  $u(x, y) = u(x_0, y_0)$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , o vetor  $(u_y, -u_x)$  é tangente, pois esses dois vetores são ortogonais (Figura 18), pois

$$(u_x, u_y), (u_y, -u_x) = u_x u_y - u_y u_x = 0.$$

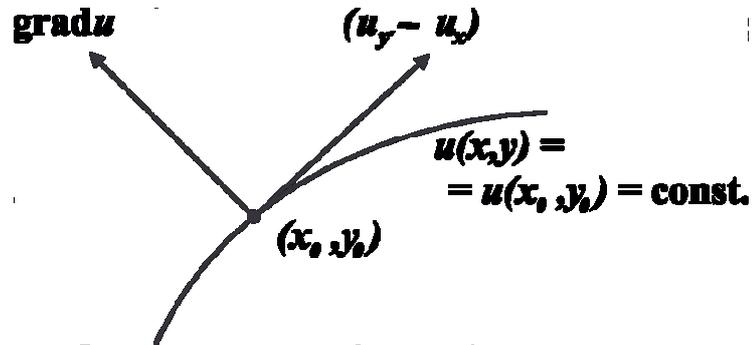


Figura 18- Vetor gradiente normal à curva.

De modo análogo, o vetor  $(v_y, -v_x)$  é tangente à curva  $v(x, y) = \text{const.}$ , como ilustra a Figura 19. Fazendo o produto escalar desses dois vetores  $((u_y, -u_x)$  e  $(v_y, -v_x))$  e usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos:

$$(u_y, -u_x), (v_y, -v_x) = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

que estabelece o resultado desejado. ■

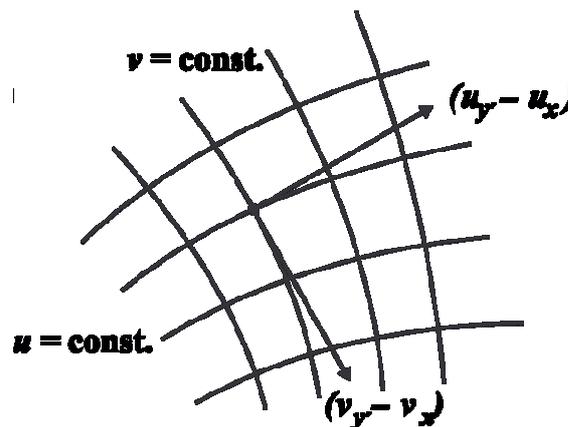


Figura 19- Vetor tangente à curva.

Observe que o resultado anterior se refere a famílias de curvas do plano  $z$  que são levadas pela função  $w = f(z)$  nas famílias de retas do plano  $\omega$  paralelas ao eixo dos  $v$  e ao eixo dos  $u$  respectivamente.

### 2.7.3 A Função Exponencial

A função  $w = e^z$  é analítica em todo o plano. Para vermos isso, lembramos que, sendo  $z = x + iy$ , a exponencial se escreve

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

o que permite verificar a validade das equações de Cauchy-Riemann para todo  $z$ . Verifica-se também que as derivadas parciais das partes real e imaginária de  $e^z$  são contínuas em todo o plano. Portanto, pelo Teorema 2.6,  $e^z$  é analítica, isto é, tem derivada para todo  $z$ . Essa derivada é simplesmente  $\frac{\partial e^z}{\partial z}$ , que resulta ser a própria função  $e^z$ , como segue facilmente da expressão acima. Assim,

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad \text{para todo } z.$$

Vamos estudar a transformação do plano  $z = x + iy$  no plano  $\omega = u + iv$  pela função exponencial  $\omega = e^z$ . Para isso, é conveniente escrever  $\omega$  em forma polar:

$$\omega = e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{isto é, } \rho = e^x, \quad \varphi = y.$$

Mantendo  $y$  constante e variando  $x$ ,  $\omega$  permanece num raio pela origem. Quando  $x$  varia de zero a  $+\infty$ ,  $\rho$  varia de 1 a  $+\infty$  ao longo desse raio; e quando  $x$  varia de zero a  $-\infty$ ,  $\rho$  varia de 1 a zero (Figura 20).

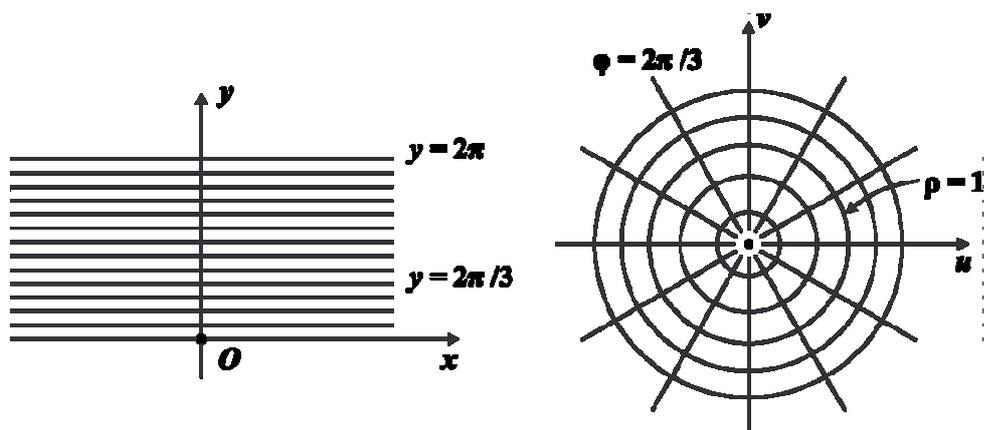


Figura 20- Função exponencial complexa.

Suponhamos agora que  $x$  permaneça constante e  $y$  varie no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Então  $\rho$  permanecerá fixo e o ponto  $\omega$  descreverá um círculo de raio  $\rho$ , centrado na origem. Para  $x = 0$

esse círculo tem raio unitário; para  $x > 0$ , ele é exterior ao círculo unitário, e para  $x < 0$ , ele é interior.

## 2.8 AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Vamos introduzir agora as funções trigonométricas e hiperbólicas. Começamos observando que das relações

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

decorrem as seguintes fórmulas de Euler:

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Elas são usadas para estender as funções trigonométricas a todo o plano complexo. Assim, definimos:

$$1. \operatorname{senz} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$2. \operatorname{cosz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$3. \operatorname{tgz} = \frac{\operatorname{senz}}{\operatorname{cosz}}, \operatorname{cosz} \neq 0;$$

$$4. \operatorname{cotz} = \frac{\operatorname{cosz}}{\operatorname{senz}}, \operatorname{senz} \neq 0;$$

$$5. \operatorname{secz} = \frac{1}{\operatorname{cosz}}, \operatorname{cosz} \neq 0;$$

$$6. \operatorname{cscz} = \frac{1}{\operatorname{senz}}, \operatorname{senz} \neq 0.$$

As conhecidas fórmulas de derivação,  $\operatorname{senz}' = \operatorname{cosz}$ ,  $\operatorname{cosz}' = -\operatorname{senz}$  etc., seguem das definições acima e de  $(e^z)' = e^z$ . De fato, façamos a derivada do seno:

$$\operatorname{senz}' = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}' - e^{-iz}'}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{cosz}.$$

As identidades trigonométricas familiares permanecem todas válidas no campo complexo. Assim,

$$1. \operatorname{sen} -z = -\operatorname{senz};$$

$$2. \operatorname{cos} -z = \operatorname{cosz};$$

$$3. \operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1;$$

$$4. \operatorname{sen} z_1 + z_2 = \operatorname{sen} z_1 \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \operatorname{sen} z_2;$$

$$5. \operatorname{cos} z_1 + z_2 = \operatorname{cos} z_1 \operatorname{cos} z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2;$$

$$6. \operatorname{sen} z = \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} - z ;$$

$$7. \operatorname{cos} z = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - z .$$

As duas primeiras dessas identidades são consequências imediatas das definições de seno e cosseno, e as demais seguem dessas definições e das propriedades da função exponencial.

## 2.9 O LOGARITMO

O logaritmo de um número complexo  $z = r e^{i\theta} \neq 0$ , é definido assim:

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde  $\log r$  denota o logaritmo real do número  $r > 0$ . O logaritmo está definido para todo número complexo  $z \neq 0$ , e se reduz ao logaritmo real quando  $\theta = 0$ . Usa-se também a notação  $\ln z$ .

Na realidade, a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número  $z$ . Por causa disso costuma-se dizer que o logaritmo é uma função multivalente.

**Observação.** É claro que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente, de forma que a expressão “função multivalente”, a rigor é imprópria, mas é usada por ser conveniente: sabemos do que estamos falando. Em contraposição, para enfatizar, ou evitar qualquer dúvida, às vezes usa-se também a expressão “função multivalente”. Em breve encontraremos outros exemplos de “funções multivalentes” e veremos como torná-las univalentes.

Voltando ao logaritmo, para fazê-lo univalente, lembramos que o argumento de um número complexo  $z \neq 0$  só é determinado a menos de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Seja, pois,  $\theta_0$  o valor particular do argumento que esteja no intervalo  $[0, 2\pi)$ , isto é,  $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ . Então, o argumento genérico é dado por  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Assim, temos de restringir o argumento de  $z$  a um intervalo do tipo  $2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  para que o logaritmo fique bem definido como “função univalente”. Cada valor de  $k$  conduz ao que

chamamos uma determinação ou ramo do logaritmo. Denotando com  $\log_k z$  tal ramo, teremos:

$$\log_k z = \log r + i\theta, \quad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

Costuma-se dizer também que o logaritmo fica “especificado” com um determinado valor de  $k$ . O ponto  $z = 0$  é chamado ponto de ramificação de  $\log z$ , justamente porque, quando um ponto  $z$  descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função  $\log z$  retorna aumentada de  $2\pi i$ , isto é, passa de um de seus ramos ao ramo seguinte.

Com o valor  $k = 0$  obtemos o que chamamos valor principal, ramo principal, ou determinação principal do logaritmo. Mas convém observar que nada há de especial na escolha do intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$  para especificar o valor principal.

Podemos tomar  $0 < \theta \leq 2\pi$ ,  $-\pi \leq \theta < \pi$ , ou qualquer outro intervalo de comprimento  $2\pi$ , como  $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$  (ou  $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ ) (Figura 21). Em qualquer desses casos, a restrição do argumento a um intervalo de comprimento  $2\pi$  introduz descontinuidades na função  $\log z$  ao longo do raio pela origem e de argumento  $\alpha$ . Esse raio é frequentemente designado um corte do plano complexo. Ao considerarmos as restrições  $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ ,  $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$  ou  $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ , dizemos que o plano foi cortado ao longo do raio  $z = re^{i\alpha}$ .

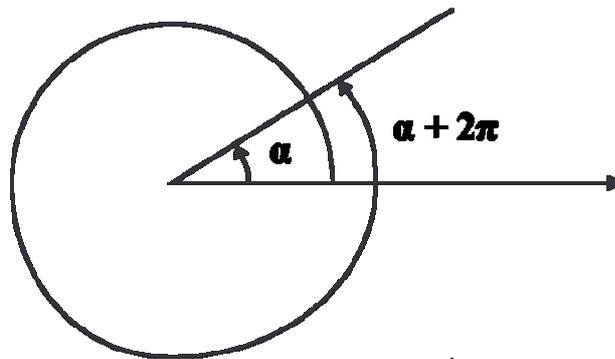


Figura 21- Intervalo de comprimento.

Usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar, podemos verificar que qualquer ramo do logaritmo é uma função analítica em seu domínio (do qual se exclui o raio que produz o corte, para que o domínio seja um conjunto aberto). Vamos calcular sua derivada:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} \log r + i\theta = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \log r + i\theta}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \log r + i\theta}{\partial \theta},$$

Substituindo os valores  $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{r}$  (já obtidos anteriormente), efetuando os cálculos e fazendo as simplificações, obtemos:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \log r + i\theta}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \log r + i\theta}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{1}{r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} i = \frac{1}{z}.$$

### 2.9.1 Propriedades do Logaritmo

A fórmula

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \quad (2.7)$$

permanece válida desde que corretamente interpretada. Com efeito, sendo  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= \log r_1 + i\theta_1 + 2k_1\pi + \log r_2 + i\theta_2 + 2k_2\pi \\ &= \log r_1 r_2 + i[(\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são inteiros arbitrários. Esta última expressão é a forma geral de  $\log z_1 z_2$ , se  $k_1$  e  $k_2$  forem independentes um do outro. Neste caso, a Eq. (2.7) é válida com o seguinte significado: o conjunto dos valores possíveis de  $\log z_1 z_2$  coincide com o conjunto dos valores de  $\log z_1 + \log z_2$ .

Se  $k_1$  e  $k_2$  não forem independentes, como é o caso em que  $z_1 = z_2 = z = r e^{i\theta}$  e a fórmula  $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$  se reduz a

$$\log z^2 = 2 \log z, \quad (2.9)$$

então o segundo membro de (2.9) se reduz a

$$\log r^2 + i[2\theta + 2(2k)\pi]$$

onde  $k$  é arbitrário. Neste caso, qualquer valor do segundo membro de (2.9) é um valor do primeiro membro, mas não reciprocamente.

De forma análoga, não é difícil provar por indução que

$$\log z_1 \dots z_n = \log z_1 + \dots + \log z_n \quad \text{e} \quad \log z^n = n \log z.$$

Esta última relação, por exemplo, significa que todo valor de  $n \log z$  é um valor possível de  $\log z^n$ , mas não reciprocamente.

### 2.9.2 Definição de $z^\alpha$

Dados os números complexos  $z$  e  $\alpha$ , sendo  $z \neq 0$ , definimos  $z^\alpha$  pela equação

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad (2.10)$$

Isto significa que  $\alpha \log$  é um dos logaritmos de  $z^\alpha$ , de sorte que

$$\log z^\alpha = \alpha \log z + 2k\pi i, \quad (2.11)$$

que, para  $z > 0$ ,  $\alpha$  real e  $k = 0$ , é uma fórmula familiar do logaritmo real. A definição (2.10) é então uma extensão natural da noção de potência real de números positivos.

Como o logaritmo é uma função multivalente,  $z^\alpha$  é, em geral, multivalente, com o mesmo ponto de ramificação  $z = 0$  que  $\log z$ . Para evidenciar este fato, seja  $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$ , com  $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Substituindo  $\log z = \log r + i\theta_0 + 2k\pi i$  em (2.10), teremos:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log r + i\theta_0} e^{2\pi k\alpha i} = P z^\alpha e^{2\pi k\alpha i}, \quad (2.12)$$

onde  $P(z^\alpha)$  denota o assim chamado valor principal da função  $z^\alpha$ , obtido com o valor principal de  $\log z$  em (2.10). A Eq. (2.12) nos mostra que os possíveis valores  $z^\alpha$  são obtidos multiplicando-se o valor principal  $P(z^\alpha)$  pelo fator  $e^{2\pi k\alpha i}$ .

Procuremos determinar diferentes valores de  $k$ , digamos  $k$  e  $k'$ , que resultem no mesmo valor desse fator:

$$e^{2\pi k\alpha i} = e^{2\pi k'\alpha i}.$$

Isto é equivalente a  $e^{2\pi(k-k')\alpha i} = 1$ , ou seja,  $(k - k')\alpha$  deve ser inteiro:  $\alpha$  deve ser racional. Vemos então que, sendo  $\alpha$  um número (real ou complexo) não-racional, a função  $z^\alpha$  admite infinitos ramos.

Suponhamos agora que  $\alpha$  seja racional, digamos  $\alpha = \frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si e  $q > 0$ . Então o fator  $e^{2\pi(k\frac{p}{q})i}$  assume apenas  $q$  valores distintos, dados por  $k = 0, 1, \dots, q-1$ ; e, em consequência, a função

$$\frac{p}{z^q} = P \frac{p}{z^q} e^{2\pi(k\frac{p}{q})i}$$

também assume  $q$  valores distintos para um mesmo  $z \neq 0$ .

Quando fixamos um ramo do logaritmo em (2.10),  $z^\alpha$  torna-se uma função univalente e analítica. Calculamos sua derivada pela regra da cadeia, assim:

$$\begin{aligned} z^\alpha ' &= (e^{\alpha \log z})' = e^{\alpha \log z} (\alpha \log z)' = \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{z} \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{e^{\log z}} = \alpha e^{\alpha-1 \log z} = \alpha z^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{1}{z} ' = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{z}.$$

## CAPÍTULO 3

### A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY E APLICAÇÕES

#### 3.1 ARCOS E CONTORNOS

**Definição 3.1.** Definimos arco contínuo ou simplesmente arco como um conjunto  $C$  de pontos, dado parametricamente assim:

$$C = \{ z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b \}. \quad (3.1)$$

onde  $z(t)$  é uma função contínua de  $t$  — ou, o que é equivalente,  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções contínuas de  $t$ ,  $t$  variando no intervalo  $[a, b]$ .

A representação paramétrica  $z = z(t)$  ordena os pontos de  $C$  de acordo com os valores crescentes de  $t$ , de forma que  $C$  é um conjunto ordenado ou orientado (Figura 22). O mesmo conjunto com orientação oposta é o arco que designamos por  $-C$ , e que possui representação paramétrica  $z_1(t) = z(-t)$ ,  $-b \leq t \leq -a$ .

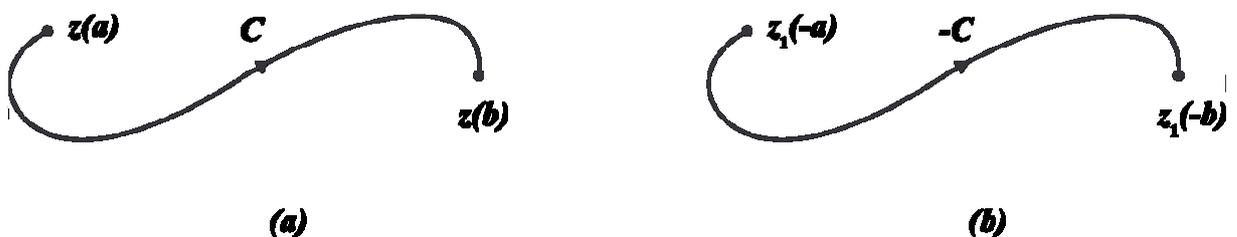


Figura 22- Curva  $C$  e Curva  $-C$ .

**Definição 3.2.** Chama-se arco de Jordan ou arco simples aquele em que cada ponto  $z(t)$  corresponde a um único valor de  $t$ . Intuitivamente, isto significa que, à medida que  $t$  varia de  $a$  até  $b$ , o ponto  $z(t)$  percorre a curva  $C$ , passando uma só vez por cada um de seus pontos. Quando o arco não é simples, ele contém ao menos um ponto múltiplo, assim designado todo ponto proveniente de dois ou mais valores distintos do parâmetro  $t$ :  $z(t_1) = z(t_2)$ , com  $t_1 \neq t_2$ .

**Definição 3.3.** Chama-se curva fechada simples ou curva de Jordan a toda curva fechada cujos pontos, à exceção das extremidades, sejam todos simples (Figura 23).

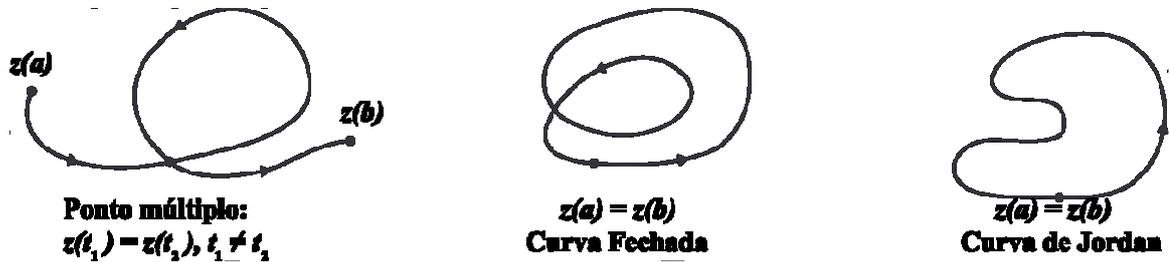


Figura 23- Curva de Jordan.

**Exemplo 3.1.** A equação  $z = 1 - it$ , para  $0 \leq t \leq 2$ , representa um arco simples, que é o segmento  $[1, 1 - 2i]$ , orientado de 1 para  $1 - 2i$ .

**Exemplo 3.2.** A equação  $z = t^2 + it$ ,  $-\infty < t < \infty$ , representa a parábola  $x = t^2$ ,  $y = t$ , ou seja,  $x = y^2$ , com a orientação indicada na Figura 24.

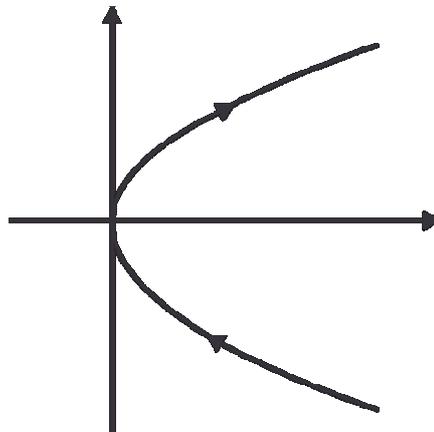


Figura 24- Gráfico do exemplo 3.2.

### 3.2 TEOREMA DE JORDAN E CONECTIVIDADE SIMPLES

De acordo com o chamado teorema de Jordan, toda curva fechada simples  $C$  divide o plano em duas regiões, tendo  $C$  como fronteira comum, uma das quais, chamada o interior de  $C$ , é limitada. O teorema afirma também que o interior de  $C$  possui uma propriedade adicional, chamada conectividade simples. Intuitivamente, diz-se que uma região  $R$  é

simplesmente conexa se qualquer curva fechada simples contida em  $R$  pode ser deformada continuamente até reduzir-se a um ponto, sem sair de  $R$ . A Figura 25 ilustra duas regiões conexas  $A$  e  $B$ , das quais  $A$  é simplesmente conexa, mas não  $B$ ; esta possui um “buraco” que destrói a conectividade simples. Chamaremos de multiplamente conexa toda região conexa que não for simplesmente conexa.

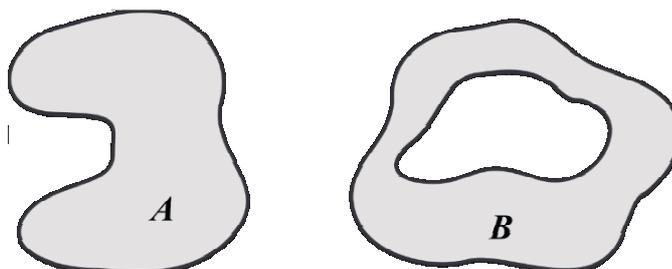


Figura 25- Regiões simplesmente conexa e multiplamente conexa.

### 3.3 ARCO REGULAR E CONTORNOS

**Definição 3.4 (Arco Regular).** Um arco  $C$  parametrizado por  $z(t) = x(t) + iy(t)$  é dito regular se  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  existe, é contínua e  $z'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

Com isto, temos a garantia que a curva possui tangente em qualquer um de seus pontos. O ângulo formado pela tangente com o eixo  $Ox$  é dado por  $\arg z'(t)$ , o qual varia continuamente com  $t$ . Mesmo um arco regular pode obter comportamento surpreendente, consideremos, como exemplo, o arco regular dado por  $z(0) = 0$ ,  $z(t) = t + it^3 \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ ,  $0 < t \leq 1$ . Este arco secciona o eixo  $Ox$  numa infinidade de pontos tendo a origem com ponto de acumulação (Figura 26).

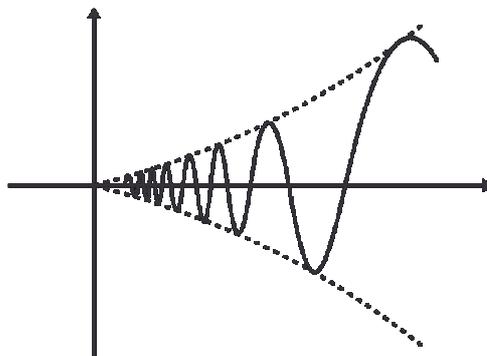


Figura 26- Arco regular.

**Definição 3.5 (Contorno).** Chamaremos contorno ou caminho a todo arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares.

Mais precisamente, um contorno  $C$  tem representação paramétrica dada por uma função  $z = z(t)$ , contínua num intervalo  $[a, b]$ , união finita de subintervalos  $[a_j, b_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tais que  $a_1 = a$ ,  $b_1 = a_2$ ,  $b_2 = a_3$ , ...  $b_{n-1} = a_n$ ,  $b_n = b$  (Figura 28); e em cada um dos intervalos abertos  $(a_j, b_j)$  a derivada  $z'(t)$  é contínua, diferente de zero e tem limites laterais finitos e diferentes de zero com  $t$  tendendo aos extremos de cada intervalo por valores interiores a ele, limites esses que coincidem com  $z'(a_j^+)$  e  $z'(b_j^-)$ , respectivamente. Isto significa que  $z'(t)$  é função seccionalmente contínua no intervalo  $[a, b]$  (é seccionalmente contínua sobre um intervalo  $[a, b]$  fechado e limitado, se ela é contínua no interior de um número finito de subintervalos de  $[a, b]$ , exceto possivelmente em um conjunto finito de pontos, onde a função  $f$  deve ter limites laterais à esquerda e à direita, sendo que a diferença entre esses dois limites laterais em cada ponto deve sempre ser finita) (Figura 27).

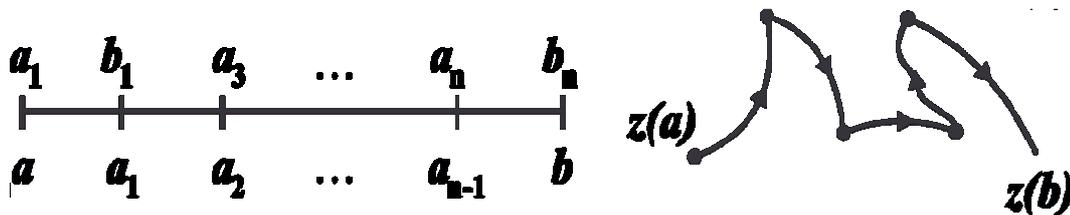


Figura 27- Contorno.

### 3.4 INTEGRAL DE CONTORNO

Seja  $F(t) = U(t) + iV(t)$  uma função contínua da variável real  $t$  num intervalo  $[a, b]$ . Sua integral é definida em termos das integrais das funções reais  $U$  e  $V$ , mediante a expressão

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt. \quad (3.2)$$

Desta definição seguem as propriedades seguintes:

$$1. \operatorname{Re} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt;$$

- $$2. \operatorname{Im} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt;$$
- $$3. \int_a^b [F(t) + G(t)] dt = \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt;$$
- $$4. \int_a^b cF(t) dt = c \int_a^b F(t) dt; \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$
- $$5. \int_a^b F(t) dt \leq \int_a^b |F(t)| dt.$$

**Demonstração do item 5.** Observamos primeiro que  $\int_a^b F(t) dt$  é um número complexo e assim podemos escrevê-lo em sua forma polar  $\int_a^b F(t) dt = re^{i\theta}$ , onde  $r = \left| \int_a^b F(t) dt \right|$ . Multiplicando ambos os lados da última equação por  $e^{-i\theta}$ , obtemos:

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt \quad \text{Item 4 .}$$

Como  $r$  é real,  $r = \operatorname{Re} r$ , ou seja,  $r = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} F(t)] dt$ , onde usamos o Item 1. Considerando que, para qualquer complexo, vale a relação  $\operatorname{Re} z \leq |z|$  então o integrando é  $\operatorname{Re} e^{-i\theta} F(t) \leq e^{-i\theta} F(t) = |F(t)|$  para todo  $t$ , pois  $e^{-i\theta}$  é um complexo com valor absoluto igual a 1. Concluimos que  $\int_a^b F(t) dt = r \leq \int_a^b |F(t)| dt$ . ■

### 3.5 INTEGRAL CURVILÍNEA OU DE CONTORNO

Seja  $C$  um contorno qualquer e  $f = u + iv$  uma função contínua em  $C$ . Usando a representação de contorno  $C, z = z(t), a \leq t \leq b$ , definimos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (3.3)$$

onde

$$f(z(t)) z'(t) = [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t) + \\
&\quad i(u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)) \\
&=: U(t) + iV(t),
\end{aligned}$$

isto é, o segundo membro em (3.3) é uma integral do tipo (3.2), com

$$\begin{aligned}
U(t) &= u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t), \\
V(t) &= u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t).
\end{aligned}$$

### 3.6 TEOREMA DE CAUCHY

Iremos agora estudar o teorema de Cauchy. Para isso, começaremos com uma recordação do teorema de Green ou teorema da divergência no plano.

Quando tratarmos de integrais sobre contornos fechados, teremos de distinguir entre as duas orientações possíveis do contorno, uma das quais é escolhida como a orientação positiva. Não vamos nos ocupar de como a noção de orientação positiva pode ser introduzida rigorosamente sem apelo à intuição geométrica. O importante aqui é acentuar que isto pode ser feito, e que, em consequência, dado um contorno fechado simples  $C$ , de representação paramétrica  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , a ideia de que  $C$  está orientado positivamente corresponde exatamente ao fato intuitivo de que, para  $z_0$  interior a  $C$ , o argumento de  $z(t) - z_0$  cresce de  $2\pi$  com  $t$  variando de  $t = a$  a  $t = b$ . Em linguagem sugestiva, um observador localizado em  $z(t)$  percorrerá o contorno  $C$  de maneira a deixar o interior de  $C$  sempre à sua esquerda (Figura 28).

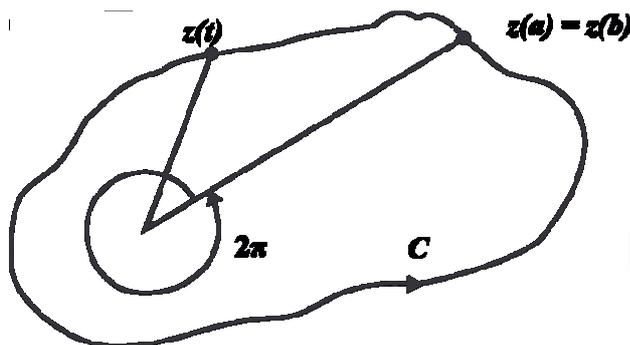


Figura 28- Teorema de Cauchy.

**Teorema 3.1 (Green).** Sejam  $P(x, y)$  e  $Q(x, y)$  funções definidas numa região simplesmente conexa  $R$ , com derivadas primeiras contínuas. Então, para qualquer contorno fechado simples  $C$  em  $R$ ,

$$\int_{R'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy,$$

onde  $R'$  é a região interior a  $C$ .

Note que a integração do segundo membro significa integração no sentido positivo do percurso sobre  $C$ . Denotando com  $t = (t_x, t_y)$  o vetor tangente a  $C$  num ponto  $(x, y)$ , com  $\eta = (\eta_x, \eta_y)$  o vetor unitário normal exterior e com  $ds$  o elemento de arco, então,  $dx, dy = t ds$  e  $dy, -dx = \eta ds$  (Figura 29). Pondo então  $F = (Q, -P)$ , a fórmula anterior assume a seguinte forma:

$$\int_{R'} \text{div } F \, dx dy = \int_C F \cdot \eta \, ds,$$

que é uma forma familiar do teorema da divergência.

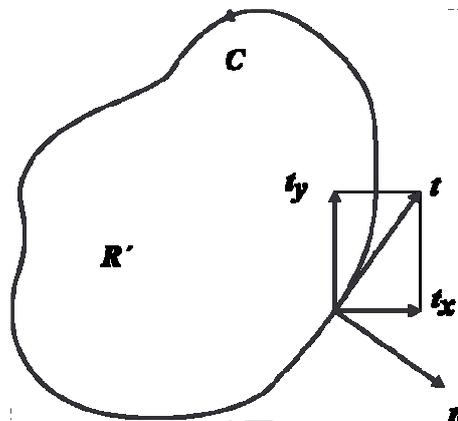


Figura 29- Teorema de Green.

**Teorema 3.2 (Cauchy).** Seja  $f$  uma função analítica numa região simplesmente conexa  $R$ . Então,

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado  $C$  contido em  $R$ .

O teorema de Cauchy, na primeira formulação, pode ser demonstrado facilmente com a ajuda do teorema de Green, supondo que a derivada  $f'$  seja contínua em  $R$ .

De fato, com a notação  $z = x + iy$ ,  $f = u + iv$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u dx - v dy + i (v dx + u dy)) = \\ &= - \int_{R'} (v_x + u_y) dx dy + i \int_{R''} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Mas  $v_x + u_y = u_x - v_y = 0$ , pelas equações de Cauchy-Riemann, donde segue o Teorema 3.2.

**Observação 3.1.** Foi o matemático francês Édouard Goursat (1858-1936) quem descobriu que o teorema anterior pode ser demonstrado sem a hipótese de que  $f'$  seja contínua. Neste caso, a demonstração requer um tratamento bem mais extenso e não será abordado aqui. Por causa dessa demonstração de Goursat, o teorema é também conhecido como “teorema de Cauchy-Goursat”.

**Teorema 3.3.** Seja  $f$  uma função analítica numa região simplesmente conexa  $R$ . Então, a integral de  $f$  ao longo de um contorno ligando  $z_0$  a  $z$  só depende destes pontos, e não do contorno de integração.

Vamos verificar que os Teoremas 3.2 e 3.3 são equivalentes. De fato, suponhamos que o Teorema 3.2 seja verdadeiro e sejam  $C_1$  e  $C_2$  dois contornos arbitrários em  $R$ , ligando  $z_0$  a  $z$  (Figura 30). Então,  $C_1 \cup (-C_2)$  é um contorno fechado em  $R$ , logo,

$$0 = \int_{C_1 \cup (-C_2)} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Isto prova o Teorema 3.3.

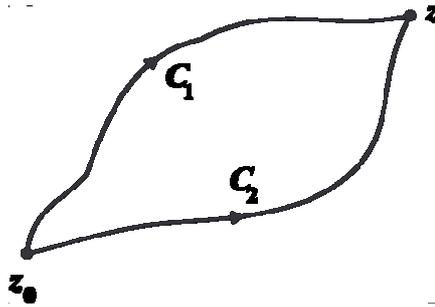


Figura 30- Contornos arbitrários de  $R$ .

Suponhamos agora que o Teorema 3.3 seja verdadeiro e seja  $C$  um contorno fechado em  $R$ . Tomando dois pontos  $z_0$  a  $z_1$ , em  $C$ , obtemos os contornos  $C_1$  de  $z_0$  a  $z_1$  e  $C_2$  de  $z_1$  a  $z_0$  (Figura 31). Pelo Teorema 3.3,

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz,$$

donde

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0.$$

Isto prova o Teorema 3.2.

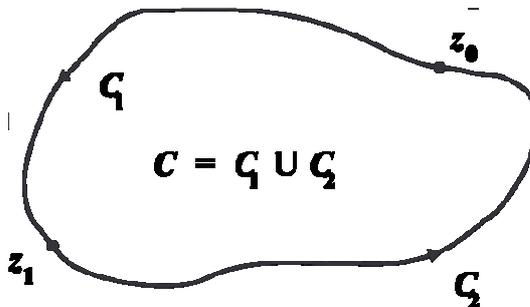


Figura 31- Contorno  $C$  como união de dois contornos.

**Teorema 3.4.** Seja  $f$  uma função analítica numa região simplesmente conexa  $R$ . Então, a forma geral da primitiva de  $f$  é dada por

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + C, \quad (3.4)$$

onde  $z_0$  é um ponto qualquer de  $R$ , porém fixo,  $C$  é uma constante arbitrária e a integração é feita ao longo de qualquer contorno de  $R$ , ligando  $z_0$  a  $z$ .

**Demonstração.** Observamos, de início, que a integral (3.4) está bem definida, pois, de fato, ela não depende do caminho de integração.

Vamos provar que  $F$  é analítica em  $R$  e que  $F' = f$ . Temos (Figura 32):

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Pondo  $f(\zeta) = f(z) + n(z, \zeta)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) + n(z, \zeta)] d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} n(z, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Como  $f$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|n(z, \zeta)| = |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |\zeta - z| < \delta.$$

Fazendo então  $|h| < \delta$  e integrando ao longo do segmento  $[z, z+h]$ , teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} n(z, \zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |n(z, \zeta)| |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{|h|} \int_z^{z+h} |d\zeta| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que  $F$  é analítica e que  $F' = f$ ; logo  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

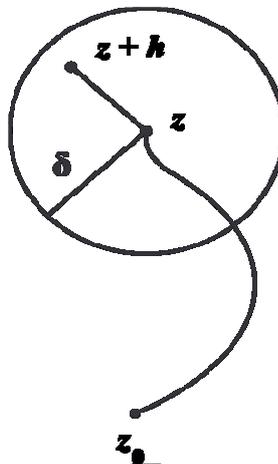


Figura 32- Representação do contorno de  $z$  a  $z+h$ .

Falta mostrar que toda primitiva é da forma (3.4). Para isso, se  $G$  é uma primitiva qualquer, teremos:

$$\frac{d}{dz} \left( G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = G'(z) - \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = f(z) - f(z) = 0,$$

Então, a função  $G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ , tendo derivada nula, é constante, donde segue-se que (3.4) é a forma geral das primitivas de  $f$ . ■

**Observação 3.2.** Deste teorema segue imediatamente que a integral de  $f$  ao longo de um caminho ligando  $z_0$  a  $z_1$  é dada por

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

onde  $F$  é uma primitiva qualquer de  $f$ . Essa diferença,  $F(z_1) - F(z_0)$ , é a variação de  $F$  ao longo do caminho  $C$  e também costuma ser denotada com o símbolo  $[F(z)]_C$ . Assim,

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) = [F(z)]_C.$$

Em se tratando de um contorno fechado que seja um círculo de centro  $z_0$  e raio  $r$ , a integral sobre  $C$  costuma ser denotada com os símbolos

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz \quad \text{e} \quad \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

ficando subentendido que o contorno tem orientação positiva.

Vemos então que o cálculo de uma integral curvilínea de uma função analítica é equivalente ao cálculo de uma primitiva da função. Este resultado e o teorema seguinte são de importância fundamental no cálculo das integrais de contorno.

**Teorema 3.5.** Sejam  $C_0, C_1, \dots, C_n$  contornos fechados simples, tais que  $C_1, \dots, C_n$  jazem no interior de  $C_0$  e são dois a dois exteriores um ao outro (Figura 33). Suponhamos que a região compreendida entre  $C_0$  e  $C_1, \dots, C_n$ , juntamente com esses contornos, esteja contida numa região de analiticidade de uma função  $f$ . Então,

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

desde que os contornos tenham todos a mesma orientação.

**Demonstração.** Vamos introduzir cortes  $L_1$  e  $-L_1$ ,  $L_2$  e  $-L_2$ , ...,  $L_n$  e  $-L_n$ , ligando  $C_0$  a  $C_1$ ,  $C_2$ , ...,  $C_n$ , respectivamente, todos contidos em  $R$  (Figura 33).

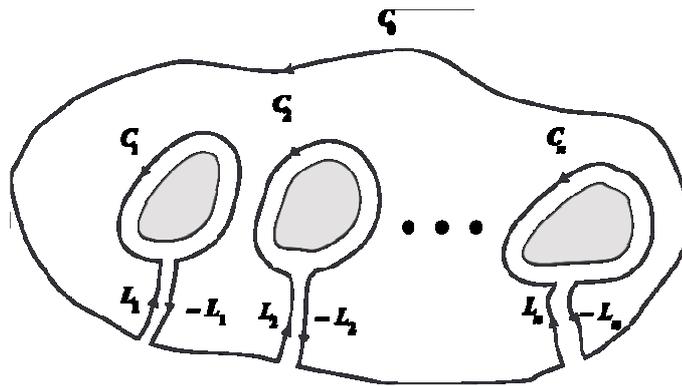


Figura 33- Representação do Teorema 3.4.

O contorno que assim obtemos,  $C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup \dots \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$ , envolve uma região simplesmente conexa, de forma que a integral de  $f$  ao longo dele deve ser nula. Observando que as integrais ao longo de  $L_1$  e  $-L_1$ ,  $L_2$  e  $-L_2$ , ...,  $L_n$  e  $-L_n$  cancelam aos pares, obtemos:

$$\int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz - \dots - \int_{C_n} f(z) dz = 0,$$

donde

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad \blacksquare$$

Em particular, quando  $n = 1$ , temos:

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

Neste caso, dizemos que estamos deformando o caminho de integração  $C_0$  no caminho  $C_1$ .

### 3.7 A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

A fórmula integral de Cauchy é instrumento básico no estudo das funções analíticas. Ela revela, de imediato, alguns resultados surpreendentes e de importância fundamental. Por exemplo, uma simples inspeção dessa fórmula nos mostra que basta o conhecimento de  $f$  nos pontos  $\zeta$  do contorno  $C$  para que possamos calcular  $f$  em qualquer ponto  $z$  do interior de  $C$ . Isto já nos diz que a condição de analiticidade é muito restritiva: os valores da função  $f$  estão todos interligados e não podem ser alterados, seja numa região, ao longo de arcos ou mesmo em conjuntos mais restritos de pontos, sem que isto viole a condição de analiticidade.

**Teorema 3.6 (Fórmula Integral de Cauchy).** Seja  $f$  uma função analítica numa região simplesmente conexa  $R$ . Então,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde  $z \in R$  e  $C$  é qualquer contorno fechado simples de  $R$ , que envolve  $z$  uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em  $R$ .

**Demonstração.** Seja  $\delta > 0$  tal que o disco  $|\zeta - z| \leq \delta$  não contenha pontos de  $C$ , como ilustra a Figura 34. Designando por  $C_\delta$  o contorno desse disco, o Teorema 3.4 permite escrever:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

Vamos escrever esta última integral como soma de duas outras, de acordo com a decomposição

$$f(\zeta) = f(z) + f(\zeta) - f(z);$$

assim obtemos:

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta,$$

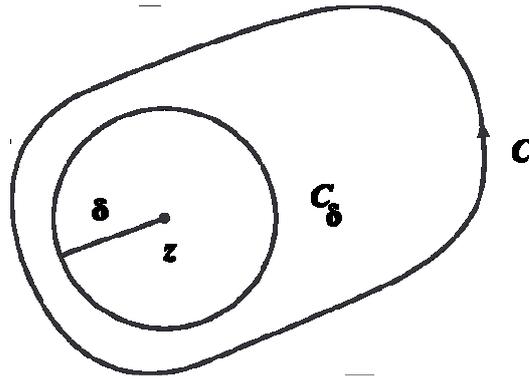


Figura 34- Fórmula integral de Cauchy.

A primeira integral do segundo membro é  $2\pi i$ , como já vimos; portanto,

$$2\pi i f(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.5)$$

Esta última integral também é zero. De fato, como  $f$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$ , podemos tomar  $\delta$  tão pequeno que

$$|\zeta - z| \leq \delta \quad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Nestas condições,

$$\int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \leq \int_{C_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \int_{C_\delta} |d\zeta| = 2\pi\varepsilon.$$

Portanto, a integral sobre  $C_\delta$  em (3.5) tem limite zero com  $\delta \rightarrow 0$ , limite este que é o próprio valor da integral. Isto completa a demonstração do teorema. ■

## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÕES

#### 4.1 DERIVADAS DE TODAS AS ORDENS

Como importante consequência da fórmula de Cauchy, vamos provar agora que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens.

**Teorema 4.1.** Uma função analítica numa região  $R$  possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em  $R$  e podem ser obtidas da fórmula de Cauchy por derivação sob o sinal de integração.

**Demonstração.** Sejam  $z$  um ponto qualquer e  $R$  e  $C$  um contorno fechado simples todo contido em  $R$ , cujo interior seja simplesmente conexo, contenha o ponto  $z$  e esteja todo contido em  $R$ . Vale então a fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Admitindo, por um momento, a derivação sob o sinal de integração, e derivando sucessivamente, obtemos:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta;$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

onde  $n$  é um inteiro positivo qualquer.

Essas fórmulas, depois de demonstradas, não só estabelecerão o resultado desejado como nos darão ainda expressões para as derivadas de  $f$  em termos de seus valores sobre  $C$ .

Para demonstrar a fórmula da primeira derivada  $f'$ , devemos mostrar que

$$F = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

tende a zero com  $h \rightarrow 0$ . Para isso usaremos a fórmula de Cauchy da função  $f$ :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi i h} \int_C f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{h}{\zeta - z}^2 \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Como  $z \notin C$  e  $C$  é um conjunto (topologicamente) fechado, um resultado elementar de topologia métrica garante que existe uma vizinhança de  $z$ , de raio  $d$ , que não contém pontos de  $C$ , como ilustra a Figura 35. Em outras palavras,  $|\zeta - z| \geq d$  para todo  $\zeta \in C$ ; e tomando  $h < \frac{d}{2}$ , teremos também:  $|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - h > \frac{d}{2}$ . Daqui e da expressão anterior de  $F$ , obtemos:

$$F = \frac{h}{2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{d^2 \cdot \frac{d}{2}} d\zeta,$$

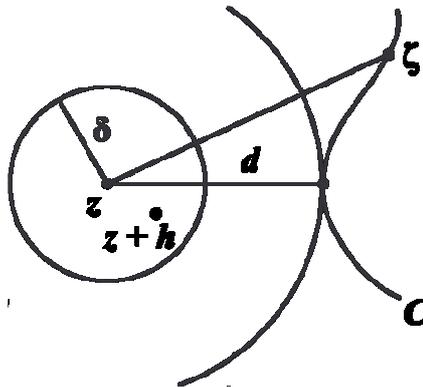


Figura 35- Vizinhança  $z$  de raio  $d$  que não contém pontos de  $C$ .

Finalmente, sejam  $L$  o comprimento de  $C$  e  $M = \max_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$  (este máximo existe por ser  $f$  função contínua sobre o conjunto limitado e fechado  $C$ ). Então,  $F \leq |h| \frac{ML}{\pi d^2}$ . Isto prova que  $f \rightarrow 0$  com  $h \rightarrow 0$  e conclui a demonstração do teorema no que diz respeito à derivada  $f'$ .

Resta provar a segunda parte do teorema, referente às derivadas  $f^{(n)}$ , com  $n > 1$ . Faremos isto provando um resultado mais geral, objeto do teorema seguinte, que contém, como corolário, o teorema anterior.

**Teorema 4.2.** Sejam  $C$  um caminho qualquer, fechado ou não,  $g(z)$  uma função definida e contínua para  $z \in C$ , e  $n$  um inteiro positivo. Então, a função

$$f(z) = \int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

é regular em todo ponto  $z \notin C$ , e possui derivada dada por

$$f'(z) = n \int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

**Demonstração.** Sendo  $F$  como antes, a fórmula que define a função  $f$  nos dá:

$$F = \int_C G g d\zeta, \quad (3.6)$$

onde

$$G = \frac{1}{h} \frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{n}{\zeta - z}.$$

Vamos mostrar que podemos fazer esse  $G$  arbitrariamente pequeno, desde que  $|h|$  seja feito suficientemente pequeno. Por conveniência, pomos  $a = \zeta - z - h$  e  $b = \zeta - z$ . Então,

$$G = \frac{1}{h} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{n}{b} = \frac{b^n - a^n}{b - a} \frac{1}{a^n b^n} - \frac{n}{b^{n+1}}.$$

A demonstração no caso  $n = 1$  é idêntica à que fizemos anteriormente para a função  $f'$ . Portanto, a partir de agora suporemos  $n \geq 2$ . Então,

$$\begin{aligned} G &= \frac{a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n - na^n}{a^n b^{n+1}} \\ &= \frac{a^{n-1}(b - a) + a^{n-2}(b^2 - a^2) + \dots + a(b^{n-1} - a^{n-1}) + (b^n - a^n)}{a^n b^{n+1}}, \end{aligned}$$

Como na demonstração anterior, existe uma vizinhança de  $z$ , de raio  $d$ , que não contém pontos de  $C$  (Figura 35). E tomando  $h < \frac{d}{2}$ , teremos  $|\zeta - z| \geq d$  e  $|\zeta - z - h| > \frac{d}{2}$ . Daqui e da expressão anterior de  $G$ , obtemos:

$$G \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} \left( a^{n-1} |b-a| + a^{n-2} |b^2 - a^2| + \dots + |b^n - a^n| \right).$$

O importante a observar agora é que a expressão entre colchetes que aí aparece contém fator comum  $|b - a| = |h|$ ; o outro fator é limitado por uma constante  $k$  que não depende de  $\zeta \in C$  e de  $h$ . Assim,  $G \leq 2^{n+1} |h| \frac{k}{d^{2(n+1)}}$ . Agora é só levar esta estimativa em (3.6) e terminar a demonstração como no caso já tratado anteriormente. ■

## 4.2 TEOREMA DE MORERA

**Teorema 4.3. (Morera).** Seja  $f$  uma função contínua numa região  $R$ , tal que

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado  $C \subset R$ . Então  $f$  é analítica em  $R$ .

**Demonstração.** Seja  $z_0$  um ponto qualquer de  $R$ , porém fixo. A expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

independe do caminho de integração. Como a demonstração do Teorema 3.4,  $F$  é uma função analítica em  $R$  e sua derivada é a função  $F' = f$ . Pelo Teorema 3.7,  $F'$  também é analítica em  $R$ , o que completa a demonstração. ■

É interessante observar que esta demonstração baseia-se inteiramente no teorema de Cauchy. Em outras palavras, a recíproca do teorema de Cauchy é consequência dele mesmo!

### 4.3 TEOREMA DE LIOUVILLE

**Teorema 4.4 (Liouville).** Uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano) e limitada é necessariamente constante.

**Demonstração.** Seja  $f$  a referida função, e  $M$  uma constante tal que  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z$ . De acordo com a fórmula integral da derivada,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde  $z$  é um ponto qualquer e  $C$  um contorno arbitrário envolvendo  $z$  uma vez no sentido positivo. Em particular, tomando para  $C$  o círculo  $|\zeta - z| = r$ , obtemos:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \leq \frac{M}{2\pi r^2} \int_{|\zeta-z|=r} d\zeta = \frac{M}{r}.$$

Como  $r$  é arbitrário, fazendo  $r \rightarrow \infty$ , obtemos  $f'(z) = 0$ ; isto sendo verdade para todo  $z$ , concluímos que  $f$  é constante, como queríamos demonstrar. ■

### 4.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA

O teorema de Liouville permite fazer uma demonstração simples do teorema fundamental da Álgebra.

**Teorema 4.5 (Teorema Fundamental da Álgebra).** Todo polinômio de grau  $n \geq 1$  possui ao menos uma raiz.

**Demonstração.** Seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

onde  $n \geq 1$  e  $a_n \neq 0$ . Suponhamos, por absurdo, que  $P$  não se anule, de forma que

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

é uma função inteira. Como  $f(z) \rightarrow 0$  com  $z \rightarrow \infty$  e  $f$  é contínua, portanto, limitada em qualquer parte finita do plano, concluímos que  $f$  é limitada em todo o plano. Pelo teorema de Liouville segue-se, então, que  $f$  é constante, o que acarreta que  $P(z)$  também é constante. Logo,  $f$  é identicamente nula (pois é igual a seu limite no infinito). Isto é absurdo, visto que  $P(z)$  é finito para todo  $z$ , donde a veracidade do teorema.

## REFERÊNCIAS

- [1] ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [2] CHURCHILL, R. V., **Introdução a variáveis complexas e suas aplicações**, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1975.
- [3] CONWAY, J. B., **Functions of one complex variable**, Springer, New York, 2002.
- [4] EVES, Howard, **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higyno Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [5] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria L. T., **Polinômios e equações algébricas**, Coleção PROFMAT, SBM, 2004.
- [6] IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004.
- [7] LINS NETO, Alcides, **Funções de uma variável complexa**, 2ª ed., Projeto Euclides/ IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [8] MEDEIROS, L. A. J., **Introdução às funções complexas**, Editora McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1972.