



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VIII – PROF. MARIA DA PENHA
CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

CAMILA MARQUES AZEVEDO FARIAS

**UM ESTUDO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO LAMINAR EM
DUTOS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA**

**ARARUNA
2017**

CAMILA MARQUES AZEVEDO FARIAS

**UM ESTUDO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO LAMINAR EM
DUTOS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso da
Universidade Estadual da Paraíba, como
requisito parcial à obtenção do título de
Engenheira Civil.

Área de concentração: Transferência de
Calor

Orientador: Prof. Me. Valdecir Alves dos
Santos Júnior

**ARARUNA
2017**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F224u Farias, Camila Marques Azevedo.
Um estudo de transferência de calor para fluxo laminar em dutos de seção transversal arbitrária [manuscrito] : / Camila Marques Azevedo Farias. - 2017.
38 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Valdecir Alves dos Santos Júnior, Coordenação do Curso de Engenharia Civil - CCTS."

1. Transferência de Calor. 2. Método de Galerkin. 3. Escoamento.

21. ed. CDD 621.402 2

CAMILA MARQUES AZEVEDO FARIAS

UM ESTUDO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO LAMINAR EM DUTOS
DE SEÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA

Trabalho de Conclusão de Curso da
Universidade Estadual da Paraíba, como
requisito parcial à obtenção do título de
Engenheira Civil.

Área de concentração: Transferência de Calor

Aprovada em: 13/12/2017.

BANCA EXAMINADORA

Valdecir Alves dos Santos Júnior
Prof. Me. Valdecir Alves dos Santos Júnior / UEPB
Orientador

José Jamilton Rodrigues dos Santos
Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos / UEPB
Examinador

Israel B. Galvão
Prof. Dr. Israel Buriti Galvão / UEPB
Examinador

Aos meus pais, pela dedicação, companheirismo,
amor, apoio e incentivo.

AGRADECIMENTOS

À Primeiramente a Deus, por todas conquistas alcançadas e oportunidades dadas.

Ao meu pai Judson, a minha mãe Thaisy, por toda ajuda, apoio amor, paciência e ensinamentos, aos meus avós João Cândido, Maria Anita e Basílio (*in memoriam*), ao meu irmão Douglas e as minhas Tias Tatiana, Théssia, Theany e principalmente a tia Tarsila por todo carinho, amor, ajuda e incentivo.

Ao meu namorado Pedro Augusto, por estar sempre ao meu lado, apoiando, incentivando e por toda compreensão.

Aos professores do Curso de Engenharia Civil da UEPB, em especial, ao professor, amigo e orientador Valdecir por acreditar em mim, por toda ajuda e paciência.

Aos funcionários da UEPB, principalmente Joaline, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Ao quarteto maravilhoso (Leila, Izabelle e Germana), que sempre estiveram ao meu lado escutando meus desabafos e incentivando. A Amanda, Andréa e Thayse que deixam os dias em Araruna bem mais leves e me fizeram sentir saudades, aos meus colegas de turma que fizeram essa jornada mais leve, em especial Hallef (deu muito trabalho, e sempre foi um amigo incrível e me fez ri nos momentos de desespero), Jonathan e Mateus que estiveram sempre presentes, a Livas por todas as caronas e ajuda no TCC.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
2 METODOLOGIA	9
2.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	9
2.1.1. Parâmetros Adimensionais	9
2.1.1.1. Adimensionalização da equação de movimento.....	9
2.1.1.2. Adimensionalização da equação de energia	12
2.1.2. Aplicando a formula de Galerkin	13
2.1.2.1. Método de Galerkin aplicado a equação de momento linear	14
2.1.2.2. Método de Galerkin aplicado a equação de energia.....	15
3 RESULTADOS	16
3.1. DUTO CIRCULAR.....	16
3.1.1. Geometria e parametrização	16
3.1.2. Perfil de velocidade e perfil de temperatura	17
3.1.3. Fator de atrito e número de Nusselt	18
3.2. DUTO RETANGULAR.....	18
3.2.1. Geometria e parametrização	18
3.2.2. Perfil de velocidade e Perfil de temperatura	19
3.2.3. Fator de atrito e número de Nusselt	20
3.3. DUTO TRIANGULAR DIREITO	21
3.3.1. Geometria e parametrização	21
3.3.2. Perfil de velocidade e Perfil de temperatura	22
3.3.3. Fator de atrito e número de Nusselt	22
REFERÊNCIAS	25
APÊNDICE A – DUTO CIRCULAR	26
APÊNDICE B – DUTO RETANGULAR	31
APÊNDICE C – TRIANGULAR DIREITO	35

UM ESTUDO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA FLUXO LAMINAR EM DUTOS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ARBITRÁRIA

Camila Marques Azevedo Farias*

RESUMO

Dutos são sistemas eficientes e seguros para o transporte de fluidos e gases. Dada a severidade das condições de operação, a crescente necessidade de manutenção e adaptação dos dutos existentes às condições atuais de serviço, vários trabalhos, teóricos e experimentais, têm sido reportados na literatura, visando obter a solução de escoamento de fluido no interior de dutos retos de seções transversais constantes. Dentre estes, destacam-se os que utilizam o método integral baseado na teoria de Galerkin. Neste trabalho foram encontrados a distribuição de velocidade e temperatura, o número de Poiseuille e o número de Nusselt médio para um escoamento completamente desenvolvido hidrodinâmica e termicamente. Para fins de cálculo foi considerado que o fluxo constante axialmente e a temperatura prescrita na parede, sendo contemplados dutos de seção circular, retangular e triangular direito, utilizando cálculos via método integral baseado na teoria de Galerkin. Para comparação dos dados obtidos foram tomados como referência alguns resultados disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: Transferência de Calor. Método de Galerkin. Escoamento.

1 INTRODUÇÃO

As redes dutoviárias são responsáveis pelo transporte de uma variedade de produtos, de forma rápida, segura e econômica. Muitas empresas principalmente do ramo petrolífero a utiliza para transporte de fluidos e gases, chamando assim a atenção de diversos autores que vêm ao longo de décadas estudando soluções analíticas e numéricas para o escoamento de fluidos no interior de dutos.

Projetos de tubulações industriais e dutos de transporte em geral estão normalmente associados a altos investimentos financeiros e ao transporte de produtos de valor estratégico para a sociedade. Desta forma, é de fundamental importância garantir que essas tubulações operem de maneira contínua, com um mínimo de interrupções devido à imprevistos ou acidentes. (GOMES, *et al.*, 2000).

A partir de uma análise da literatura, observa-se uma gama de trabalhos no intuito de desenvolver soluções analíticas ou numéricas para transporte de fluidos em dutos com várias

* Aluna de Graduação em Engenharia Civil na Universidade Estadual da Paraíba – Campus VIII.
Email: camila.marques.azevedo@hotmail.com

geometrias. Trabalhos estes que se empossam de várias técnicas para obtenção dos elementos que caracterizam a transferência de calor. Métodos como: Integral generalizada, Séries finitas, Elementos Finitos, Métodos de Linhas, dentre outros. Assim também, o método de Galerkin vem se mostrando eficaz no estudo de transferência de calor em dutos.

Aparecido e Cotta (1989), aplicam as técnicas de integral generalizada para encontrar soluções para convecção laminar forçada sobre dutos retangulares. Resultados de referência são estendidas para quantidades de interesse práticos com a região de entrada térmica para uma ampla variedade de variáveis axial e várias expressões do raio. A precisão de resultados relatados anteriormente para abordagem numérica diretas são examinadas criticamente para regiões completamente desenvolvidas e em desenvolvimento. Os mesmos autores apresentam técnicas de transformação integral generalizada para soluções de convecção laminar forçada na região térmica de entrada de dutos com seção transversal arbitrária. A análise é ilustrada através de considerações de um duto triangular reto submetido a temperatura constante na parede. Neste trabalho é também apresentado resultados numéricos para temperatura média e número de Nusselt para diferentes ângulos do ápice. (APARECIDO; COTTA, 1990).

Zhang, Ebaian e Campo, (1991), oferecem solução analítica/numérica para transferência de calor convectiva na região de entrada térmica de dutos irregulares: quadrada, retangular e triangular equilátero. Os desenvolvimentos do campo de temperatura nestes dutos foram obtidos analiticamente para soluções da equação de energia aplicando o método de linhas (MOL).

Aparecido e Lindquist, (1999), estudaram analiticamente fluxo laminar hidrodinâmica e termicamente desenvolvido de um fluido newtoniano sobre dutos retangulares retos com vizinhança axial uniforme e fluxo de calor periférico. A equação de energia para distribuição de temperatura desconhecida é transformada para o uso das técnicas de transformada integral resultante num sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para perfis de temperatura desconhecidos.

Dentre os trabalhos reportados na literatura, teórico e experimental, destacam-se os que utilizam o método de Galerkin. O Método de Galerkin apesar de ter mais de cem anos de história, está bem atualizado e serve como instrumento teórico para estudar os problemas matemáticos. Este estudo por sua vez, é uma parte indispensável de abordagem científica de problemas de natureza físicos. Grande parte destes problemas consiste na resolução de

equações diferenciais não lineares. O Método de Galerkin é uma ferramenta bastante poderosa para este fim. (REZENDE, 2005)

2 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho foram realizados, inicialmente, estudos da literatura básica acerca de transferência de calor, escoamento de fluidos no interior de tubulações, camada limite e método de Galerkin.

Foram admitidos dutos retos de seção transversal constante com geometrias arbitrárias, escoamento laminar completamente desenvolvido hidrodinâmica e termicamente, fluido newtoniano, regime permanente com condução axial e dissipação viscosa negligenciadas e com propriedades termofísicas constantes: densidade ρ , viscosidade μ , calor específico C_p e condutividade térmica κ . E considerou-se H_1 , fluxo axial constante e temperatura na parede prescrita, como condição de fronteira.

2.1. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1.1. Parâmetros Adimensionais

Uma grandeza adimensional ou número adimensional é um número desprovido de qualquer unidade física que o defina. Portanto é um número puro. Os números adimensionais se definem como produtos ou quocientes de quantidades cujas unidade se cancelam.

2.1.1.1. Adimensionalização da equação de movimento

Para encontrar o campo de velocidade em dutos com seção transversal arbitrária na ausência de forças externas e condição de estado estacionário foi usado, por conveniência, as coordenadas cartesianas para descrever o método de solução. A equação de momento linear para fluxo completamente desenvolvido é dada por:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (1)$$

sujeita a condição de contorno:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma \quad (2)$$

sendo P a pressão, μ é a viscosidade do fluido, \mathbf{u} a velocidade principal, Γ é a fronteira e $\frac{\partial P}{\partial z}$ constante.

Tomando

$$x = LX; \quad y = LY; \quad U = \frac{-u}{\frac{L^2 \partial P}{\mu \partial Z}} \quad (3)$$

temos

$$U_m = \frac{1}{A} \iint u \, dA \quad (4)$$

que é a velocidade média adimensional e a velocidade adimensional dada por

$$U^* = \frac{U}{U_m} \quad (5)$$

Assim, podemos encontrar a forma adimensional da equação de momento linear da seguinte forma:

- Deriva da primeira em relação a X:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{\frac{L^2 \partial P}{\mu \partial Z}} \frac{\partial u}{\partial X} \quad (6)$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} L + \frac{\partial u}{\partial y} 0 = \frac{\partial u}{\partial x} L \quad (7)$$

temos que,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = -\frac{1}{\frac{L \partial P}{\mu \partial Z}} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

- A derivada Segunda em relação a X:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -\frac{1}{\mu \frac{\partial Z}{\partial X}} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\mu \frac{\partial Z}{\partial X}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right] \quad (9)$$

que nos dá,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -\frac{1}{\mu \frac{\partial Z}{\partial X}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

Analogamente, as derivações em relação à Y, nos dá,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = -\frac{L}{\mu \frac{\partial Z}{\partial Y}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11)$$

Assim, a equação de momento linear se torna,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (12)$$

Como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (13)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (14)$$

então

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (15)$$

donde

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = -1 \quad (16)$$

sendo $U = (X, Y)$ com $U = 0$ em Γ .

2.1.1.2. Adimensionalização da equação de energia

Considere a equação de Energia

$$k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = \rho C_p u \frac{\partial t}{\partial z} \quad (17)$$

onde u é velocidade principal, t a temperatura, k a condutividade térmica do fluido, ρ a densidade do fluido e C_p o calor específico.

Para a condição de fronteira H_1 , temos,

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt_s}{dz} = \frac{dt_b}{dz} = \text{Constante}, \quad (18)$$

onde t_s é a temperatura da superfície, t_b a temperatura média, ou temperatura da mistura, dada por

$$t_b = \frac{1}{Au_m} \iint_A ut \, dA \quad (19)$$

Sendo T a temperatura dada por

$$T = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}} \quad (20)$$

em que t_w é a temperatura na parede e α é a difusividade térmica do fluido dada pela equação,

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad (21)$$

Considerando

$$X = \frac{x}{L}; \quad Y = \frac{y}{L}; \quad T = \frac{t_w - t}{L^2 \frac{u_m}{\alpha} \frac{dt_b}{dz}}; \quad (22)$$

temos:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{1}{L^2 \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \frac{\partial t}{\partial X} = -\frac{1}{L^2 \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \left[\frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial X} \right] = -\frac{1}{L \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (23)$$

A derivada segunda em relação a X,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = -\frac{1}{L \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) = -\frac{1}{L \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial X} \right] = -\frac{1}{L \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (24)$$

Analogamente temos que,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = -\frac{1}{L \frac{u_m dt_b}{\alpha dz}} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (25)$$

Logo, temos a equação de energia adimensional

$$k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = \rho C_p u \frac{\partial t}{\partial Z} \quad (26)$$

$$k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\alpha} u \frac{dt_b}{dZ} \quad (27)$$

$$Um \frac{dt_b}{dZ} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial Y^2} \right) = \frac{1}{\alpha} u \frac{dt_b}{dZ} \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial Y^2} = -\frac{u}{Um} \quad (29)$$

ou

$$\frac{\partial^2 t}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial Y^2} = -U^* \quad (30)$$

2.1.2. Aplicando a formula de Galerkin

Após a adimensionalização das equações de movimento e energia foi aplicado o método integral de Galerkin, para se obter os campos de velocidade e temperatura, bem como os números e Nusselt médio e local em condição de fronteira H_1 em dutos retos de seção transversal arbitraria constante.

2.1.2.1. Método de Galerkin aplicado a equação de momento linear

Considere uma solução como sendo a combinação linear das funções f_j , como,

$$U(X,Y) = \sum_{j=1}^N C_j f_j(x,y) = C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_n f_n \quad (31)$$

onde $\{f_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ é um conjunto de funções base, $\{f_j\}$ é um conjunto linearmente independente e satisfaz as condições de contorno de U .

Substituindo (31) em (16) temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\sum_{j=1}^N C_j f_j \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\sum_{j=1}^N C_j f_j \right) = -1 \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^N C_j \frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j + \sum_{j=1}^N C_j \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j = -1 \quad (33)$$

$$\sum_{j=1}^N C_j \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j \right) = -1 \quad (34)$$

Aplicando o método de Galerkin, multiplica-se por $f_i dA$ e integrando sobre a área da seção transversal

$$\frac{1}{A_c} \iint \sum_{j=1}^N C_j f_i \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j \right) dA_c = -\frac{1}{A_c} \iint f_i dA_c \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^N C_j \frac{1}{A_c} \iint f_i \nabla^2 f_j dA_c = -\frac{1}{A_c} \iint f_i dA_c; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

que na forma matricial se torna,

$$A.C = B \quad (37)$$

com elementos

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \iint f_i \nabla^2 f_j dA_c \quad (38)$$

e

$$b_i = -\frac{1}{A_c} \iint f_i dA_c \quad (39)$$

Assim encontramos os elementos da matriz C ,

$$C = A^{-1} \cdot B \quad (40)$$

onde A^{-1} é a matriz inversa de A .

2.1.2.2. Método de Galerkin aplicado a equação de energia

Tomando

$$T(X,Y) = \sum_{j=1}^N d_j f_j(x,y) = d_1 f_1 + d_2 f_2 + \dots + d_n f_n \quad (41)$$

Substituindo (41) em (30) temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\sum_{j=1}^N d_j f_j \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\sum_{j=1}^N d_j f_j \right) = -U^* \quad (42)$$

$$\sum_{j=1}^N d_j \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j \right) = -U^* \quad (43)$$

$$\sum_{j=1}^N d_j \nabla^2 f_j = -U^* \quad (44)$$

Aplicando o método de Galerkin obtemos

$$\sum_{j=1}^N d_j = \frac{1}{A_c} \iint f_i \nabla^2 f_j dA_c = -\frac{1}{A_c} \iint U^* f_i dA_c \quad (45)$$

que na forma matricial

$$A \cdot D = E \quad (46)$$

onde

$$a_{ij} = \frac{1}{A_c} \iint f_i \nabla^2 f_j dA_c \quad (47)$$

e

$$b_i = -\frac{1}{A_c} \iint U^* f_i dA_c \quad (48)$$

Determinada a condição de contorno do duto como H_1 , são geradas as formulas adimensionais da velocidade, através da equação de momento linear e da temperatura através da equação de energia, em seguida é aplicado o método Galerkin. Utilizou-se o software Maple instalado no computador pessoal da autora, um LG S460-G.BG31P1, processador Intel(R) Core(TM) i3-3110M CPU@2.40GHz, para auxiliar na execução dos cálculos, possibilitando assim analisar e tabelar os fatores de atrito e o número de Nusselt para três tipos de dutos, sendo eles o retangular, circular e triangular direito e a geração dos gráficos.

3 RESULTADOS

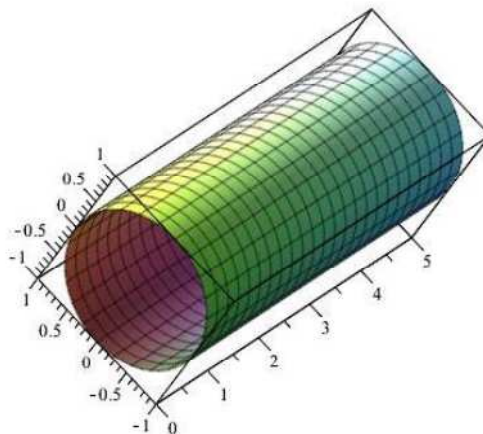
No presente capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos através da aplicação do método de Galerkin para escoamento completamente desenvolvido hidrodinâmica e termicamente em condições H_1 em dutos retos com seção transversal constante e os mesmos sendo comparados com os encontrados no trabalho de Shah e London (1978), considerado referência principal para este assunto.

3.1. DUTO CIRCULAR

3.1.1. Geometria e parametrização

Sendo um duto reto com seção transversal circular como na Figura 3 abaixo:

Figura 1 - duto circular



Fonte: A autora (2017)

Considerando as seguintes parametrizações:

$$x = x; \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad z = z$$

Assim a parametrização é dada por $r^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. Desta forma foi tomado o conjunto de funções bases como:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2, \text{ e } f(x, y) \in \{g(x, y), g(x, y)x, g(x, y)y \dots, g(x, y)x^n y^n\}$$

Logo,

$$f(x, y) = g(x, y)x^n y^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

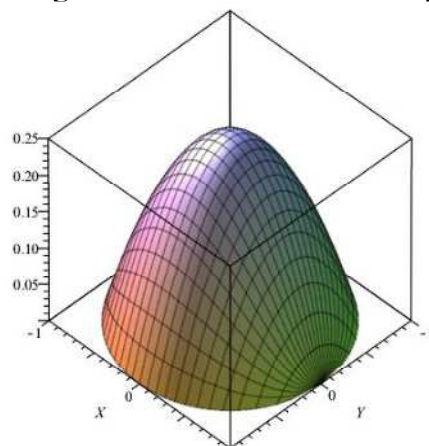
A área da seção transversal, o perímetro e o diâmetro hidráulico, dados respectivamente por:

$$A_c = \pi a^2, \quad P = 2\pi a \text{ e } d_h = \frac{4A_c}{P} = 2a$$

3.1.2. Perfil de velocidade e perfil de temperatura

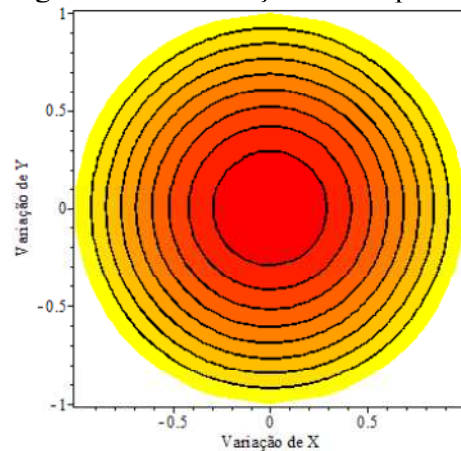
A solução das equações (1) e (2) demonstradas anteriormente e com o auxílio do software Maple 17 foi possível gerar os gráficos do perfil de velocidade e da distribuição de temperatura para H_1

Figura 2 - Perfil de velocidade para duto circular



Fonte: A autora (2017)

Figura 3 - Distribuição de temperatura para duto circular



Fonte: A autora (2017)

3.1.3. Fator de atrito e número de Nusselt

Através das equações (3) e (4) foi possível encontrar os valores de fR_e e o número de Nusselt N_{uH1} e assim compara-los com os resultados na literatura,

Tabela 1- Comparação dos valores obtidos para dutos circulares

Literatura	Calculado	Literatura	Calculado
fR_e	fR_e	N_{uH1}	N_{uH1}
16	16	4,36364	4,36367

Fonte: A autora (2017)

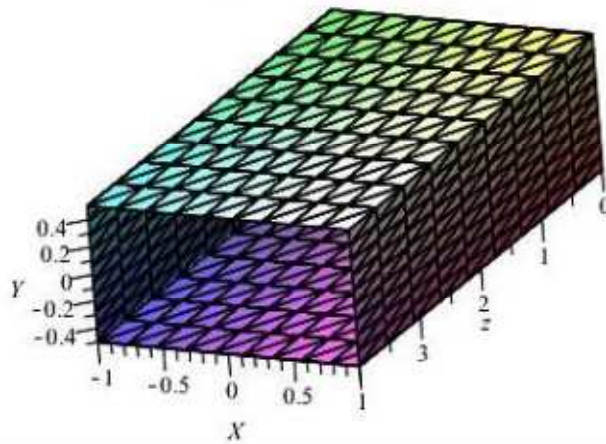
Ao comparar os valores obtidos com os presentes na literatura pode-se observar que a variação foi muito pequena (0,00003) apenas no para o número de Nusselt, podendo assim ser desprezado, deste modo pode-se afirmar que os valores foram iguais e o método satisfaz todos os requisitos para esse tipo de duto.

3.2. DUTO RETANGULAR

3.2.1. Geometria e parametrização

Sendo um duto reto com seção transversal retangular como na figura 6 abaixo:

Figura 4 - Duto Retangular



Fonte: A autora (2017)

Considerando as seguintes parametrizações:

$$x = a; \quad y = b; \quad z = z$$

Desta forma foi tomado o conjunto de funções bases como:

$$g(x,y) = (x^2 - a)(y^2 - b^2)$$

e

$$f(x,y) = \{g(x,y), g(x,y)x, g(x,y)y, \dots, g(x,y)x^n y^n\}$$

Logo,

$$f(x,y) = g(x,y)x^n y^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

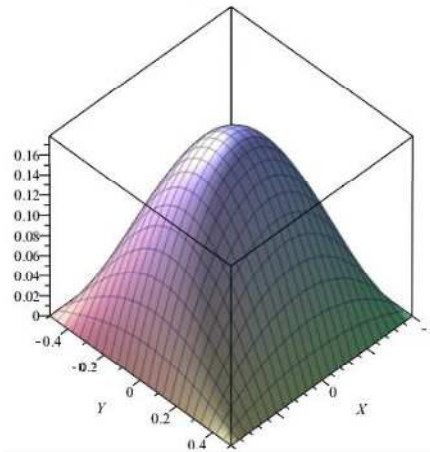
A área da seção transversal, o perímetro e o diâmetro hidráulico, dados respectivamente por:

$$A_r = 4ab, \quad P = 4(a+b) \quad e \quad d_h = \frac{4A_r}{P}$$

3.2.2. Perfil de velocidade e Perfil de temperatura

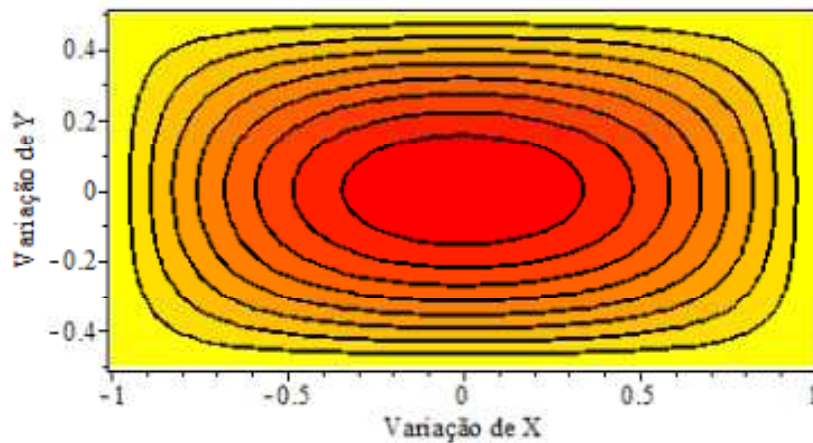
A solução das equações (1) e (2) demonstradas anteriormente e com o auxílio do software Maple 17 foi possível gerar os gráficos do perfil de velocidade e da distribuição de temperatura para H_1

Figura 7 - Perfil de velocidade para duto retangular



Fonte: A autora (2017)

Figura 8 - Distribuição de temperatura para duto retangular



Fonte: A autora (2017)

3.2.3. Fator de atrito e número de Nusselt

Através das equações (3) e (4) foi possível encontrar os valores de fRe e o número de Nusselt Nu_{H1} e assim compara-los com os resultados na literatura,

Tabela 2- Comparação dos valores obtidos para dutos retangulares com a literatura

	Literatura	Calculado	Literatura	Calculado
$\alpha *$	fRe	fRe	Nu_{H1}	Nu_{H1}
1	14,2271	14,2292	3,60795	3,60715
0,8	14,3778	14,3803	3,66382	3,66288
0,7	14,6054	14,6086	3,74961	3,74838
0,5	15,5481	15,5562	4,12330	4,11932
0,4	16,3681	16,3852	4,47185	4,46175
0,25	18,2328	18,3148	5,33106	5,27078

Fonte: A autora (2017)

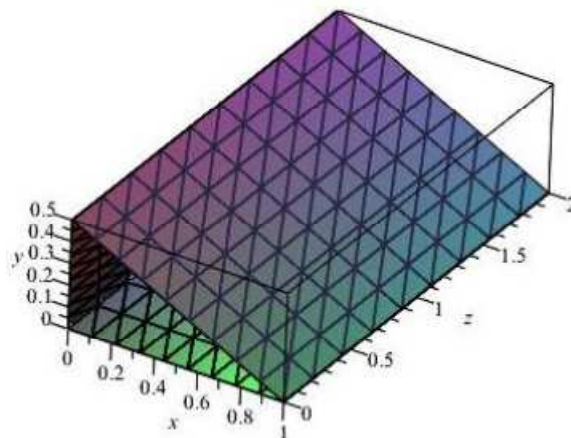
Para os dutos retangulares, ocorreu uma variação maior entre as segundas e terceiras casas decimais na análise dos valores obtidos e encontrados, porém ainda dentro do aceitável. Tal variação é cada vez menor aumentando-se o número de funções bases.

3.3. DUTO TRIANGULAR DIREITO

3.3.1. Geometria e parametrização

Sendo um duto reto com seção transversal triangular direito como na figura 9 abaixo:

Figura 5 - duto triangular direito



Fonte: A autora (2017)

Considerando as seguintes parametrizações:

$$x = a; \quad y = b - \frac{b}{a}x; \quad z = z$$

Desta forma foi tomado o conjunto de funções bases como:

$$g(x,y) = (xy) \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)$$

e

$$f(x,y) = \{g(x,y), g(x,y)x, g(x,y)y, \dots, g(x,y)x^n y^n\}$$

Logo,

$$f(x,y) = g(x,y)x^n y^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

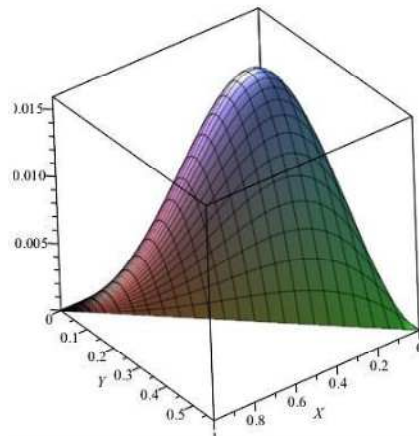
A área da seção transversal, o perímetro e o diâmetro hidráulico, dados respectivamente por:

$$A_{td} = \frac{ab}{2}, \quad P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad d_h = \frac{4A_{td}}{P}$$

3.3.2. Perfil de velocidade e Perfil de temperatura

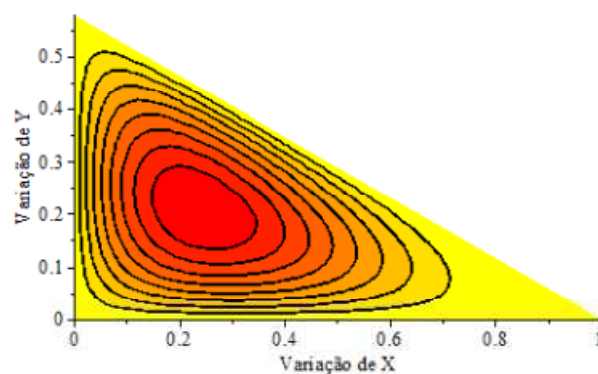
A solução das equações (1) e (2) demonstradas anteriormente e com o auxílio do software Maple 17 foi possível gerar os gráficos do perfil de velocidade e da distribuição de temperatura para H_1

Figura 10 - Perfil de velocidade para duto triangular direito



Fonte: A autora (2017)

Figura 11 - Distribuição de temperatura para duto triangular direito



Fonte: A autora (2017)

3.3.3. Fator de atrito e número de Nusselt

Através das equações (3) e (4) foi possível encontrar os valores de fR_e e o número de Nusselt N_{uH1} e assim compara-los com os resultados na literatura,

Tabela 3- Comparação dos valores obtidos para dutos triangulares direito com a literatura

ϕ deg	Literatura	Calculado	Literatura	Calculado
	fRe	fRe	NuH1	NuH1
10	12,270	13,657	2,260	2,560
20	12,830	13,125	2,690	2,700
30	13,034	13,124	2,888	2,939
45	13,154	13,236	2,982	3,151
60	13,034	13,124	2,888	2,939
80	12,490	13,656	2,430	2,601

Fonte: A autora (2017)

Dentre os três dutos estudado este foi que apresentou maior diferença entre os dados obtidos e a literatura. Essa diferença se dá principalmente por causa da viscosidade e o número de funções bases utilizadas, ao aumentar o número de funções bases a diferença diminui.

4 CONCLUSÃO

Ao utilizar o método integral de Galerkin foi possível encontrar os perfis de velocidade e temperatura, assim como encontrar os valores do número de Nusselt médio. Ao comparar os resultados obtidos com o da literatura utilizada como referência, estes apresentaram desvios consideráveis.. Tal método mostrou-se também eficaz com respeito ao tempo computacional gasto para encontrar os valores de tais soluções. Desta forma, o método de Galerkin atendeu a todos os requisitos do presente trabalho, mostrando-se uma boa ferramenta para aplicação em escoamento laminar completamente desenvolvido hidrodinâmica e termicamente em dutos de seção transversal arbitrária.

A STUDY OF HEAT TRANSFER TO LAMINATE FLOW IN ARBITRARY CROSS SECTION DUCTS

ABSTRACT

Ducts are efficient and safe systems to transport fluids and gas. Due to the severity of the operating conditions and the increasing need for maintenance and adaptation of the existing pipelines to the current service conditions, several studies have been reported in literature, theoretical and experimental, aiming to obtain the fluid flow solution inside straight pipelines of constant cross-section. Among these, we highlight the ones that use the integral method based on Galerkin. This work aims to find the velocity and temperature distribution, Poiseuille number and average Nusselt number for a fully developed flow hydrodynamic and thermally. For calculations purpose, it was considered that the flow is constant and the temperature is prescribed on the wall. Considering ducts of circular, rectangular and right triangular section, using integral method calculations based on Galerkin. For the comparison of the obtained data, some results of tests available in the literature were taken as reference.

Keywords: Heat transfer. Galerkin of Method. Flow. Cross sectio

REFERÊNCIAS

APARECIDO, J. B.; COTTA, R. M.; OZISIK, M. N. **Analytical Solutions to Two-dimensional Diffusion Type Problems in Irregular Geometries.** *Journal of the Franklin Institute Pergammon Press plc*, v. 326. n. 3. pp 421-434, 1989.

APARECIDO, J. B., COTTA, R. M., **Thermally developing laminar flow inside rectangular ducts.** *Int. J. Heat Mass Transfer.*, v. 33. n. 2. pp. 341-347, 1990.

APARECIDO, J. B.; LINDQUIST, C. **Laminar Forced Convection Through Rectangular Ducts With Uniform Axial And Peripheral Heat Flux.** *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, 22-26 de Novembro, Águas de Lindóia, São Paulo, 1999.

GOMES, M. G. F. M.; BAPTISTA, R. M. **PRODUT – A Pipeline Technological Program to Face the Challenges in Brasil.** In: 2000 International Pipeline Conference, ASME, 2000, Vol.1, pp. 651-657.

REZENDE, Veridiana. **O Método de Galerkin.** Dissertação (mestrado) - Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, 2005

SHAH, R.K.; LONDON, A.L. **Laminar Flow Forced Convection in Ducts**, Academic Press, 1978.

ZHANG, H. Y.; EBADIAN, M. A.; CAMPO, A. **An Analytical/Numerical Solution of Convective Heat Transfer in the Thermal Entrance Region of Irregular Ducts.** *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 18. pp 273-291, 1991.

APÊNDICE A – DUTO CIRCULAR

```

Digits := 6 (1)
##### DUTO Circular (H1)#####
> r := 1
r := 1 (2)
> k := 6
k := 6 (3)
##### PERFIL DE VELOCIDADE #####
> g := (X, Y) -> (1 - X^2 - Y^2)
g := (X, Y) -> 1 - X^2 - Y^2 (4)
> f := [g(X, Y), g(X, Y) · X, g(X, Y) · Y, g(X, Y) · X^2, g(X, Y) · X · Y, g(X, Y) · Y^2, g(X, Y) · X^3, g(X, Y) · X^2 · Y, g(X, Y) · X · Y^2, g(X, Y) · Y^3, g(X, Y) · X^3 · Y, g(X, Y) · X^2 · Y^2, g(X, Y) · X · Y^3, g(X, Y) · X^3 · Y^2, g(X, Y) · X^2 · Y^3, g(X, Y) · X^3 · Y^3]:
> Area := Pi · r^2
Area := π (5)
##### CÁLCULO DA MATRIZ A #####
> aij := (i, j) -> 1/Area · int(int(f[i] · (diff(f[j], Y, Y) + diff(f[j], X, X)) · r^2, Y = -sqrt(1 - X^2) .. sqrt(1 - X^2)), X = -1 .. 1);
aij := (i, j) -> (6)

$$\frac{\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-X^2}}^{\sqrt{1-X^2}} f_i \left( \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j + \frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j \right) r^2 dY dX}{Area}$$

> A := Matrix(k, k, aij);
A := (7)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & -\frac{7}{24} \end{bmatrix}$$

##### CÁLCULO DA MATRIZ B #####
> bi := i -> 1/Area · int(int(f[i] · r^2, Y = -sqrt(1 - X^2) .. sqrt(1 - X^2)), X = -1 .. 1);
##### CÁLCULO DA MATRIZ B #####
> bi := i -> 1/Area · int(int(f[i] · r^2, Y = -sqrt(1 - X^2) .. sqrt(1 - X^2)), X = -1 .. 1);
bi := i -> (8)

$$\frac{\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-X^2}}^{\sqrt{1-X^2}} f_i r^2 dY dX}{Area}$$


```

```
> B := Matrix(k, 1, bi);
```

$$B := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{12} \\ 0 \\ -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

(9)

```
> ##### CÁLCULO DA MATRIZ C #####
```

```
> C := A^-1.B
```

$$C := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(10)

```
> #####
```

```
> C[1, 1]
```

$$\frac{1}{4}$$

(11)

```
> C[2, 1]
```

$$0$$

(12)

```
> C[3, 1]
```

$$0$$

(13)

```
> c := j -> evalf(C[j, 1]);
```

$$c := j \rightarrow \text{evalf}(C_{j,1})$$

(14)

```
> U := unapply(sum('c(j) * f[j]', j=1..k), Y, X);
```

$$U := (Y, X) \rightarrow -0.250000 X^2 - 0.250000 Y^2 + 0.250000$$

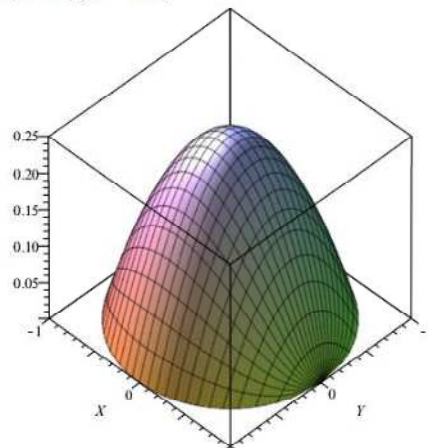
(15)

```
> Um := \frac{1}{Area} \cdot \text{int}(\text{int}(U(Y, X) \cdot r^2, Y = -\text{sqrt}(1 - X^2) .. \text{sqrt}(1 - X^2)), X = -1 .. 1);
```

$$Um := \frac{0.392699}{\pi}$$

(16)

```
> plot3d(U(Y, X), Y = -sqrt(1 - X^2) .. sqrt(1 - X^2), X = -1 .. 1)
```



```
> U(0, 0)
```

$$0.250000$$

(17)

```
> \frac{U(0, 0)}{Um}
```

$$0.636620 \pi$$

(18)

```
> ##### FATOR DE ATRITO #####
```

```
> ##### DIÁMETRO HIDRAULICO #####
```

```
> perimetro := 2 * Pi * r
```

$$\text{perimetro} := 2 \pi$$

(19)

```
> dh := 2·r,
                                     dh := 2
(20)
```

#####

```
> fRe :=  $\frac{\left(\frac{dh}{r}\right)^2}{2 \cdot Um}$ ;
                                     fRe := 5.09295 π
(21)
```

Matriz D

```
> ei := i →  $\frac{1}{Area} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{-X^2+1}}^{\sqrt{-X^2+1}} \frac{U(Y,X) f_i r^2}{Um} dY dX$ ;
                                     ei := i →  $\frac{\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{-X^2+1}}^{\sqrt{-X^2+1}} \frac{U(Y,X) f_i r^2}{Um} dY dX}{Area}$ 
(22)
```

```
> E := Matrix(k, 1, ei);
                                     E :=  $\begin{bmatrix} -\frac{2.09439}{\pi} \\ -0. \\ -0. \\ -\frac{0.261799}{\pi} \\ -0. \\ -\frac{0.261801}{\pi} \end{bmatrix}$ 
(23)
```

MATRIZ Di

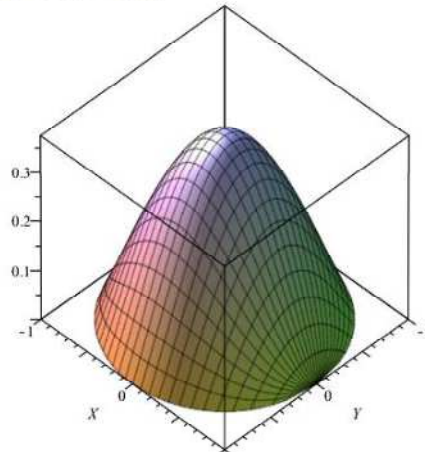
```
> Di := A-1·E
                                     Di :=  $\begin{bmatrix} \frac{1.17809}{\pi} \\ 0. \\ -0. \\ -\frac{0.39269}{\pi} \\ -0. \\ -\frac{0.392690}{\pi} \end{bmatrix}$ 
(24)
```

```
> di := j → evalf(Di[j, 1]);
                                     di := j → evalf(Dij,1)
(25)
```

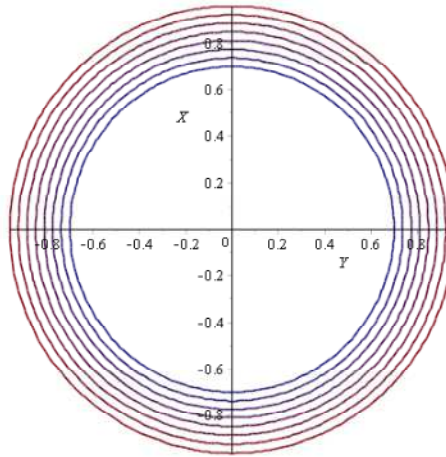
```
> T := unapply(sum('di(j)·f[j]', j=1..k), Y, X);
                                     T = (Y, X) → -0.374998·X2 - 0.374998·Y2 + 0.374998 - 0.124997(1 - Y2 - X2)·X2 - 0.124997(1 - Y2 - X2)·Y2
(26)
```

```
> Tm :=  $\frac{1}{Area} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{-X^2+1}}^{\sqrt{-X^2+1}} T(Y, X) \cdot r^2, Y = -\sqrt{1 - X^2} .. \sqrt{1 - X^2}$ ;
                                     Tm :=  $\frac{0.719944}{\pi}$ 
(27)
```

```
> plot3d(T(X, Y), Y=-sqrt(1-X^2)..sqrt(1-X^2), X=-1..1)
```

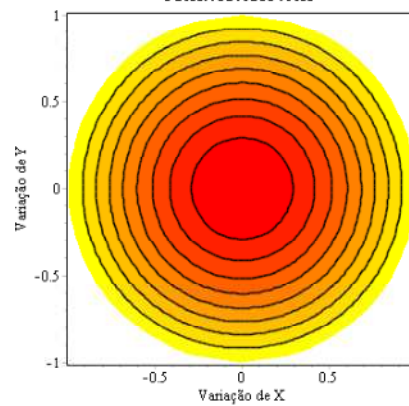


```
> contourplot(T(Y, X), Y=-sqrt(1-X^2)..sqrt(1-X^2), X=-1..1, contours = [0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16], scaling = CONSTRAINED)
```



```
> contourplot(T(Y, X), Y=-sqrt(1-X^2)..sqrt(1-X^2), X=-1..1, title = "Distribuição de temperatura Adimensional", titlefont = [Times, ITALIC, 15], axes = boxed, labeldirections = [horizontal, vertical], labels = ["Variação de X", "Variação de Y"], filled = true, coloring = [yellow, red], scaling = CONSTRAINED);
```

Distribuição de temperatura Adimensional



```
> ##### NÚMERO DE NUSSELT #####
```

```
> N_H1 :=  $\frac{\left(\frac{dh}{r}\right)^2}{4 \cdot Tm}$ 
```

```
N_H1 := 1.38900 π
```

(28)

```
#####
```

```
> #
```

```
FATOR DE ATRICO E NÚMERO DE NUSSELT EM H1
```

```
> evalf(fRe)
```

```
16.0000
```

(29)

```
> evalf(N_H1)
```

```
4.36367
```

(30)


```

> #####
> C[1, 1]
0.479080928091824 (13)

```

```

> C[2, 1]
0. (14)

```

```

> C[3, 1]
0. (15)

```

```

> c := j -> evalf(C[j, 1]);
c := j -> evalf(C[j, 1]) (16)

```

```

> U := unapply(sum('c(j) * f[j]!', j=1..k), X, Y);
U := (X, Y) -> 0.479081 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) + 0.735282 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) X^2 - 0.119127 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) Y^2
+ 1.73989 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) X^2 Y^2 (17)

```

```

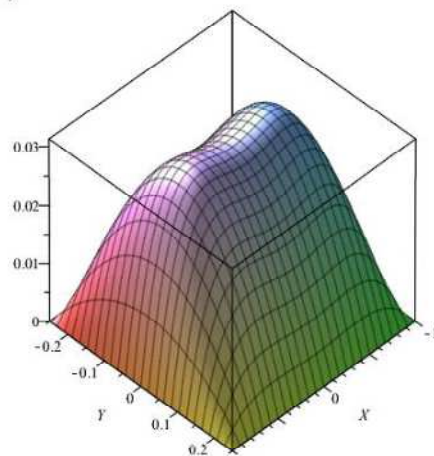
> Um := 1/Area * int(int(U(X, Y) * a^2, X=-1..1), Y=-b/a..b/a);
Um := 0.0174722 (18)

```

```

> plot3d(U(X, Y), X=-1..1, Y=-b/a..b/a)

```



```

> U(0, 0)
0.0299426 (19)

```

```

> U(0, 0)/Um
1.71373 (20)

```

FATOR DE ATRITO

DIÁMETRO HIDRAULICO

```

> perimetro := 4 * (a + b)
perimetro := 5.00 (21)

```

```

> dh := (4 * Area) / perimetro;
dh := 0.800000 (22)

```

```

> fRe := (dh/a)^2;
fRe := 18.3148 (23)

```

Matriz D

```

> ei := i -> 1/Area * int(int(U(X, Y) / Um * f[i] * a^2, Y=-b/a..b/a), X=-1..1);
ei := i -> (1/Area) * int(int(U(X, Y) / Um * f[i] * a^2, Y=-b/a..b/a), X=-1..1); (24)

```

```
> E := Matrix(k, 1, ei);
```

```
E := [ 16 x 1 Matrix
       Data Type: anything
       Storage: rectangular
       Order: Fortran_order ]
```

 (25)

```
##### MATRIZ Di #####
> Di := A^-1 E
```

```
Di := [ 16 x 1 Matrix
        Data Type: float_8
        Storage: rectangular
        Order: Fortran_order ]
```

 (26)

```
> di := j → evalf(Di[j, 1]);
```

```
di := j → evalf(Di[j, 1])
```

 (27)

```
> T := unapply(sum('di(j) · f[j]', j=1..k), X, Y);
```

```
T := (X, Y) → 0.730791 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) + 0.609991 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) X^2 - 2.35719 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) Y^2 - 1.58670 (X^2 - 1) (Y^2 - 0.0625) X^2 Y^2
```

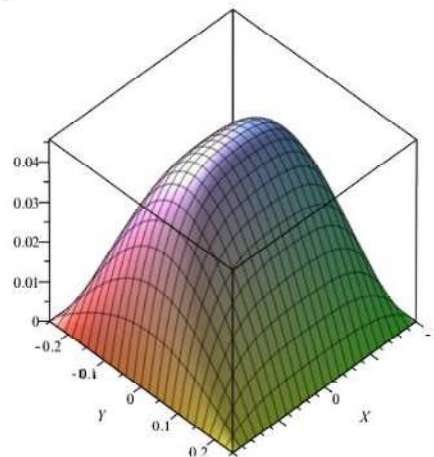
 (28)

```
> Tm := 1/Area · int(int(U(X, Y)/Um · T(X, Y) · a^2, X=-1..1), Y=-b/a..b/a);
```

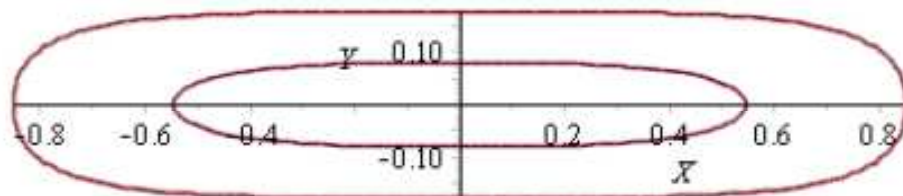
```
Tm := 0.0303560
```

 (29)

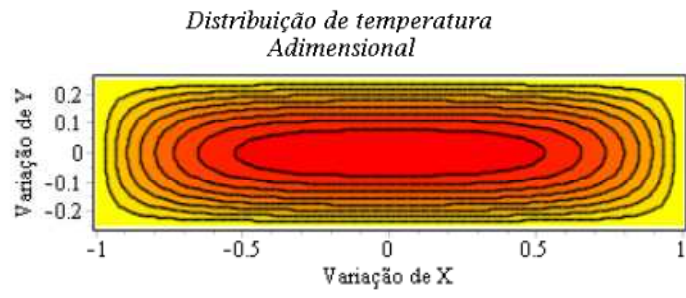
```
> plot3d(T(X, Y), X=-1..1, Y=-b/a..b/a)
```



```
> contourplot(T(X, Y), X=-1..1, Y=-b/a..b/a, contours=[0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16], scaling=CONSTRAINED)
```



```
> contourplot(T(X, Y), X=-1..1, Y=-b/a..b/a, title="Distribuição de temperatura A dimensional", titlefont=[Times, ITALIC, 15], axes=boxed,
labeldirections=[horizontal, vertical], labels=["Variação de X", "Variação de Y"], filled=true, coloring=[yellow, red], scaling=CONSTRAINED);
```



> ##### NÚMERO DE NUSSELT #####

>

> $N_{HI} := \frac{\left(\frac{dh}{a}\right)^2}{4 \cdot Tm}$

$N_{HI} = 5.27078$

(30)

APÊNDICE C – TRIANGULAR DIREITO

```

>
> ##### DUTO Triangular (H1) #####
>  $\alpha := \text{evalf}\left(\frac{30 \cdot \text{Pi}}{180}\right);$ 
>  $\alpha := 0.523599$  (1)
>  $a := 1$ 
>  $a := 1$  (2)
>  $b := \tan(\alpha)$ 
>  $b := 0.577351$  (3)
>  $k := 3$ 
>  $k := 3$  (4)
> #####
> ##### PERFIL DE VELOCIDADE #####
> #####
>  $g := (X, Y) \rightarrow (X \cdot Y) \cdot \left(1 - \frac{Y}{b} - \frac{X}{a}\right);$ 
>  $g := (X, Y) \rightarrow YX \left(1 - \frac{Y}{b} - \frac{X}{a}\right)$  (5)
>  $f := [g(X, Y), g(X, Y) \cdot X, g(X, Y) \cdot Y, g(X, Y) \cdot X^2, g(X, Y) \cdot X \cdot Y, g(X, Y) \cdot Y^2, g(X, Y) \cdot X^3, g(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y, g(X, Y) \cdot X \cdot Y^2, g(X, Y) \cdot Y^3, g(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y, g(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^2, g(X, Y) \cdot X \cdot Y^3, g(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^2, g(X, Y) \cdot X^2 \cdot Y^3, g(X, Y) \cdot X^3 \cdot Y^3];$ 
> #####
> # ÁREA E PERÍMETRO
> #####
>  $\text{Area} := \frac{(b \cdot a)}{2}$ 
>  $\text{Area} := 0.288676$  (6)
>  $\text{perimetro} := a + b + \text{sqrt}(a^2 + b^2);$ 
>  $\text{perimetro} := 2.73205$  (7)
>  $dh := \frac{(4 \cdot \text{Area})}{\text{perimetro}^2};$ 
>  $dh := 0.422652$  (8)
> #####
> # PERFIL DE VELOCIDADE
> #####
> ##### CÁLCULO DA MATRIZ A #####
>  $a_{ij} := (i, j) \rightarrow \frac{1}{\text{Area}} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(f[i] \cdot \left(\text{diff}(f[j], X, X) + \text{diff}(f[j], Y, Y)\right) \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X\right), X=0..1\right);$ 
>  $a_{ij} := (i, j) \rightarrow \frac{\int_0^1 \int_0^{b - \frac{bX}{a}} f_i \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} f_j + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} f_j \right) a^2 dY dX}{\text{Area}}$  (9)
>  $A := \text{Matrix}(k, k, a_{ij});$ 
>  $A := \begin{bmatrix} -0.0148148 & -0.00582009 & -0.00274926 \\ -0.00582009 & -0.00291005 & -0.000916422 \\ -0.00274929 & -0.000916428 & -0.000793644 \end{bmatrix}$  (10)
> ##### CÁLCULO DA MATRIZ B #####
>  $b_i := i \rightarrow \frac{1}{\text{Area}} \cdot \text{int}\left(\text{int}\left(f[i] \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X\right), X=0..1\right);$ 
>  $b_i := i \rightarrow \frac{\int_0^1 \int_0^{b - \frac{bX}{a}} f_i a^2 dY dX}{\text{Area}}$  (11)
>  $B := \text{Matrix}(k, 1, b_i);$ 
>  $B := \begin{bmatrix} -0.00962248 \\ -0.00320749 \\ -0.00185185 \end{bmatrix}$  (12)

```

> ##### CÁLCULO DA MATRIZ C #####

> C := A⁻¹.B

$$C := \begin{bmatrix} 1.11138677498029 \\ -1.01033939906346 \\ -0.349994747998640 \end{bmatrix}$$

(14)

> #####

> c := j → evalf(C[j, 1]);

$$c := j \rightarrow \text{evalf}(C_{j,1})$$

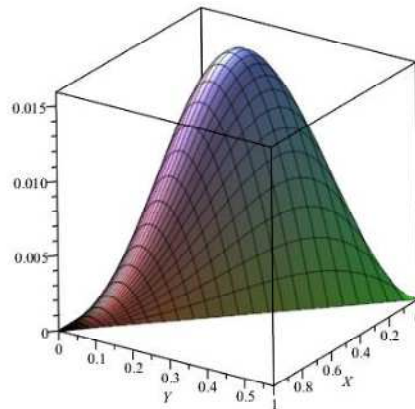
(15)

> U := k → sum('c(j) · f[j]', j=1..k);

$$U := k \rightarrow \sum_{j=1}^k c(j) f_j$$

(16)

> plot3d(U(k), X=0..1, Y=0..b - $\frac{b}{a}$ · X)



> Um := $\frac{1}{Area} \cdot \text{int}(\text{int}(U(k) \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X), X=0..1)$;

$$Um := 0.00680559$$

(17)

> # VELOCIDADE ADIMENSIONAL

> W := unapply($\frac{U(k)}{Um}$, X, Y);

> W(X, Y)

$$163.305 Y X (1 - 1.73205 Y - X) - 148.457 Y X^2 (1 - 1.73205 Y - X) - 51.4276 Y^2 X (1 - 1.73205 Y - X)$$

(18)

> Maximize(W(X, Y), X=0..1, Y=0..1);

$$[0., [X=0., Y=0.]]$$

(19)

> #####

> # FATOR DE ATRITO

$$fRe := \frac{\left(\frac{dh}{a}\right)^2}{2 \cdot Um};$$

$$fRe := 13.1242$$

(20)

> #####

> ##### Matriz E #####

> ei := i → $\frac{1}{Area} \cdot \text{int}(\text{int}(\frac{U(k)}{Um} \cdot f[i] \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X), X=0..1)$;

$$ei := i \rightarrow \frac{\int_0^1 \int_0^{b - \frac{bX}{a}} \frac{U(k) f_i a^2}{Um} dY dX}{Area}$$

(21)

> ##### Matriz E #####

> ei := i → $\frac{1}{Area} \cdot \text{int}(\text{int}(\frac{U(k)}{Um} \cdot f[i] \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X), X=0..1)$;

$$ei := i \rightarrow \frac{\int_0^1 \int_0^{b - \frac{bX}{a}} \frac{U(k) f_i a^2}{Um} dY dX}{Area}$$

(21)

> $E := \text{Matrix}(k, 1, ei);$

$$E := \begin{bmatrix} -0.0137462 \\ -0.00418933 \\ -0.00272115 \end{bmatrix} \quad (22)$$

> ##### MATRIZ Di #####

> $Di := A^{-1}E$

$$Di := \begin{bmatrix} 1.86794911693196 \\ -2.10298401664623 \\ -0.613814747270572 \end{bmatrix} \quad (23)$$

> $di := j \rightarrow \text{evalf}(Di[j, 1]);$

$$di := j \rightarrow \text{evalf}(Di_{j,1}) \quad (24)$$

> ##### PERFIL DE TEMPERATURA

> $T := k \rightarrow \text{sum}('di(j) \cdot f[j]', j=1..k);$

$$T := k \rightarrow \sum_{j=1}^k 'di(j) f_j' \quad (25)$$

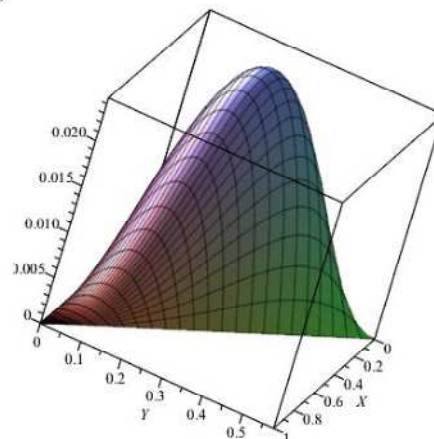
> $T(k)$

$$1.86795 Y X (1 - 1.73205 Y - X) - 2.10298 Y X^2 (1 - 1.73205 Y - X) - 0.613815 Y^2 X (1 - 1.73205 Y - X) \quad (26)$$

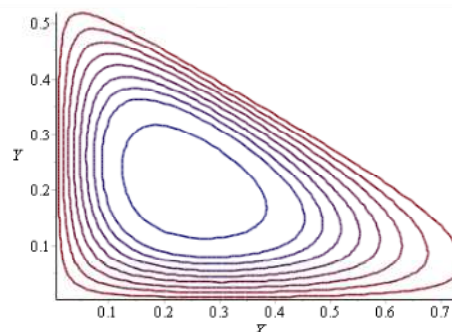
> $Tm := \frac{1}{\text{Area}} \int \int (W(X, Y) \cdot T(k) \cdot a^2, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X, X=0..1)$

$$Tm := 0.0151969 \quad (27)$$

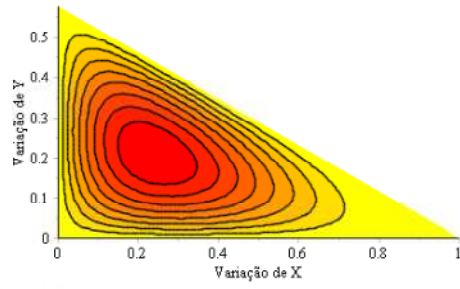
> $\text{plot3d}(T(k), X=0..1, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X)$



> $\text{contourplot}(T(k), X=0..1, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X, \text{contours} = [0.002, 0.004, 0.006, 0.008, 0.010, 0.012, 0.014, 0.016, 0.020], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED})$



> $\text{contourplot}(T(k), X=0..1, Y=0..b - \frac{b}{a} \cdot X, \text{title} = "", \text{titlefont} = [\text{Times}, \text{ITALIC}, 15], \text{labeldirections} = [\text{horizontal}, \text{vertical}], \text{labels} = ["\text{Variação de X}", "\text{Variação de Y}"], \text{filled} = \text{true}, \text{coloring} = [\text{yellow}, \text{red}], \text{scaling} = \text{CONSTRAINED});$



```

> ##### NÚMERO DE NUSSELT #####
>
> 
$$N_{HI} := \frac{\left(\frac{dh}{a}\right)^2}{4 \cdot Tm}$$

>
> 
$$N_{HI} := 2.93868$$
 (28)
> #####
> #####
> # FATOR DE ATRICO E NÚMERO DE NUSSELT EM HI
> [fRe, N_HI];
>
> 
$$[13.1242, 2.93868]$$
 (29)

```