



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

GERINALDO DA SILVA

**UMA APLICAÇÃO DOS FORMALISMOS DE LAGRANGE, HAMILTON E
HAMILTON-JACOBI DA MECÂNICA CLÁSSICA**

CAMPINA GRANDE-PB
2018

GERINALDO DA SILVA

**UMA APLICAÇÃO DOS FORMALISMOS DE LAGRANGE, HAMILTON E
HAMILTON-JACOBI DA MECÂNICA CLÁSSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Graduação
Licenciatura em Física da Universidade
Estadual da Paraíba, em cumprimento à
exigência para obtenção do Grau de
Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly
da Silva

CAMPINA GRANDE-PB
2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586a Silva, Gerinaldo da.
Uma aplicação dos formalismos de Lagrange, Hamilton, Hamilton-Jacobi da mecânica clássica [manuscrito] / Gerinaldo da Silva. - 2018.
25 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva , Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Mecânica clássica. 2. Formalismo Lagrangiano. 3. Princípio de Hamilton. 4. Formalismo de Hamilton-Jacobi.

21. ed. CDD 531

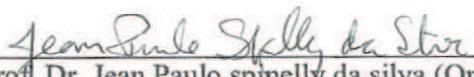
GERINALDO DA SILVA

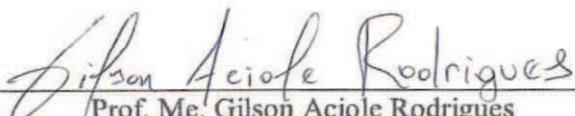
**APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI DA
MECÂNICA CLÁSSICA**

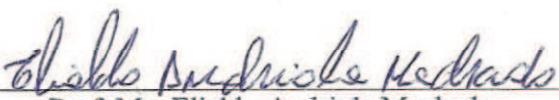
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso em Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Aprovada em: 25 / 06 / 2018

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Jean Paulo spinelly da silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Prof. Me. Gilson Aciole Rodrigues
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Prof. Me. Elialdo Andriola Machado
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meu pais, pela dedicação, companheirismo
e amizade, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por nunca ter me abandonado, por me fortalecer na caminhada, não me deixando fraquejar, dando sabedoria e discernimento, sendo meu refúgio e fortaleza, nas minhas dificuldades e sendo fonte de vida para meu ser.

Agradeço ao meu orientador Prof.Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva pela dedicação e empenho para que esse momento acontecesse, pela paciência, por sua imensa contribuição para que eu alcançasse meu sonho. Fica aqui minha imensa admiração pelo profissional que você é e pelo seu compromisso com a educação e um amigo que ganhei.

Muito obrigado! A minha família como um todo, em especial minha mãe-avó **Alice Moraes** que com muito sacrifício sempre me apoiou nos momentos difíceis da minha caminhada, também a **Oswaldo Moraes de Lima** e **Maria do Socorro Lima** que me acolheram sempre em sua casa em todos esses momentos de formação.

A minha família **EJC** pela compreensão e apoio que sempre me deram me encorajando sempre na caminhada, em especial a memória da nossa irmã em cristo, **Isadora Gouveia**, que partiu para junto de Deus, mas que contribui muito com seu sorriso e amizade. **Esperança Cristo** sempre.

Aos meus amigos e colegas de graduação que sempre levarei no coração, magna Cely Cardoso de lima, Jacqueline silva Alcântara, Janaina Guedes, Ronaldo Andrade, Almir Dantas, Ângelo Fernandes, Jaqueline Salviano, Romário santos, Renato ferreira Ordonho, Rafael oliveira, marciانا Cavalcante, Ravelle santos, Marcelo Gomes dos Santos, Filipe Barreto, Wesley Balbino Barros, Emanuel wallison de oliveira costa, Daniely Maria oliveira mota, Lineker Matheus, Samira arruda Vicente, Naara karoline de lima Gomes,

Agradeço ao departamento de Física da UEPB, e todos os professores, em especial ao professor **Edvaldo de Oliveira Alves**, e todos que sempre se empenharam

para a formação de futuros mestres da educação. Enfim agradeço pelo vários amigos que aqui não citei, mas que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Ao secretario de departamento de Física, Sr. João Severino da silva, pela imensa contribuição, seja com sua amizade, conselhos, sinceridade, respeito e dedicação para servir da melhor forma possível. Muito obrigado seu João!

Muito obrigado a todos!

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	FORMALISMO LAGRANGIANO.....	9
2.1	COORDENADAS GENERALIZADAS E VÍNCULO.....	9
2.2	PRINCÍPIO DE HAMILTON.....	10
2.3	LEIS DE CONSERVAÇÃO.....	13
3	TRANSFORMAÇÕES DE LEGENDRE E AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE HAMILTON.....	15
4	FORMALISMO DE HAMILTON – JACOBI.....	16
4.1	TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS.....	17
4.2	EQUAÇÕES DE HAMILTON – JACOBI.....	19
5	OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES	20
5.1	SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO DE LAGRANGE.....	20
5.2	SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO DE HAMILTON.....	21
5.3	SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO HAMILTON-JACOBI...	22
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	23
7	REFERÊNCIAS.....	25

RESUMO

Neste trabalho abordaremos o formalismo Lagrangiano na mecânica clássica e suas particularidades. Trataremos com conceitos mais específicos para cada tipo de problema que venha a surgir e que se torne mais simples possível, e especificando pontos importantes tais como; suas coordenadas, vínculos e o grau de liberdade de cada sistema. Mostraremos como as partículas se comportam em um dado sistema e suas representações matemáticas; o princípio de Hamilton e suas formulações, e como será abordado de um modo diferente o conceito de forças conservativas, com algumas demonstrações matemáticas utilizando conceitos da mecânica clássica. Utilizaremos do formalismo de Hamilton-jacobi como também das transformadas de Legendre para descrever o comportamento das partículas em um referido sistema de coordenadas, mostrando caminhos diferentes da temática a fim de especificar que é possível abordar conceitos diferentes porém que convergem para resultados iguais, desde que se mantenha a fidelidade aos preceitos. Por último, algumas aplicações dos conteúdos vistos neste referido trabalho.

Palavras- chaves: mecânica clássica. Formalismo. Conservação.

1 INTRODUÇÃO

Como sabemos os fatores históricos apontam que a mecânica clássica foi um dos primeiros, se não o primeiro aspecto da física a ser desenvolvido como uma ciência exata. Desde o século III a.C, já se tinha algumas aplicações e que já era do conhecimento de alguns cientistas gregos. Tal desenvolvimento da física clássica teve início com Galileu e Newton (SYMON,1996).

Com o desenvolvimento das leis da mecânica clássica, onde Isaac Newton com a formulação destas leis e James Clerk Maxwell nas leis da eletrostática e magnética, são praticamente as duas teorias que conduzem a Física clássica. Com a formulação de outras teorias, tais como a relatividade, com Einstein, em 1905, e a física quântica, em 1925-1926, com Heisenberg e Schroedinger, onde eles a reformularam em termos de novos conceitos, abordando pontos em que a mesma não abordava (SYMON, 1996).

A posterior à física moderna que utilizou dessas leis e da eletrodinâmica como ponto de partida para a formulação da física relativista e quântica. A mecânica clássica e relativística concorda para os mesmos resultados quando se tem condições de vínculos para a velocidade, sendo a velocidade próxima à da luz, massas e distâncias muito grande. Esse formalismo se limita quando o problema é tratado a sistemas moleculares, e para os casos em que o sistema trata com corpos relativamente grandes, a teoria pode ser utilizada (SYMON, 1996).

Na grande maioria das vezes os problemas são resolvidos pela formulação newtoniana. Entretanto podemos formular as leis da mecânica clássica de outro modo utilizando as equações de Lagrange e Hamilton, que também são derivadas do formalismo newtoniano, mas que expressam os mesmos resultados e conserva a mesma. Essas duas últimas formulações citadas tem um formalismo mais complexo, porém aproxima ao máximo a relação clássica com a relativística e a quântica, sendo possível fazer as modificações necessárias para chegar a teorias mais avançadas (NETO, 2004).

A mecânica lagrangiana partiu do princípio de mínima ação, que é conhecido como princípio de Hamilton, que descreve a evolução do sistema de uma configuração inicial para outra configuração tal que a ação seja mínima. Para trabalharmos com esses conceitos, precisamos conhecer algumas considerações, tais como: coordenadas generalizadas q_i que definam as coordenadas das partículas no espaço e que são independentes (MOLINA, 2011). O grau de liberdade da partícula especifica o número requerido de coordenadas generalizadas, e suas condições de vínculos. A mecânica hamiltoniana é outra forma de representar a

mecânica clássica, onde a variação temporal é dada pela equação de Hamilton, que são equações diferenciais que conduzem ao formalismo lagrangiano, ou seja, a hamiltoniana é equivalente à formulação de Lagrange, e que a mesma leva ao formalismo newtoniano. Partindo da hamiltoniana, podemos chegar à equação de Hamilton-Jacobi. Ela é obtida através de uma mudança de variáveis que mantenha o aspecto físico. Essa transformação denominada de canônica leva a equação hamiltoniana a uma condição de mínimo, deixando assim a integração mais simples para as equações de movimento. Neste trabalho abordaremos cada formalismo de forma contínua e que leva ao leitor uma compreensão da interação de cada formalismo, desde a formulação newtoniana até a equação de Hamilton-Jacobi e suas aplicações (MAIA, 2013).

2 FORMALISMO LAGRANGIANO

Nesta seção, vamos introduzir e discutir a formulação lagrangiana, a qual abrange diversos ramos da física. Entretanto, primeiro precisamos compreender alguns conceitos, tais como: graus de liberdade, vínculos e coordenadas generalizadas.

2.1 COORDENADAS GENERALIZADAS E VÍNCULOS

A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta num conjunto de equações de movimento em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema e se descrever o movimento do sistema. Por exemplo, no problema do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central é mais conveniente introduzir coordenadas polares (r, θ) na descrição do movimento da partícula no plano. O motivo dessa escolha é que, neste caso, pode-se expressar a força em coordenadas polares de maneira mais simples.

Os sistemas de coordenadas como acima descrito, juntamente com o sistema de coordenadas cartesianas, serão englobados sob o nome de coordenadas generalizadas.

A configuração de um sistema de N partículas pode ser especificada pelas $3N$ coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$, de suas partículas, ou por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} . As coordenadas generalizadas serão funções

das coordenadas cartesianas e, possivelmente, também do tempo no caso de um sistema de coordenadas em movimento, ou seja,

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \\ &\vdots \\ q_{3N} &= q_{3N}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Como as coordenadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} especificam a configuração do sistema, deve ser possível expressar as coordenadas cartesianas em termos das generalizadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \dots, q_{3N}) \\ y_1 &= y_1(q_1, \dots, q_{3N}) \\ &\vdots \\ x_N &= z_N(q_1, \dots, q_{3N}). \end{aligned} \quad (2)$$

Caso as equações (1) sejam conhecidas, pode-se obter $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$, para determinar as equações (2) e vice-versa.

Os vínculos são as condições entre as partículas que estão em observação. Um corpo rígido é um exemplo de sistema que possui vínculos. Neste caso, os vínculos nos movimentos das partículas fazem com que a distância entre elas seja constante. Outro exemplo de sistema que apresenta vínculos é o gás de moléculas contido em um recipiente. Neste caso, as moléculas são vinculadas pelas paredes para se moverem apenas dentro do recipiente.

Se as condições de vínculos puderem ser expressas através de equações que envolvem as coordenadas das partículas, ou seja,

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad (3)$$

Os vínculos são denominados holônomos. Vínculos que não são expressos desta maneira são chamados de não-holônomos.

Um sistema de N partículas, livre de vínculos, tem $3N$ coordenadas independentes ou $3N$ graus de liberdade. Se existirem vínculos, expressados em k equações na forma (3), estas equações podem ser usadas para eliminar k das $3N$ coordenadas independentes, diminuindo os graus de liberdade para $(3N - k)$. Esta eliminação pode ser expressa de outra maneira, pela introdução de novas, $(3N - k)$ variáveis independentes $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ (SYMON, 1996).

2.2 PRINCÍPIO DE HAMILTON

Seja certo sistema sujeito a vínculos holônomos e caracterizado por n coordenadas independentes.

A configuração do sistema num certo instante t_1 é dada pelos valores das n coordenadas generalizadas e das n velocidades generalizadas, \dot{q}_i . Conforme o tempo vai passando, o sistema vai evoluindo e, conseqüentemente, a configuração vai mudando. No instante t_2 , a configuração será provavelmente outra. A evolução do sistema será descrita pelo princípio de Hamilton, como veremos adiante.

Caracterizemos o sistema por certa função

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (4)$$

ou

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t). \quad (5)$$

Esta função(5) é denominada lagrangiana do sistema e o funcional

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (6)$$

É chamado de ação.

O princípio de Hamilton estabelece o seguinte: *A evolução de sistema da configuração 1 para a configuração 2 é tal que a ação é um mínimo.*

Usando a técnica do cálculo variacional (NETO, 2004), temos que:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt. \quad (7)$$

Mas, levando em conta que a variação e a diferenciação são operações independentes, isto é, $\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$, integrando por partes e usando o fato que não há variação nos instantes inicial e final, ou seja, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, reduzimos a equação (7) à forma

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt. \quad (8)$$

Assim, aplicando a condição de extremo, $\delta S = 0$, e utilizando o *Lema Fundamental do Cálculo das Variações* (LEMOS, 2004), chegamos à

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange, a qual é à base do formalismo lagrangiano. Ela nos informa a evolução temporal do sistema. Entretanto para utilizarmos a equação de Euler-Lagrange é necessário conhecer a lagrangiana do sistema. Na mecânica clássica a lagrangiana é

$$L = T - V, \quad (10)$$

onde, T e V são as energias cinéticas e de energia potencial do sistema, respectivamente. Desta forma a equação de Euler-Lagrange, equivale à segunda lei de Newton.

Para comprovar esta afirmação, consideremos uma partícula que se move em uma região onde há um potencial de interação $V(\vec{r})$. Neste caso, temos:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(\vec{r}). \quad (11)$$

Assim, escolhendo as coordenadas generalizadas como sendo as coordenadas cartesianas, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial L}{\partial q_3} = \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (12)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} \text{ e } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}. \quad (13)$$

Daí, a equação de Euler-Lagrange resultará em

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \text{ e } m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (14)$$

que é a *segunda Lei de Newton* para forças conservativas.

É possível deduzirmos as equações de movimento no caso especial em que o sistema é descrito por n coordenadas generalizadas e está sujeito a p vínculos não-holônomos descritos pelas equações diferenciais

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p, \quad (15)$$

cujos coeficientes a_{lk} e a_{lt} são funções somente de q_1, q_2, \dots, q_n e t . De fato, aplicando o princípio da Hamiltoniana esta situação, encontramos as seguintes equações:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{l=1}^p \lambda_l a_{lk}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

onde λ_l são os chamados multiplicadores de Lagrange. As n equações (16) e as p equações de vínculo constituem um conjunto de $(n + p)$ equações para $(n + p)$ incógnitas, e permitem a determinação unívoca do movimento do sistema.

Vale salientar que, apesar da forma aparentemente restrita, os vínculos do tipo (15) abrangem quase todos os casos de vínculos não-holônomos de interesse físico.

2.3 LEIS DE CONSERVAÇÃO

Através da equação de Euler-Lagrange ainda podemos obter leis de conservação. Realmente, aplicando a equação de Euler-Lagrange a uma coordenada cíclica q_i , ou seja, àquela que não aparece na lagrangiana, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (17)$$

Isto implica que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (18)$$

Logo podemos deduzir que

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (19)$$

é constante. Este resultado é importante, pois mostra que, sob certas condições, a quantidade p_i , denominada momento canônico conjugado à variável q_i ou apenas momento canônico, se conserva. Quando q_i tiver dimensão de comprimento, p_i será o momento linear e, quando possuir dimensão de ângulo, será o momento angular. Desse modo, entendemos que a conservação do momento, seja ele linear ou angular, está associada a existência de uma variável cíclica.

Outra lei de conservação é obtida a partir da derivada da Lagrangiana em relação ao tempo. Derivando L com relação ao tempo e usando a equação de Euler-Lagrange, chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (20)$$

E, utilizando as equações (9) e (19), podemos reescrevê-la como

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (21)$$

Se considerarmos que a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, temos que $\partial L / \partial t = 0$ e, conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = 0 \quad (22)$$

Isso significa que a quantidade

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (23)$$

denominada Hamiltoniana, se conserva. Além disso, na situação em V depende apenas das coordenadas generalizadas, a hamiltoniana é a energia mecânica do sistema.

Para entendermos esse último aspecto, lembremos que a energia cinética de um sistema de partículas, em coordenadas cartesianas e esféricas, é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) \quad (24)$$

e

$$T = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_a^2 \dot{\theta}_a^2 + r_a^2 \sin^2 \theta_a \dot{\phi}_a^2), \quad (25)$$

onde o índice a refere-se ao número de partículas envolvidas no sistema.

Como podemos observar, na equação (24) aparecem apenas às coordenadas de velocidades, enquanto que na energia cinética em coordenadas esférica, além das velocidades também estão presentes as coordenadas generalizadas. Na verdade, de um modo geral, a energia cinética é quadrática nas velocidades generalizadas. Sendo assim, podemos escrevê-la como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (26)$$

em que os índices i e j estão relacionados como número de coordenadas generalizadas do sistema em análise.

Considerando a equação (19), podemos reescrever (23) da seguinte maneira:

$$H = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (27)$$

Logo, levando em conta que $V = V(q)$, isto é, que $\partial L / \partial \dot{q}_k = \partial T / \partial \dot{q}_k$, e usando (26), obtemos

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \right] - L. \quad (28)$$

Mas,

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \right] = 2T. \quad (29)$$

Assim, substituindo (29) em (28) e utilizando (10), vemos que, no caso em que a energia potencial é função apenas das coordenadas generalizadas, a hamiltoniana é a energia do sistema, ou seja,

$$H = T + V. \quad (30)$$

3 TRANSFORMAÇÕES DE LEGENDRE E AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE HAMILTON

Nesta seção apresentamos o desenvolvimento formal da mecânica de uma maneira alternativa conhecida como formulação de Hamilton. Nenhuma condição física será acrescentada. Simplesmente mostraremos outro método para trabalhar com conceitos físicos já estabelecidos. Na verdade, o formalismo de Hamilton é construído a partir do de Lagrange.

Na formulação lagrangiana utilizamos as variáveis q_i , \dot{q}_i e t para descrevermos o movimento do sistema. No formalismo hamiltoniano, descreveremos as funções da mecânica, e por consequência, o comportamento do sistema, em termos das variáveis q_i , p_i e t , sendo p_i o momento generalizado, dado pela equação (19).

Sendo assim, do ponto de vista matemático, a transição da formulação de Lagrange para a de Hamilton corresponde a mudar as variáveis das funções da mecânica de (q_i, \dot{q}_i, t) para (q_i, p_i, t) . Esta mudança será feita pela transformação de Legendre (NETO, 2004).

Considere uma função de apenas duas variáveis $f(x, y)$, então:

$$df = udx + vdy. \quad (31)$$

onde

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad e \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (32)$$

Desejamos mudar a base de descrição de (x, y) para um novo conjunto de variáveis (u, y) tal que as quantidades diferenciais sejam expressas em termos de du e dy . Seja g uma função de u e y definida pela equação

$$g = f - ux. \quad (33)$$

A diferencial é

$$dg = df - udx - xdu, \quad (34)$$

ou de (32),

$$dg = vdy - xdu, \quad (35)$$

a qual é a forma desejada. Daí, segue que as quantidades x e v são agora funções de u e y , dadas por

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}. \quad (36)$$

Uma transformada desse tipo é chamada de transformação de Legendre.

De acordo com as equações (33) e (36), podemos concluir que a expressão (23) representa a transformação de (q_i, \dot{q}_i, t) para (q_i, p_i, t) . Contudo, essa transformada difere do tipo considerado em (33) apenas por sinal. Na verdade, ao invés da lagrangiana trataremos com uma função definida, em analogia a (33), a menos de um sinal. Desse modo,

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (37)$$

Por outro lado, diferenciando H , dado por (23), e usando a equação (19), chegamos à:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (38)$$

Mas, da equação de Lagrange e da definição (19), encontramos:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (39)$$

Logo, comparando as equações (37) e (39), obtemos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

e

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (41)$$

As equações (40) são conhecidas como as equações canônicas de Hamilton. Elas constituem um conjunto de $2n$ equações do movimento de primeira ordem. Desse modo, podemos substituir as n equações de Lagrange, que são de segunda ordem, por estas $2n$ equações (SYMON, 1996).

4 FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI

Nesta seção, deduziremos a equação de Hamilton-Jacobi. Antes, porém, faremos uma abordagem sobre as transformações canônicas.

4.1 TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

As equações de Lagrange permanecem as mesmas sob uma transformação geral de coordenadas, isto é, mantêm a forma independente das coordenadas generalizadas escolhidas. Na formulação hamiltoniana, as coordenadas e momentos são variáveis independentes, o que nos possibilita a considerar mudanças de variáveis no *espaço de fase* que preservem a forma das equações de Hamilton, denominadas transformações canônicas. Naturalmente, essa liberdade de escolha nos permite escolher as variáveis que simplifiquem a hamiltoniana e, por consequência, facilitem a resolução das equações de movimento (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; LEMOS, 2004).

Do ponto de vista formal, dadas as variáveis canônicas (q, p) , a hamiltoniana $H(q, p, t)$ e as equações de Hamilton, dadas por (41), estamos interessados na transformação invertível

$$Q_i = Q_i(q, p, t) \text{ e } P_i = P_i(q, p, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (42)$$

desde que possamos encontrar uma função $K(Q, P, t)$ tal que as equações de movimento, nessas novas variáveis, tenham a forma das de Hamilton, isto é,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \text{ e } \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

A validade simultânea dessas equações implica que os princípios variacionais,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right\} dt = 0 \quad (44)$$

e

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t) \right\} dt = 0, \quad (45)$$

sejam satisfeitos simultaneamente. Uma condição suficiente para que isto aconteça é que os integrandos das equações (44) e (45) devem diferir apenas por uma derivada total em relação ao tempo de uma função $\Phi(q, p, t)$ (LEMOS, 2004; NETO, 2004). Impondo tal condição, chegamos à:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \left[\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right] = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (46)$$

ou ainda,

$$d\Phi = \sum_i (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H) dt. \quad (47)$$

A expressão acima indica que a transformação (43) é dita canônica se e somente se existir uma função Φ que a satisfaça.

A forma da equação (47) sugere que Φ depende das coordenadas antigas e novas (q_i, Q_i) e do tempo, ao invés de q_i, p_i , e t , conforme tínhamos assumido inicialmente. Embora isso pareça uma inconsistência, devemos observar que podemos resolver as n primeiras equações (42), para escrevermos os momentos p_i em termos de (q_i, Q_i, t) , e usar as outras n equações, para expressarmos os momentos transformados, P_i , em termos de (q_i, Q_i, t) . Em outras palavras, podemos utilizar as equações (42) para tomarmos (q_i, Q_i) como um conjunto de $2n$ variáveis independentes.

Levando isso em conta, definimos a função geradora $F_1(q, Q, t)$ por

$$F_1(q, Q, t) = \Phi(q, p(q, Q, t), t). \quad (48)$$

Diferenciando (48) e comparando o resultado com a equação (47), encontramos:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (49)$$

e

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (50)$$

Podemos notar que, para uma determinada função $F_1(q, Q, t)$, as transformadas canônicas que ficam definidas pelas equações (49), com a hamiltoniana transformada dada por (50). Realmente, se invertemos essas n primeiras equações, somos levados a $Q_i = Q_i(q, p, t)$, Em seguida, substituindo este resultado no lado direito das últimas n , chegamos a $P_i = P_i(q, p, t)$. Seguindo este procedimento, efetuamos a mudança $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ a qual é canônica por construção.

Em algumas situações é inconveniente ou, até mesmo, impossível tomarmos (q_i, Q_i) como variáveis independentes. Porém, caso seja possível escolhermos (q_i, P_i) como um conjunto de $2n$ variáveis independentes, haverá uma função geradora $F_2(q, P, t)$. Definindo tal função por

$$F_2 = \sum_i P_i Q_i + F_1, \quad (51)$$

e usando (47), segue que:

$$dF_2 = \sum_i (p_i dq_i + Q_i dP_i) + (K - H) dt. \quad (52)$$

Conseqüentemente,

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (53)$$

e

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (54)$$

Assim como na situação anterior, dada uma função $F_2(q, P, t)$, devemos usar as n primeiras equações (53) para encontrarmos $P_i = P_i(q, p, t)$ e substituir o resultado no lado direito das outras n , para obtermos $Q_i = Q_i(q, p, t)$. Este procedimento nos leva a uma transformação canônica, na qual a hamiltoniana original, H , e a transformada, K , estão relacionadas por (54).

4.2 EQUAÇÕES DE HAMILTON-JACOBI

Dado um sistema mecânico descrito pelas variáveis canônicas (q_i, p_i) e pela Hamiltoniana $H(q, p, t)$, procuramos uma transformação canônica utilizando uma função geradora $S(q, P, t)$. Vamos admitir que S possa ser escolhida de tal forma que a hamiltoniana transformada, $K(Q, P, t)$, seja nula. Fazendo isso, as equações de Hamilton [Eqs. (43)] tornam-se:

$$\dot{Q}_i = 0 \Rightarrow Q_i = \beta_i \quad \text{e} \quad \dot{P}_i = 0 \Rightarrow P_i = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (55)$$

onde α_i e β_i são constantes. Além disso, utilizando a primeira das equações de transformações

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (56)$$

chegamos

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (57)$$

Esta equação diferencial, conhecida como equação de Hamilton-Jacobi, é de primeira ordem nas $n + 1$ variáveis independentes q_1, \dots, q_n, t . Ao resolvê-la, encontraremos a função $S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$, que será utilizada nas n primeiras equações (58) para obtermos $\alpha_i = \alpha_i(q, p, t)$. Na sequência, substituiremos as constantes α_i nas n últimas equações, para determinarmos $\beta_i = \beta_i(q, p, t)$. Finalmente, de posse desses resultados, podemos invertê-los para encontrarmos

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t) \quad \text{e} \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (58)$$

Estas duas últimas equações representam a solução geral das equações de Hamilton originais, envolvendo $2n$ constantes de integração cujos valores são determinados a partir das condições iniciais (LEMOS, 2004).

5 OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

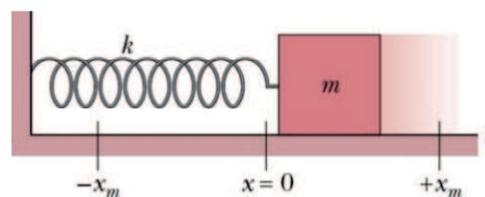
Todas as situações em que partículas descrevem um movimento oscilatório são provocadas por forças restauradoras. De fato, em tais movimentos, quando deslocamos a partícula da posição de equilíbrio (estável), surge uma força restauradora tentando trazê-la para sua posição original. Em geral, essas forças são funções complicadas da posição, velocidade e, até mesmo, das derivadas de ordem superior da posição da partícula. Contudo, em alguns casos como, por exemplo, o pêndulo simples (para pequenas amplitudes) e o sistema massa-mola, a força é uma função simples da posição, tornando a análise bastante simplificada.

Nesta seção, com o intuito de aplicar os formalismos abordados, resolveremos o problema do sistema massa-mola de acordo com as formulações de Lagrange, Hamilton e Hamilton-Jacobi.

5.1 SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO DE LAGRANGE

O sistema-massa mola é constituído por um bloco de massa m que se move, ao longo do eixo x , sob ação de uma força $\vec{F} = -kx\hat{x}$ exercida por uma mola de constante elástica k , conforme mostra a figura.

Fig. 1: sistema massa-mola no formalismo de Lagrange



Fonte: Halliday-Resnick

Admitindo que a energia potencial é nula na posição de equilíbrio ($x_s = 0$), temos que

$$V(x) = \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (59)$$

Desse modo, a lagrangiana do sistema torna-se

$$L = T - V(x) \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (60)$$

Então, escolhendo a coordenada generalizada como $q_1 = x$, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}. \quad (61)$$

Logo, substituindo estes resultados em (9), chegamos à:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0. \quad (62)$$

Esta é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes, cuja solução é dada por (BOAS, 2006; ARFKEN e WEBER, 2007)

$$x(t) = c_1 \exp(i\omega t) + c_2 \exp(-i\omega t), \quad (62)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$, sendo c_1 e c_2 constantes de integração. Como $x(t)$ é uma função real, temos que $c_2 = c_1^*$, isto é,

$$c_1 = \frac{A}{2} \exp(i\theta) \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{A}{2} \exp(-i\theta). \quad (63)$$

Com isso, podemos escrever (62) da seguinte forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta). \quad (64)$$

Nesta equação, as constantes A e ω representam a amplitude e a frequência angular do oscilador, respectivamente. Naturalmente, as constantes A e θ devem ser determinadas a partir das condições iniciais.

5.2 SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO DE HAMILTON

De acordo com a equação (23) e (60), a hamiltoniana do sistema massa-mola é

$$H = p_1 \dot{q}_1 - L \Rightarrow H = p_x \dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (65)$$

Mas, conforme discutimos na seção 3, a hamiltoniana deve ser escrita como uma função de p_x e x . Sendo assim, devemos utilizar a equação (19) para expressarmos \dot{x} em função de p_x . Fazendo isso, encontramos:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad (66)$$

e, como consequência,

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (67)$$

que é a energia mecânica do sistema. Na verdade, uma vez que a lagrangiana não depende explicitamente do tempo e que a energia potencial é uma função apenas da coordenada generalizada, já esperávamos que a hamiltoniana representasse a energia mecânica.

Usando (67) na equação de Hamilton que envolve a derivada da hamiltoniana com relação a coordenada generalizada, obtemos:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \Rightarrow \dot{p}_x = -kx. \quad (68)$$

Logo, substituindo (66) em (68), chegamos a mesma equação que foi obtida a partir do formalismo Lagrangiano, isto é,

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (69)$$

cuja solução é dada pela equação (64).

5.3 SISTEMA MASSA-MOLA NO FORMALISMO DE HAMILTON-JACOBI

Usando o fato que a hamiltoniana do sistema massa-mola é dada por (67) e levando em conta que só existe uma coordenada generalizada $q_1 = x$, a equação de Hamilton-Jacobi torna-se

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (70)$$

Uma integral completa desta equação pode ser obtida por separação de variáveis na forma de soma,

$$S = W(x) + T(t). \quad (71)$$

De fato, substituindo (71) em (70), obtemos

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = -\frac{dT}{dt}. \quad (72)$$

O lado esquerdo depende apenas de x , enquanto o lado direito é função somente do tempo. Logo, para que a igualdade seja satisfeita, ambos os lados devem ser iguais a uma constante de separação, que denotaremos por α . Seguindo este procedimento, encontramos:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \alpha \quad (73)$$

e

$$-\frac{dT}{dt} = \alpha. \quad (74)$$

Das equações acima, segue que:

$$W = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2x^2} dx. \quad (75)$$

e

$$T = -\alpha t. \quad (76)$$

Conseqüentemente,

$$S(x, \alpha, t) = \int \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2x^2} dx - \alpha t. \quad (77)$$

Utilizando este resultado na última das equações (56), chegamos à:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = m \int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2x^2}} dx - t. \quad (78)$$

Fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{2\alpha/m\omega^2} \operatorname{senu}$, a equação acima toma a seguinte forma:

$$\beta = \frac{1}{\omega} u - t. \quad (79)$$

Daí, concluímos que

$$x(t) = \sqrt{2\alpha/m\omega^2} \cos(\omega t + \omega\beta). \quad (80)$$

que é a solução do sistema massa-mola. Obviamente, as constantes α e β são determinadas a partir das condições iniciais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho pudemos observar de um modo diferente as leis da mecânica clássica que é explicada pelos princípios de Newton através do ponto de vista lagrangiano e hamiltoniano. E mostramos que a conservação prevalece desde que obedeça aos princípios mecânicos. Quando utilizamos os princípios do cálculo variacional, e através da lagrangiana, chegamos à conhecida equação de Euler-Lagrange, aonde encontramos à segunda lei de Newton para forças conservativas, isto levando em conta o princípio de Hamilton e suas condições de vínculos. Portanto, chegamos a um denominador comum, em que são linguagens diferentes, mas que preserva a essência do problema, e garante a conservação dos

vínculos estabelecida. Por fim, todos esses problemas para mostrar de forma alternativa e matematicamente demonstrativa que o formalismo pode variar, de modo que se garanta a integridade das leis da natureza. Como podemos ver neste trabalho, duas aplicações do formalismo exposto, foram feitas tanto para partículas livres quanto para oscilador, e ambos os problemas obedeceram aos princípios estabelecidos.

ABSTRACT

In this work we will address the lagrangian formalism in classical mechanics and its particularities. We will deal with more specific concepts for each type of problem that may arise and that becomes as simple as possible, and specifying important points such as; their coordinates, links and the degree of freedom of each system. We will show how particles behave in a given system and its mathematical representations; the Hamilton principle and its formulations, and how the concept of conservative forces will be approached differently, with some mathematical demonstrations using concepts of classical mechanics. We will use Hamilton-Jacobi's formalism as well as Legendre's transformations to describe the behavior of particles in a given coordinate system, and we will outline other paths within the theme to show that it is possible to approach different concepts because they diverge for equal results, provided that fidelity to the precepts is maintained. Finally, some applications of the contents seen in this work.

Keywords: classical mechanics, formalism, conservation.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARFKEN, G.; WEBER H.J. **Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. Rio de Janeiro: Ed. Campus/Elsevier, 2007.

BOAS, M. L. **Mathematical Methods in the physical sciences**. New York: John Wiley and Sons, 2006.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Mecânica**. São Paulo: HEMUS – Livraria Editora Ltda, 1974.

LEMOS N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2004.

LIMA, G. L. de. Problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramento. Universidade estadual de campinas – UNICAMP, 2004.

MAIA,N.T. **Estudo sobre a teoria de vínculos de Hamilton-Jacobi**. Instituto de física teórica, universidade estadual paulista, março de 2013.

MARION, J. B; THORNTON, S. T. **Classical dynamics of particles and systems**. Pagina 228, Fifth edition.

MOLINA, M. C. **Formalismo canônico da mecânica clássica**. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, departamento de Física, Campus de Rio Claro, SP, 2011.

NETO. J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana Hamiltoniana**. 1.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004

SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1996.