



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

RAFAEL CAMELO DA COSTA OLIVEIRA

CORREÇÕES NO GPS DEVIDO À ROTAÇÃO DA TERRA

CAMPINA GRANDE - PB
2018

RAFAEL CAMELO DA COSTA OLIVEIRA

CORREÇÕES NO GPS DEVIDO À ROTAÇÃO DA TERRA

Artigo referente à disciplina:
Trabalho de Conclusão de Curso
(TCC), como registro de conclusão de
curso, requisito à obtenção do título
de Licenciatura Plena em Física pela
Universidade Estadual da Paraíba.
Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo
Spinelly da Silva.

CAMPINA GRANDE - PB
2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

O48c Oliveira, Rafael Camelo da Costa.
Correções no GPS devido à rotação da terra [manuscrito] :
/ Rafael Camelo da Costa Oliveira. - 2018.
25 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2018.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva ,
Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Relatividade geral. 2. Solução de Kerr. 3. Global
Position System - GPS. 4. Métrica de Kerr.

21. ed. CDD 531.11

RAFAEL CAMELO DA COSTA OLIVEIRA

CORREÇÕES NO GPS DEVIDO À ROTAÇÃO DA TERRA

Artigo referente à disciplina:
Trabalho de Conclusão de Curso
(TCC), como registro de conclusão de
curso, requisito à obtenção do título
de Licenciatura Plena em Física pela
Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovada em: 25/06/2017.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Alex da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

À minha Família.

“O impossível existe, até que alguém
duvide dele e prove o contrário.”

-Albert Einstein

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que, em todos os momentos, é o maior mestre que seguimos.

Aos meus pais e irmãos, pelo amor, incentivo e apoio incondicional durante toda a graduação.

Ao Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly pela oportunidade e apoio, não apenas na elaboração desse trabalho, mas no acompanhamento durante todo o curso, onde muito conhecimento foi compartilhado. Ao senhor, inúmeros são os agradecimentos.

À Instituição pelo ambiente criativo e amigável que proporciona, levando a diversos aprendizados, não apenas em sala de aula, mas em todo seu ambiente.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	07
2. A métrica de Kerr.....	09
2.1. Formalismo de tetradas.....	09
2.2. O algoritmo de Newman-Janis: Obtenção da métrica de Kerr.....	11
3. Propriedades da métrica de Kerr.....	15
4. O GPS.....	17
5. Efeitos da curvatura no funcionamento do GPS.....	19
6. Considerações Finais.....	21
7. Referências Bibliográficas.....	23

CORREÇÕES NO GPS DEVIDO À ROTAÇÃO DA TERRA

Rafael Camelo da Costa Oliveira¹

RESUMO

A teoria da relatividade geral fundamenta-se nos princípios da equivalência e covariância. Com base no princípio da equivalência, Einstein concluiu que a gravidade não é uma força, e sim uma modificação na métrica do espaço-tempo causada pela presença de uma massa em um dado ponto do espaço. Formalmente, a TRG assume que o campo gravitacional, associado à uma distribuição de matéria e energia, é descrito pelo tensor métrico, o qual é obtido a partir de um conjunto de equações, denominado equações de campo de Einstein. Além dos resultados imediatos da solução obtida por Roy Kerr, através dessas equações, o seu desenvolvimento permitiu que aplicações científico-tecnológicas fossem viabilizadas. Como o GPS (Global Position System), que é um dispositivo de localização que funciona a partir de uma rede de 24 satélites em uma órbita próxima da Terra. Por estarem afastados do centro da Terra, e, portanto, sofrerem menos influência da gravidade, o tempo passa mais rápido para os relógios dos satélites do que para os relógios dos receptores que estão na superfície. Além disso, eles se movem em relação aos aparelhos receptores, e isso faz com que o tempo, para eles, passe mais devagar. A diferença entre essas duas faces da relatividade faz com que exista um lapso de tempo entre o relógio dos satélites e o relógio do receptor. A nossa proposta consiste em determinar as correções que devem ser feitas no GPS devido à rotação da Terra. Para tanto, admitiremos que o espaço-tempo exterior é descrito pela métrica de Kerr.

Palavras-Chave: Relatividade Geral. Solução de Kerr. GPS.

1. INTRODUÇÃO

Em dezembro de 1915 Albert Einstein publicou a teoria da relatividade geral (TRG), que é a teoria relativística da gravitação.

A TRG tem como fundamento os princípios da equivalência e covariância. O primeiro estabelece que o campo gravitacional seja, localmente, equivalente a um referencial não-inercial. Por sua vez, o segundo impõe que as equações que descrevem a Física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Com base no princípio da equivalência, Einstein concluiu que a gravidade não é uma força, e sim uma modificação na métrica do espaço-tempo causada pela presença de uma massa em certo ponto do espaço. Como consequência, desde que nenhuma força atue sobre a partícula além da gravitação, sua trajetória será uma geodésica, isto é, o caminho mais curto entre dois pontos de um espaço-tempo curvo.

¹ Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

A relatividade geral assume que o campo gravitacional, associado à uma distribuição de matéria/energia, é descrito pelo tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual é obtido a partir de um conjunto de equações, denominado equações de campo de Einstein. (LANDAU e LIFCHITZ, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982, WALD, 1984; FERRARO, 2007).

As previsões da relatividade geral diferem significativamente das da física clássica, especialmente no que diz respeito à passagem do tempo, o movimento dos corpos em queda livre e a propagação da luz. Exemplos de tais diferenças incluem dilatação gravitacional do tempo, o desvio gravitacional para o vermelho da luz, e o tempo de atraso gravitacional. (CRAWFORD, 1994).

Um mês após a publicação da TRG, Karl Schwarzschild (1916) apresentou a primeira solução exata das equações de Einstein, através da métrica de Schwarzschild, a qual descreve a geometria exterior à uma massa esférica estacionária, isto é, sem rotação da massa. Em trabalhos independentes, Reissner (1916) e Nordström (1918) encontraram a solução exata da gravitação acoplada a uma fonte eletromagnética, conhecida como equações de Einstein-Maxwell. Esta solução ficou conhecida como solução de Reissner-Nordström. Anos mais tarde, o matemático Roy Kerr (1963) obteve a métrica que descreve o espaço-tempo ao redor de um corpo massivo em rotação. Pouco tempo depois, Ezra Newman (1965) encontrou a solução das equações de campo denominada métrica de Kerr-Newmann, que representa o campo gravitacional externo à um corpo esférico massivo, eletricamente carregado e em rotação.

Além dos resultados imediatos da teoria, com o passar do tempo muitas aplicações científico-tecnológicas foram viabilizadas. Como exemplo, podemos citar o GPS (Global Position System), que é um dispositivo de localização que funciona a partir de uma rede de 24 satélites em uma órbita próxima da Terra. Os satélites trocam sinais com um receptor que se encontra na superfície da Terra e, a partir disso, são capazes de localizá-lo. Tecnicamente, satélites de GPS são grandes relógios no espaço. Há diversos satélites na órbita que triangulam a posição do receptor. No interior dos satélites, há relógios atômicos de grande precisão que registram a hora em que um sinal é emitido para a Terra e conferem a diferença de tempo que o sinal emitido, em resposta pelo receptor, leva para chegar. Porém, por estarem afastados do centro da Terra, e, portanto, sofrerem menos influência da gravidade, o tempo passa mais rápido para os relógios dos satélites do que para os relógios dos receptores na Terra. A diferença se dá porque a Terra, com a sua massa, deforma o espaço-tempo ao seu redor. Além disso, eles se movem a 14 mil km/h, e isso faz com que o tempo para eles passe

mais devagar. A diferença entre essas duas faces da relatividade faz com que exista um lapso de tempo entre o relógio dos satélites e o relógio do receptor.

Portanto, para determinarmos o lapso temporal, devemos levar em conta a geometria do espaço-tempo em torno da Terra. Esse cálculo foi feito considerando-se que a Terra é uma esfera estática, isto é, supondo-se que a métrica exterior é a de Schwarzschild (LISBOA e CRAWFORD, 2010). Contudo, com o intuito de obtermos um resultado mais preciso, no presente trabalho admitiremos que a Terra é uma esfera que gira com uma velocidade angular constante. Neste caso, consideraremos que a métrica é aquela obtida por Roy Kerr.

2. A MÉTRICA DE KERR

Nesta seção, deduziremos a solução de Kerr. Acontece que se partíssemos diretamente para a resolução das equações de Einstein, esse seria um processo bastante longo. Então, para evitar isso, a obteremos a partir do método proposto por Newman e Janis (1965). Porém, uma vez que esse procedimento é baseado no conceito de tetradas nulas, antes de encontrarmos a referida solução faremos uma breve abordagem sobre o formalismo de tetradas.

2.1. FORMALISMO DE TETRADAS

Na Relatividade Geral, de forma padrão, usamos uma base de coordenadas curvilíneas para resolver as equações de campo. Porém, nem sempre a utilização desse sistema é vantajosa. No entanto, se projetarmos todas as quantidades relevantes numa base que corresponda a quatro campos vetoriais linearmente independentes e ortogonais, considerando que as equações serão satisfeitas nessa, isso nos favorecerá. Essa nova forma de escrever as quantidades e, conseqüentemente, as equações da TRG é chamada de *formalismo de tetradas*.

Em qualquer ponto do espaço-tempo, podemos construir uma base formada por quatro vetores covariantes:

$$e_{(a)}^\mu, \text{ com: } a = 1,2,3,4 \text{ e } \mu = 0,1,2,3, \quad (1)$$

onde as letras entre parênteses distinguem os índices de tetrada, que serão sempre representados pelas letras do alfabeto latino, e as letras gregas representam os índices de espaço-tempo. Naturalmente, definindo $e^{(a)}_\mu$ como a inversa da matriz $e_{(a)}^\mu$, temos:

$$e_{(a)}^\mu e^{(b)}_\mu = \delta^{(b)}_{(a)} e e_{(a)}^\mu e^{(a)}_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad (2)$$

Ainda como parte das definições, vamos admitir que:

$$e_a{}^\mu e_{b\mu} = g_{ab}. \quad (3)$$

onde g_{ab} é uma matriz simétrica e constante. Consequentemente, sendo $g^{(a)(b)}$ a matriz inversa de g_{ab} , segue que:

$$g^{(a)(b)} g_{bc} = \delta^{(a)}_{(c)}. \quad (4)$$

Com o auxílio das definições propostas acima, podemos escrever:

$$g_{ab} e^{(a)}_\nu = e_{b\nu} \quad e \quad g^{(a)(b)} e_{a\nu} = e^{(b)}_\nu. \quad (5)$$

Além disso, substituindo (2) na equação

$$g_{\rho\nu} g^{\rho\mu} = g^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad (6)$$

e usando (5), chegamos a:

$$g_{\mu\nu} = g^{(a)(b)} e_{a\nu} e_{b\mu}. \quad (7)$$

Analisando as equações (5) vemos que $g^{(a)(b)}$ e g_{ab} são, respectivamente, responsáveis por levantar e baixar os índices de tetradas, assim como o tensor métrico é responsável no caso dos índices de coordenadas. Também observamos que o resultado de se contrair um tensor é o mesmo, quer essa contração seja dada em relação aos índices de coordenadas ou de tetradas. Por outro lado, o resultado apresentado na equação (7), nos permite interpretar que os elementos $g^{(a)(b)}$ são os componentes do tensor métrico na base tetrada.

Considerando que a tetrada consiste em um vetor do tipo tempo (v^μ) e três vetores do tipo espaço (i^μ, j^μ e k^μ), as relações de ortonormalidade levam à:

$$g_{a(b)} = \eta_{a(b)} = \text{diag } 1, -1, -1, -1. \quad (8)$$

onde a métrica presente é a métrica de Minkowski $\eta_{a(b)}$.

Agora, tomando:

$$e_{(0)}^\mu = l^\mu = \frac{1}{2} v^\mu + i^\mu \quad e \quad e_{(1)}^\mu = n^\mu = \frac{1}{2} v^\mu - i^\mu, \quad (9)$$

vemos que esses vetores são ortogonais, ou seja,

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0, \quad (11)$$

e satisfazem a condição de normalização:

$$l^\mu n_\mu = 1, \quad (12)$$

Então, sendo $e_{(2)}^\mu = j^\mu$ e $e_{(3)}^\mu = k^\mu$, as relações de ortonormalidade (1) levam à métrica:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Finalmente, definindo um vetor nulo complexo:

$$m^\mu = \frac{1}{2} j^\mu + ik^\mu , \quad (14)$$

juntamente com o seu complexo conjugado:

$$m^\mu = \frac{1}{2} j^\mu - ik^\mu , \quad (15)$$

verificamos que os vetores são nulos, e satisfazem a condição de normalização:

$$m^\mu m_\mu = m^\mu m_\mu = 0, \quad (16)$$

$$m^\mu m_\mu = -1. \quad (17)$$

Logo, escolhendo o conjunto

$$e_{(0)}^\mu, e_{(1)}^\mu, e_{(2)}^\mu, e_{(3)}^\mu = l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^\mu , \quad (18)$$

o qual é denominado *base tetrada nula*, obtemos a seguinte métrica:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (19)$$

Assim, partindo da expressão (7) e usando as equações (18) e (19), podemos escrever $g_{\mu\nu}$ como os produtos dos vetores das tetradas nulas:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu m_\nu - m_\mu m_\nu, \quad (20)$$

Por conseguinte, a forma contravariante desta equação é:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + n^\mu l^\nu - m^\mu m^\nu - m^\mu m^\nu, \quad (21)$$

Esta expressão será de extrema importância para o complemento desse trabalho, porque será através dela que calcularemos a métrica de Kerr aplicando o método de Newman e Janis na solução encontrada por Schwarzschild.

2.2. O ALGORITMO DE NEWMAN-JANIS: OBTENÇÃO DA MÉTRICA DE KERR

Logo após Kerr ter encontrado a solução, Newman e Janis mostraram que é possível obtê-la, a partir da métrica de Schwarzschild, através da aplicação do chamado *Algoritmo de Newman-Janis* (ANJ). O ANJ, o qual é um procedimento constituído por cinco etapas, também foi utilizado para obtenção da métrica de Kerr-Newmann, a partir da métrica de Reissner-Nordström.

Nesta seção, descreveremos e utilizaremos o ANJ para obtermos a métrica de Kerr.

As cinco etapas do ANJ são:

1) Escrever o elemento de linha estático em um sistema de coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) , no qual a componente g_{rr} é eliminada e um termo cruzado é introduzido.

Para que essa exigência seja cumprida, devemos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$dt = du + \frac{1}{c} \frac{R}{1-R} \frac{dr}{r}. \quad (22)$$

De fato, efetuando essa transformação, encontramos:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 du^2 - 2cdudr - r^2 d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (23)$$

Com isso, temos que as componentes covariantes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R}{r} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Consequentemente, as componentes contravariantes são:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 - \frac{R}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

2) Expressar a forma contravariante da métrica em termos de tetradas nulas, ou seja, no formalismo de Newman-Penrose, isto é,

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = n^\mu l^\nu + n^\nu l^\mu - m^\mu m^\nu - m^\nu m^\mu, \quad (26)$$

onde os vetores de base nula, tem que seguir as condições de ortogonalidade, nulidade e normalização

$$l^\mu m_\mu = l^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu m_\mu = 0, \quad (27)$$

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = m^\mu m_\mu = 0, \quad (28)$$

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu m_\mu = 1. \quad (29)$$

Então, para que esse requisito seja satisfeito, devemos tomar:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (30)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{r}\right) \delta_1^\mu, \quad (31)$$

$$m^\mu = \frac{1}{r} \frac{1}{2} \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu, \quad (32)$$

$$m^\mu = \frac{1}{r} \frac{1}{2} \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu. \quad (33)$$

3) Estender as coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas x^ρ , $x^\rho \mapsto x^\rho$, e, conseqüentemente, fazer com que os vetores da base tetrad $e_{(a)}^\mu$ fiquem sujeitos a uma transformação do tipo: $e_{(a)}^\mu(x^\rho) \rightarrow e_{(a)}^\mu(x^\rho, x^\rho)$, de tal modo que a forma anterior [equações (30)-(33)] seja obtida quando tomarmos $x^\rho = x^\rho$.

Para satisfazer esse item, vamos utilizar a seguinte transformação:

$$l^\mu \mapsto l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (34)$$

$$n^\mu \mapsto n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right) \delta_1^\mu, \quad (35)$$

$$m^\mu \mapsto m^\mu = \frac{1}{r} \frac{1}{2} \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu, \quad (36)$$

$$m^\mu \mapsto m^\mu = \frac{1}{r} \frac{1}{2} \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu. \quad (37)$$

4) Fazer uma transformação complexa de coordenadas da seguinte maneira: $x^\rho = x^\rho + i\gamma^\rho(x^\sigma)$, em que $\gamma^\rho(x^\sigma)$ é uma função analítica das variáveis reais x^σ .

Nesse caso, escolheremos a transformação:

$$x^\rho = x^\rho + i \frac{a}{c} \cos \theta \delta_0^\rho - \delta_1^\rho. \quad (38)$$

Naturalmente, para obtermos as componentes da base tetrad no novo sistema de coordenadas (u, r, θ, ϕ) , devemos lembrar que os vetores $e_a^\mu = e_1^\mu, e_2^\mu, e_3^\mu, e_4^\mu = l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^\mu$ se transformam como:

$$e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \tilde{e}_{(a)}^\rho. \quad (39)$$

Então, levando isso em conta, encontramos:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (40)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Rr}{\Sigma}\right) \delta_1^\mu, \quad (41)$$

$$m^\mu = \frac{r - i \frac{a}{c} \cos \theta}{2 \Sigma} \delta_2^\mu + i \frac{a}{c} \sin \theta \delta_0^\mu - \delta_1^\mu + \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu, \quad (42)$$

$$m^\mu = \frac{r + i\frac{a}{c}\cos\theta}{2\Sigma} \delta_2^\mu - i\frac{a}{c}\sin\theta \delta_0^\mu - \delta_1^\mu - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu, \quad (43)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$. Como consequência, a partir da equação (26), chegamos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2\sin^2\theta}{c^2\Sigma} & 1 + \frac{a^2\sin^2\theta}{c^2\Sigma} & 0 & -\frac{a}{c\Sigma} \\ 1 + \frac{a^2\sin^2\theta}{c^2\Sigma} & -1 + \frac{Rr}{\Sigma} - \frac{a^2\sin^2\theta}{c^2\Sigma} & 0 & \frac{a}{c\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{c\Sigma} & \frac{a}{c\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma\sin^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

Daí, com o auxílio de um programa computacional, obtemos a inversa da matriz acima:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{Rr}{\Sigma} & 1 & 0 & \frac{aRr\sin^2\theta}{c\Sigma} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{a\sin^2\theta}{c} \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{aRr\sin^2\theta}{c\Sigma} & -\frac{a\sin^2\theta}{c} & 0 & -\sin^2\theta \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{Ra^2r\sin^2\theta}{c^2\Sigma} \right) \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Com isso:

$$ds^2 = 1 - \frac{Rr}{\Sigma} du^2 + 2dudr + \frac{2aRr\sin^2\theta}{c\Sigma} dud\phi - \Sigma d\theta^2 - \frac{2a\sin^2\theta}{c} drd\phi - \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{Ra^2r}{c^2\Sigma} \sin^2\theta \right) \sin^2\theta d\phi^2, \quad (46)$$

5) Escrever a métrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist.

Para escrevermos a métrica na forma de Boyer-Lindquist e, conseqüentemente, executarmos o último passo, devemos considerar uma transformação de coordenadas do tipo $u = t + F(r)$ e $\phi = \varphi + G(r)$, onde as funções $F(r)$ e $G(r)$ são determinadas a partir da exigência de que $g_{t\phi}$ deve ser o único componente cruzado do tensor métrico. Fazendo isso, obtemos:

$$u = t + \frac{r^2 + \frac{a^2}{c^2}}{\Delta} dr, \quad (47)$$

e

$$\phi = \varphi + \frac{a/c}{\Delta} dr, \quad (48)$$

onde $\Delta = r^2 + a^2 - Rr$.

De fato, substituindo as equações acima na métrica descrita na equação (46), chegamos à métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{Rr}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 + \frac{2aRr \sin^2 \theta}{c\Sigma} c dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{Ra^2 r}{c^2 \Sigma} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (49)$$

Este resultado mostra a validade do método na obtenção de uma solução das Equações de Einstein, no caso em que o espaço-tempo é gerado por um corpo massivo e esfericamente simétrico, em rotação. Nesta equação, o parâmetro a , que descreve a rapidez relativa da rotação, está relacionado com o momento angular J pela relação, $a = J/m$. Vale salientar que, tomando $a = 0$, obtemos a solução sem rotação.

3. PROPRIEDADES DA MÉTRICA DE KERR

A forma de Boyer-Lindquist é a mais útil para estudar as propriedades elementares da solução de Kerr. Primeiramente, sabe-se que essa solução depende dos dois parâmetros m e a . Se tomarmos $a = 0$, recuperamos a solução encontrada por Schwarzschild, em quem é definido como sendo a massa do corpo esférico.

Os coeficientes métricos da solução de Kerr, na forma de Boyer-Lindquist são independentes de t e φ . Portanto, a solução é estacionária e axialmente simétrica. Dizer que uma solução é axialmente simétrica significa falar que existe um eixo definido invariavelmente (que, em termos das coordenadas, consideramos ser o eixo z ou $\theta = 0$) de tal forma que a solução é invariante sob rotação em torno deste eixo.

Estas considerações são válidas para as simetrias contínuas. Quanto às simetrias discretas, a solução não é simétrica separadamente sob a reflexão temporal ou reflexão em φ [reflexão no plano x, z], mas é invariante sob a inversão simultânea de t e φ , isto é, através da seguinte transformação:

$$t \rightarrow -t \quad \text{e} \quad \varphi \rightarrow -\varphi. \quad (50)$$

Esta transformação sugere que o campo de Kerr pode surgir de uma fonte girando, já que o tempo de execução para trás com uma direção de rotação negativa é equivalente ao tempo de execução para frente com uma direção de rotação positiva. Novamente, o elemento de linha é invariante em:

$$t \rightarrow -t \quad \text{e} \quad \omega \rightarrow -\omega. \quad (51)$$

onde ω especifica a direção da rotação.

Uma terceira propriedade que dá suporte à interpretação da fonte girando é a presença, nessas coordenadas canônicas (t, φ) , de um termo cruzado envolvendo $d\varphi dt$ (o único termo cruzado presente). Considerando na teoria newtoniana dois sistemas $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ cujas origens e eixos- z coincidem, no qual o sistema primário está girando em relação ao sistema não-primário com velocidade angular constante ωk . Então um ponto P tem coordenadas cilíndricas (r, φ, z) e (r', φ', z') em relação aos dois sistemas, onde:

$$r' = r, \quad \varphi' = \varphi - \omega t, \quad z' = z. \quad (52)$$

Se tomarmos $Oxyz$ como inercial, isso representa uma transformação para um sistema de rotação. Agora, escrevendo o espaço plano, em coordenadas polares cilíndricas (t, r, φ, z) , ou seja,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (53)$$

e realizar a transformação de coordenadas (52) para um "sistema rotativo" (deixando inalterado). O elemento de linha (53) torna-se:

$$ds^2 = 1 - \omega^2 r^2 dt^2 - 2\omega r^2 d\varphi' dt - dr^2 + r^2 d\varphi'^2 + dz^2, \quad (54)$$

que também possui um termo cruzado em $d\varphi' dt$. Esse termo apresentado é sugestivo de ser um argumento de rotação. Também não dissemos nada preciso sobre as coordenadas r e θ quando se trata da métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist, em (49). De fato, r não é a coordenada radial polar usual, exceto assintoticamente (embora possamos reter r para concordar com a notação padrão). Pois, se tomarmos (x, y, z) na métrica de Kerr, como as coordenadas cartesianas usuais, a coordenada polar esférica padrão R é definida por:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (55)$$

Mas, seguindo as transformações dessas coordenadas, temos:

$$R^2 = r^2 + \omega^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (56)$$

No entanto, para $r \gg \omega$, temos que:

$$R^2 = r^2 + \frac{\omega^2 \text{sen}^2 \theta}{2r} + \dots, \quad (57)$$

o que mostra que R e r coincidem assintoticamente.

Se retornarmos a ideia de que a solução de Kerr representa um campo de vácuo exterior a uma fonte girando, há vários argumentos independentes para sugerir que ω está relacionado à velocidade angular e ma ao momento angular. Um desses argumentos baseia-se na definição dos momentos multipolares de uma fonte isolada. Todos esses argumentos levam à que o momento angular seja proporcional a ma para a métrica de Kerr. Já vimos que no limite do campo fraco o termo $1/R$ em g_{00} determina a massa total do campo. Também é possível

mostrar que, os termos $1/R$ em $g_{0\alpha}$ ($\alpha = 1,2,3$) determinam os componentes do momento angular. Expandindo a solução de Kerr em potências de $1/R$, encontramos:

$$ds^2 = 1 - \frac{2m}{R} + \dots dt^2 - \frac{4ma}{R^3} xdy - ydz dt + \dots, \quad (58)$$

o que mostra novamente que o momento angular total é proporcional a ma .

4. O GPS

O Sistema de Posicionamento Global, conhecido como GPS (*Global Positioning System*), é um sistema que utiliza satélites para localizar, em tempo real, onde o receptor do sinal do satélite se encontra. O GPS funciona a partir de uma rede de 24 satélites que ficam distribuídos em seis planos, próximos a órbita do planeta Terra. Estes satélites enviam sinais para o receptor (o aparelho de GPS), e a partir disso, esse receptor interpreta os sinais dizendo onde exatamente você está naquele momento.

Atualmente existem dois sistemas que permitem a navegação por satélite: O GPS americano e o GLONASS russo. Também, existem dois outros sistemas que estão em fases de implementação: o Galileu, da União Européia, e o Compass, da China.

A história da criação do sistema se iniciou em 1957. Ano em que a União Soviética lançou o primeiro satélite artificial da história. Esse foi o passo inicial para que a humanidade iniciasse os estudos sobre o uso dos satélites na obtenção da localização de pontos sobre a superfície terrestre.

O GPS é formado por três segmentos: o espacial, o de controle e o do utilizador. O segmento espacial possui 24 satélites com relógios atômicos, com órbitas circulares em torno da Terra com um período de 12 horas, dispostos em seis planos orbitais, cada plano contendo quatro satélites a uma altura de aproximadamente 20.200 km e com inclinação de 55° com relação ao Equador, de forma que em cada ponto da Terra pelo menos três satélites estejam sempre disponíveis.

O segmento de controle é o responsável pela operação de cada sistema e tem como finalidade monitorar o comportamento dos relógios atômicos e as condições operacionais dos satélites, determinarem suas órbitas e transmitir aos satélites as mensagens que eles retransmitirão posteriormente aos usuários. Esse segmento é constituído por diversas estações terrestres, bem distribuídas geograficamente, que recebem sucessivos sinais dos satélites e que depois são enviados as estações principais, que analisam e projetam o comportamento dos relógios para as horas seguintes.

Por fim, o segmento do utilizador, que é constituído por um microprocessador na Terra, recebe as informações de pelo menos quatro destes satélites, dando informações precisas sobre sua posição, a partir da decodificação das mensagens de navegação transmitidas.

O método para se obter a posição de cada satélite é através da análise do tempo do próprio do satélite. A finalidade é determinar, a partir dos sinais enviados pelos três satélites, a posição em três dimensões. Cada satélite envia um sinal codificado com sua localização e o tempo de emissão do sinal. O relógio do receptor, então, registra esse tempo e depois o subtrai do tempo de emissão para determinar a distância viajada pelo sinal. A partir dessas distâncias, são construídas três esferas, uma esfera centrada em cada satélite. O ponto de intersecção dessas três esferas dá a localização exata do objeto. Além da sua localização terrestre, o receptor GPS também consegue saber a altura do receptor em relação ao nível do mar, porém para isso é necessário um outro satélite.

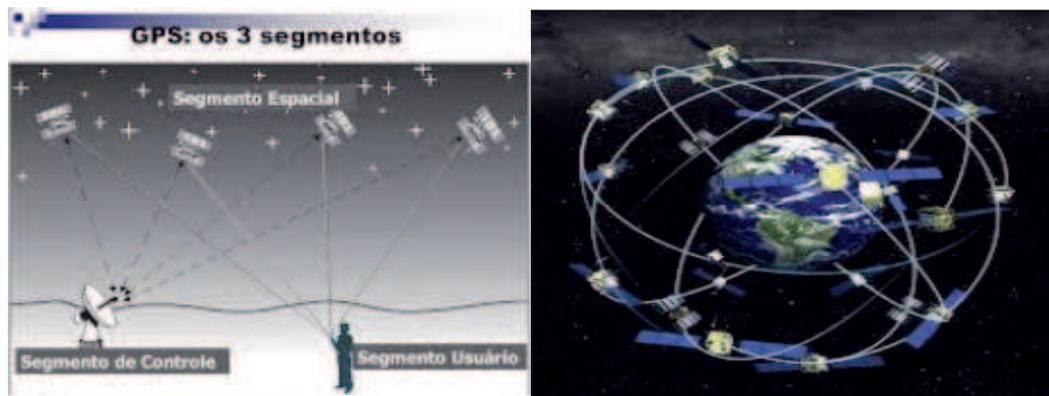
A distância do satélite até o módulo do utilizador é função única do tempo que o sinal leva para chegar até ele, mas como o relógio do receptor não é tão preciso quanto os relógios atômicos dos satélites, faz-se necessário o uso de um quarto satélite para corrigir a precisão do relógio do receptor. Essa última consideração é a correção do tempo, por exemplo, se houvesse uma defasagem de apenas $1\mu\text{s}$ nos tempos entre o módulo do utilizador e os relógios atômicos, o erro na posição seria de 300m.

Os efeitos da geometria no funcionamento do GPS é um assunto extremamente importante e com uma grande ligação com a Física. Temos atualmente, diversas aeronaves que são controladas por sistemas de navegação que possuem alguns receptores GPS integrados. Sua posição e velocidade são monitoradas continuamente e poder ser determinadas com uma precisão de aproximadamente 1,6 m e 0,02 m/s.

Essa precisão nas medidas deve-se as correções relativísticas que são levadas em conta pelo sistema. Caso os efeitos da relatividade fossem desprezados, os sistemas de navegação não seriam tão precisos, inviabilizando e colocando em risco alguns meios de transporte modernos, como o avião.

Os relógios são afetados de duas maneiras diferentes: sua velocidade relativa (relatividade restrita) e seu potencial gravitacional (relatividade geral). A Teoria da Relatividade Geral prevê que o tempo na superfície passará mais devagar em relação ao tempo dos satélites, devido à diferenciado potencial gravitacional existente entre a superfície terrestre e a região onde os satélites orbitam. Na verdade, a TRG afirma que uma distribuição de matéria-energia curva o espaço-tempo a sua volta.

Com isso, em geral, o tempo próprio muda ponto a ponto. Logo, o fato dos relógios dos satélites estarem a diferentes alturas implica que seus tempos próprios são diferentes. Por outro lado, um efeito consideravelmente menor, mas mesmo assim levado em conta, é o dado pela teoria da relatividade restrita: se o receptor se encontrar parado na Terra, a teoria prediz que o tempo em seu relógio interno passará mais rápido em relação ao relógio do satélite em movimento. Estas diferenças alcançam valores na ordem de décimos de microssegundo por dia. Para garantir a qualidade das medidas informadas, esses efeitos são compensados pela redução da frequência dos relógios dos satélites.



(a) Representação dos segmentos do GPS (b) Distribuição dos satélites do segmento espacial.

5. EFEITOS DA CURVATURA NO FUNCIONAMENTO DO GPS

Para calcularmos os efeitos relativísticos da rotação no funcionamento do GPS, iremos considerar a Terra como uma esfera perfeita, girando com uma certa velocidade de rotação. Neste caso, o espaço-tempo exterior à Terra deve ser descrito pela métrica Kerr.

Para nossa análise, consideraremos que tanto o observador, na superfície da Terra, quanto o satélite descrevem órbitas circulares $dr/dt = 0$. Além disso, assumiremos que os movimentos do observador e do satélite ocorrem no plano equatorial $\theta = \pi/2$. Consequentemente, a métrica descrita na equação (49), torna-se a seguinte métrica:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = 1 - \frac{R}{r} c^2 dt^2 + \frac{2aR}{r} dt d\varphi - r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{Ra^2}{rc^2} d\varphi^2 \Rightarrow$$

$$d\tau^2 = 1 - \frac{R}{r} dt^2 + \frac{2aR}{c^2 r} dt d\varphi - \frac{1}{c^2} r^2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{Ra^2}{rc^2} d\varphi^2, \quad (59)$$

em que $d\tau$ é o tempo próprio medido por um observador no referencial considerado.

Da expressão acima, segue que:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{R}{r} + \frac{2aR}{c^2 r^2} v - 1 + \frac{a^2}{r^2 c^2} + \frac{Ra^2}{r^3 c^2} \frac{v^2}{c^2}, \quad (60)$$

onde v é a velocidade tangencial da órbita considerada.

Com isso, a partir da equação (60), temos que o quociente entre os tempos medidos no satélite ($d\tau_{sat}$) e na terra ($d\tau_{\oplus}$) é:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{\oplus}} = \frac{1 - \frac{R}{r_{sat}} + \frac{2aR}{c^2 r_{sat}^2} v_{sat} - 1 + \frac{a^2}{r_{sat}^2 c^2} + \frac{Ra^2}{r_{sat}^3 c^2} \frac{v_{sat}^2}{c^2}}{1 - \frac{R}{r_{\oplus}} + \frac{2aR}{c^2 r_{\oplus}^2} v_{\oplus} - 1 + \frac{a^2}{r_{\oplus}^2 c^2} + \frac{Ra^2}{r_{\oplus}^3 c^2} \frac{v_{\oplus}^2}{c^2}}, \quad (61)$$

Para obtermos o valor da razão acima, consideraremos que o raio da órbita do satélite e sua velocidade são dados por $r_{sat} = 26,6 \cdot 10^6 m$ e $v_{sat} = 1,29 \cdot 10^{-5} c$, respectivamente. Por outro lado, no caso do observador que se encontra sobre a superfície da Terra, o raio e a velocidade tangencial são $r_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 m$ e $v_{\oplus} = 1,54 \cdot 10^{-6} c$. Além disso, como estamos assumindo que a Terra é uma esfera perfeita, que gira em torno do eixo central, a quantidade que descreve a rapidez da rotação é $a = J m = 2\omega_{\oplus} r_{\oplus}^2 = 4,22 \cdot 10^{12} m^2 s$. Temos também o valor do raio de Schwarzschild, R , é dado por $R = 2Gm/c^2 = 9 \cdot 10^{-3} m$.

Levando isso em conta, chegamos a:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{\oplus}} = 1 + 4,54 \cdot 10^{-10}. \quad (62)$$

O resultado obtido em (62) nos permite concluir que, levando em consideração os efeitos de rotação da Terra e a velocidade do satélite, o lapso de tempo provocaria um atraso por dia nos relógios do GPS de $24 \times 60 \times 60 \times 4,54 \cdot 10^{-10} = 39,24 \mu s$. Assim, multiplicando este valor por 300 m, conseguimos um erro na posição de, aproximadamente, 11,77 km.

Por outro lado, se considerarmos a terra estática, ou seja, sem os efeitos da rotação, $a = 0$ e $v_{\oplus} = 0$ a equação (61), torna-se:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{\oplus}} = \frac{1 - \frac{R}{r_{sat}} - \frac{v_{sat}^2}{c^2}}{1 - \frac{R}{r_{\oplus}}}. \quad (63)$$

Com isso, encontraremos um valor para a razão entre $d\tau_{sat}/d\tau_{\oplus}$, como sendo:

$$\frac{d\tau_{sat}}{d\tau_{\oplus}} = 1 + 4,53 \cdot 10^{-10}. \quad (64)$$

O resultado obtido em (64) nos permite concluir que, não levando em consideração os efeitos de rotação, e considerando a Terra estática. Nesta situação, o lapso de tempo

provocaria um atraso por dia nos relógios do GPS de $24 \times 60 \times 60 \times 4,53 \cdot 10^{-10} = 39,14 \mu\text{s}$, o que indica que teríamos um erro na posição de, aproximadamente, 11,74 km.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, buscamos as correções que devem ser feitas no GPS devido a curvatura do espaço-tempo próximo a superfície da Terra, para que este forneça informações precisas quanto à localização espacial.

Como sabemos, a Terra não é uma esfera perfeita. Mas, por aproximação, podemos considerá-la como tal. Com isso, admitimos que o espaço-tempo ao redor da Terra seria aquele previsto pela solução de Kerr, a qual representa a geometria do espaço-tempo externo a uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, considerando o efeito da rotação.

No que se refere aos cálculos realizados para obter as correções do GPS, utilizamos a métrica de Kerr para calcular o tempo próprio para os relógios localizados na superfície da Terra e no satélite. Os resultados nos mostraram que o lapso no tempo entre eles é muito pequeno, mas suficientemente grande para provocar erros de medidas da ordem de quilômetros. De fato, considerando a geometria do espaço-tempo de Kerr, o erro diário da posição é em torno de 11,77 Km. Vimos ainda que, caso desprezassemos o efeito da rotação, o que equivaleria a admitir que o espaço-tempo exterior à Terra seria o de Schwarzschild, conforme proposto por Lisboa e Crawford (2010), encontraríamos um erro de 11,74 Km na medida da posição. Sendo assim, podemos afirmar que a rotação produz um erro adicional de 30 m por dia.

Diante do exposto, concluímos que, se não levarmos em consideração os efeitos da TRG, o GPS torna-se um dispositivo inutilizável.

CORRECTIONS IN GPS BECAUSE TO EARTH ROTATION

Rafael Camelo da Costa Oliveira²

ABSTRACT

The theory of general relativity is based on the principles of equivalence and covariance. Based on the equivalence principle, Einstein concluded that gravity is not a force, but a modification in the metric of space-time caused by the presence of a mass at a given point in space. Formally, the TRG assumes that the gravitational field, associated to a matter and energy distribution, is described by the metric tensor, which is obtained from a set of equations, called Einstein field equations. In addition to the immediate results of the solution obtained by Roy Kerr, through these equations, its development allowed scientific-technological applications to be made feasible. Like the GPS (Global Position System), which is a locating device that works from a network of 24 satellites in an orbit close to Earth. Because they are far from the center of the Earth, and therefore suffer less influence from gravity, time passes faster for the satellites clocks than for the clocks of the receivers on the surface. In addition, they move in relation to the receivers, and this causes the time, for them, to pass more slowly. The difference between these two faces of relativity causes a time lag between the satellites clock and the clock of the receiver. Our proposal is to determine the corrections that must be made in GPS due to the rotation of the Earth. For this, we will admit that the outer space-time is described by the Kerr metric.

KEYWORDS: General Relativity. Kerr's solution. GPS.

²Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

7. REFERÊNCIAS

BERGMANN, Peter Gabriel. *Introduction to Theory of Relativity*. New York: Dover Publicações, 1975.

CARMELI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CRAWFORD, P. *O Significado da Relatividade no Final do Século*. Colóquio Ciência, v. 16, p. 3-26, 1995.

FERRARO, Rafael. *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

KERR, R. P, Gravitational Field of a Spinning Masses na Example of Algebraically Special
LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., *Teoria de Campo*. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

LISBOA, F. B. e CRAWFORD, P. *A Relatividade Geral no Sistema de Posicionamento Global. Projecto de Integração na Investigação*. Lisboa: 2010.

NEWMAN, E. T. e JANIS, A. I. Note on the Kerr Spinning- Particle Metric, *J. Math. Phys.* New York: The American Institute of Physics, vol. 6, 1965, p. 915.

NORDSTRÖM, G. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk.*, Amsterdam:vol 26, 1918, p. 1201–1208.
REISSNER, H. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einstein'schen Theorie. *Annalen der Physik*. vol 50, 1916, p. 106–120.

SCHWARZSCHILD, K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen*. Berlin: Akademie der Wissenschaften, voll, 1916, p. 189-196.

WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

ZANOTTA, D.C. et al. *O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.33, nº2, 2011.

