UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JOSÉ WANDERLEY GOMES DA SILVA

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU N COM COEFICIENTES QUE FORMAM UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

MONTEIRO
2018

JOSÉ WANDERLEY GOMES DA SILVA

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU N COM COEFICIENTES QUE FORMAM UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior

MONTEIRO
2018

S586s Silva, José Wanderley Gomes da.
Soluções algébricas de equações polinomiais de grau N com coeficientes que formam uma progressão geométrica [manuscrito] / Jose Wanderley Gomes da Silva. - 2018.
94 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2018.

"Orientação : Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Equações polinomiais de grau N. 2. Polinômios (Operações). 3. Álgebra. I. Título

21. ed. CDD 521

JOSÉ WANDERLEY GOMES DA SILVA

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU N COM COEFICIENTES QUE FORMAM UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Álgebra.

Aprovada em: 05/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior
Orientador

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Este trabalho é dedicado a Deus todo poderoso que é, o alfa e o ômega, o princípio e o fim de todas as coisas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me deu de tudo, mesmo muitas vezes sem merecer. Por ter me dado a honra de ter tido os melhores professores de ensino fundamental e médio da escola pública. Por ter me conduzido a universidade, mesmo inicialmente contra minha vontade. Por ter me ajudado a passar em várias disciplinas, mesmo com as dificuldades cotidianas. Por ter me dado os pais que me deu. Por ter me dado uma família tão boa como a minha. Por está me ajudando a concluir esse curso abençoado. Agradeço também a Deus por ter me dado a graça de ter estudado a disciplina de Calculo III com Elen que veio a falecer esse ano e por tudo que Deus me deu.

Agradeço a meus avós, que cheios de virtudes, me deram através dos seus exemplos de retidão moral a base para saber quem eu sou e por ter me dado um norte para me orientar e ter convicção sobre o que quero nessa vida. Agradeço ao meu pai por ter me ensinado o significado da palavra honra. Por ter me mostrado o que é ter amor pelos filhos e pela família. Agradeço a minha mãe por ter cuidado de mim e de meus três irmãos após a morte precoce do meu pai. Por ter incentivado a todos a estudarem. Por ter me incentivado a fazer e a passar no concurso que estou trabalhando no momento, pois sem ter passado nesse concurso eu não conseguiria frequentar a faculdade e por todo o seu apoio a meus estudos.

Agradeço a minha esposa Maisa, por todo o apoio a meus estudos e por ser a excelente esposa que é e por ter me dado uma filha linda. Agradeço a minha filha Helóisa, que mesmo sem saber me inspira a dar o meu melhor no que faço. Agradeço a todos os colegas que estudei na faculdade que sempre colaboraram comigo durante as disciplinas mais difíceis e também nas mais alegres, em especial destaco Edielso, Izamara e Patrícia Núbia. Agradeço a todos dessa minha nova turma que me acolheu e está me ajudando muito.

Agradeço a todos os meus professores da faculdade que sempre me ajudaram, não só com conhecimento, mas também por compreenderem as minhas necessidades e a da turma. Agradeço ao professor Luciano por ter sido um ótimo e coordenador do curso e por ser um bom professor. Agradeço a professora Gilmara Meira que me ajudou muito na construção do projeto desse T.C.C. Agradeço ao meu professor e orientador Luiz Lima por que esteve sempre disponível para me orientar. Agradeço ao professor Roger por ter me apresentado o problema que inspirou o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço a todos os professores da UEPB por terem me influenciado a fazer um mestrado. Agradeço também a minhas amigas Thaís e Adriana por toda ajuda com o Latex.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

RESUMO

O objetivo desse trabalho é encontrar fórmulas que resolvam através de radicais as equações polinomiais $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ e $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}\, x^i = 0$ para todo w pertencente aos naturais. Onde $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$ e $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$ são Progressões geométricas formadas pelos coeficientes das respectivas equações. Este objetivo justifica-se, pois estudamos nove dissertações de mestrado da área de solução de equações polinomiais e três livros de estruturas algébricas e verificamos que nenhum desses trabalhos resolve essas equações. O método utilizado foi observar o comportamentos dessas equações para casos particulares quando w cresce e daí levantar conjecturas, e a partir delas enunciar proposições e demonstrá-las, para assim tentar decompor os polinômios em outros mais simples. E assim atingir o objetivo geral. Concluímos que as equações polinomiais $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ e $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}\, x^i = 0$ de fato possuem fórmulas que as resolvam e essas fórmulas foram obtidas através de radicais como suspeitávamos. Após termos encontrado essas fórmulas realizamos algumas aplicações.

Palavras-chave: Solução. Equação. Polinômio.

ABSTRACT

The objective of this work is to find formulas that solve, through radicals, the polynomial equations $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ and $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ for all w pertaining to natural. Where $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$ and $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$are geometric progressions formed by the coefficients of the respective equations. This objective is justified because we studied nine master's dissertations from the area of solution of polynomial equations and three books of algebraic structures and we verified that none of these works solves these equations. The method used was to observe the behavior of these equations for particular cases when w grows and hence to conjecture, and from them to enunciate propositions and to demonstrate them, in order to try to decompose the polynomials into simpler ones. And so, achieve the overall goal. Conclude that the polynomial equations $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ and $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ actually have formulas that solve them and these formulas were obtained through radicals as we suspected. After we have found these formulas, have made some applications.

Key-words: Solution. Equation. Polynomial.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A solução de uma equação polinomial do primeiro grau que fazemos uso atualmente deve-se a dois axiomas de Euclides, escrito em sua obra *"Os Elementos"*, por volta de 300 a.C. Sendo eles o princípio aditivo da igualdade e o princípio multiplicativo. As soluções gerais das equações polinomiais de segundo, terceiro e quarto grau foram sendo descobertas gradualmente até o século XVI. Essas equações possuem uma característica em comum, que é o fato de cada uma delas possuírem uma fórmula geral para encontrar todas as suas raízes, de modo que estas fórmulas utilizem apenas as quatro operações básicas da aritmética, a radiciação e os coeficientes da equação. Quando uma equação polinomial, qualquer, possui tal característica dizemos que ela é solúvel por radicais.

Um exemplo de equação solúvel por radicais é a equação polinomial geral do segundo grau (chamamos uma equação polinomial de grau n, de geral quando ela é capaz de representar todas equações polinomiais desse mesmo grau), pois toda equação polinomial de grau dois pode ser escrita da forma $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$. E ao observarmos a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que encontra todas as raízes da equação do segundo grau podemos ver que ela usa apenas as quatro operações básicas, a radiciação e seus coeficientes para resolvê-la.

Os matemáticos dos séculos XVI-XVIII tentaram encontrar a fórmula geral da equação de quinto grau através de radicais, e como não obtiveram sucesso eles tentaram provar que ela não existia. Évariste Galois (1811-1832) foi ainda mais longe e generalizou o problema, provando que nenhuma equação geral de grau n, com $n > 4$ e $n \in \mathbb{N}$, é solúvel por radicais. Existem, porém casos particulares de equações polinomiais de grau $n > 4$ que são solúveis por radicais. Como é o caso do exemplo a seguir:

Considere a equação $x^n - z = 0$, com $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{R}$ tal que $n > 4$ e a resolvamos.

$$x^n - z = 0 \Rightarrow x^n = z \Rightarrow x = \sqrt[n]{z}.$$

Utilizando a segunda fórmula de Moivre[1] (fórmula de radiciação de números complexos) temos:

$$\sqrt[n]{z} = Z_k = \sqrt[n]{\| z \|}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3...n-1\} \text{ com}$$

$$\| z \| = \sqrt{a^2+b^2}, \cos\theta = \frac{a}{\| z \|} \quad \text{e} \quad sen\theta = \frac{b}{\| z \|}$$

[1] Segundo EVES (2011) Abraham De Moivre (1667-1754) foi um huguenote francês que foi morar em Londres por questões religiosas por volta de 1685. Ele trabalhava como professor particular e é conhecido principalmente por suas contribuições na matemática atuarial da época, teoria das probabilidades, séries recorrentes e trigonometria analítica.

onde a é a parte real do número complexo z e b é a parte imaginária.

Como k varia de 0 á $n-1$ e esta fórmula de Moivre é válida para todo n pertencente aos naturais, tal que $n > 1$ (como demonstraremos no capítulo 2) logo é válida para $n > 4$, então esta fórmula encontra as n raízes da equação $x^n - z = 0$ como queríamos mostrar. Como para solucionar a equação $x^n - z = 0$ utilizamos apenas a soma; a radiciação e seus coeficientes, então podemos afirmar que ela é solúvel por radicais. Isto parece contradizer a teoria de Galois, mas não contradiz, pois $x^n - z = 0$ é apenas uma equação particular, de grau n.

Como exemplo tomemos a equação $x^n + 2x - z = 0$. Para que ela seja escrita da mesma forma de $x^n - z = 0$ o coeficiente 2 teria que ser igual a 0, o que é um absurdo, logo nem toda equação de grau n pode ser escrita da forma de $x^n - z = 0$, ou seja, ela é de fato uma equação particular de grau n. Contudo a teoria de Galois(é a teoria criada por Galois para identificar quais equações polinomiais particulares de grau n são solúveis por radicais, com $n > 4$.), afirma apenas que não existe uma fórmula que resolva todas as equações de determinado grau através de radicais, se esse grau for maior que 4.

Embora a equação, simples, $x^n - z = 0$ tenha sido resolvida, dentro do conjunto dos números complexos, pela segunda fórmula de Moivre no século XVII, sua importância apenas fica evidenciada após confrontarmos ela com a teoria de Galois do século XVIII, pois se não existe uma fórmula que resolva as equações gerais de 5º, 6º, 7º... e n-ésimo grau, então faz-se necessário encontrarmos fórmulas que resolvam equações particulares de 5º, 6º, 7º... e n-ésimo grau. Entretanto a Teoria de Galois não determina quais são as fórmulas que resolvem as equações que são solúveis por radicais. E é exatamente aqui que a segunda fórmula de Moivre mostra sua relevância para a solução de equações, pois ela nos mostra que existe pelo menos uma equação particular de grau n com $n > 1$ que é solúvel por radicais.

Com base nesse contexto e após uma pesquisa bibliográfica realizada em dissertações de mestrado da área de solução de equações polinomiais, cujos autores são CARRASCHI (2014), CARVALHO (2015), NASCIMENTO (2015), PONTES (2013), HOLGADO (2016), MARQUES (2017), VIEIRA (2015), LOBO (2017) e SCHUVAAB (2013). E nos livros de álgebra abstrata VIEIRA (2015), DOMINGUES e IEZZI (2003) e GARCIA e LEQUAIN (2001). Nós propomos como objetivo geral encontrar as fórmulas que solucionem por radicais(caso sejam solúveis por radicais) as seguintes equações polinomiais particulares de grau N, isto é,

$$p_{w,q}(x) = q^1 x^0 + q^2 x^1 + ... + q^{2w+1} x^{2w} + q^{2w+2} x^{2w+1} = 0 \tag{1.1}$$

e

$$p_{w,-q}(x) = (-q)^1 x^0 + (-q)^2 x^1 + ... + (-q)^{2w+1} x^{2w} + (-q)^{2w+2} x^{2w+1} = 0. \tag{1.2}$$

Sendo que $w, q \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{C}$ tal que $q > 1$, com $N = 2w + 1$. Onde x é a incógnita das equações e q é uma constante. Com a observação que a P.G.(progressão geométrica) $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$ que é formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$ e a P.G $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$ formada pela pelos coeficientes de $p_{w,-q}(x)$. Nossa tese é que as equações (1.1) e (1.2) possuem fórmulas que as resolvem por radicais.

A escolha desse objetivo foi feita levando-se em conta principalmente a relevância deste problema, pois nenhuma das obras pesquisadas encontra, ou se quer citam, fórmulas que resolvam as equações enésimas por nós propostas acima. O que significa que possivelmente essas soluções não foram publicadas ou se foram, são de difícil acesso. Este fato nos motivou ao desenvolvimento desse estudo que poderá revelar possíveis soluções para tais equações. E Dessa forma estaríamos contribuindo no preenchimento dessa lacuna no acervo bibliográfico das soluções algébricas das equações polinomiais. E caso encontremos as soluções buscaremos realizar aplicações. E para tanto os objetivos específicos são:

- analisar as equações (1.1) e (1.2) para observar os seus comportamentos quando o w cresce para que desse modo nós possamos perceber padrões e a partir daí levantar conjecturas.
- através das possíveis conjecturas levantadas, enunciar proposições que valham para todo w pertencente aos naturais e demonstrá-las.
- utilizar as possíveis proposições, já demostradas, e resultados conhecidos sobre polinômios e equações polinomiais para tentar decompor os polinômios que compõem as equações (1.1) e (1.2) em polinômios mais fáceis de encontrar suas raízes. E assim atingir o objetivo geral.

No capítulo 2 mostraremos aspectos históricos das soluções das equações polinomiais bem como algumas breves biografias dos matemáticos mais relevantes desse contexto. Apresentaremos de modo especial a biografia de Évariste Galois, métodos algébricos para solucionar as equações do segundo e terceiro grau e definiremos o que é um polinômio. E demonstraremos alguns resultados sobre os mesmos. No capítulo 3 buscaremos atingir os objetivos específicos e o objetivo geral. No capítulo 4 realizaremos algumas aplicações partir de nossos estudos no capítulo 3.

2 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Neste capítulo abordaremos aspectos históricos relacionados com o desenvolvimento de soluções das equações polinomiais até o terceiro grau, bem como, uma breve biografia de Évariste Galois, que através da teoria que leva seu nome, ajuda a justificar este Trabalho.

2.1 Aspectos Históricos

Segundo PONTES (2013) a primeira menção a soluções de equações de que se têm notícias se encontra no papiro egípcio de Rhind[1], escrito há mais ou menos 4000 anos. De acordo com indício históricos, os gregos resolviam equações através da Geometria, mas foram os árabes e hindus que absorveram e aperfeiçoaram a matemática dos gregos promovendo um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma equação os árabes chamavam este valor de "coisa", o que hoje chamamos de incógnita. Atualmente, o método algébrico para solução de uma equação polinomial do primeiro grau que fazemos uso deve-se a dois axiomas de Euclides, escrito em sua obra *"Os Elementos"*, por volta de 300 a.C. Sendo eles o princípio aditivo da igualdade e o princípio multiplicativo. Como mostramos no início da introdução a solução das equações polinomiais de primeiro grau atualmente são dadas com base nos princípios seguintes.

O Princípio Aditivo da Igualdade diz que numa expressão podemos somar um número real a ambos os membros de uma igualdade que ela não se altera, ou seja:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c.$$

E o Princípio Multiplicativo da Igualdade afirma que podemos multiplicar ambos os membros de uma igualdade por um número real que ela não se altera, isto é:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c.$$

Sabemos, portanto, que toda equação polinomial do 1º grau pode ser escrita da forma $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então para resolver essa equação basta utilizarmos esses dois axiomas como mostraremos a seguir:

[1] Segundo EVES (2011) o papiro de Rhind é um texto matemático copiado em escrita hierática pelo escriba Ahmes por volta de 1650 antes da era cristã e possui as dimensões aproximadas de 4,88m de comprimento por 33 centímetros de Largura, contendo cerca de 87 problemas. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo Museu Britânico.

$$ax + b = 0.$$

Pelo princípio Aditivo da Igualdade temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Rightarrow ax = -b.$$

Agora, utilizando o princípio multiplicativo da igualdade segue que:

$$ax\left(\frac{1}{a}\right) = -b\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Exemplo 2.1. Resolva a equação $2x + 1 = 0$.

Pelo Princípio Aditivo, temos:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x + 1 + (-1) = 0 + (-1) \Rightarrow 2x = -1.$$

E utilizando o princípio multiplicativo segue que:

$$2x = -1 \Rightarrow 2x\left(\frac{1}{2}\right) = -1\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

que é realmente a solução da equação, pois pode ser verificada facilmente substituindo o valor de x na equação inicial.

O matemático hindu Bháskara (1114-1185) é apontado no Brasil como o autor da fórmula da equação do segundo grau, mas isto não condiz com fatos históricos, pois a fórmula como conhecemos atualmente foi proposta pelo francês François Viéte[2] (1540-1603) somente no século XVI. Porém é necessário ressaltar que Bháskara possuía um método geral para resolver as equações do segundo grau, desde que suas raízes fossem reais. Conforme as citações seguintes.

> O método de Bháskara funciona perfeitamente para resolver o que chamamos, hoje, de "equações de segundo grau", mas ainda assim não podemos atribuir-lhe a invenção da fórmula usada atualmente. Por quê? Mesmo que pudessem ser empregados símbolos para representar as incógnitas e algumas operações, não havia símbolos para expressar coeficientes genéricos a, b e c, ... de uma equação como $ax^2 + bx + c = 0$ e traduzirmos o método indiano para a notação algébrica atual e o aplicarmos a essa equação geral, obteremos o equivalente da fórmula para resolução de equações do segundo grau. Isso quer dizer que havia um método geral para resolução de equações, expresso de modo retórico. No entanto, não podemos dizer que já existisse uma "fórmula" para a resolução de equações, no sentido que a entendemos hoje, uma vez que não havia simbolismo para os coeficientes, o que será proposto por Viéte somente no século XVI (ROQUE, 2012, p. 215).

[2] Segundo BOYER (1996) François Viéte em sua juventude estudou e praticou direito, tornou-se membro do conselho do rei Henrique III e depois de Henrique IV. Só utilizava o seu tempo de livre para se dedicar a matemática. Contudo fez contribuições a aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Utilizou na álgebra vogais para incógnitas e consoantes para representar números dados, ou seja, constantes.

É comum encontrar em livros e trabalhos acadêmicos autores que defendem que Bháskara é realmente o autor da conhecida (no Brasil) "fórmula de Bháskara" ou que atribuem a descoberta a outros autores. Portanto, a ideia de encontrar o descobridor da fórmula das equações do segundo grau é persistente. No entanto, poucos autores parecem se perguntar se de fato podemos afirmar que existiu alguma pessoa a quem poderíamos atribuir tal mérito. E é essa reflexão que também é apresentada por ROQUE (2012).

> É preciso citar os matemáticos indianos, em particular Bháskara, para mostrar que ele não é o inventor da conhecida fórmula que ganhou seu nome no Brasil. Apesar de possuírem regras para resolver problemas que seriam hoje traduzidos por equações do segundo grau e usarem alguns símbolos para representar as quantidades desconhecidas e as operações, não se pode dizer que os indianos possuíssem uma fórmula de resolução de equações de segundo grau. Usaremos esses argumentos para mostrar quão inadequada é a pergunta: "Quem foi o real inventor dessa fórmula?" (ROQUE, 2012, p. 195)

Conforme SCHUVAAB (2013), no século XVI o método para solução das equações polinomiais de terceiro grau (cúbicas), foi construído a partir da contribuição do italiano Scipione Del Ferro (1465-1526). Mais especificamente, por volta de 1510, este descobriu a solução para a equação do tipo $y^3 + py + q = 0$, onde p e q são constantes e y é a incógnita da equação.

Segundo BOYER (1996) Del Ferro foi professor de matemática na universidade Bolonha cuja tradição em matemática era forte. Seu aluno, Antonio Maria Fior, que conhecia o seu método, tentou se apropriar do mérito de seu mestre. Na época eram comuns desafios entre os sábios, de várias áreas, assim Fior decidiu desafiar Nicola Fontana (Tartaglia) (1449-1557). Nicola Fontana não só sabia como resolver a equação de Del Ferro como encontrou um método algébrico para reduzir qualquer cúbica à "equação de Del ferro", ou seja, ele desenvolveu uma fórmula geral para as equações do terceiro grau. Como consequência Fior perdeu o desafio para Tartaglia.

Segundo EVES (2011) Nicola Fontana nasceu em Brescia na Itália. Na infância sua cidade foi invadida pelos franceses e ele se refugiou na catedral local, mas mesmo assim os soldados invadiram o local e massacraram os que lá estavam. Ele levou um corte de sabre profundo que lhe atingiu o palato, contudo conseguiu sobreviver, mas ficou gago e por isso o apelido de Tartaglia que quer dizer tartamudo ou gago.

Alguns autores defendem que Tartaglia teve acesso a fórmula de Del Ferro, outros acham que Tartaglia encontrou a fórmula de modo independente, bem como aconteceu várias vezes na história da matemática como por exemplo Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716) no Cálculo e Descartes (1596-1650) e Fermat (1607-1665) na Geometria Analítica. Nicola de Fontana teria sido persuadido por Gerolamo Cardano[3] (1501-1576)

[3] Segundo EVES (2011) Gerolamo Cardano Nasceu em Pávia (Itália). Começou sua tumultuada vida

a revelar o seu método algébrico de resolubilidade das cúbicas com promessa de não divulgação do mesmo. Cardano que era um gênio, mas também recebia e ainda recebe constantemente, pelos historiadores, a fama de inescrupuloso, publicou em sua obra *"Ars Magna"*, considerada por ROQUE (2012), um dos primeiros tratados da álgebra. E nesta obra continha não somente a solução de Tartaglia das cúbicas, mas também, a solução da equação de quarto grau (quárticas) desenvolvida por um aluno de Cardano, Ludovico Ferrari (1522-1565). Este descobriu o método geral das quárticas com base no método de Tartaglia das equações de terceiro grau.

A *"Ars Magna"* revolucionou não só a álgebra como impactou todo o mundo matemático da época pois, a solução da equação de primeiro grau data de antes da era Cristã. A solução algébrica das equações de segundo grau já existia desde o século XII, e quatro séculos depois aparece numa única obra não só a fórmula das cúbicas, mas também a solução das Quárticas. De fato, este momento foi de grande entusiasmo para os matemáticos, especialmente para os algebristas da época. Como consequência desta obra, houve uma corrida para encontrar uma fórmula geral para solucionar as equações polinomiais de grau cinco (Quínticas).

E para a surpresa dos matemáticos as Quínticas não só se mostraram resilientes, mas inquebráveis, pois os matemáticos passaram aproximadamente 250 anos tentando encontrar uma fórmula geral, para mesma sem êxito. Até que no século XIX o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) mostrou que uma equação específica de quinto grau não podia ser resolvida algebricamente. Ele considerava que uma equação podia ser solucionada algebricamente se as raízes de uma equação polinomial pudessem ser encontradas utilizando apenas as quatro operações básicas e a radiciação. Portanto pôde-se concluir que não existe uma fórmula algébrica que resolva toda Quíntica.

Évariste Galois (1811-1832) também provou essa impossibilidade usando sua própria teoria, chamada Teoria de Galois. E ele foi muito mais além do que Abel pois, ele provou que sendo n o grau de um polinômio, então se $n > 4$ o polinômio não possui solução por radicais (A teoria de Galois chama uma equação que pode ser resolvida algebricamente de solúvel por radicais), ou seja, ele mostrou que não existe uma fórmula geral para equações de nenhum grau maior que quatro. Galois foi ainda mais longe e construiu, com base nessa mesma teoria, um dispositivo algébrico conhecido como Grupo de Galois que permite saber quais polinômios são solúveis, ou não, por radicais.

profissional como médico, mas, paralelamente, dedicava-se à matemática, estudando, ensinando e escrevendo. Ocupou cargos importantes nas Universidades de Pávia e Bolonha. Faleceu em Roma pondo fim à própria vida. Ele deixou vasta obra assuntos. Mas sem dúvida seu trabalho mais importante, é a Ars Magna, o primeiro grande tratado dedicado à álgebra em latim.

2.1.1 Vida e contribuições de Évarist Galois na Matemática

Segundo a teoria de HOLGADO (2016) Évariste Galois, conforme figura 1, nasceu na França, numa cidade chamada Bourg-la-Reine. Vindo de uma família rica e culta, consequentemente teve uma vida financeira fácil. Estudou no Colégio Louis-le-Grand. Em 1825, ele se rende aos encantos da matemática e a partir daí começa a se dedicar ao seu estudo. Dessa forma, chamava a atenção dos seus professores, que o percebiam a originalidade, o domínio e a paixão que ele apresentava pela matemática.

Em 1828, Galois tenta admissão na École Polytechnique, instituição que causava fascínio nos que desejavam prosseguir com seus estudos, pois oportunizava aos estudantes e formados grande prestígio perante a sociedade. No entanto, ele não conseguiu ser admitido, mas não interrompeu seus estudos.

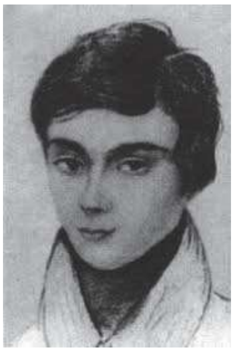
Percebendo a fascinante inteligência de Galois, o professor Louis Paul-Émile Richard resolve orientá-lo. Sob suas ordens, publica dois trabalhos, o primeiro *"Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo"* e o segundo *"Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas periódicas"*. Cauchy (1789-1857) diz a Galois que seu manuscrito é extenso e que precisaria de tempo para sintetizar suas ideias e levá-lo à Academia.

Galois dedicado a resolver os problemas das equações algébricas, ao ler um trabalho de Cauchy sobre as leis de permutações, vislumbra ali uma oportunidade não vista por Cauchy para o estudo das equações algébricas. E que mais tarde o ajudará a provar de uma vez por todas sobre o método geral das equações de grau superior a 4 que nem Abel nem Rufini conseguiram fazer. Infelizmente Galois falha ao tentar ser admitido na École Polytechnique pela segunda vez. E o pior é que em pouco tempo depois seu pai comete suicídio. Em 1829, consegue ingressar na École Normale Supérieure que se dedica à formação dos professores para colégios e universidades.

Em 1830 ele publica no Bulletin de Ferrussac, três trabalhos de alto nível: *"Análise de uma Memória a Resolução Algébrica de Equações"*, *"Resolução de Equações Numéricas"* e *"Teoria dos Números"*. Cauchy já possuía tudo isso em mãos meses atrás, porém só depois destas publicações resolve ler e apresentar à Academia de Ciências. Quando Cauchy resolve apresentar o trabalho de Galois, ele cai doente e não comparece a sessão. Logo o tema não foi debatido. Cauchy entra em contato com Galois e pede que este resuma seu trabalho para que seja apresentado no Grande Prêmio de Matemática da Academia, mas o trabalho que estava em posse de Cauchy, misteriosamente, desaparece. Galois se vê sem alternativas e reescreve seus trabalhos sob o título *"Memórias sobre as Condições de Resolubilidade das Equações por Radicais"*, posteriormente entregando ao grande Fourier[4] (1768 - 1830),

[4] Conforme BOYER (1996) Jean-Baptiste Joseph Fourier era filho de um alfaiate numa comuna francesa próxima a Paris, ficou órfão estudou em colégio católico. Trabalhou como assistente de Lagrange na École Polytechnique. Ficou mais conhecido na física por seu trabalho sobre a propagação do calor e na matemática por seus avanços no estudo das séries, que hoje levam o seu nome.

Figura 1 – Évarist Galois



porém antes de ler, Fourier falece e assim Galois não consegue apresentar seu trabalho à comunidade acadêmica novamente. Posteriormente, Galois se envolveu intensamente na política, gerando despeito com os que contestavam suas ideias. No decorrer de sua história, ele conhece Stéphanie Poterin du Motel, pela qual ele se apaixona. Mas, a recusa dela sobre as declarações de Galois, o leva à morte, pois ao saber que Stéphanie também era cortejada por outro homem, Duchâtelet, ele o desafiou a um duelo. Como era sabido, Galois tinha muitos inimigos e não havia percebido que ao desafiar Duchâtelet, assinaria ali sua sentença de morte. O Desafio foi aceito e em 30 de maio de 1832, e Galois deu os últimos passos de sua notável vida.

Ele deixou numerosos escritos sobre a Teoria de Grupos, Geometria, Teoria das Equações, Cristalografia, Física Nuclear entre outras áreas. Tais obras foram posteriormente reconhecidas por outros matemáticos que fizeram referência em algumas de suas publicações, a exemplo Joseph Liouville (1809 - 1882) que publicou no Journal de Mathématiques Pures et Appliquées o trabalho *"Obras Matemáticas de Évariste Galois"*, Camille Jordan (1838 - 1922) também publicou *"Tratado das Substituição e das Equações"*, assim como Sophus Lie (1842 - 1899) com seu trabalho *"Influência de Galois sobre o Desenvolvimento da Matemática"*. Esses fatos fizeram com que o nome de Galois chegasse ao ápice do reconhecimento merecido.

2.1.2 Método algébrico para encontrar as raízes da equação polinomial do segundo grau.

Tomando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ segue que:
Dividindo toda equação por a temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Longrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Como o primeiro membro só tem termos formados pela incógnita x e o segundo têm somente a constante $-\frac{c}{a}$, então completaremos o quadrado somando a ambos os membros o termo $\frac{b^2}{4a^2}$.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Longrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Agora como temos um quadrado no primeiro membro vamos extrair a raiz quadrada em ambos os membros:

$$\sqrt[2]{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Longrightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a famosa fórmula para encontrar a solução da equação geral do segundo grau.

Exemplo 2.2. Resolva a equação $x^2+3x+2 = 0$ usando a fórmula de equação do segundo grau.

$$a = 1,\ b = 3 \text{ e } c = 2$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.2}}{2.1} \Longrightarrow = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Longrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -2.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{-2, -1\}.$$

2.1.3 Equação do Terceiro Grau.

Essa seção foi baseada em COSTA (2016).
Tartaglia supôs que a solução procurada era composta de 2 parcelas, e escreveu:

$$x = A + B \Rightarrow x^3 = (A+B)^3 \Rightarrow x^3 = A^3 + B^3 + 3AB\,(A+B)\,.$$

Como $A + B = x$, então

$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx \Longrightarrow x^3 - 3ABx - \left(A^3 + B^3\right) = 0.$$

Logo a equação acima é da forma $x^3 + px + q = 0$, que é a equação de Del Ferro-Tartaglia, onde:

$$p = -3AB \Longrightarrow A^3B^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad q = -\left(A^3 + B^3\right) \Longrightarrow A^3 + B^3 = -q$$

Desse modo temos que A^3 e B^3 são dois números dos quais conhecemos a soma e o produto, então eles podem ser encontrados através de uma equação do segundo grau. Pois dados:

$$u + v = S \quad e \quad uv = P.$$

Onde S e P são respectivamente a soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau. E como $v = S - x$, então substituindo v em $uv = P$ tem-se:

$$u\,(S-u) = P \Rightarrow -u^2 + uS - P = 0 \Rightarrow u^2 - uS + P = 0.$$

Isso permite concluir que A^3 e B^3 são as raízes desta equação:

$$u^2 - uS + P = 0.$$

Daí substituindo os valores conhecidos de $A^3 + B^3$, A^3B^3 na equação logo acima temos:

$$u^2 - (-q)\,u + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\triangle = q^2 - 4\,(1)\left(-\frac{p^3}{27}\right) &\Longrightarrow \\
\triangle = q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right) &\Longrightarrow \\
u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} &\Longrightarrow \\
u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - \left(-\frac{p^3}{27}\right)} &\Longrightarrow \\
u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}&.
\end{aligned}$$

Então,

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

O que implica,

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{e} \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

E como por hipótese $x = A + B$. Então:

$$x \;=\; \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Então, Tartaglia tendo encontrado a solução para a "Equação de Del Ferro", tentou reduzir toda equação de terceiro grau na mesma. Através do procedimento que descreveremos a seguir.

Dada a equação $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, com $a \neq 0$, e fazendo $y = m + h$ temos:

$$a\,(m+h)^3 + b\,(m+h)^2 + c\,(m+h) + d = 0 \Longrightarrow$$

$$a\,(m^3 + 3m^2h + 3mh^2 + h^3) + b\,(m^2 + 2mh + h^2) + c\,(m+h) + d = 0 \Longrightarrow$$

$$am^3 + m^2\,(3ah + b) + m\,(3ah^2 + 2bh + c) + (ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0$$

Agora para eliminarmos o termo de segundo grau da equação substituiremos h por $-\frac{b}{3a}$, pois $3ah + b = 0 \Rightarrow h = -\frac{b}{3a}$.

$$m^3 + m^2\left(\frac{3a\left(-\frac{b}{3a}\right) + b}{a}\right) + m\left(\frac{3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c}{a}\right) +$$

$$\left(\frac{a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d}{a}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$m^3 + m\left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Fazendo $p = \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)$ e $q = \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right)$ daí temos que: $m^3 + pm + q = 0$. Onde queríamos chegar, ou seja, mostramos que dada uma equação cúbica qualquer podemos reduzi-la a equação de "Equação de Del Ferro" que por sua vez possui solução.

Exemplo 2.3. Resolva a equação $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0$ usando o método de Cardano-Tartaglia. Comparando-a com a forma geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ usando as fórmulas obtidas para h, p e q segue que:

$$h = -\tfrac{b}{3a} \Longrightarrow h = 1, p = -\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{c}{a}\right) \Longrightarrow p = -6 \text{ e}$$
$$q = \tfrac{2}{27}\left(\tfrac{b}{a}\right)^3 - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{b}{a}\right)\left(\tfrac{c}{a}\right) + \left(\tfrac{d}{a}\right) \Longrightarrow q = -9$$

Logo, a equação cúbica reduzida $m^3 + pm + q = 0$ pode ser escrita como $m^3 - 6m - 9 = 0$. Aqui temos, $p = -6$ *e* $q = -9$. Logo, a solução pela fórmula de Cardano-Tartaglia é:

$$m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \Longrightarrow$$

$$m = \sqrt[3]{-\frac{9}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{9}{2} - \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^3}} \Longrightarrow$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \Longrightarrow$$

$$m = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}} \Longrightarrow$$

$$m = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \Longrightarrow$$

$$m = 3.$$

Como $x = m + h$, substituindo $m = 3$ e $h = 1$, obtemos $x = 4$.
Por simples substituição, constata-se que 4, realmente, é solução da equação

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 4 = 0.$$

As outras duas soluções podem ser encontradas pelo método da seção 2.1.2. E a solução geral da equação de quarto grau pode ser encontrada em (COSTA, 2016).

2.2 Definições e alguns resultados sobre polinômios.

Nesta seção apresentaremos resultados básicos sobre polinômios bem como teoremas mais elaborados que fazem parte dos resultados clássicos sobre resoluções de equações polinomiais.

Definição 2.1. Um monômio é uma expressão algébrica do tipo ax^n, tal que $n \in \mathbb{N}$ e $a, x \in \mathbb{C}$ onde a (chamado de coeficiente) é uma constante e x é uma variável.

Exemplo 2.4. $3x^2$ é um monômio, onde 3 é o coeficiente, x é a variável e 2 é o expoente de x.

Definição 2.2. Um polinômio por sua vez é uma expressão algébrica formada pela soma de monômios (chama-se de termos os monômios que compõem um polinômio) e pode ser escrito dessa forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0.$$

Sendo que $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...a_1, a_0$ são chamados de coeficientes do polinômio. Se $a_n \neq 0$, então dizemos que n é o grau do polinômio. E que a_n é o coeficiente líder.

Observação 2.1. Considerando o monômio geral ax^n definido inicialmente. E como definimos que um polinômio é uma soma de monômios e ax^n somado ao monômio 0 é igual a ax^n, então todo monômio é um polinômio.

Exemplo 2.5. Dado o polinômio $x^4 + 3x^2 + 2x + 6$ os seus coeficientes são respectivamente 1,3,2 e 6. O grau é 4 e portanto o coeficiente líder é 1.

Definição 2.3. Uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é do tipo polinomial quando existem números complexos $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ...a_1, a_0$ tais que, para todo $x \in \mathbb{C}$ tem-se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0.$$

Observação 2.2. Segundo PONTES (2013) a cada função polinomial é associada a um único polinômio e vice-versa, de forma que não há confusão em nos referirmos sem distinção às funções polinomiais ou aos polinômios. Podendo assim escrevermos o polinômio

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

como

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0.$$

A partir desse esclarecimento denotaremos de grau de um polinômio p qualquer de ∂p.

2.2.1 Operações com Polinômios

2.2.1.1 Igualdade de Polinômios

Dois polinômios p e q são iguais se, e somente se, os coeficientes deles forem ordenadamente iguais. Em outras palavras, dados

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x^1 + b_0$$

$p(x) = q(x)$ se, e somente se, $a_i = b_i$, $\forall i \in \{0, 1, 2..., n\}$.

Exemplo 2.6. O polinômio $3x^2 + 4x + 1$ é igual ao polinômio $ax^2 + bx + c$, se $a = 3, b = 4$ e $c = 1$.

2.2.1.2 Adição e subtração de polinômios.

Dados os dois polinômios p e q sua soma é dada por

$$(p \pm q)(x) = (a_n \pm b_n) x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1} + ... + (a_1 \pm b_1) x^1 + (a_0 \pm b_0).$$

Exemplo 2.7. Somar $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$ e $q(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$.

$$(p + q)(x) = (0 + 1) x^3 + (2 + 6) x^2 + (4 + 9) x + (1 + 7) \Longrightarrow$$

$$(p + q)(x) = x^3 + 8x^2 + 13x + 8.$$

Exemplo 2.8. Subtrair $q(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ de $p(x) = 2x^2 + 4x + 1$.

$$(p - q)(x) = (0 - 1) x^3 + (2 - 6) x^2 + (4 - 9) x + (1 - 7) \Longrightarrow$$

$$(p - q)(x) = -x^3 - 4x^2 - 5x - 6.$$

2.2.1.3 Propriedades dos polinômios em relação a soma.

Sendo p, q e r polinômios quaisquer, então as seguintes propriedades são válidas:

- Associativa $(p + q) + r = p + (q + r)$.
- Comutativa $p + q = q + p$.
- Existência do elemento neutro, o polinômio nulo.
- Existência do elemento oposto de p, o polinômio $-p$.

As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em IEZZI (1993).

2.2.1.4 Produto entre polinômios

O produto de $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ é o polinômio

$$(pq)(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_0 + a_1 b_0)\, x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)\, x^2 + ... + (a_m b_n)\, x^{m+n}.$$

Observação 2.3. O produto pq é um polinômio do tipo

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{m+n} x^{n+m}.$$

Onde os coeficientes c_k podem ser obtidos através do somatório

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0.$$

Exemplo 2.9. Multiplicar $p(x) = 2x + 1$ e $q(x) = x - 1$.

$$(pq)(x) = (2x+1)(x-1) = 2x(x-1) + 1(x-1) =$$

$$2x^2 - 2x + x - 1 \Longrightarrow (pq)(x) = 2x^2 - x - 1.$$

2.2.1.5 Propriedades dos polinômios em relação a multiplicação.

Sendo p, q e r polinômios quaisquer, então as seguintes propriedades são válidas

- Associativa $(pq)\, r = p\,(qr)$.
- Comutativa $p.q = q.p$.
- Existência do elemento neutro, que é o polinômio constante igual a um.
- Distributiva. $p(q + r) = pq + pr$.

As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em (MARQUES, 2017).

2.2.1.6 Divisão de Polinômios

Definição 2.4. Dados dois polinômios f(dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

1. $q.g + r = f$
2. $\partial r < \partial g$.

Observação 2.4. Quando $r = 0$ dizemos que a divisão é exata.

Exemplo 2.10. Quando dividimos $f(x) = x^2 - 2$ por $g(x) = x + 1$. obtemos $q = x - 1$ e $r = -1$. Que satisfazem as duas condições:

1. $qg + r = (x-1)(x+1) + (-1) = x^2 - 2 = f(x)$.
2. $\partial r = 0$ e $\partial g = 1 \Longrightarrow \partial r < \partial g$.

2.2.2 Teoremas e Alguns Resultados

Teorema 2.1. *(Teorema fundamental da álgebra) Todo polinômio p, de coeficientes complexos, de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa.*

Devido a complexidade desse teorema nós o aceitaremos sem sua respectiva demonstração, pois acabaríamos fugindo dos objetivos desse trabalho.

Exemplo 2.11. Considerando o polinômio $p(x) = x - 1$ o teorema 2.1 afirma que ele possui pelo menos uma raiz complexa, então fazendo $p(x) = 0$ nós temos que:

$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1.$$

Então de fato $p(x)$ possui uma raiz.

Teorema 2.2. *(Teorema do Resto) O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$.*

Demonstração. Aplicando a definição de divisão, temos $\forall x \in \mathbb{C}$:

$$p(x) = q(x)(x-a) + r.$$

Calculando o valor do polinômio $p(x)$ para $x = a$, temos:

$$p(a) = q(a)(a-a) + r \Longrightarrow p(a) = q(a).0 + r \Longrightarrow p(a) = r.$$

Chegamos, assim, no resultado desejado. ■

Exemplo 2.12. Calcule o resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ por $d(x) = x - 2$. Usando o teorema 2.2.

Dividindo $p(x)$ por $d(x)$ temos que:

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 4x + 9\right)(x-2) + 19.$$

Logo, o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é 19. Pelo Teorema do Resto nós temos que o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x)$ é $p(2)$, então calculando $p(2)$ temos:

$$p(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + (2) + 1 = 8 + 8 + 2 + 1 = 19.$$

Portanto, a solução corrobora com o Teorema do Resto.

Teorema 2.3. *(Teorema de D'Alambert) O número complexo k é raiz de um polinômio $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x-k)$.*

A demonstração desse teorema foi baseada em LOBO (2017).

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Como k é raiz de $p(x)$, então pelo **teorema 2.2** temos $p(k)=0$. Efetuando a divisão de $p(x)$ por $(x-k)$, temos que $p(x)=p(x-k)\,q(x)$. Assim, vemos que $p(x)$ é divisível por $(x-k)$. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $p(x)$ é divisível por $(x-k)$, ou seja, podemos escrever $p(x)=(x-k)\,q(x)$. Calculando $p(k)$, temos $p(k)=(k-k)\,q(k)=0.q(k)=0$, concluindo assim que k é raiz do polinômio $p(x)$. ∎

Exemplo 2.13. Considere o polinômio $p(x)=x^3-6x^2+11x-6$, então tomando o $x=1$ temos:

$$p(1)=(1)^3-6\,(1)^2+11\,(1)-6=1-6+11-6=0.$$

Portanto 1 é raiz de $p(x)$. Então pelo teorema de D'Alambert $x-1$ divide $p(x)$. Fazendo a divisão temos:

$$x^3-6x^2+11x-6=\left(x^2-5x+6\right)(x-1)\,.$$

Ou seja, de fato $x-1$ divide $p(x)$.

Agora considerem os polinômios $c(x)=x^2-5x+6$ e $d(x)=x-2$. Dividindo $c(x)$ por $d(x)$ temos:

$$x^2-5x+6=(x-3)\,(x-2)\,.$$

Logo podemos afirmar que $x-2$ divide $c(x)$. Então pelo Teorema de D'alambert 2 é raiz de $c(x)$. Para confirmarmos iremos substituir 2 em $c(x)$.

$$c(2)=(2)^2-5\,(2)+6=4-10+6=0.$$

Então, de fato 2 é raiz de $c(x)$.

Teorema 2.4. *(Teorema da Decomposição) Todo polinômio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1+a_0$ com, $a_n\neq 0$ pode ser decomposto e fatorado da seguinte forma $p(x)=a_n\,(x-r_1)\,(x-r_2)\,...\,(x-r_n)$, onde $r_1,r_2...,r_n$, são raízes complexas de $p(x)$ (podendo haver raízes repetidas). Exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única.*

Essa demonstração foi baseada em LOBO (2017).

Demonstração. Essa demonstração será dividida em duas partes, primeiro demonstraremos a existência dessa decomposição e logo após demonstraremos que essa decomposição é única.
Existência: De acordo com o T.F.A(Teorema Fundamental da Álgebra) $p(x)$ possui pelo

menos uma raiz complexa. Chamando essa raiz de r_1 e dividindo $p(x)$ por $(x - r_1)$, temos pelo Teorema de D'alambert que $p(x) = (x - r_1)\, q_1(x)$, onde $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1$ e coeficiente inicial a_n. Se $n-1 \geq 1$, então pelo T.F.A o polinômio $q_1(x)$ tem pelo menos uma raiz complexa r_2. Dividindo $p(x) = (x - r_1)\, q_1(x)$ por $(x - r_2)$, temos pelo Teorema de D'alambert que $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)\, q_2(x)$, onde $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente inicial a_n. Após a aplicação do T.F.A e do Teorema de D'alambert n vezes nesse mesmo sentido chegamos em $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) .q_n(x)$, onde $q_n(x)$ é um polinômio de grau $n - n = 0$ e coeficiente inicial a_n, ou seja, $q_n(x) = a_n$. Então $p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$. **Unicidade:** Supondo que $p(x)$ possua duas decomposições distintas $p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$ e $p(x) = a_n{}' (x - r_1{}')(x - r_2{}') \ldots (x - r_n{}')$. Comparando os termos de maior grau de ambas as expressões, chegamos que $a_n = a_n{}'$. Logo, para todo x pertencente aos complexos temos:

$$(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = (x - r_1{}')(x - r_2{}') \ldots (x - r_n{}')$$

Tomando $x = r_1$ temos:

$$0 = (x - r_1{}')(x - r_2{}') \ldots (x - r_n{}') .$$

Ou seja, pelo menos um dos números $r_1{}', r_2{}', \ldots, r_n{}'$ é igual a r_1. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $r_1 = r_1{}'$. Deste modo, na igualdade:

$$(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) = (x - r_1{}')(x - r_2{}') \ldots (x - r_n{}')$$

as fatores $(x - r_1)$ e $(x - r_1{}')$ são iguais. Fazendo o cancelamento desses termos, chegamos em:

$$(x - r_2) \ldots (x - r_n) = (x - r_2{}') \ldots (x - r_n{}') .$$

Repetindo esse argumento n vezes, faremos o cancelamento de cada termo correspondente, concluindo que $r_1 = r_1{}', r_2 = r_2{}' \ldots r_n = r_n{}'$, ou seja, exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única. ■

Exemplo 2.14. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ agora calculemos $p(1)$, $p(3)$ e $p(4)$.

$$p(1) = (1)^3 - 8(1)^2 + 19(1) - 12 = 1 - 8 + 19 - 12 = 0$$

$$p(3) = (3)^3 - 8(3)^2 + 19(3) - 12 = 27 - 72 + 57 - 12 = 0$$

$$p(4) = (4)^3 - 8(4)^2 + 19(4) - 12 = 64 - 128 + 76 - 12 = 0.$$

Como vimos 1,3 e 4 são raízes de $p(x)$, e como o grau de $p(x)$ é 3, então 1,3 e 4 são todas as raízes de $p(x)$. Logo pelo teorema anterior podemos decompor o polinômio como

$$p(x) = 1(x - 1)(x - 3)(x - 4) = (x - 1)(x - 3)(x - 4),$$

pois o coeficiente líder é 1 que é o nosso a_n .

Corolário 2.1. Toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$ admite n e somente n raízes complexas.

Demonstração. Considerando a equação polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

Vimos na parte da existência do teorema da decomposição que $p(x)$ admite $r_1, r_2, r_1, ..., r_n$, raízes distintas ou não, e provamos que são somente essas raízes na parte da unicidade. E como n é o número de raízes de $p(x)$, então fica demonstrado o corolário. ■

Exemplo 2.15. No exemplo 2.14 nós fatoramos o polinômio $p(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ que têm grau 3 e vimos que ele tem exatamente 3 raízes.

Teorema 2.5. *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi(b \neq 0)$, então também admite com raiz o número $z = a - bi(b \neq 0)$.*

A demonstração desse teorema foi baseada em IEZZI (1993).

Demonstração. Seja a equação $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$
De coeficientes reais que admite a raiz z isto é $r(z) = 0$, provemos que também $\overline{z}$ é raiz, ou seja, que $r(\overline{z}) = 0$.

$$r(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} ... + a_1(\overline{z})^1 + a_0 =$$

$$a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + ... + a_1\overline{z} + a_0 =$$

$$\overline{a_n}\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\overline{z^{n-2}} ... + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 =$$

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} ... + a_1 z^1 + a_0} = \overline{r(z)} = \overline{0} = 0$$

Logo, fica provado que para cada raiz complexa z, que o seu conjugado também é raiz de $r(x)$. ■

Exemplo 2.16. Considerando a equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$ e substituindo o número complexo $-\frac{i}{2}$ no seu primeiro membro temos que:

$$16\left(-\frac{i}{2}\right)^3 + 8\left(-\frac{i}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{i}{2}\right) + 2 = \frac{16i}{8} - \frac{8}{4} - 2i + 2 = 2i - 2 - 2i + 2 = 0.$$

Portanto, $-\frac{i}{2}$ é raiz da equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$. Então pelo **teorema 2.5** temos que o conjugado de $-\frac{i}{2}$, que é $\frac{i}{2}$, também é raiz dessa equação. Agora verificaremos se $\frac{i}{2}$ é de fato solução da equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$. Então substituindo $\frac{i}{2}$ na equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$ temos:

$$16\left(\frac{i}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{i}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{i}{2}\right) + 2 = -\frac{16i}{8} - \frac{8}{4} + 2i + 2 = -2i - 2 + 2i + 2 = 0.$$

Portanto, de fato o conjugado de $-\frac{i}{2}$ também é raiz da equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$.

Corolário 2.2. Toda equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar admite ao menos uma raiz real.

Demonstração. Pelo **corolário 2.1** sabemos que as equações de grau n possuem n raízes logo se a equação possui grau ímpar também possuem um número ímpar de raízes. Pelo **teorema 2.2**, as raízes complexas não reais ocorrem sempre aos pares, logo pelo menos uma dessas raízes é real. ■

Exemplo 2.17. Considerando a equação $16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$ do exemplo anterior vimos que seu grau é 3 que é ímpar, então pelo **corolário 2.2** ela possui pelo menos uma raiz real.

Teorema 2.6. *(Teorema das Raízes Racionais) Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$ com $a \neq 0$. Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$ com p e q primos entre si, é raiz desta equação, então, p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.*

A demonstração desse teorema foi baseada em HOLGADO (2016).

Demonstração. Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0$, então $x = \frac{p}{q}$. Assim, obtemos:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por q^n temos:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 p^1 q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

A partir deste ponto faremos duas análises:

1. Isolando $a_n p^n$ e colocando q em evidência temos:

$$a_n p^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p^1 q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

   Agora adote $A = (a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1 p^1 q^{n-2} + a_0 q^{n-1})$. Como por definição os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ e p e q são inteiros, então cada parcela que o compõe A é um produto de números inteiros, logo A também é inteiro. Daí segue que:

$$a_n p^n = -qA \Longrightarrow \frac{a_n p^n}{q} = -A.$$

   O que implica que q divide a_n ou q divide p^n, mas como por hipótese p e q são primos entre si, então q não divide p^n, logo q divide a_n.

2. Isolando $a_n q^n$ e colocando p em evidência temos:

$$a_0 q^n = -p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1 q^{n-1}\right)$$

Agora adote $B = (a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1 q^{n-1})$. Como por definição os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ e p e q são inteiros, então cada parcela que o compõe B é um produto de números inteiros logo B também é inteiro. Daí segue que:

$$a_0 q^n = -pB \Longrightarrow \frac{a_0 q^n}{p} = -B.$$

O que implica que p divide a_0 ou p divide q^n, mas como por hipótese p e q são primos entre si, então p não divide q^n, logo p divide a_0. Portanto, o teorema das raízes racionais está demonstrado. ■

Exemplo 2.18. Resolva a equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que se a equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ possui alguma raiz racional, então suas raízes são da forma $\frac{p}{q}$, onde p divide -1 e q divide 1. Como os divisores de -1 são -1 e 1 e os divisores de 1 são -1 e 1, então os valores que p pode assumir é -1 e 1 substituindo temos que as possíveis raízes racionais tem a forma $\frac{1}{q}$ e $\frac{-1}{q}$. Agora substituindo os valores de q nas frações temos que as possíveis raízes racionais da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ são $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{-1}$ e $\frac{-1}{1}$. Que após o jogo de sinais são -1 e 1. Para verificarmos se -1 é raiz da equação nós substituiremos ele no primeiro membro da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ e se o resultado for 0, então -1 é solução da equação. Então substituindo temos:

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -1 - 3 - 3 - 1 = -8 \neq 0.$$

Logo, -1 não é raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Agora verificaremos se 1 é solução da nossa equação. Portanto substituindo temos:

$$(1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

Portanto, 1 é a única raiz racional da equação $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Teorema 2.7. *(segunda fórmula de Moivre) Dados o número complexo $z = \| z \|$ $(\cos\theta + isen\theta)$, $\theta \in [0, 2k\pi[$ sendo $z \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, sendo $n \geq 2$, então a fórmula que encontra as n raízes complexas de z é:*

$$\sqrt[n]{z} = Z_k = \sqrt[n]{\| z \|}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\} \quad com$$

$$\| z \| = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\theta = \frac{a}{\| z \|} \quad e \quad sen\theta = \frac{b}{\| z \|}$$

onde a é a parte real do número complexo z e b é a parte imaginária.

A demonstração desse teorema foi inspirada em IEZZI (1993).

Demonstração. Como estamos procurando as raízes enésimas de z, então chamando uma raiz de z de w temos que

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z.$$

Sendo $z = \parallel z \parallel (\cos\theta + isen\theta)$ e $w = \parallel w \parallel (\cos\phi + isen\phi)$, então

$$w^n = z \Leftrightarrow (\parallel w \parallel)^n (\cos(n\phi) + isen(n\phi)) = \parallel z \parallel (\cos\theta + isen\theta).$$

Pela igualdade de dois números complexos, concluímos que $(\parallel w \parallel])^n = \parallel z \parallel$ o que implica que $\parallel w \parallel = \sqrt[n]{\parallel z \parallel}$. E também $n\phi = \theta + 2k\pi$, ou seja, $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$. Como as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, então os valores do seno e cosseno de $\frac{\theta}{n}$ e $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ são iguais. Logo

$$w = \sqrt[n]{z} = \parallel w \parallel (\cos\phi + isen\phi) =$$

$$Z_k = \sqrt[n]{\parallel z \parallel}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}.$$

Como $z = \parallel z \parallel (\cos\theta + isen\theta)$, então

$$z = \parallel z \parallel \cos\theta + \parallel z \parallel isen\theta.$$

Logo $a = \parallel z \parallel \cos\theta$ e $b = \parallel z \parallel sen\theta$ daí temos:

$$\cos\theta = \frac{a}{\parallel z \parallel} \quad \text{e} \quad sen\theta = \frac{b}{\parallel z \parallel}.$$

Logo, a fórmula de radiciação de números complexos está demonstrada.

Observação 2.5. Usamos apenas as raízes reais de $\sqrt[n]{\parallel z \parallel}$, pois nem se necessitássemos poderíamos usar as raízes complexas na demonstração da mesma.

■

Exemplo 2.19. Calcule $\sqrt[3]{8}$ no conjunto dos números complexos.

Pelo teorema da radiciação de números complexos temos:

$$Z_k = \sqrt[n]{\parallel z \parallel}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n-1\}.$$

Sabemos que a parte real a e parte imaginária b do número complexo 8 são $a = 8$ e $b = 0$. Portanto,

$$\parallel 8 \parallel = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8 \Longrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{8}{8} \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi$$

e

$$sen\theta = \frac{0}{8} \Leftrightarrow sen\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \pi + 2k\pi.$$

Se $\theta = \pi + 2k\pi$, então $\cos\theta = -1 \neq 1$ logo $\theta \neq \pi + 2k\pi$. Se $\theta = 0 + 2k\pi$, então $\cos\theta = 1$ e $sen\theta = 0$, logo $\theta = 0 + 2k\pi$. Porém pelo **teorema 2.7** $\theta \in [0, 2k\pi[$, então o único valor que θ pode assumir é $\theta = 0$. Temos também que $\sqrt[n]{\| z \|} = \sqrt[3]{8} = 2$ no conjunto dos números reais.

Agora, substituindo essas informações na segunda fórmula Moivre temos:

$$Z_k = 2\left[cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k \in \{0, 1, 2\} \Longrightarrow$$

$$Z_k = 2\left[cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k \in \{0, 1, 2\} \Longrightarrow$$

$$Z_0 = 2\left[cos\left(\frac{2.0\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2.0\pi}{3}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$Z_0 = 2\left[cos\left(0\right) + isen\left(0\right)\right] = 2$$

$$Z_1 = 2\left[cos\left(\frac{2.1\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2.1\pi}{3}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$Z_1 = 2\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 + i\sqrt{3}$$

$$Z_2 = 2\left[cos\left(\frac{2.2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2.2\pi}{3}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$Z_2 = 2\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -1 - i\sqrt{3}$$

Logo, o conjunto solução das raízes cúbicas de 8 é:

$$S = \left\{2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\right\}.$$

Observação 2.6. Quando usamos o k variando de 0 á $n - 1$ damos a volta completa no ciclo trigonométrico, logo se calcularmos $k = n$, $k = n + 1$, $k = n + 2$ e assim por diante veremos que as raízes se repetirão. Para averiguarmos isso nesse exemplo verificaremos o que ocorre quando $k = n = 3$.

$$Z_3 = 2\left[cos\left(\frac{2.3\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2.3\pi}{3}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$Z_3 = 2\left[cos\left(2\pi\right) + isen\left(2\pi\right)\right] = 2$$

Como vimos $Z_3 = Z_1$, ou seja, as raízes começam a se repetir quando tomamos $k > n - 1$. Como sabemos 2 é raiz cúbica de 8, pois $2^3 = 8$. Porém aceitar que $-1 + i\sqrt{3}$ e $-1 - i\sqrt{3}$ também são raízes cúbicas de 8, não é tão fácil, pois isso é um pouco difícil de visualizar. Pensando nisso averiguaremos se $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3 = 8$ e $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3 = 8$.

$$\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2\left(-1 + i\sqrt{3}\right) =$$

$$\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right)\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} - 2.3i^2 =$$

$$2 + 6 = 8$$

e

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^3 = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)^2\left(-1 - i\sqrt{3}\right) =$$

$$\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right)\left(-1 - i\sqrt{3}\right) = 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} - 2.3i^2 =$$

$$2 + 6 = 8.$$

Logo, $-1 + i\sqrt{3}$ e $-1 - i\sqrt{3}$ são raízes cúbicas de 8.

3 SOLUÇÕES ALGÉBRICAS DE ALGUMAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE GRAU N

Neste Capítulo tentaremos encontrar fórmulas para as equações polinomiais de grau N, $p_{w,q}(x)=0$ e $p_{w,-q}(x)=0$, já abordadas na introdução, sendo que a P.G. (progressão geométrica) $\alpha=(q^{2w+2},q^{2w+1},...,q^2,q)$ é formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$ e a P.G $\beta=(q^{2w+2},-q^{2w+1},...,q^2,-q)$ é formada pela pelos coeficientes de $p_{w,-q}(x)$. E para tanto iniciaremos realizando alguns esclarecimentos das notações usadas nesse trabalho. Depois, faremos uma análise sobre o comportamento dessas equações quando elas variam em função de N onde $N=2w+1$. E logo após, como estratégia de investigação de pesquisa tentaremos alcançar os nossos objetivos específicos que irão viabilizar o alcance de nosso objetivo geral.

3.1 Esclarecimentos sobre as notações utilizadas

Antes de iniciarmos uma análise mais profunda das equações abordadas na introdução desse trabalho, queremos que o leitor se familiarize com as notações adotadas e entendam os motivos pelos quais as adotamos. Considere os polinômios

$$p_{w,q}(x)=q^1x^0+q^2x^1+...+q^{2w+1}x^{2w}+q^{2w+2}x^{2w+1} \tag{3.1}$$

e

$$p_{w,-q}(x)=(-q)^1x^0+(-q)^2x^1+...+(-q)^{2w+1}x^{2w}+(-q)^{2w+2}x^{2w+1}. \tag{3.2}$$

Agora observem que eles podem ser escritos através dos somatórios

$$\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i=q^1x^0+q^2x^1+...+q^{2w+1}x^{2w}+q^{2w+2}x^{2w+1}=p_{w,q}(x)$$

e

$$\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i=(-q)^1x^0+(-q)^2x^1+...+(-q)^{2w+1}x^{2w}+(-q)^{2w+2}x^{2w+1}=p_{w,-q}(x).$$

Onde $i\in\{0,1,2,3...,2w-1,2w,2w+1\}$, w e $q\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{C}$ e $q>1$. O x é uma variável e q é uma constante, porém arbitrária, podendo assumir valores apenas em exemplificações.

Decidimos adotar os somatórios para representar os polinômios $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$ por pragmatismo, pois é mais prático escrever $p_{w,q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^i$ e $p_{w,-q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i$ do que escrever os polinômios (3.1) e (3.2) respectivamente. Contudo, isso não quer dizer que deixaremos de expandir os somatórios quando for conveniente.

Outra notação que pode causar estranheza, e consequentemente pode levar o leitor a desistir de compreender nosso trabalho, é a notação $p_{w,q}(x)$, pois quase toda a literatura que trabalha com polinômios, os nomeiam, apenas com uma letra do nosso alfabeto. Por exemplo os livros nomeiam um devido polinômio de $p(x)$. Porém nossa notação justifica-se por dois motivos. O primeiro é por que utilizaremos a notação $p_{w,q}(x)$ para representar n polinômios e o segundo é o fato de que essa notação acrescentará mais rigor ao tratamento dos polinômios apresentados posteriormente. Explicaremos melhor nossa justificativa no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1. Considere que o polinômio $\sum\limits_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ foi nomeado de $p(x)$. Agora façamos $w = 0$:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^i =$$

$$q^{0+1}x^0 + q^{1+1}x^1 = q + q^2x \Longrightarrow$$

$$p(x) = q + q^2x. \tag{3.3}$$

Tomando $w = 1$ temos:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 1+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{3} q^{i+1}x^i =$$

$$q^{0+1}x^0 + q^{1+1}x^1 + q^{2+1}x^2 + q^{3+1}x^3 = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3 \Longrightarrow$$

$$p(x) = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3. \tag{3.4}$$

Comparando a equação (3.3) com a equação (3.4) temos que, $p(x) = q + q^2x$ e $p(x) = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3$. O que implica que $q + q^2x = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3$ o que é um absurdo, pois de acordo com as condições de igualdade de polinômios das páginas 24 e 25, $q + q^2x$ é diferente de $q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3$. Porém se nomearmos o polinômio $\sum\limits_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ de $p_{w,q}(x)$ essa contradição não ocorre. E é o que mostraremos agora.

Fazendo $w = 0$ temos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i \Longrightarrow p_{0,q}(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^i =$$

$$q^{0+1}x^0 + q^{1+1}x^1 = q + q^2x \Longrightarrow$$

$$p_{0,q}(x) = q + q^2x. \tag{3.5}$$

Tomando $w = 1$ temos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i \Longrightarrow p_{0,q}(x) \Longrightarrow p_{1,q}(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 1+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{3} q^{i+1}x^i =$$

$$q^{0+1}x^0 + q^{1+1}x^1 + q^{2+1}x^2 + q^{3+1}x^3 = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3 \Longrightarrow$$

$$p_{1,q}(x) = q + q^2x + q^3x^2 + q^4x^3. \tag{3.6}$$

Comparando a equação (3.5) com a equação (3.6) verificamos que não existe nenhuma contradição, ou seja, a notação que adotada, $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$, deixa claro que os dois polinômios comparados, $p_{0,q}(x)$ e $p_{1,q}(x)$ são diferentes, o que não acontece quando a notação adotada é $p(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$. Portanto fica justificado o motivo de utilizarmos o índice w em $p_{w,q}(x)$.

Agora para justificarmos a utilização do índice q em $p_{w,q}(x)$ e explicarmos sua utilização, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 3.2. Considere que o polinômio $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ foi nomeado de $p_w(x)$. Agora façamos $w = 0$ e $q = 2$:

$$p_w(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 2^{i+1}x^i = p_0(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} 2^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} 2^{i+1}x^i =$$

$$2^{0+1}x^0 + 2^{1+1}x^1 = 2 + 2^2x = 2 + 4x \Longrightarrow$$

$$p_0(x) = 2 + 4x. \tag{3.7}$$

Agora considerando $w = 0$ $q = 3$ temos:

$$p_w(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 3^{i+1}x^i = p_0(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 3^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} 3^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} 3^{i+1}x^i =$$

$$3^{0+1}x^0 + 3^{1+1}x^1 = 3 + 3^2x = 3 + 9x \Longrightarrow$$

$$p_0(x) = 3 + 9x. \tag{3.8}$$

Comparando a equação (3.7) com a (3.8) podemos concluir que o polinômio $2+4x = 3+9x$ o que é um absurdo. O que mostra que a notação $p_0(x)$, a rigor, é insuficiente. Então vejamos o que ocorre quando utilizamos a notação $p_{w,q}(x)$.

Considere que o polinômio $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ foi nomeado de $p_{w,q}(x)$. Agora façamos $w = 0$ e $q = 2$:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 2^{i+1}x^i = p_{0,2}(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} 2^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} 2^{i+1}x^i =$$

$$2^{0+1}x^0 + 2^{1+1}x^1 = 2 + 2^2x = 2 + 4x \Longrightarrow$$

$$p_{0,2}(x) = 2 + 4x. \tag{3.9}$$

Agora considerando $w = 0$ $q = 3$ temos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 3^{i+1}x^i = p_{0,3}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} 3^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} 3^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} 3^{i+1}x^i =$$

$$3^{0+1}x^0 + 3^{1+1}x^1 = 3 + 3^2x = 3 + 9x \Longrightarrow$$

$$p_{0,3}(x) = 3 + 9x. \tag{3.10}$$

Comparando as equações (3.9) e (3.10) nós vemos que quando usamos a notação $p_{w,q}(x)$, não há contradição, pois $p_{0,2}(x)$ não se confunde com $p_{0,3}(x)$. Portanto o uso do índice q também justifica-se.

Observação 3.1. A notação $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i$ se comporta de modo análogo a notação $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$. Sendo a única distinção, o fato de termos como índice, na primeira $-q$, em vez de q. Por isso não fizemos exemplos para justificar a notação $p_{w,-q}(x)$.

3.2 Definições e análises iniciais.

Tendo feito esclarecimentos sobre as notações utilizadas. Iniciaremos esta seção definindo os problemas a serem resolvidos, bem como as estratégias adotadas para solução dos mesmos.

Definição 3.1. Considerando os polinômios

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 + ... + q^{2w+1}x^{2w} + q^{2w+2}x^{2w+1}$$

e

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = (-q)^1 x^0 + (-q)^2 x^1 + ... + (-q)^{2w+1} x^{2w} + (-q)^{2w+2} x^{2w+1}.$$

Sendo que $w, q \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{C}$ tal que $q > 1$, com $N = 2w + 1$. Onde x é a variável e q é uma constante. E $i \in \{0, 1, 2, 3..., 2w - 1, 2w, 2w + 1\}$.

Observação 3.2. Os termos dos polinômios $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$, de acordo com com a **observação 2.1**, também são polinômios. E na **seção 2.2** vimos que os polinômios possuem a propriedade comutativa. Logo, podemos reescrever os polinômios $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$ da forma que segue.

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = q^{2w+2}x^{2w+1} + q^{2w+1}x^{2w} + ... + q^2x^1 + q^1x^0$$

e

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = (-q)^{2w+2} x^{2w+1} + (-q)^{2w+1} x^{2w} + ... + (-q)^2 x^1 + (-q)^1 x^0.$$

E é com essa forma que trabalharemos com os polinômios $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$ sempre que acharmos necessário.

Tendo mostrado a forma dos polinômios com a qual iremos trabalhar. Agora devemos observar algumas de suas características e alguns exemplos. Analisando os coeficientes de $p_{w,q}(x)$ veremos que eles formam a progressão geométrica, decrescente $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$, onde $r_1 = \frac{1}{q}$ é sua razão, q^{2w+2} é o primeiro termo e q é o último termo da P.G. α. Já os coeficientes de $p_{w,-q}(x)$ formam a progressão geométrica alternada $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$ onde $r_2 = -\frac{1}{q}$ é sua razão, q^{2w+2} é o primeiro termo e $-q$ é seu último termo da P.G. β.

Continuando a nossa análise, podemos afirmar que $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$ possuem sempre o grau ímpar independente do valor de w, pois como o seu grau é da forma $2w+1$ e como vimos na **definição (3.1)** , w pertence aos naturais.

Exemplo 3.3. Fazendo $w = 2$ temos:

$$p_{2,q}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{5} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 + q^3x^2 + q^4x^3 + q^5x^4 + q^6x^5 \Longrightarrow$$

$$p_{2,q}(x) = q^6x^5 + q^5x^4 + q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q.$$

Daí, podemos ver que i varia de 0 à 5, onde o maior valor que i assume é $5 = 2.2 + 1 = 2w + 1$ o que coincide exatamente com com o grau de $p_{2,q}(x)$. A progressão geométrica formada pelos seus coeficientes em ordem decrescente é $(q^6, q^5, q^4, q^3, q^2, q)$ e sua razão é $\frac{1}{q}$. O primeiro termo da razão é $q^6 = q^{2.2+2} = q^{2w+2}$. E o último termo da P.G. (progressão geométrica) é q. O caso para o polinômio $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i$ é análogo a este.

Como o limite inferior de $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ e $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i$ é $i = 0$ e o menor valor que w pode assumir é zero, então o valor mínimo que o limite superior dos somatórios $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ e $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i$, que geram os polinômios a partir de w, podem assumir é $2.0 + 1 = 1$. E isso tudo quer dizer que quando w assume o seu menor valor os polinômios gerados são:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i \Longrightarrow p_{0,q}(x) = \sum_{i=0}^{2\cdot 0+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^i =$$

$$q^{0+1}x^0 + q^{1+1}x^1 = q + q^2x \Longrightarrow$$

$$p_{0,q}(x) = q^2x + q \tag{3.11}$$

e

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i \Longrightarrow p_{0,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2.0+1} (-q)^{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{1} (-q)^{i+1} x^i =$$

$$(-q)^{0+1} x^0 + (-q)^{1+1} x^1 = -q + q^2x \Longrightarrow$$

$$p_{0,-q}(x) = q^2x - q. \tag{3.12}$$

Então podemos ver que ambos os polinômios gerados quando w assume o seu valor mínimo, são polinômios que possuem, apenas dois termos cada um. Essas informações junto com o fato de que os limites superiores de $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ e $\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i$, que é $2w+1$, que como vimos é ímpar, ou seja, ele aumenta sempre de dois em dois. Podemos concluir que a quantidade de termos tanto de $p_{w,q}(x)$ quanto de $p_{w,-q}(x)$ serão sempre pares, independente do valor de w. Agora iremos expor alguns exemplos dos polinômios descritos até agora.

Exemplo 3.4. Fazendo $w = 2$ e $q = 3$ temos:

$$p_{2,3}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} 3^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{5} 3^{i+1}x^i = 3^1x^0 + 3^2x^1 + 3^3x^2 + 3^4x^3 + 3^5x^4 + 3^6x^5 \Longrightarrow$$

$$p_{2,3}(x) = 3^6x^5 + 3^5x^4 + 3^4x^3 + 3^3x^2 + 3^2x + 3 \Longrightarrow$$

$$p_{2,3}(x) = 729x^5 + 243x^4 + 81x^3 + 27x^2 + 9x + 3. \tag{3.13}$$

Daí, podemos ver que i varia de 0 à 5, onde o maior valor que i assume é $5 = 2.2 + 1 = 2w + 1$, o que coincide exatamente com com o grau de $p_{2,3}(x)$. A progressão geométrica formada pelos seus coeficientes em ordem decrescente é $(729, 243, 81, 27, 9, 3)$ e sua razão é $\frac{1}{3}$ que é igual à $\frac{1}{q}$ o primeiro termo da razão é $729 = 3^6 = q^{2w+2}$ e o último termo da P.G (progressão geométrica) é 3 que por sua vez é igual à q.

Fazendo $w = 0$ e $q = 2$ temos:

Exemplo 3.5.

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i \Longrightarrow p_{0,-2}(x) = \sum_{i=0}^{2.0+1} (-2)^{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{1} (-2)^{i+1} x^i =$$

$$(-2)^{0+1} x^0 + (-2)^{1+1} x^1 = -2 + 2^2x \Longrightarrow$$

$$p_{0,-2}(x) = 4x - 2. \tag{3.14}$$

Daí podemos ver que i varia de 0 à 1, onde o maior valor que i assume é $1 = 2w + 1$ o que coincide exatamente com com o grau de $p_{0,-2}(x)$. A progressão geométrica formada pelos seus coeficientes é $(4, -2)$ e sua razão é $-\frac{1}{2}$ que é igual à $-\frac{1}{q}$.

Estando bem definidos os polinômios $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$. E após termos realizado uma análise preliminar dos mesmos. Iremos para próxima etapa.

3.3 Seguindo os objetivos

Nosso objetivo geral, que tentaremos alcançar nessa seção, é encontrar as fórmulas algébricas, caso sejam solúveis por radicais, que solucionem as equações abaixo dentro do conjunto dos números complexos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 + ... + q^{2w+1}x^{2w} + q^{2w+2}x^{2w+1} = 0$$

e

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i = (-q)^1x^0 + (-q)^2x^1 + ... + (-q)^{2w+1}x^{2w} + (-q)^{2w+2}x^{2w+1} = 0.$$

Onde $i \in \{0, 1, 2, 3..., 2w - 1, 2w, 2w + 1\}$, w e $q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}$ e $q > 1$. O x é uma variável e q é uma constante, porém arbitrária, podendo assumir valores apenas em exemplificações.

As próximas etapas da pesquisa consistem em seguir os objetivos específicos citados na introdução deste trabalho. Para tanto verificaremos se os polinômios $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$ possuem alguma uma raiz real.

Na **seção 3.2** vimos que os graus dos polinômios $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ *e* $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i$ são sempre ímpares independente do valor de w, então pelo **corolário 2.2** podemos afirmar que $p_{w,q}(x)$ e $p_{w,-q}(x)$ possuem pelo menos uma raiz real cada. Portanto agora iremos tentar encontrar essa(s) raíz(es) reais. Para isso analisaremos os comportamentos das equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$ quando w varia.

Conforme vimos na introdução desse trabalho, fórmulas algébricas para equações polinomiais até o quarto grau já existem, portanto encontrar outras fórmulas que deem a solução das equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$ até o quarto grau não se justifica. Porém para lançar luz sobre o comportamento dessas equações, nós iniciaremos a análise das mesmas a partir das equações de 1º grau depois de 3º grau e só posteriormente iremos para as de 5º grau. Essa análise será feita resolvendo essas equações de grau um até grau cinco e observando o comportamento dos seus respectivos conjuntos soluções.

Iniciaremos analisando a equação $p_{w,q}(x) = 0$. Agora tomando $w = 0$ temos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0 \Longrightarrow p_{0,q}(x) = \sum_{i=0}^{2*0+1} q^{i+1}x^i =$$

$$\sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 = q^2x + q \Longrightarrow$$

$$p_{0,q}(x) = q^2x + q = 0 \Longrightarrow \tag{3.15}$$

$$q^2x + q = 0 \Longrightarrow qx + 1 = 0 \Longrightarrow qx = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{q}.$$

Logo, o conjunto solução de $p_{0,q}(x)$ é

$$S_1 = \left\{-\frac{1}{q}\right\}. \tag{3.16}$$

Agora, fazendo $w = 1$ temos:

$$p_{1,q}(x) = \sum_{i=0}^{2.1+1} q^{i+1}x^i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{3} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 + q^3x^2 + q^4x^3 \Longrightarrow$$

$$p_{1,q}(x) = q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q = 0 \tag{3.17}$$

$$q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q = 0 \Longrightarrow q\left(q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$q = 0 \quad \text{ou} \quad q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0.$$

Porém, por definição

$$q > 0 \Longrightarrow q \neq 0 \Longrightarrow q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0.$$

Como q é um número natural, então a equação $q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0$ possui todos os coeficientes naturais. Daí, pelo Teorema das Raízes Racionais as possíveis raízes racionais da equação $q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0$, são ± 1, $\frac{\pm 1}{q}$, $\frac{\pm 1}{q^2}$, $\frac{\pm 1}{q^3}$. Como uma da possíveis raízes racionais de $p_{1,q}(x)$ é $-\frac{1}{q}$ e ela é raiz de $p_{0,q}(x)$, então iniciaremos a verificação por ela. Então, substituindo $-\frac{1}{q}$ na equação $q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0$ temos:

$$q^3\left(-\frac{1}{q}\right)^3 + q^2\left(-\frac{1}{q}\right)^2 + q\left(-\frac{1}{q}\right) + q = -q + q - q + q = 0.$$

Então, de fato $-\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{1,q}(x) = 0$, logo pelo Teorema de D'alambert temos que $p_{1,q}(x)$ é divisível por $x - \left(-\frac{1}{q}\right)$. Daí segue que:

$$\frac{p_{1,q}(x)}{x - \left(-\frac{1}{q}\right)} = \frac{q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q}{x + \frac{1}{q}} = q^4x^2 + q^2 \tag{3.18}$$

Portanto, pelo algoritmo da divisão podemos afirmar que:

$$p_{1,q}(x) = \left(q^4x^2 + q^2\right)\left(x + \frac{1}{q}\right).$$

Fazendo $p_{1,q}(x) = 0$, temos:

$$\left(q^4x^2 + q^2\right)\left(x + \frac{1}{q}\right) = 0 \Longrightarrow \left(q^4x^2 + q^2\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Resolvendo a primeira equação temos:

$$q^4x^2 + q^2 = 0 \Longrightarrow q^2x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = -\frac{1}{q^2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt[2]{-\frac{1}{q^2}} = \pm\frac{i}{q}.$$

Logo, o conjunto solução da equação $p_{1,q}(x) = 0$, é

$$S_2 = \left\{-\frac{1}{q}, \pm\frac{i}{q}\right\}. \tag{3.19}$$

Portanto, a única solução real de $p_{1,q}(x) = 0$ é $-\frac{1}{q}$.

Estudaremos agora a equação, $p_{2,q}(x) = 0$.

$$p_{2,q}(x) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{2.2+1} q^{i+1}x^i = \sum_{i=0}^{5} q^{i+1}x^i = q^1x^0 + q^2x^1 + q^3x^2 + q^4x^3 + q^5x^4 + q^6x^5 = 0 \Longrightarrow$$

$$p_{2,q}(x) = q^6x^5 + q^5x^4 + q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q = 0 \Longrightarrow \tag{3.20}$$

$$q^5x^5 + q^4x^4 + q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0$$

Então pelo pelo Teorema das Raízes racionais as possíveis raízes racionais da equação $q^5x^5 + q^4x^4 + q^3x^3 + q^2x^2 + qx + 1 = 0$ são ±1, $\frac{\pm1}{q}$, $\frac{\pm1}{q^2}$, $\frac{\pm1}{q^3}$, $\frac{\pm1}{q^4}$, $\frac{\pm1}{q^5}$. Como uma da possíveis raízes racionais de $p_{2,q}(x)$ é $-\frac{1}{q}$ e ela também é raiz de $p_{0,q}(x)$ e de $p_{1,q}(x)$. Então iniciaremos a verificação substituindo $-\frac{1}{q}$ na equação $q^5x^5+q^4x^4+q^3x^3+q^2x^2+qx+1 = 0$.

$$q^5\left(-\frac{1}{q}\right)^5 + q^4\left(-\frac{1}{q}\right)^4 + q^3\left(-\frac{1}{q}\right)^3 + q^2\left(-\frac{1}{q}\right)^2 + q\left(-\frac{1}{q}\right) + q =$$

$$-q + q - q + q - q + q = 0 \Longrightarrow p_{2,q}\left(-\frac{1}{q}\right) = q^6\left(-\frac{1}{q}\right)^5 + q^5\left(-\frac{1}{q}\right)^4 +$$

$$q^4\left(-\frac{1}{q}\right)^3 + q^3\left(-\frac{1}{q}\right)^2 + q^2\left(-\frac{1}{q}\right) + q = -q + q - q + q - q + q = 0.$$

Então de fato $-\frac{1}{q}$ é uma solução da equação $p_{2,q}(x) = 0$. Logo, pelo Teorema de D'alambert temos que $p_{2,q}(x)$ é divisível por $x - \left(-\frac{1}{q}\right)$. Daí segue que:

$$\frac{p_{2,q}(x)}{x - \left(-\frac{1}{q}\right)} = \frac{q^6x^5 + q^5x^4 + q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q}{x + \frac{1}{q}} = q^6x^4 + q^4x^2 + q^2 \tag{3.21}$$

Portanto, pelo algoritmo da divisão, podemos afirmar que $p_{2,q}(x) = (q^6x^4 + q^4x^2 + q^2)\left(x + \frac{1}{q}\right)$.
Fazendo $p_{2,q}(x) = 0$, temos:

$$\left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right)\left(x + \frac{1}{q}\right) = 0 \Longrightarrow \left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right) = 0 \quad ou \quad \left(x + \frac{1}{q}\right) = 0$$

Solucionando a primeira equação temos:

$$\left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right) = 0 \Rightarrow q^4x^4 + q^2x^2 + 1 = 0.$$

Fazendo $y = x^2$ e substituindo na equação biquadrada acima temos:

$$q^4y^2 + q^2y + 1 = 0 \Rightarrow a = q^4, b = q^2 \quad \text{e} \quad c = 1 \Rightarrow \triangle = \left(q^2\right)^2 - 4\left(q^4\right)(1) = -3q^4.$$

Como $y = \frac{-b\pm\sqrt{\triangle}}{2a}$, então

$$y = \frac{-q^2 \pm \sqrt{-3q^4}}{2q^4} = \frac{-q^2 \pm iq^2\sqrt{3}}{2q^4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2q^2} \Rightarrow y = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}.$$

Como $y = x^2$, então segue que:

$$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}.$$

O que implica que

$$x = \pm\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2}} \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}}.$$

E que

$$x = \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

Logo o conjunto solução da equação $p_{2,q}(x) = 0$ é dado por:

$$S_3 = \left\{-\frac{1}{q}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}\right\}. \tag{3.22}$$

Portanto, $-\frac{1}{q}$ é a única solução real da equação $p_{2,q}(x) = 0$.

Após observarmos as equações $p_{0,q}(x) = 0$, $p_{1,q}(x) = 0$ e $p_{2,q}(x) = 0$ que são respectivamente as equações (3.15), (3.17) e (3.20). E seus conjuntos soluções S_1, S_2 e S_3 que podem serem vistos em (3.16), (3.19) e (3.22). Pudemos perceber dois claros padrões. O primeiro é que $-\frac{1}{q}$ é solução das três equações analisadas. O segundo padrão que conseguimos enxergar foi que $-\frac{1}{q}$ é a única solução real das equações $p_{0,q}(x) = 0$, $p_{1,q}(x) = 0$ e $p_{2,q}(x) = 0$. O que nos leva a conjecturar que $-\frac{1}{q}$ é solução da equação

$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ para todo w pertencente aos naturais. E que $-\frac{1}{q}$ é a única solução real de $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ também para todo w.

Contudo não podemos verificar a segunda conjectura sem antes averiguarmos a veracidade da primeira, pois se a primeira é falsa a segunda também será. Perceba que se conseguíssemos mostrar que $-\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$, para todo w pertencente aos naturais, poderíamos decompor o polinômio $p_{w,q}(x)$. E isso nos ajudaria a avançar no nosso objetivo de encontrar uma fórmula que resolva a equação $p_{w,q}(x) = 0$ porque essa possível decomposição pode ter uma forma mais fácil de se trabalhar. Então, logo após a importante observação, iniciaremos uma verificação da primeira conjectura através da **proposição 3.1**.

Observação 3.3. Considere q fixo em todas as demonstrações deste trabalho.

Proposição 3.1. *O número* $-\frac{1}{q}$ *é solução da equação* $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ *para todo* w *e* q *naturais, tal que* $q > 1$.

Demonstração. Para $w = 0$ a conjectura é válida, pois já mostramos anteriormente que $p_{0,q}\left(-\frac{1}{q}\right) = 0$.

Fazendo $w = k$ suponha que $p_{w,q}\left(-\frac{1}{q}\right) = 0$ para todo w natural, o que equivale a dizer que:

$$\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^i =$$

$$q^{2k+2}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+1} + q^{2k+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k} + ... + q^3\left(-\frac{1}{q}\right)^2 + q^2\left(-\frac{1}{q}\right)^1 + q^1\left(-\frac{1}{q}\right)^0 = 0$$

Mostraremos agora que para $k+1$ também é válida.

$$\sum_{i=0}^{2(k+1)+1} q^{i+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^i = \sum_{i=0}^{2k+3} q^{i+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^i = q^{2k+4}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + q^{2k+3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+2} +$$

$$q^{2k+2}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+1} + q^{2k+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k} + ... + q^3\left(-\frac{1}{q}\right)^2 + q^2\left(-\frac{1}{q}\right)^1 + q^1\left(-\frac{1}{q}\right)^0 =$$

$$\left[q^{2k+4}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + q^{2k+3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right] +$$

$$\left[q^{2k+2}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+1}+q^{2k+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k}+...+q^{3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2}+q^{2}\left(-\frac{1}{q}\right)^{1}+q^{1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{0}\right]=$$

$$\left[q^{2k+4}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+3}+q^{2k+3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right]+\left[\sum_{i=0}^{2k+1}q^{i+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{i}\right]$$

Como por hipótese de indução $\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}\left(-\frac{1}{q}\right)^{i}=0$, então segue que:

$$\left[q^{2k+4}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+3}+q^{2k+3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right]+[0]=q^{2k+4}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+3}+q^{2k+3}\left(-\frac{1}{q}\right)^{2k+2}=$$

$$q^{2k+4}\left(\frac{-1}{q}\right)^{2k+3}+q^{2k+3}\left(\frac{-1}{q}\right)^{2k+2}=q^{2k+4}\frac{(-1)^{2k+3}}{(q)^{2k+3}}+q^{2k+3}\frac{(-1)^{2k+2}}{(q)^{2k+2}}=$$

$$q\,(-1)^{2k+3}+q\,(-1)^{2k+2}=q^{2k+4}\frac{-1}{q^{2k+3}}+q^{2k+3}\frac{1}{q^{2k+2}}=$$

$$-q+q=0$$

Logo a sentença também é válida para $k+1$. Portanto, fica provado pelo princípio da indução finita que $-\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,q}(x)=0$, para todo w pertencente aos naturais. ■

Já que ficou provado pela **proposição 3.1** que $-\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,q}(x)=0$, para todo w pertencente aos naturais. Então pelo Teorema de D'alambert $x+\frac{1}{q}$ divide o polinômio $p_{w,q}(x)$. Logo para decompor o polinômio $p_{w,q}(x)$ nós precisamos realizar a divisão de $p_{w,q}(x)$ por $x+\frac{1}{q}$, mas como se trata de um polinômio de grau N a simples divisão por si só não resolve o problema. Então nós temos que descobrir por meio de testes qual será o possível resultado dessa divisão e depois tentar demonstrá-la por indução finita. Contudo nós já temos da equação (3.18), que $p_{1,q}(x)$ dividido por $\left(x+\frac{1}{q}\right)$ é igual a $q^4x^2+q^2$ e da (3.21) que $p_{2,q}(x)$ dividido por $\left(x+\frac{1}{q}\right)$ é igual a $q^6x^4+q^4x^2+q^2$. O que nos levou a conjecturar que

$$\frac{\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^{i}}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}=\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$$

$\forall\ w \in \mathbb{N}$. O que equivale a provar que:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^{i},$$

$\forall\ w \in \mathbb{N}$. E é isso que provaremos na proposição abaixo.

Proposição 3.2. $\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^{i}$, $\forall\ w \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. Primeiro verifiquemos para $w = 0$, daí temos:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i} = \left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{0} q^{2i+2}x^{2i} = \left(x+\frac{1}{q}\right)q^2x^0 = q^2x+q.$$

Agora, tomando o segundo membro da equação temos:

$$\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^{i} = \sum_{i=0}^{2.0+1} q^{i+1}x^{i} = \sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^{i} = q^2x+q.$$

Logo, podemos concluir que para $w = 0$ a sentença é verdadeira.

Fazendo $w = k$ considere a hipótese $\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum\limits_{i=0}^{k} q^{2i+2}x^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i}$. De forma expandida nossa hipótese de indução é:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+2}x^{2k} + q^{2k}x^{2k-2} + ... + q^6x^4 + q^4x^2 + q^2x^0\right) =$$

$$q^{2k+2}x^{2k+1} + q^{2k+1}x^{2k} + ... + q^3x^2 + q^2x^1 + q^1x^0$$

Agora, mostraremos que a afirmativa também é verdadeira para $k+1$. Isso implica que temos, que mostrar que:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{k+1} q^{2i+2}x^{2i} = \sum_{i=0}^{2k+3} q^{i+1}x^{i}.$$

Para tanto iniciaremos pelo primeiro membro e tentaremos chegar no segundo.

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{k+1} q^{2i+2}x^{2i} =$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2(k+1)+2}x^{2(k+1)} + q^{2k+2}x^{2k} + q^{2k}x^{2k-2} + ... + q^6x^4 + q^4x^2 + q^2x^0\right) =$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+2} + q^{2k+2}x^{2k} + q^{2k}x^{2k-2} + ... + q^6x^4 + q^4x^2 + q^2x^0\right) =$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left[\left(q^{2k+4}x^{2k+2}\right) + \left(q^{2k+2}x^{2k} + q^{2k}x^{2k-2} + ... + q^6x^4 + q^4x^2 + q^2x^0\right)\right] =$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left[\left(q^{2k+4}x^{2k+2}\right) + \left(\sum_{i=0}^{k} q^{2i+2}x^{2i}\right)\right] =$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+2}\right)+\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{k}q^{2i+2}x^{2i}\right)$$

Utilizando a hipótese de indução temos que:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+2}\right)+\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{k}q^{2i+2}x^{2i}\right)=\left(x+\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+2}\right)+\sum_{i=0}^{2k+1}q^{i+1}x^{i}=$$

$$\left(q^{2k+4}x^{2k+3}+q^{2k+3}x^{2k+2}\right)+\left(q^{2k+2}x^{2k+1}+q^{2k+1}x^{2k}+...+q^{3}x^{2}+q^{2}x^{1}+q^{1}x^{0}\right)=$$

$$q^{2k+4}x^{2k+3}+q^{2k+3}x^{2k+2}+q^{2k+2}x^{2k+1}+q^{2k+1}x^{2k}+...+q^{3}x^{2}+q^{2}x^{1}+q^{1}x^{0}=$$

$$\sum_{i=0}^{2k+3}q^{i+1}x^{i}.$$

Logo, também é válida para $k+1$. Portanto fica provado por indução finita que:

$$\left(x+\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^{i},\ \forall\ w\in\mathbb{N}.\qquad\blacksquare$$

Portanto nós já sabemos decompor o polinômio $\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^{i}$ em dois fatores, porém antes de prosseguirmos na nossa tentativa de encontrar uma fórmula algébrica para a solução da equação $p_{w,q}(x)=0$ nós iremos analisar a equação $p_{w,-q}(x)=0$.

Agora analisando o polinômio temos:

$$p_{w,-q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}=q^{2w+2}x^{2w+1}-q^{2w+1}x^{2w}+...-q^{3}x^{2}+q^{2}x^{1}-q^{1}x^{0}=0$$

Como o grau de $p_{w,-q}(x)$ é um número ímpar, então pelo **corolário 2.2** podemos afirmar que $p_{w,-q}(x)$ possui pelo menos uma raiz real. Portanto, agora vamos tentar encontrar essa(s) raíz(es) reais. Para isso analisaremos o comportamento da equação $p_{w,-q}(x)=0$ quando w varia.

Tomando $w=0$ temos que:

$$p_{w,-q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}=0\Longrightarrow p_{0,-q}(x)=\sum_{i=0}^{2.0+1}(-q)^{i+1}x^{i}=$$

$$\sum_{i=0}^{1}(-q)^{i+1}x^{i}=-q+q^{2}x=0\Longrightarrow$$

$$p_{0,-q}(x)=q^{2}x-q=0\tag{3.23}$$

Daí, temos que:

$$q^{2}x-q=0\Rightarrow qx-1=0\Rightarrow qx=1\Rightarrow x=\frac{1}{q}$$

Logo, o conjunto solução de $p_{0,-q}(x)$ é

$$s_1 = \left\{\frac{1}{q}\right\}. \tag{3.24}$$

Agora, fazendo $w = 1$ temos:

$$p_{1,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2.1+1} (-q)^{i+1} x^i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{3} (-q)^{i+1} x^i = -q^1x^0 + q^2x^1 - q^3x^2 + q^4x^3 \Longrightarrow$$

$$p_{1,-q}(x) = q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0 \tag{3.25}$$

Resolvendo a equação, temos:

$$q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0 \Longrightarrow q\left(q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$q = 0 \quad \text{ou} \quad q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0.$$

Porém, por definição

$$q > 0 \Longrightarrow q \neq 0 \Longrightarrow q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0.$$

Como q é um natural, então a equação $q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0$ possui todos os coeficientes naturais. Daí pelo Teorema das Raízes Racionais as possíveis raízes racionais da equação $q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0$, são ± 1, $\frac{\pm 1}{q}$, $\frac{\pm 1}{q^2}$, $\frac{\pm 1}{q^3}$. Como uma da possíveis raízes racionais de $p_{1,-q}(x)$ é $\frac{1}{q}$ e ela é raiz de $p_{0,-q}(x)$, então iniciaremos a verificação por ela. Logo, substituindo $\frac{1}{q}$ na equação $q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0$ temos:

$$q^3\left(\frac{1}{q}\right)^3 - q^2\left(\frac{1}{q}\right)^2 + q\left(\frac{1}{q}\right) - q = q - q + q - q = 0.$$

Então, de fato $\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{1,-q}(x) = 0$, logo pelo Teorema de D'alambert temos que $p_{1,-q}(x)$ é divisível por $x - \frac{1}{q}$. Daí segue que:

$$\frac{p_{1,-q}(x)}{x - \frac{1}{q}} = \frac{q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q}{x - \frac{1}{q}} = q^4x^2 + q^2 \tag{3.26}$$

Portanto, pelo algoritmo da divisão podemos afirmar que:

$$p_{1,-q}(x) = \left(q^4x^2 + q^2\right)\left(x - \frac{1}{q}\right).$$

Fazendo $p_{1,-q}(x) = 0$ temos:

$$\left(q^4x^2 + q^2\right)\left(x - \frac{1}{q}\right) = 0 \Longrightarrow \left(q^4x^2 + q^2\right) = 0 \quad ou \quad \left(x - \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Resolvendo a primeira equação temos:

$$q^4x^2 + q^2 = 0 \Longrightarrow q^2x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = -\frac{1}{q^2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt[2]{-\frac{1}{q^2}} = \pm\frac{i}{q}.$$

Logo, o conjunto solução da equação $p_{1,-q}(x) = 0$, é

$$s_2 = \left\{\frac{1}{q}, \pm\frac{i}{q}\right\}. \tag{3.27}$$

Portanto, a única solução real de $p_{1,-q}(x)$ é $\frac{1}{q}$.

Estudaremos agora a equação, $p_{2,-q}(x) = 0$.

$$p_{2,-q}(x) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{2.2+1} (-q)^{i+1} x^i = \sum_{i=0}^{5} (-q)^{i+1} x^i =$$

$$-q^1x^0 + q^2x^1 - q^3x^2 + q^4x^3 - q^5x^4 + q^6x^5 = 0 \Longrightarrow$$

$$p_{2,-q}(x) = q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0 \Longrightarrow \tag{3.28}$$

$$q^5x^5 - q^4x^4 + q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0.$$

Então, pelo pelo Teorema das Raízes Racionais as possíveis raízes racionais da equação $q^5x^5 - q^4x^4 + q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0$ são $\pm1, \frac{\pm1}{q}, \frac{\pm1}{q^2}, \frac{\pm1}{q^3}, \frac{\pm1}{q^4}, \frac{\pm1}{q^5}$. Como uma da possíveis raízes racionais de $p_{2,-q}(x)$ é $\frac{1}{q}$ e ela também é raiz de $p_{0,-q}(x)$ e de $p_{1,-q}(x)$. Então iniciaremos a verificação substituindo $\frac{1}{q}$ na equação $q^5x^5 - q^4x^4 + q^3x^3 - q^2x^2 + qx - 1 = 0$.

$$q^5\left(\frac{1}{q}\right)^5 - q^4\left(\frac{1}{q}\right)^4 + q^3\left(\frac{1}{q}\right)^3 - q^2\left(\frac{1}{q}\right)^2 + q\left(\frac{1}{q}\right) - q =$$

$$q - q + q - q + q - q = 0$$

Então, de fato $\frac{1}{q}$ é uma solução da equação $p_{2,-q}(x) = 0$. Logo Teorema de D'lambert temos que $p_{2,-q}(x)$ é divisível por $x - \frac{1}{q}$. Daí segue que:

$$\frac{p_{2,-q}(x)}{x - \frac{1}{q}} = \frac{q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q}{x - \frac{1}{q}} = q^6x^4 + q^4x^2 + q^2. \tag{3.29}$$

Portanto, pelo algoritmo da divisão podemos afirmar que $p_{2,-q}(x) = (q^6x^4 + q^4x^2 + q^2)\left(x - \frac{1}{q}\right)$. Fazendo $p_{2,-q}(x) = 0$ temos:

$$\left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right)\left(x - \frac{1}{q}\right) = 0 \Longrightarrow \left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{1}{q}\right) = 0$$

Solucionando a primeira equação temos:

$$\left(q^6x^4 + q^4x^2 + q^2\right) = 0 \Rightarrow q^4x^4 + q^2x^2 + 1 = 0.$$

Fazendo $y = x^2$ e substituindo na equação biquadrada acima temos:

$$q^4y^2 + q^2y + 1 = 0 \Rightarrow a = q^4, b = q^2 \quad \text{e} \quad c = 1 \Rightarrow \triangle = \left(q^2\right)^2 - 4\left(q^4\right)(1) = -3q^4.$$

Como $y = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$, então

$$y = \frac{-q^2 \pm \sqrt{-3q^4}}{2q4} = \frac{-q^2 \pm iq^2\sqrt{3}}{2q^4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2q^2} \Rightarrow y = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}.$$

Como $y = x^2$, então segue que:

$$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}.$$

O que implica que

$$x = \pm\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2q^2}} \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2q^2}}.$$

E que

$$x = \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

Logo, o conjunto solução da equação $p_{2,-q}(x) = 0$ é dado por:

$$s_3 = \left\{\frac{1}{q}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}\right\} \tag{3.30}$$

Portanto, $\frac{1}{q}$ é a única solução real da equação $p_{2,-q}(x) = 0$.

Após observarmos as equações $p_{0,-q}(x) = 0$, $p_{1,-q}(x) = 0$ e $p_{2,-q}(x) = 0$ que são respectivamente as equações (3.23), (3.25) e (3.28). E seus conjuntos soluções S_1, S_2 e S_3 que podem serem vistos em (3.24), (3.27) e (3.30). Pudemos perceber dois claros padrões. O primeiro é que $\frac{1}{q}$ é solução das três equações analisadas. O segundo padrão que conseguimos enxergar foi que $\frac{1}{q}$ é a única solução real das equações $p_{0,-q}(x) = 0$, $p_{1,-q}(x) = 0$ e $p_{2,-q}(x) = 0$. O que nos leva a conjecturar que $\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ para todo w pertencente aos inteiros positivos. E que $\frac{1}{q}$ é a única solução real de $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ para todo w pertencente aos naturais.

Contudo não podemos verificar a segunda conjectura sem antes averiguarmos a veracidade da primeira, pois se a primeira é falsa a segunda também será. Perceba que se nós conseguíssemos mostrar que $\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$, para todo w pertencente aos naturais, nós poderíamos decompor o polinômio $p_{w,-q}(x)$.

E isso nos ajudaria a avançar no nosso objetivo de encontrar uma fórmula que resolva a equação $p_{w,-q}(x) = 0$ porque essa possível decomposição pode ter uma forma mais fácil de trabalhar. Então agora iniciaremos a verificação da primeira conjectura através da proposição abaixo.

Proposição 3.3. *O número* $\frac{1}{q}$ *é solução da equação* $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ *para todo* w *e* q *pertencentes aos naturais, tal que* $q > 1$.

Demonstração. Para $w = 0$ a conjectura é válida, pois já mostramos anteriormente que $p_{0,-q}\left(\frac{1}{q}\right) = 0$.

Fazendo $w = k$ suponha que $p_{w,-q}\left(\frac{1}{q}\right) = 0$ para todo w natural, o que equivale a dizer que:

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} \left(\frac{1}{q}\right)^i =$$

$$(-q)^{2k+2} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+1} + (-q)^{2k+1} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k} + ... + (-q)^2 \left(\frac{1}{q}\right)^1 + (-q)^1 \left(\frac{1}{q}\right)^0 = 0.$$

Mostraremos agora que para $k + 1$ também é válida.

$$\sum_{i=0}^{2(k+1)+1} (-q)^{i+1} \left(\frac{1}{q}\right)^i = \sum_{i=0}^{2k+3} (-q)^{i+1} \left(\frac{1}{q}\right)^i = (-q)^{2k+4} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + (-q)^{2k+3} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+2} +$$

$$(-q)^{2k+2} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+1} + (-q)^{2k+1} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k} + ... + (-q)^2 \left(\frac{1}{q}\right)^1 + (-q)^1 \left(\frac{1}{q}\right)^0 =$$

$$\left[(-q)^{2k+4} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + (-q)^{2k+3} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right] +$$

$$\left[(-q)^{2k+2} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+1} + (-q)^{2k+1} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k} + ... + (-q)^2 \left(\frac{1}{q}\right)^1 + (-q)^1 \left(\frac{1}{q}\right)^0\right] =$$

$$\left[(-q)^{2k+4} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + (-q)^{2k+3} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right] + \left[\sum_{i=0}^{2k+1} (-q)^{i+1} \left(\frac{1}{q}\right)^i\right].$$

Como por hipótese de indução $\sum_{i=0}^{2k+1} (-q)^{i+1} \left(\frac{1}{q}\right)^i = 0$, então segue que:

$$\left[(-q)^{2k+4} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + (-q)^{2k+3} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+2}\right] + [0] = (-q)^{2k+4} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+3} + (-q)^{2k+3} \left(\frac{1}{q}\right)^{2k+2} =$$

$$\frac{q^{2k+4}}{q^{2k+3}}+\frac{(-q)^{2k+3}}{q^{2k+2}}=q-q=0.$$

Logo, a sentença também é válida para $k+1$. Portanto, fica provado pelo princípio da indução finita que $\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,-q}(x)=0$, para todo w pertencente aos naturais. ■

Já que ficou provado pela **proposição 3.3** que $\frac{1}{q}$ é solução da equação $p_{w,-q}(x)=0$, para todo w pertencente aos naturais. Então pelo o Teorema de D'alambert $x-\frac{1}{q}$ divide o polinômio $p_{w,-q}(x)$. Logo, para decompor o polinômio $p_{w,-q}(x)$ nós precisamos realizar a divisão $\frac{p_{w,-q}(x)}{x-\frac{1}{q}}$, mas como se trata de um polinômio de grau N a simples divisão por si só não resolve o problema. Então, nós temos que descobrir por meio de testes qual será o possível resultado dessa divisão e depois tentar demonstrá-la por indução finita. Contudo nós já temos da equação (3.26) temos que $\frac{p_{1,-q}(x)}{x-\frac{1}{q}}=q^4x^2+q^2$ e da equação (3.29) que $\frac{p_{2,-q}(x)}{x-\left(\frac{1}{q}\right)}=q^6x^4+q^4x^2+q^2$. O que nos levou a conjecturar que

$$\frac{\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i}{x-\frac{1}{q}}=\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}$$

$\forall\ w\in\mathbb{N}$. O que equivale a provar que:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i,$$

$\forall\ w\in\mathbb{N}$. E é isso que provaremos na proposição abaixo.

Proposição 3.4. $\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$

Demonstração. 1. Primeiro verifiquemos para $w=0$, temos:

$$\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{0}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\left(x-\frac{1}{q}\right)(-q)^2x^0=q^2x-q$$

Agora, tomando o segundo membro da equação temos:

$$\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i=\sum_{i=0}^{2.0+1}(-q)^{i+1}x^i=\sum_{i=0}^{1}(-q)^{i+1}x^i=q^2x-q$$

Logo, podemos concluir que para $w=0$ a sentença é verdadeira.

2. Fazendo $w=k$ considere a hipótese $\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{k}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2k+1}(-q)^{i+1}x^i$. De forma expandida nossa hipótese de indução é:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left((-q)^{2k+2}x^{2k}+(-q)^{2k}x^{2k-2}+...+(-q)^6x^4+(-q)^4x^2\,(-q)^2x^0\right)=$$

$$(-q)^{2k+2}x^{2k+1}+(-q)^{2k+1}x^{2k}+...+(-q)^3x^2+(-q)^2x^1+(-q)^1x^0.$$

3. Agora mostremos que a afirmativa também é verdadeira para $k+1$. Isso implica que temos que mostrar que:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{k+1}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2k+3}(-q)^{i+1}x^{i}.$$

Para tanto iniciaremos pelo primeiro membro e tentaremos chegar no segundo.

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{k+1}(-q)^{2i+2}x^{2i}=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big((-q)^{2(k+1)+2}x^{2(k+1)}+(-q)^{2k+2}x^{2k}+(-q)^{2k}x^{2k-2}+...+$$

$$(-q)^{6}x^{4}+(-q)^{4}x^{2}+(-q)^{2}x^{0}\Big)=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}+(-q)^{2k+2}x^{2k}+(-q)^{2k}x^{2k-2}+...+$$

$$(-q)^{6}x^{4}+(-q)^{4}x^{2}+(-q)^{2}x^{0}\Big)=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big[\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}\Big)+\Big((-q)^{2k+2}x^{2k}+(-q)^{2k}x^{2k-2}+...+$$

$$(-q)^{6}x^{4}+(-q)^{4}x^{2}+(-q)^{2}x^{0}\Big)\Big]=$$

$$=\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}\Big)+\left(\sum_{i=0}^{k}(-q)^{2i+2}x^{2i}\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}\Big)+\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{k}(-q)^{2i+2}x^{2i}\right).$$

Utilizando a hipótese de indução temos que:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}\Big)+\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{k}(-q)^{2i+2}x^{2i}\right)=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\Big((-q)^{2k+4}x^{2k+2}\Big)+\sum_{i=0}^{2k+1}(-q)^{i+1}x^{i}=$$

$$\left((-q)^{2k+4}x^{2k+3}+(-q)^{2k+3}x^{2k+2}\right)+$$

$$\left((-q)^{2k+2}x^{2k+1}+(-q)^{2k+1}x^{2k}+...+(-q)^{3}x^{2}+(-q)^{2}x^{1}+(-q)^{1}x^{0}\right)=$$

$$(-q)^{2k+4}x^{2k+3}+(-q)^{2k+3}x^{2k+2}+(-q)^{2k+2}x^{2k+1}+$$

$$(-q)^{2k+1}x^{2k}+...+(-q)^{3}x^{2}+(-q)^{2}x^{1}+(-q)^{1}x^{0}=$$

$$\sum_{i=0}^{2k+3}(-q)^{i+1}x^{i}.$$

Logo, também é válida para $k+1$. Portanto, fica provado por indução finita que:

$$\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$$

■

De acordo com as **proposições (3.2)** e **(3.4)** quando dividimos os polinômios $p_{w,q}(x)$ por $x+\frac{1}{q}$ e $p_{w,-q}(x)$ por $x-\frac{1}{q}$, obtemos respectivamente os polinômios $\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}$ e $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}$. Portanto, se provarmos que $\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}$ e $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}$ são iguais, então em vez de trabalharmos para encontrar as raízes desses dois polinômios nós se dedicaremos em achar, apenas a solução algébrica de $\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}=0$ que já é um avanço, na solução das as equações $p_{w,q}(x)=0$ e $p_{w,-q}(x)=0$.

Proposição 3.5. $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}$, $\forall\ w\in\mathbb{N}$.

Demonstração. A única diferença entre $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}$ e$\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}$ é o fato de que no primeiro somatório temos $-q$ e no segundo temos q, porém o expoente do $-q$ é par para qualquer i variando de 0 a w, o que faz com que $(-q)^{2i+2}$ seja igual a q^{2i+2}. Portanto fica provado que $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}$, $\forall\ w\in\mathbb{N}$. ■

Como acabamos de demonstrar a **proposição (3.5)**, então daremos sequência ao que foi mencionado a pouco que é encontrar a solução da equação $\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}=0$ e consequentemente a solução das equações que são os nossos objetivos gerais. Porém, a equação $\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}=0$ não parece ser simples de resolver. Então, de início faremos algumas observações.

Observação 3.4. Na **proposição 3.2** realizamos a divisão $\frac{\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$, $\forall\, w \in \mathbb{N}$. E como vimos o grau de $\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$ é $2w+1$, já o grau do divisor é 1, portanto o grau do polinômio que resulta dessa divisão é dado pela a subtração do grau do dividendo pelo grau do divisor, logo o grau do polinômio quociente é $2w+1-1=2w$. O que corresponde exatamente com o grau do polinômio $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$, pois o limite superior deste somatório é w e o x está elevado a $2i$, ou seja para saber o grau desse polinômio basta-nos substituir o i por w e temos que seu grau é $2(w)$=$2w$.

Os avanços que fizemos até o momento, na tarefa de encontrar a solução das equações $p_{w,q}\,(x)=0$ e $p_{w,-q}\,(x)=0$, deve-se a estratégia de analisarmos casos particulares das mesmas com o objetivo de perceber padrões no seus comportamentos e depois verificar se a existência de tais padrões valem para todo w. E é essa estratégia que adotaremos para encontrar a solução da equação $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}=0$.

Se observarmos o polinômio $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Veremos que ele é um caso particular do polinômio $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$, pois a única diferença entre eles é que o limite superior do somatório $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$ é da forma 2^n-1, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ e o limite superior de $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$ é w, $\forall\, w \in \mathbb{N}$, ou seja, o limite superior de $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$ abrange todos os naturais, enquanto o limite superior de $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$ abrange apenas os naturais que podem ser escritos da forma 2^n-1. Então, de fato $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$ é um caso particular de $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$. Para a obtenção deste caso particular basta fazermos $w=2^n-1$.

Na tentativa de encontrarmos as raízes de $p_{w,q}\,(x)$ nós o decompomos como produto de polinômios. E como resultado dessa decomposição chegamos a $\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$, porém encontrar suas raízes é no mínimo laborioso, portanto para lançar luz sobre a questão tentaremos encontrar as raízes do seu caso particular que é $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$.

Para isso façamos $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}=0$.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}=0 \Longrightarrow q^2\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i}x^{2i}=0 \Longrightarrow q^2\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i}=0 \Longrightarrow$$

$$q^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = 0.$$

Mas, como por definição $q > 1$, então $q^2 > 1 > 0 \Rightarrow q^2 \neq 0$, logo $\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = 0$.

Antes de darmos continuidade a solução da equação $\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = 0$, nós analisaremos o comportamento do somatório $\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i}$.

Tomando $n = 1$ temos:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{2^1-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{1} (qx)^{2i} = (qx)^0 + (qx)^2 = (qx)^2 + 1 = (qx)^{2^1} + 1.$$

Tomando $n = 2$ temos:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{2^2-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{3} (qx)^{2i} = (qx)^0 + (qx)^2 + (qx)^4 + (qx)^6 =$$

$$1 + (qx)^2 + (qx)^4 + (qx)^6 = \left[(qx)^2 + 1\right]\left[(qx)^4 + 1\right] = \left[(qx)^{2^1} + 1\right]\left[(qx)^{2^2} + 1\right].$$

Tomando $n = 3$ temos:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{2^3-1} (qx)^{2i} = \sum_{i=0}^{7} (qx)^{2i} =$$

$$(qx)^0 + (qx)^2 + (qx)^4 + (qx)^6 + (qx)^8 + (qx)^{10} + (qx)^{12} + (qx)^{14} =$$

$$1 + (qx)^2 + (qx)^4 + (qx)^6 + (qx)^8 + (qx)^{10} + (qx)^{12} + (qx)^{14} =$$

$$\left[(qx)^2 + 1\right]\left[(qx)^4 + 1\right]\left[(qx)^8 + 1\right] =$$

$$\left[(qx)^{2^1} + 1\right]\left[(qx)^{2^2} + 1\right]\left[(qx)^{2^3} + 1\right].$$

Portanto, esses três primeiros testes nos levam a conjecturar que:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = \prod_{j=1}^{n} \left[(qx)^{2^j} + 1\right], \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

E é isso que tentaremos provar na próxima proposição.

Observação 3.5. Para a demonstração da proposição seguinte ficar mais inteligível expandiremos o somatório $\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} (qx)^{2i}$ de maneira crescente em relação ao grau de seus termos.

Proposição 3.6. *Prove que*

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (qx)^{2i} = \prod_{j=1}^{n} \left[(qx)^{2^j} + 1\right], \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstração. Provemos pelo princípio de indução finita.

1. Como vimos anteriormente para $n = 1$ é válida.

2. Fazendo $n = k$ nossa hipótese de indução é:

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} (qx)^{2i} = \prod_{j=1}^{k} \left[(qx)^{2^j} + 1\right], \forall\ k \in \mathbb{N}^*.$$

3. Verifiquemos agora se a sentença é verdadeira para $k+1$. Isso implica que temos que mostrar que:

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} (qx)^{2i} = \prod_{j=1}^{k+1} \left[(qx)^{2^j} + 1\right], \forall\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Então, iniciando pelo primeiro termo temos:

$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} (qx)^{2i} =$$

$$(qx)^{2.(0)} + (qx)^{2.(1)} + (qx)^{2.(2)} + ... + (qx)^{2.\left(2^k-2\right)} + (qx)^{2.\left(2^k-1\right)} + (qx)^{2.\left(2^k-0\right)} +$$

$$(qx)^{2.\left(2^k+1\right)} + (qx)^{2.\left(2^k+2\right)} + ... + (qx)^{2.\left(2^{k+1}-2\right)} + (qx)^{2.\left(2^{k+1}-1\right)} =$$

$$\left[(qx)^{2.(0)} + (qx)^{2.(1)} + (qx)^{2.(2)} + ... + (qx)^{2.\left(2^k-2\right)} + (qx)^{2.\left(2^k-1\right)}\right] +$$

$$\left[(qx)^{2.\left(2^k-0\right)} + (qx)^{2.\left(2^k+1\right)} + (qx)^{2.\left(2^k+2\right)} + ... + (qx)^{2.\left(2^{k+1}-2\right)} + (qx)^{2.\left(2^{k+1}-1\right)}\right] =$$

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} (qx)^{2i} + \left[(qx)^{2^{k+1}} + (qx)^{2^{k+1}+2} + (qx)^{2^{k+1}+4} + ... + (qx)^{2.2^{k+1}-4} + (qx)^{2.2^{k+1}-2}\right] =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^k-1} (qx)^{2i}\right) + (qx)^{\left(2^{k+1}\right)} \left[(qx)^0 + (qx)^2 + (qx)^4 + ... + (qx)^{2^{k+1}-4} + (qx)^{2^{k+1}-2}\right] =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^k-1} (qx)^{2i}\right) + (qx)^{\left(2^{k+1}\right)} \left[(qx)^{2.0} + (qx)^{2.1} + (qx)^{2.2} + ... + (qx)^{2\left(2^k-2\right)} + (qx)^{2\left(2^k-1\right)}\right] =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^k-1}(qx)^{2i}\right)+(qx)^{\left(2^{k+1}\right)}\left[\sum_{i=0}^{2^k-1}(qx)^{2i}\right]=$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^k-1}(qx)^{2i}\right)\left[(qx)^{\left(2^{k+1}\right)}+1\right].$$

Usando nossa hipótese de indução, temos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2^k-1}(qx)^{2i}\right)\left[(qx)^{2^{k+1}}+1\right]=\left(\prod_{j=1}^{k}\left[(qx)^{2^j}+1\right]\right)\left[(qx)^{2^{k+1}}+1\right]=$$

$$\left(\left[(qx)^{2^1}+1\right]\left[(qx)^{2^2}+1\right]\left[(qx)^{2^3}+1\right]...\left[(qx)^{2^{k-1}}+1\right]\left[(qx)^{2^k}+1\right]\right)\left[(qx)^{2^{k+1}}+1\right]=$$

$$\left[(qx)^{2^1}+1\right]\left[(qx)^{2^2}+1\right]\left[(qx)^{2^3}+1\right]...\left[(qx)^{2^{k-1}}+1\right]\left[(qx)^{2^k}+1\right]\left[(qx)^{2^{k+1}}+1\right]=$$

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left[(qx)^{2^j}+1\right].$$

Mostramos, então que para $k+1$ a sentença também é verdadeira. Logo, fica provado que:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}(qx)^{2i}=\prod_{j=1}^{n}\left[(qx)^{2^j}+1\right],\forall n\quad\in\mathbb{N}^*.$$

■

Tendo demonstrado a **proposição 3.6**, agora continuaremos a resolver a equação

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}(qx)^{2i}=0.$$

Então pela **proposição 3.6** temos que:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1}(qx)^{2i}=\prod_{j=1}^{n}\left[(qx)^{2^j}+1\right]\Longrightarrow\prod_{j=1}^{n}\left[(qx)^{2^j}+1\right]=0\Longrightarrow$$

$$\left[(qx)^{2^1}+1\right]\left[(qx)^{2^2}+1\right]\left[(qx)^{2^3}+1\right]...\left[(qx)^{2^{n-1}}+1\right]\left[(qx)^{2^n}+1\right]=0\Longrightarrow$$

$$\left[(qx)^{2^1}+1\right]=0\text{ ou }\left[(qx)^{2^2}+1\right]=0\text{ ou }\left[(qx)^{2^3}+1\right]=0...\text{ ou }\left[(qx)^{2^{n-1}}+1\right]=0\text{ ou }\left[(qx)^{2^n}+1\right]=0.$$

Notem que agora temos n equações para resolver, mas todas são do mesmo tipo, ou seja, todas ela podem ser escritas da forma $\left[(qx)^{2^j}+1\right]=0$ com j variando de 1 até n.

Portanto, se resolvermos a equação $\left[(qx)^{2^j}+1\right]=0$ encontraremos as soluções de todas as outras equações. Segue que:

$$\left[(qx)^{2^j}+1\right]=0 \Rightarrow (qx)^{2^j}=-1 \Longrightarrow x^{2^j}=\frac{-1}{q^{2^j}} \Longrightarrow x=\sqrt[2^j]{\frac{-1}{q^{2^j}}} \Longrightarrow$$

$$x=\sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}} \quad \text{ou}$$

$$x=\sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}} \quad \text{ou}$$

$$x=\sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}... \quad \text{ou}$$

$$x=\sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}} \quad \text{ou}$$

$$x=\sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}}.$$

Que podemos reescrever como:

$$x_1=\sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}, x_2=\sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}, x_3=\sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}, ..., x_{n-1}=\sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}}, x_n=\sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}}.$$

Então, o conjunto solução S_0 da equação $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}=0$ é dado por:

$$S_0=\left\{\sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}},\ \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}},\ \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}...,\ \sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}},\ \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}}\right\} \quad \forall \quad n,q\in\mathbb{N}^*, q>1.$$

Observação 3.6. Observando a equação $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}=0$ que acabamos de resolver tem grau igual a $2(2^n-1)=2^{n+1}-2$, pois o maior valor que i assume é 2^n-1 e o x está elevado a $2i$. Porém no conjunto solução S_0 nós temos, aparentemente, apenas n raízes. O que parece contradizer o **corolário 2.1**, pois o grau do nosso polinômio tem que ser igual ao número de raízes e grau, e isso não parece acontecer, pois $2^{n+1}-2\neq n$. Essa suposta contradição ocorre porque o conjunto solução S_0 não dá as raízes de $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}=0$ uma a uma, mas sim em grupos que formam uma sequência de potência de base 2. Detalhando temos que ao tomarmos $x_1=\sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}$ podemos ver, aplicando a segunda fórmula de Moivre, que x_1 na verdade representa 2 raízes. Tomando $x_2 = \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}$ podemos ver, aplicando a segunda fórmula de Moivre, que x_2 representa 4 raízes. Tomando $x_3 = \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}$ podemos ver, aplicando a segunda fórmula de Moivre, que x_3 na representa 8 raízes. Continuando o mesmo raciocínio n vezes nós vemos que $x_n = \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}}$ representa 2^n raízes. Então se somarmos as duas raízes de x_1 mais as quatro raízes de x_2 mais as oito raízes de x_3 e continuando somando até somarmos as 2^n raízes de x_n nós obteremos o número total de raízes que o conjunto solução S_0 representa. Para isso basto-nos somar:

$$2 + 4 + 8 + 16 + ... + 2^{n-1} + 2^n.$$

Como podemos ver acima temos a soma dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 2, de razão 2 e com o último termo sendo 2^n. Então usando a fórmula para calcular a soma dos termos de uma P.G. temos:

$$S_n = \frac{2\left(2^n - 1\right)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2.$$

Ou seja, o conjunto S_0 representa $2^{n+1} - 2$ raízes o que coincide exatamente com o grau do polinômio $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}$. Portanto, S_0 exibe de maneira mais geral todas as soluções $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0$ para todo n pertencente aos naturais sem o zero.

Pela **proposição 3.2** temos que

$$p_{w,q}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = \left(x + \frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i} \ \forall\ w \in \mathbb{N}.$$

Logo, como a sentença vale para todos os números naturais, então ela também vale para todos os naturais da forma $2^n - 1$ de modo que n pertence aos naturais sem o zero. Portanto se substituirmos w por $2^n - 1$ a igualdade continua sendo válida. Então, substituindo w por $2^n - 1$, temos que:

$$p_{2^n-1,q}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i = \left(x + \frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} \ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow$$

$$p_{2^n-1,q}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = \left(x + \frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} \ \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Então, para encontrarmos as raízes do polinômio $p_{2^n-1,q}\left(x\right)$, que é um caso particular de $p_{w,q}\left(x\right)$, o igualaremos a zero. Daí segue que:

$$p_{2^n-1,q}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(x + \frac{1}{q}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0 \Longrightarrow$$

$$x = -\frac{1}{q}.$$

E como já resolvemos a equação $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0$ e seu conjunto solução é dado por

$$S_0 = \left\{ \sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}, \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}, \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}, ..., \sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}}, \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}} \right\}, \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}^*, q > 1.$$

Então o conjunto solução da equação $p_{2^n-1,q}(x) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = 0$ é:

$$S' = \left\{ \frac{-1}{q}, \sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}, \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}, \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}} ..., \sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}}, \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}} \right\}, \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}^*, q > 1. \tag{3.31}$$

Como existe um padrão nas raízes de $p_{2^n-1,q}(x)$, então pudemos elaborar uma fórmula que resolva a equação $p_{2^n-1,q}(x) = \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = 0$ que é dada por:

$$x_k = \left(\frac{-1}{q^{2^k}}\right)^{\frac{1}{2^k}} \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}.$$

Exemplo 3.6. Fazendo $q = 2$ e $n = 2$ temos que:

$$\sum_{i=0}^{2^{2+1}-1} 2^{i+1}x^i = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{7} 2^{i+1}x^i = 0 \Longrightarrow$$

$$2^1x^0 + 2^2x^1 + 2^3x^2 + 2^4x^3 + 2^5x^4 + 2^6x^5 + 2^7x^6 + 2^8x^7 = 0 \Longrightarrow$$

$$256x^7 + 128x^6 + 64x^5 + 32x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x_k = \left(\frac{-1}{q^{2^k}}\right)^{\frac{1}{2^k}} \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\} \Longrightarrow x_k = \left(\frac{-1}{2^{2^k}}\right)^{\frac{1}{2^k}}, k \in \{0, 1, 2\} \Longrightarrow$$

$$x_0 = \left(\frac{-1}{2^{2^0}}\right)^{\frac{1}{2^0}} \Longrightarrow x_0 = \frac{-1}{2}.$$

$$x_1 = \left(\frac{-1}{2^{2^1}}\right)^{\frac{1}{2^1}} \Longrightarrow x_1 = \left(\frac{-1}{2^{2^1}}\right)^{\frac{1}{2^1}} \Longrightarrow x_1 = \sqrt[2]{\frac{-1}{4}}.$$

$$x_2 = \left(\frac{-1}{2^{2^2}}\right)^{\frac{1}{2^2}} \Longrightarrow x_2 = \left(\frac{-1}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow x_2 = \sqrt[4]{\frac{-1}{16}}.$$

Logo, o conjunto solução da equação polinomial $256x^7 + 128x^6 + 64x^5 + 32x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0$ é $\left\{\frac{-1}{2}, \sqrt[2]{\frac{-1}{4}}, \sqrt[4]{\frac{-1}{16}}\right\}$ pode ser verificado utilizando a fórmula de radiciação de números complexos para encontrar as duas raízes de $\sqrt[2]{\frac{-1}{4}}$ e as quatro raízes de $\sqrt[4]{\frac{-1}{16}}$, que ao todo são sete raízes que é exatamente igual ao grau da nossa equação.

Como encontramos a solução da equação $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ para o caso particular que w é da forma $2^n - 1$. E exemplificamos. Então, agora tentaremos encontrar o conjunto solução da equação $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$, também para o caso particular que w é da forma $2^n - 1$. Daí temos:

$$\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0.$$

Além do mais, pela **proposição 3.4** temos que

$$\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = \left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{w} (-q)^{2i+2} x^{2i}, \quad \forall \quad w \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{w} (-q)^{2i+2} x^{2i} = 0 \tag{3.32}$$

E ainda pela **proposição 3.5** temos que $\sum_{i=0}^{w} (-q)^{2i+2} x^{2i} = \sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i}$, $\forall\ w \in \mathbb{N}$. Então, se resolvermos a equação $\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{w} q^{2i+2}x^{2i} = 0$ estaremos resolvendo a equação (3.32). Logo, substituindo w por $2^n - 1$ temos:

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0 \Longrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{1}{q} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0.$$

Como já resolvemos a equação $\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i} = 0$ e o seu conjunto solução é

$$S_0 = \left\{ \sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}, \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}, \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}, ..., \sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}}, \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}} \right\}, \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}^*, q > 1.$$

Então, o conjunto da solução da equação $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ é dado por:

$$S'' = \left\{ \frac{1}{q}, \sqrt[2^1]{\frac{-1}{q^{2^1}}}, \sqrt[2^2]{\frac{-1}{q^{2^2}}}, \sqrt[2^3]{\frac{-1}{q^{2^3}}}, ..., \sqrt[2^{n-1}]{\frac{-1}{q^{2^{n-1}}}}, \sqrt[2^n]{\frac{-1}{q^{2^n}}} \right\}, \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}, q > 1. \tag{3.33}$$

O exemplo da solução da equação $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ é análogo ao **exemplo 3.6**. Como já temos a solução dos casos particulares de $p_{w,q}(x) = 0$ e de $p_{w,-q}(x) = 0$, ou seja, como já resolvemos as equações $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1} x^i = 0$ e $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1} x^i = 0$. Então, também conhecemos a solução da equação

$$\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1} x^i \right) . \left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1} x^i \right) = 0. \tag{3.34}$$

Que é a união dos conjuntos S' e S'' que estão respectivamente nas equações (3.31) e (3.33).

Podemos afirmar, que pelo menos quando w é da forma $2^n - 1$, as equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$ são solúveis por radicais. Nossa estratégia agora será observar o comportamento do produto dos polinômios que compõem equação (3.34) quando n varia e verificar se esse produto revela algum polinômio mais simples de encontrar as raízes. Daí, temos:

Para $n = 1$ temos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2^{1+1}-1} q^{i+1} x^i \right) . \left(\sum_{i=0}^{2^{1+1}-1} (-q)^{i+1} x^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{3} q^{i+1} x^i \right) . \left(\sum_{i=0}^{3} (-q)^{i+1} x^i \right) =$$

$$\left(q^4 x^3 + q^3 x^2 + q^2 x + q \right) \left(q^4 x^3 - q^3 x^2 + q^2 x - q \right) =$$

$$\left(q^8 x^6 + q^6 x^4 - q^4 x^2 - q^2 \right) = \left(\sum_{i=0}^{1} q^{2i+2} x^{2i} \right) \left((qx)^4 - 1 \right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^1-1} q^{2i+2} x^{2i} \right) \left((qx)^{2^{1+1}} - 1 \right). \tag{3.35}$$

Para $n = 2$, temos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2^{2+1}-1} q^{i+1} x^i \right) . \left(\sum_{i=0}^{2^{2+1}-1} (-q)^{i+1} x^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{7} q^{i+1} x^i \right) . \left(\sum_{i=0}^{7} (-q)^{i+1} x^i \right) =$$

$$\left(q^8 x^7 + q^7 x^6 + q^6 x^5 + q^5 x^4 + q^4 x^3 + q^3 x^2 + q^2 x + q \right).$$

$$\left(q^8x^7 - q^7x^6 + q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q\right) =$$

$$\left(q^{16}x^{14} + q^{14}x^{12} + q^{12}x^{10} + q^{10}x^8 - q^8x^6 - q^6x^4 - q^4x^2 - q^2\right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{3} q^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^8 - 1\right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2^2-1} q^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^{2^{2+1}} - 1\right). \tag{3.36}$$

Então, de (3.35) e de (3.36) podemos conjecturar que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1}x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^{2^{n+1}} - 1\right), \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}, q > 1.$$

Que por sua vez pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} (-q)^{i+1}x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^{2(2^n-1)+2} - 1\right).$$

Agora suponha que a igualdade abaixo seja verdadeira

$$\left(x - \frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i = (qx)^{2(2^n-1)+2} - 1, \quad \forall \quad w \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Multiplicando ambos os membros por $\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2}x^{2i}$ temos:

$$\left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2}x^{2i}\right)\left(x - \frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^{2(2^n-1)+2} - 1\right).$$

E como pela **proposição 3.4** temos $\left(x - \frac{1}{q}\right)\sum\limits_{i=0}^{w} (-q)^{2i+2}x^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i$ $\forall$ $w \in \mathbb{N}$. Então, se tomarmos $w = 2^n - 1$ com n pertencente aos naturais excluindo o zero temos que $\left(x - \frac{1}{q}\right)\sum\limits_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2}x^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Então, aplicando essa proposição ao primeiro membro da equação anterior temos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} (-q)^{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1}x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2}x^{2i}\right)\left((qx)^{2(2^n-1)+2} - 1\right) \tag{3.38}$$

E como pela **proposição 3.5** temos que $\sum_{i=0}^{w} (-q)^{2i+2} x^{2i} = \sum_{i=0}^{w} q^{2i+2} x^{2i}$ $\forall$ $w \in \mathbb{N}$. Então, se w for da forma $2^n - 1$ tal que n é natural sem o zero, a **proposição 3.5** ainda continua sendo válida, pois $2^n - 1$ é apenas um caso particular de w. Substituindo $2^n - 1$ por w na **proposição 3.5** temos que $\sum_{i=0}^{2^n-1} (-q)^{2i+2} x^{2i} = \sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2} x^{2i}$. Usando essa proposição no segundo membro da equação (3.38) temos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} (-q)^{i+1} x^i\right) \left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1} x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2} x^{2i}\right) \left((qx)^{2(2^n-1)+2} - 1\right). \quad (3.39)$$

Logo,

$$\left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1} x^i\right) \left(\sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} (-q)^{i+1} x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2} x^{2i}\right) \left((qx)^{2(2^n-1)+2} - 1\right). \quad (3.40)$$

Então para mostrarmos que equação

$$\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1} x^i\right) \left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1} x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{2^n-1} q^{2i+2} x^{2i}\right) \left((qx)^{2^{n+1}} - 1\right), \quad \forall \quad n, q \in \mathbb{N}^*, q > 1,$$

é verdadeira, basta-nos mostrar que a equação

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1} x^i = (qx)^{2(2^n-1)+2} - 1, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

também é verdadeira. E é o que faremos na proposição a seguir.

Proposição 3.7. $\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2(2^n-1)+1} q^{i+1} x^i = (qx)^{2(2^n-1)+2} - 1$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração. A sentença é válida para $n = 1$, pois já verificamos na página 65. A nossa hipótese de indução é:

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} q^{i+1} x^i = (qx)^{2^{k+1}} - 1.$$

Que de forma expandida é:

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \left[q^{2^{k+1}} x^{2^{k+1}-1} + q^{2^{k+1}-1} x^{2^{k+1}-2} + q^{2^{k+1}-2} x^{2^{k+1}-3} + \right.$$

$$\left. q^{2^{k+1}-3} x^{2^{k+1}-4} + ... + q^3 x^2 + q^2 x^1 + q^1 x^0\right] =$$

$$(qx)^{2^{k+1}} - 1.$$

Então, devemos mostrar que a sentença também é válida para $k + 1$, ou seja, que

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2^{k+2}-1} q^{i+1} x^i = (qx)^{2^{k+2}} - 1.$$

Observação 3.7. Expandiremos o somatório $\sum_{i=0}^{2^{k+2}-1}(qx)^{2i}$ de maneira crescente em relação ao grau de seus termos, para que a demonstração fique mais inteligível.

Iniciando pelo primeiro membro temos:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2^{k+2}-1}q^{i+1}x^{i}=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[q^{1}x^{0}+q^{2}x^{1}+q^{3}x^{2}+...+q^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-2}+q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}-1}+q^{2^{k+1}+1}x^{2^{k+1}}\right.$$

$$\left.+q^{2^{k+1}+2}x^{2^{k+1}+1}+...+q^{2^{k+2}-2}x^{2^{k+2}-3}+q^{2^{k+2}-1}x^{2^{k+2}-2}+q^{2^{k+2}}x^{2^{k+2}-1}\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(q^{1}x^{0}+q^{2}x^{1}+q^{3}x^{2}+...+q^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-2}+q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}-1}\right)+\left(q^{2^{k+1}+1}x^{2^{k+1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+q^{2^{k+1}+2}x^{2^{k+1}+1}+...+q^{2^{k+2}-2}x^{2^{k+2}-3}+q^{2^{k+2}-1}x^{2^{k+2}-2}+q^{2^{k+2}}x^{2^{k+2}-1}\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)+\left(q^{2^{k+1}+1}x^{2^{k+1}}+q^{2^{k+1}+2}x^{2^{k+1}+1}+...\right.\right.$$

$$\left.\left.+q^{2.2^{k+1}-2}x^{2.2^{k+1}-3}+q^{2.2^{k+1}-1}x^{2.2^{k+1}-2}+q^{2.2^{k+1}}x^{2.2^{k+1}-1}\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)+\right.$$

$$\left.q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}}\left(q^{1}x^{0}+q^{2}x^{1}+...+q^{2^{k+1}-2}x^{2^{k+1}-3}+q^{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-2}+q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}-1}\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)+q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)\left(q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}}+1\right)\right]=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1}q^{i+1}x^{i}\right)\left(q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}}+1\right).$$

Usando nossa hipótese de indução temos:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} q^{i+1}x^{i}\right)\left(q^{2^{k+1}}x^{2^{k+1}}+1\right)=\left((qx)^{2^{k+1}}-1\right)\left((qx)^{2^{k+1}}+1\right)=$$

$$\left((qx)^{2^{k+1}}\right)^{2}-1=$$

$$(qx)^{2^{k+2}}-1.$$

Então, a sentença também é válida para $n=k+1$. Logo, a **proposição 3.7** está demonstrada pelo princípio de indução finita. ■

Observação 3.8. Como consequência da **proposição 3.7**, podemos afirmar que a equação (3.40) é verdadeira, porém como a **proposição 3.7** é mais simples, então nós a adotaremos em detrimento da equação 3.40, pois acreditamos que ela dará uma contribuição maior nas soluções da equações que são nosso objetivo geral.

Como a **proposição3.7** foi demonstrada para $w=2^n-1$, então agora devemos verificar se a sentença é válida para todo w pertencente aos naturais. Para isso basta-nos substituir 2^n-1 por w na **proposição 3.7** e obteremos a próxima proposição.

Proposição 3.8. $\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^{i}=(qx)^{2w+2}-1,\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$

Demonstração. Para $w=0$ temos:

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2.0+1} q^{i+1}x^{i}=\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{1} q^{i+1}x^{i}=$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(q^{2}x+q\right)=q^{2}x^{2}+qx-qx-1=$$

$$q^{2}x^{2}-1=(qx)^{2}-1.$$

E que:

$$(qx)^{2w+2}-1=(qx)^{2.0+2}-1=(qx)^{2}-1.$$

Logo, para $w=0$ a sentença é verdadeira.

Fazendo $w=k$ suponha que $\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i}=(qx)^{2k+2}-1,\ \forall\ k\in\mathbb{N}.$

Agora mostremos que para $w=k+1$ a sentença também é verdadeira. O que equivale a mostrar que:

$$\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+3} q^{i+1}x^{i} = (qx)^{2k+4}-1.$$

Iniciaremos no primeiro membro e tentaremos chegar no segundo.

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+3} q^{i+1}x^{i} =$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+3}+q^{2k+3}x^{2k+2}+q^{2k+2}x^{2k+1}+q^{2k+1}x^{2k}+...+q^{3}x^{2}+q^{2}x^{1}+q^{1}x^{0}\right) =$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+3}+q^{2k+3}x^{2k+2}\right)+$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+2}x^{2k+1}+q^{2k+1}x^{2k}+...+q^{3}x^{2}+q^{2}x^{1}+q^{1}x^{0}\right) =$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(q^{2k+4}x^{2k+3}+q^{2k+3}x^{2k+2}\right)+\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i} =$$

$$q^{2k+4}x^{2k+4}+q^{2k+3}x^{2k+3}-q^{2k+3}x^{2k+3}-q^{2k+2}x^{2k+2}+\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i} =$$

$$q^{2k+4}x^{2k+4}-q^{2k+2}x^{2k+2}+\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i}$$

E como por hipótese de indução $\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i} = (qx)^{2k+2}-1$. Então, temos:

$$q^{2k+4}x^{2k+4}-q^{2k+2}x^{2k+2}+\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2k+1} q^{i+1}x^{i} =$$

$$q^{2k+4}x^{2k+4}-q^{2k+2}x^{2k+2}+(qx)^{2k+2}-1 =$$

$$(qx)^{2k+4}+(qx)^{2k+2}-(qx)^{2k+2}-1 =$$

$$(qx)^{2k+4}-1$$

Então, a sentença também é válida para $n = k+1$. Logo, a **proposição 3.8** está demonstrada pelo princípio de indução finita. ■

Então, uma das consequências da **proposição 3.8** é o corolário abaixo.

Corolário 3.1. $\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}=(qx)^{2w+2}-1,\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$

Demonstração. De acordo com a **proposição 3.8** temos que:

$$\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^{i}=(qx)^{2w+2}-1,\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$$

E pela **proposição 3.2** temos:

$$\left(x+\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^{i},\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$$

O que implica que

$$\left(x-\frac{1}{q}\right)\left[\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}\right]=(qx)^{2w+2}-1\Longrightarrow$$

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left[\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i}\right]=(qx)^{2w+2}-1$$

E pela **proposição 3.5** temos: $\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{w}q^{2i+2}x^{2i},\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$
Então,

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left[\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}\right]=(qx)^{2w+2}-1.$$

E como pela **proposição 3.4** temos $\left(x-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{w}(-q)^{2i+2}x^{2i}=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i},\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$
Então,

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\left[\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}\right]=(qx)^{2w+2}-1\Longrightarrow$$

$$\left(x+\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}=(qx)^{2w+2}-1,\ \forall\ w\in\mathbb{N}.$$

Ficando assim demonstrado o **corolário 3.1**. ■

Observando a **proposição 3.8** e o **corolário 3.1** vemos que para encontrarmos as raízes dos polinômios $p_{w,-q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}$ e $p_{w,q}(x)=\sum_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^{i}$ basta-nos encontrarmos as raízes do polinômio $(qx)^{2w+2}-1$ e depois dividi-los respectivamente por $\left(x+\frac{1}{q}\right)$ e $\left(x-\frac{1}{q}\right)$, pois

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^{i}=(qx)^{2w+2}-1\Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = \frac{(qx)^{2w+2} - 1}{\left(x + \frac{1}{q}\right)} \Longrightarrow$$

$$p_{w,-q}(x) = \frac{(qx)^{2w+2} - 1}{\left(x + \frac{1}{q}\right)}$$

e

$$\left(x - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1} x^i = (qx)^{2w+2} - 1 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{2w+1} -q^{i+1} x^i = \frac{(qx)^{2w+2} - 1}{\left(x - \frac{1}{q}\right)} \Longrightarrow$$

$$p_{w,q}(x) = \frac{(qx)^{2w+2} - 1}{\left(x - \frac{1}{q}\right)}.$$

Com base nisso resolvamos a equação. $(qx)^{2w+2} - 1 = 0$. De fato,

$$(qx)^{2w+2} - 1 = 0 \Longrightarrow (qx)^{2w+2} = 1 \Longrightarrow$$

$$x^{2w+2} = \frac{1}{q^{2w+2}} \Longrightarrow x = \sqrt[2w+2]{\frac{1}{q^{2w+2}}}.$$

Pelo **terorema 2.7** (Segunda Fórmula de Moivre) temos:

$$\sqrt[2w+2]{\frac{1}{q^{2w+2}}} = x_k = \sqrt[2w+2]{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|} \left[cos\left(\frac{\theta}{2w+2} + \frac{2k\pi}{2w+2}\right) + isen\left(\frac{\theta}{2w+2} + \frac{2k\pi}{2w+2}\right)\right],$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w+1\}$$

. Com $\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|}$ e sen $\theta = \frac{b}{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|}$, onde a é a parte real do número complexo $\frac{1}{q^{2w+2}}$ e b é a parte imaginária. Portanto

$$a = \frac{1}{q^{2w+2}} \quad e \quad b = 0 \Longrightarrow \left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{q^{2w+2}}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{q^{2w+2}} \Longrightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{q^{2w+2}}}{\frac{1}{q^{2w+2}}} \Longrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad \text{e}$$

$$sen\theta = \frac{0}{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \pi + 2k.$$

Se $\theta = \pi + 2k\pi$, então $\cos\theta = -1 \neq 1$, logo $\theta \neq \pi + 2k\pi$. Se $\theta = 0 + 2k\pi$, então $\cos\theta = 1$ e $sen\theta = 0$, logo $\theta = 0 + 2k\pi$. Porém, pelo **teorema 2.7** $\theta \in [0, 2k\pi[$, então o único valor que θ pode assumir é $\theta = 0$.

Substituindo o valor de θ na fórmula temos:

$$\sqrt[2w+2]{\frac{1}{q^{2w+2}}} = x_k = \sqrt[2w+2]{\left|\frac{1}{q^{2w+2}}\right|} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2k\pi}{2w+2}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{2w+2}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\sqrt[2w+2]{\frac{1}{q^{2w+2}}} = x_k = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right] \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w+1\}.$$

Com base nessas informações podemos agora demonstrar as proposições que seguem.

Proposição 3.9. *A fórmula que resolve a equação* $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0, \ \forall\ w \in \mathbb{N}$ *é* $x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right]$ *com* $k \in \{1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}$.

Demonstração. Como acabamos de ver as raízes do polinômio $(qx)^{2w+2} - 1$ são

$$x_k = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right] \quad com \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w+1\}.$$

Que escrevendo por extenso são:

$$x_0 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{0.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{0.\pi}{w+1}\right)\right], x_1 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right], x_3 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_{2w-1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right] \quad \text{e}$$

$$x_{2w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)\right].$$

Portanto, depois de termos calculado o valor de x_0 podemos reescrever as raízes do polinômio $(qx)^{2w+2} - 1$ da forma que segue:

$$x_0 = \frac{1}{q}, x_1 = \left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_{2w-1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right] \quad e$$

$$x_{2w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right].$$

Então, pelo Teorema da Decomposição podemos escrever o polinômio $(qx)^{2w+2} - 1$ em função de suas raízes, ou seja,

$$(qx)^{2w+2} - 1 =$$

$$q^{2w+2}.\left(x - \frac{1}{q}\right).\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right]\right)...$$

$$.\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right]\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

Como decompomos o polinômio $(qx)^{2w+2} - 1$, agora podemos realizar a divisão $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x-\frac{1}{q}\right)}$, que como resultado obteremos o polinômio $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i$, então fazendo a divisão temos:

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = \frac{(qx)^{2w+2} - 1}{\left(x - \frac{1}{q}\right)} =$$

$$q^{2w+2}.\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right]\right)....$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)\right]\right)$$

Logo, pelo Teorema da decomposição podemos afirmar que as raízes do polinômio $p_{w,q}(x)=\sum\limits_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^i$ são:

$$x_1=\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right],...,$$

$$x_{2w-1}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right]\quad \text{e}$$

$$x_{2w+1}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right].$$

Assim, podemos representar todas as raízes de $p_{w,q}(x)=\sum\limits_{i=0}^{2w+1}q^{i+1}x^i$ pela fórmula

$$x_k=\frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right]\quad \text{com}\quad k\in\{1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}.$$

Portanto, a fórmula que resolve a equação polinomial

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0, \forall\ w \in \mathbb{N}$$

é

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right] \quad \text{com} \quad k \in \{1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}$$

como queríamos provar. ■

Proposição 3.10. *A fórmula que resolve a equação* $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$, $\forall\ w \in \mathbb{N}$ *é* $x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right]$ *com* $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}$ *tal que* $k \neq w+1$.

Demonstração. Como vimos nas páginas 72 e 73, as raízes do polinômio $(qx)^{2w+2} - 1$ são:

$$x_k = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right] \quad \text{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w+1\}.$$

Que escrevendo de forma expandida obtemos:

$$x_0 = \frac{1}{q}, x_1 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_w = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w+1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{w+2} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_{2w-1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right].$$

Agora iremos reescrever as raízes com o valor da raiz x_{w+1} já calculado.

$$x_0 = \frac{1}{q}, x_1 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_w = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{w+1} = -\frac{1}{q},$$

$$x_{w+2} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_{2w-1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right].$$

Agora reagrupando essas raízes de modo que a raiz x_{w+1} fique ao lado da raiz x_1, temos:

$$x_0 = \frac{1}{q}, x_{w+1} = -\frac{1}{q},$$

$$x_1 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_w = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{w+2} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)\right], ...,$$

$$x_{2w-1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w+1} = \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right]$$

Então, pelo Teorema da Decomposição, temos que:

$$(qx)^{2w+2} - 1 =$$

$$q^{2w+2}.\left(x - \frac{1}{q}\right).\left(x + \frac{1}{q}\right).\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right]\right)....$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x - \frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right]\right)$$

Realizando a divisão $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$, temos que:

$$\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)} =$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\right).\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right]\right).\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right]\right)...\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w-1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(w-1).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right]\right)....\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right]\right).$$

$$\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right]\right).\left(x-\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right]\right)$$

Então, pelo Teorema da Decomposição, temos que as raízes do polinômio $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$ são:

$$x_0=\frac{1}{q}, x_1=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{1.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_2=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{2.\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_3=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{3.\pi}{w+1}\right)\right],...,$$

$$x_w=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{w+2}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(w+2).\pi}{w+1}\right)\right],...,$$

$$x_{2w-1}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w-1).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w).\pi}{w+1}\right)\right],$$

$$x_{2w+1}=\frac{1}{q}\left[cos\left(\frac{(2w+1).\pi}{w+1}\right)+isen\left(\frac{(2w+1)\pi}{w+1}\right)\right].$$

Que podem por sua vez serem escritas através da fórmula:

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0,1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}, k \neq w+1.$$

Ou seja, todas as raízes do polinômio $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$ são:

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0,1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}, k \neq w+1.$$

Como, pelo **corolário 3.1**, temos que:

$$\left(x+\frac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i = (qx)^{2w+2}-1, \quad \forall \quad w \in \mathbb{N}. \Longrightarrow$$

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1}(-q)^{i+1}x^i = \frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$$

Portanto, a fórmula que resolve a equação polinomial

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0 \; \forall \; w \in \mathbb{N}$$

é

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0,1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}, k \neq w+1.$$

Como queríamos provar. ■

Observe que até agora o que fizemos de maneira resumida foi

- Mostrar que $-\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,q}(x)$ e que $\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,-q}(x)$.
- Mostrar que as equações polinomiais $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = 0$ e $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1}(-q)^{i+1}x^i = 0$ são respectivamente, casos particulares das equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.
- Encontrar uma fórmula através de radicais para as seguintes equações $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i = 0$ e $\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1}(-q)^{i+1}x^i = 0$ onde $n \in \mathbb{N}^*$.
- Realizar o produto dos polinômios $\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1}(-q)^{i+1}x^i\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ e encontrar suas raízes;

- Utilizar o resultado da equação $\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} q^{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} (-q)^{i+1}x^i\right) = 0$, para encontrar uma fórmula que dê as raízes da equação $[p_{w,q}(x)][p_{w,-q}(x)] = 0$ através de radicais.

Percorremos todo esse caminho para provar a **proposição 3.8** e o **corolário 3.1** que dizem respectivamente:

$$\left(x-\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = (qx)^{2w+2} - 1,\ \forall\ w \in \mathbb{N}.$$

e

$$\left(x+\tfrac{1}{q}\right)\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i = (qx)^{2w+2} - 1,\ \forall\ w \in \mathbb{N}.$$

O que implica que:

$$\sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = \frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x-\frac{1}{q}\right)},\ \forall\ w \in \mathbb{N}.$$

e

$$\sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i = \frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)},\ \forall\ w \in \mathbb{N}.$$

Então, o que fizemos a partir daí para encontrar as fórmulas das equações $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ e $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i$ foi resolver a equação $(qx)^{2w+2} - 1 = 0$ através da fórmula de radiciação de números complexos conhecida como a Segunda Fórmula de Moivre e depois realizamos as divisões exatas $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x+\frac{1}{q}\right)}$ e $\frac{(qx)^{2w+2}-1}{\left(x-\frac{1}{q}\right)}$, $\forall\ w \in \mathbb{N}$. Ou seja, para encontrar as fórmulas

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}$$

e

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0,1,2,3,...,2w-1,2w,2w+1\}, k \neq w+1.$$

Que resolvem respectivamente as equações polinomiais,

$$p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = q^{2w+2}x^{2w+1} + q^{2w+1}x^{2w} + ... + q^2x^1 + q^1x^0 = 0$$

e

$$p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1}x^i = (-q)^{2w+2}x^{2w+1} + (-q)^{2w+1}x^{2w} + ... + (-q)^2x^1 + (-q)^1x^0 = 0.$$

Utilizamos somente a radiciação (de números complexos) e a divisão de polinômios, assim podemos afirmar que encontramos duas fórmulas, através de radicais, que solucionam as equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$. Portanto, atingimos o nosso objetivo geral. Concluindo que nossa tese estava correta.

Como vimos na **seção 3.2** $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$ é uma P.G. formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$, onde $r_1 = \frac{1}{q}$ é a razão de α. Na **proposição 3.1** nós demonstramos que $-\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,q}(x)$ para todo w pertencente aos naturais, o que implica que $-r_1$ é raiz de $p_{w,q}(x)$, ou seja, o oposto da razão da P.G. α formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$ é raiz desse mesmo polinômio para todo w pertencente aos naturais.

Nós Vimos também que $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$ é uma P.G. formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,-q}(x)$, onde $r_2 = -\frac{1}{q}$ é a razão de β. Na **proposição 3.3** demonstramos que $\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,-q}(x)$ para todo w pertencente aos naturais, o que implica que $-r_2$ é raiz de $p_{w,-q}(x)$, ou seja, o oposto da razão da P.G. β formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,-q}(x)$ é raiz desse mesmo polinômio para todo w pertencente aos naturais.

Além disso $| r_1 |=| r_2 |= \frac{1}{q}$, então podemos ressaltar que os módulos das razões das progressões geométricas α e β fazem parte das fórmulas que resolvem as equações $p_{w,q}(x) = 0$ e $p_{w,-q}(x) = 0$. Isso fica evidente observando essas fórmulas na página anterior.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos realizar algumas aplicações dos estudos realizados no capítulo anterior. E desse modo esclarecer o leitor, possíveis dúvidas que tenham lhe ocorrido no decorrer deste trabalho.

1. Resolva a equação $q^6x^5 + q^5x^4 + q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q = 0$.

$$q^6x^5 + q^5x^4 + q^4x^3 + q^3x^2 + q^2x + q = 0 \Leftrightarrow \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=0}^{5} q^{i+1}x^i = 0 \Leftrightarrow p_{2,q}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} q^{i+1}x^i = 0.$$

Comparando esse último somatório com $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ que possui a como fórmula resolutiva

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}.$$

Vemos que $w = 2$, então a fórmula que resolve a equação $p_{2,q}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} q^{i+1}x^i = 0$ é

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{2+1}\right)\right], k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right], k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_3 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[\cos\pi + isen\pi\right] = \frac{1}{q}\left[-1 + i0\right] = -\frac{1}{q}$$

$$x_4 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_5 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Antes de escrevermos o conjunto solução da equação para efeito de comparação iremos escrever as raízes x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 de outra forma vejamos:

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Agora, mostraremos que x_2 pode ser escrita de outra forma.

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$x_2 = -\frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Agora mostraremos que x_4 pode ser escrita de outra forma.

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$x_4 = -\frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Agora mostraremos que x_5 pode ser escrita de outra forma.

$$-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$$

$$x_5 = \frac{1}{q}\sqrt{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Logo, o conjunto solução da equação $p_{2,q}(x) = 0$ é dado por:

$$S = \left\{-\frac{1}{q}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right\}.$$

Para verificarmos se a solução está correta poderíamos substituir cada raiz na equação e observar se dá zero, porém já resolvemos a equação $q^6x^5+q^5x^4+q^4x^3+q^3x^2+q^2x+q = 0$ na páginas 44 e 45 utilizando o Teorema das Raízes Racionais e a decomposição de polinômios para reduzi-la em uma equação biquadrada. Portanto para verificar se a solução que fizemos utilizando a fórmula está correta basta comparar o conjunto solução S_3 na página 45 com o conjunto solução S logo acima. Feito isso podemos constatar que a solução feita através da fórmula está correta.

2. Resolva a equação $q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0$.

$$q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0 \Leftrightarrow \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=0}^{5} (-q)^{i+1} x^i = 0 \Leftrightarrow p_{2,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$$

Comparando esse último somatório com $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ que possui como fórmula resolutiva
$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}$ com $k \neq w+1$.
Vemos que $w = 2$, então a fórmula que resolve a equação $p_{2,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2.2+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ é

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{2+1}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 4, 5\} \Leftrightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 4, 5\} \Leftrightarrow$$

$$x_0 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{0.\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{0.\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}$$

$$x_1 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_2 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_4 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$x_5 = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Note que as raízes x_1, x_2, x_4 e x_5 são idênticas as do item anterior por isso podemos escrever nosso conjunto solução sendo:

$$S' = \left\{\frac{1}{q}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}, \pm\frac{1}{q}\sqrt{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}\right\}.$$

Para verificarmos se a solução está correta poderíamos substituir cada raiz na equação e observar se o resultado seria zero, mas já resolvemos a equação $q^6x^5 - q^5x^4 + q^4x^3 - q^3x^2 + q^2x - q = 0$ nas páginas 51 e 52 utilizando o Teorema das Raízes Racionais e a decomposição de polinômios para reduzi-la em uma equação biquadrada. Portanto, para verificar se a solução que fizemos utilizando a fórmula está correta basta comparar o conjunto solução s_3 na página 52 com o conjunto solução S' logo acima. Feito isso podemos constatar que a solução feita através da fórmula está correta.

3. Resolva a equação:

$$128\sqrt{2}x^7 + 64\sqrt{2}x^6 + 32\sqrt{2}x^5 + 16\sqrt{2}x^4 + 8\sqrt{2}x^3 + 4\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\frac{1}{\sqrt{2}}$ temos:

$$128x^7 + 64x^6 + 32x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$$

Agora, multiplicando a equação por 2 temos:

$$256x^7 + 128x^6 + 64x^5 + 32x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 4x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$2^8x^7 + 2^7x^6 + 2^6x^5 + 2^5x^4 + 2^4x^3 + 2^3x^2 + 2^2 4x + 2^1x^0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{7} 2^{i+1}x^i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{2.3+1} 2^{i+1}x^i = 0$$

Comparando esse último somatório com $p_{w,q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} q^{i+1}x^i = 0$ que possui a como fórmula resolutiva

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\},$$

vemos que $w = 3$ e $q = 2$, então a fórmula que resolve a equação $p_{3,2}(x) = \sum_{i=0}^{2.3+1} 2^{i+1}x^i = 0$ é

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{3+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{3+1}\right)\right], k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

O que implica que:

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right], k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

Portanto,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[0+i] = \frac{1}{2}i$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}[\cos\pi + isen\pi] = \frac{1}{2}[-1+i0] = -\frac{1}{2}$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[0-i] = -\frac{1}{2}i$$

$$x_7 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, o conjunto solução da equação

$$128\sqrt{2}x^7 + 64\sqrt{2}x^6 + 32\sqrt{2}x^5 + 16\sqrt{2}x^4 + 8\sqrt{2}x^3 + 4\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$$

é

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}.$$

4. Resolva a equação:

$$128x^7 - 64x^6 + 32x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

Multiplicando a equação por 2, temos:

$$256x^7 - 128x^6 + 64x^5 - 32x^4 + 16x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$2^8x^7 - 2^7x^6 + 2^6x^5 - 2^5x^4 + 2^4x^3 - 2^3x^2 + 2^24x - 2^1x^0 = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{7} (-2)^{i+1} x^i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{2.3+1} (-2)^{i+1} x^i = 0.$$

Comparando esse último somatório com $p_{w,-q}(x) = \sum_{i=0}^{2w+1} (-q)^{i+1} x^i = 0$ que possui como fórmula resolutiva

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 2w-1, 2w, 2w+1\}, k \neq w+1.$$

Vemos que $w = 3$ e $q = 2$, então a fórmula que resolve a equação $p_{3,-2}(x) = \sum_{i=0}^{2.3+1} (-2)^{i+1} x^i = 0$ é

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{3+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{3+1}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

pois $k \neq w + 1$ e como $w = 3$, então $k \neq 4$. O que implica que:

$$x_k = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}.$$

Portanto,

$$x_0 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{0\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{0\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}[\cos 0 + isen0] = \frac{1}{2}[1 + i0] = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[0 + i] = \frac{1}{2}i$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$x_6 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[0 - i] = -\frac{1}{2}i$$

$$x_7 = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, o conjunto solução da equação

$$128x^7 - 64x^6 + 32x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

é

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}.$$

5 CONCLUSÃO

Iniciamos este trabalho de conclusão de curso fazendo uma breve abordagem histórica sobre as origens das equações polinomiais. Onde mostramos que Galois provou que as equações polinomiais gerais de grau n com $n > 4$ não são solúveis por radicais. E por esse motivo mostramos a necessidade de resolver equações polinomiais particulares de grau n com $n > 4$. E foi com base nessas informações que propomos como objetivo geral encontrar as fórmulas das equações particulares de grau N, através de radicais,

$$p_{w,q}(x) = q^1x^0 + q^2x^1 + ... + q^{2w+1}x^{2w} + q^{2w+2}x^{2w+1} = 0 \tag{5.1}$$

e

$$p_{w,-q}(x) = (-q)^1 x^0 + (-q)^2 x^1 + ... + (-q)^{2w+1} x^{2w} + (-q)^{2w+2} x^{2w+1} = 0. \tag{5.2}$$

Sendo que $w, q \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{C}$, tal que $q > 1$, com $N = 2w + 1$. Onde x é a incógnita das equações e q é uma constante. Com a observação que a P.G.(progressão geométrica) $\alpha = (q^{2w+2}, q^{2w+1}, ..., q^2, q)$ é formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$ e a P.G $\beta = (q^{2w+2}, -q^{2w+1}, ..., q^2, -q)$ é formada pela pelos coeficientes de $p_{w,-q}(x)$. Escolhemos também, esse problema de pesquisa, porque estudamos nove dissertações de mestrado da área de soluções de equações polinomiais e três livros de estruturas algébricas e em nenhum desses trabalhos sequer citam as equações aqui apresentadas. Então, se conseguíssemos encontrar tais fórmulas nós estaríamos contribuindo para o acervo bibliográfico das soluções de equações polinomiais.

No decorrer do segundo capítulo fizemos uma abordagem histórica mais aprofundada e mostramos alguns resultados clássicos sobre polinômios e equações polinomiais. No terceiro capítulo demonstramos que $-\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,q}(x)$ e que $\frac{1}{q}$ é raiz de $p_{w,-q}(x)$ para w natural. E encontramos as fórmulas

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{1, 2, 3..., 2w-1, 2w, 2w+1\}$$

e

$$x_k = \frac{1}{q}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{w+1}\right) + isen\left(\frac{k\pi}{w+1}\right)\right], k \in \{0, 1, 2, 3..., 2w-1, 2w, 2w+1\}, k \neq w+1.$$

Que resolvem respectivamente, as equações (5.1) e (5.2), através de radicais. Corroborando assim co nossa tese. Concluímos que o oposto da razão da P.G. α formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,q}(x)$ é raiz desse mesmo polinômio para todo w natural. E que o oposto da razão da P.G. β formada pelos coeficientes do polinômio $p_{w,-q}(x)$ é raiz desse mesmo polinômio para todo w pertencente aos naturais. No quarto capítulo realizamos algumas aplicações. Ficando assim para futuros estudos mostrar que $-\frac{1}{q}$ é a única raiz real de $p_{w,q}(x)$ e que $\frac{1}{q}$ é a única raiz real de $p_{w,-q}(x)$. E demonstrar que as fórmulas encontradas valem quando q é real diferente de zero.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. [S.l.]: Edgar Blucher Ltda, 1996. Citado nas páginas 15, 16 e 18.

CARRASCHI, J. E. **Equações Polinomiais.** Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde.../JonasCarraschi_revisada.pdf>. Citado na página 12.

CARVALHO, K. M. D. **A ÁLGEBRA DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS E SUA SOLUBILIDADE**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, CAMPINAS, 2015. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306427/1/Carvalho_KiscingerMunizde_M.pdf>. Citado na página 12.

COSTA, L. C. D. **A EVOLUÇÃO NA RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Campi na Grande, Campina Grande, 2016. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2015/07/TCC-Lu%C3%ADs-Carlos.pdf>. Citado nas páginas 21 e 23.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. [S.l.]: Atual, 2003. Citado na página 12.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2011. Citado nas páginas 11, 14 e 16.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. 1. ed. [S.l.]: Projeto Euclides, 2001. Citado na página 12.

HOLGADO, H. S. **Da solubilidade por meio de radicais à métodos Alternativos, Determinando as raízes polinomiais**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2016. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6273/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Henrique%20Semensato%20Holgado%20-%202016.pdf>. Citado nas páginas 12, 18 e 31.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Complexos polinômios equações. 2. ed. [S.l.]: Atual, 1993. v. 6. Citado nas páginas 25, 30 e 33.

LOBO, F. C. G. D. **Números complexos, polinômios e equações Algébricas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/322313/1/Lobo_FerdinandoCaiqueGenghiniDantas_MP.pdf>. Citado nas páginas 12 e 28.

MARQUES, V. P. N. **Polinômios e aproximações de função**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — USP, São Carlos, 2017. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-23032017-145755/pt-br.php>. Citado nas páginas 12 e 26.

NASCIMENTO, D. A. D. **Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomiais até o 4º Grau**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/8060/2/arquivo%20total.pdf>. Citado na página 12.

PONTES, R. D. S. **Equações Polinomiais, Soluções Algébricas, Geométricas e Com o Auxílio de Derivadas**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7470/5/arquivototal.pdf>. Citado nas páginas 12, 14 e 24.

RIBET, K. A. **CourseWeb Math 114 Web Page Enrollment Information**. 2018. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~ribet/114/>. Nenhuma citação no texto.

ROQUE, T. **História da Matemática**. 5. ed. [S.l.]: Zahar, 2012. Citado nas páginas 16 e 17.

SCHUVAAB, J. L. **Resolução de Equações Algébricas até Quarto Grau, uma abordagem histórica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=45960>. Citado nas páginas 12 e 16.

VIEIRA, V. L. **Álgebra abstrata para Licenciatura**. 2. ed. [S.l.]: Eduepb, 2015. Citado na página 12.