UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MARIA SILVANEIDE RAMOS DOS SANTOS

A TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COMPARADA A OUTROS MÉTODOS E SUA APLICABILIDADE

MONTEIRO
2018

MARIA SILVANEIDE RAMOS DOS SANTOS

A TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COMPARADA A OUTROS MÉTODOS E SUA APLICABILIDADE

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me.Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO
2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237t Santos, Maria Silvaneide Ramos dos.
A transformada de Laplace como método de resolução de problemas de valor inicial comparada a outros métodos e sua aplicabilidade [manuscrito] / Maria Silvaneide Ramos dos Santos. - 2018.
45 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas , 2018.

"Orientação : Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira , Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."

1. Método Transformadas de Laplace . 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Problemas de Valor Inicial (PVI). I. Título

21. ed. CDD 515.35

MARIA SILVANEIDE RAMOS DOS SANTOS

A TRANSFORMADA DE LAPLACE COMO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL COMPARADA A OUTROS MÉTODOS E SUA APLICABILIDADE

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 05/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Orientador

Luiz Lima de Oliveira Junior

Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Júnior
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Robson Batista de Sousa

Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Examinador interno (CCHE/UEPB)

Este trabalho dedico aos meus pais Antônia Isabel dos Santos e João Suplinio dos Santos, por serem pra mim a minha vida e me apoiarem em todas as minhas escolhas. Dedico também a minha irmã Silvia Patricia dos Santos, que estará eternamente em meu coração.

AGRADECIMENTOS

Devo ser grata, primeiramente ao Ser Superior por me conceder sabedoria suficientepara chegar até aqui e me mostrar que posso ir além disso. Gratidão aos meus pais, aoqual dedico este trabalho,que me ensinaram que o melhor caminho não é fácil, mas é acerteza do sucesso pessoal e profissional. Aos meus irmãos e meus sobrinhos que de algumaforma contribuiram em minha caminhada até aqui. Ao meu professor e orientador Me.Luciano dos Santos, pela amizade, paciência e carinho comigo durante todo o curso.

Não posso deixar de mencionar minha melhor amiga, Lidiana Guilherme, pordividir comigo tantas emoções antes e durante a graduação, por sempre me apoiar mesmosabendo que poderia não dar certo. Representando todos os meu mestres acadêmicos,quero agradecer ao professor Stanley Borges, exemplo de ser humano, que com toda suapaciência acreditou em mim não me deixando desistir quando achei que não conseguiria epor ter me ajudado sempre que solicitado. A Adriana Marques por dividir comigo todosos ’perrengues’ da graduação nesses anos, a qual levarei pra vida, a todos os meus amigosque me apoiram durante toda jornada. Por último, mas não menos importante, minhasogra por sempre me apoiar e ao meu namorado, que por vezes deixou seus afazeres parame ajudar em trabalhos acadêmicos, sempre me dando força e tendo muita paciência.

“Nossas dúvidas são traidoras e nos fazem perder o que, com frequência, poderíamos ganhar, por simples medo de arriscar.”

(William Shakespeare)

RESUMO

A Transformada de Laplace é um método bastante conhecido nas disciplinas de Matemáticae Física, usada na matemática para obter soluções de equações diferenciais nos problemasde valor inicial, na física em circuito elétrico, sistema massa-mola, oscilações, entre outras.As vantagens de se trabalhar a Transformada de Laplace para encontrar a solução geralde equações diferenciais é que esta as derivadas e integrais tornam-se operações simples,assim modificando da equação diferencial para uma algébrica, possivelmente diminuindo ograu de complexidade. O objetivo deste trabalho é comparar dois métodos de resoluçõesde EDO's de valor inical à Transformada de Laplace, no intuito de naturalmente provar atrivialidade da mesma.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Equações Diferenciais. Problemas de Valor Inicial.

ABSTRACT

The Laplace Transform is a well-known method in the Mathematics and Physica disciplines,used in mathematics to obtain solutions of differential equations in initial value problems,in electric circuit physics, mass-spring system, oscillations, among others. The advantagesof working the Laplace transform to find the general solution of differential equations is thatthe derivatives and integrals become simple operations, thus modifying from the differentialequation to an algebraic, possibly diminished degree of complexity. The objective of thiswork is to compare two methods of initial EDO resolutions to the Laplace Transform, inorder to naturally prove its arivelity.

Key-words: Laplace Transformad. Ordinary Differential Equations. Initial Value Problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nessa pesquisa discutiremos a resolução de Equações Diferenciais [1] (ED) a partir Transformada de Laplace comparando-a a outros métodos resolutivos, tais quais Variação de Parâmetros[2] e o método de Equação Não-homogênea com Coeficientes Constantes, posteriormente demonstrar a aplicabilidade dos resultados mediante a Transformada de Laplace.

Entendemos que a Transformada de Laplace, por ser considerado um método muito útil e mais simplificado para a resoluções de EDO′s, quando comparamos à outros métodos resolutivos. A mesma pode ser utilizada para encontrar as soluções de Equações Diferenciais Ordinárias lineares com coeficientes constantes, problemas de valores iniciais dados, assim como nas Equações Diferenciais Parciais. Com isso, este método consiste em transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica, assim facilitando a obtenção da solução e possivelmente diminuindo a dificuldade do problema.

Apesar de ser conhecida como Transformada de Laplace, o primeiro a aplicar a integração na definição da transformada foi o matemático Leonhard Euler(1707-1783), mas como o matemático francês Pierre Simon de Laplace em seu trabalho sobre teoria da probabilidade fez uso das integrais, seu nome foi atribuído a transformada. Porém, as técnicas operacionais baseadas na Transformada de Laplace só foram utilizadas nas soluções de Equações Diferenciais por engenheiros, como maior nome temos o inglês Oliver Heaviside (1850-1925).

É conferido ao matemático Gustav Doetsch (1892-1977) a versão moderna da Transformada de Laplace[3] , dando a está uma armação mais duradoura através do seu livro, Teoria e Aplicação da Transformada de Laplace em 1937, além disso, fez, aproximadamente, cem publicações dentre os quais o tema mais presente é a Transformada de Laplace. No entanto, como já mencionado anteriormente, as aparições da transformada em trabalhos são atribuídas ao matemático suíço Leonhard Euler, depois Laplace, passando por outros matemáticos como Cauchy e Lagrange, tendo assim uma obra de aproximadamente 200 anos de estudos.

Os estudos da Transformada de Laplace tiveram início mediante a necessidade de uma fórmula simplificada que obtivesse as soluções das equações diferenciais. Após

---

[1] Uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas é chamada de Equação Diferencial.

[2] Usada para encontrar uma solução particular de uma equação diferencial linear não-homogênea com coeficientes constantes.

[3] Pierre Simon Laplace (1749-1827), nascido na franca em 28 de março de 1749 na cidade de Normandia. Foi astrônomo, físico e matemático. Antes dos 20 anos de idade já era professor de matemática. Foi nomeado marquês de Napoleão. Dentre a suas contribuições podemos citar, Operador Diferencial Laplaciano e a Transformada de Laplace.

passar por alguns nomes conhecidos da matemática, Laplace cria um método que faz uso da integral multiplicado por uma exponencial, assim a Transformada, agora atribuída ao matemático em questão, deixa de ser uma ferramenta usada apenas em estudos na matemática e passa a ser usado também na engenharia com o Heaviside em problemas de sistemas de transmissão.

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB (campus VI), especificamente na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), vista no 5º Período do curso, trabalhamos com equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem e equações diferenciais parciais. Contudo, para estes assuntos é necessário o conhecimento prévio de conteúdos estudados anteriormente, sobretudo, no que se refere à disciplina de Cálculo, por conter, em suas resoluções, a presença de derivações e integrações.

Sabendo que, a disciplina de EDO, é na maioria das vezes, vista como como um conjunto de conteúdos complexos e, consequentemente, entendida pela maioria dos alunos como algo de difícil compreensão. Dessa forma, iremos apresentar o procedimento que responde: como comparar a Transformada de Laplace ao Método de Variação de Parâmetros ou outro mmétodo na resolução de equações diferenciais de modo a facilitar a interpretação no processo de resolução?, pois entendemos que essa proposta de solucionar equações diferencias por meio da Transformada de Laplace será de grande eficácia didática, uma vez que contará com o detalhamento rigoroso das resoluções sem que haja omissão de partes, levando em conta que cada detalhe tem sua importância para o entendimento específico.

Com isso, o nosso propósito é expor os métodos resolutivos e posteriormente fazer um estudo de comparação para que possa ser diminuído o grau de dificuldade nas resoluções de EDO ou EDP. Tendo em vista que trabalhar com equações algébrica pode gerar um menor grau de dificuldade, iremos continuamente enfatizar o uso da Transformada de Laplace no desenvolvimento das soluções nas Equações Diferenciais.

Para tal, os nossos objetivos específicos são:

- Desenvolver um trabalho sobre Transformada de Laplace complementando com Método de Coeficientes constantes e Variação de Parâmetros para que possa ser usada como material didático complementar na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, na resolução de EDO′s de segunda ordem.
- Fazer um estudo detalhado sobre as resoluções das ED aplicada à Transformada de Laplace e comparado com o Método de Variação de Parâmetros.
- Detalhar algumas aplicações práticas e usuais da Transformada de Laplace em problemas/fenômenos Físicos.

- Reunir ideias que possivelmente possa ter serventia didática, onde alunos da área da matemática ou ciência correlacionada, use como material para consulta.

Contudo, trabalharemos com a hipótese de que, o processo resolutivo da Transformada de Laplace pode ser considerado mais simples quando comparada a qualquer outro método mais usual.

Nas seções seguintes, definiremos a equação diferencial quanto a classificação e aplicação na Matemática e Física. Seguindo com a transformada de Laplace, da história à definição, aplicação e usualidade. Em conseguinte, o método de Variação dos Parâmetros, exemplos e aplicações. Posteriormente, o uso da Transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais em problemas ou fenômenos físicos. E finalmente, algumas considerações quanto a análise comparativa dos métodos resolutivos e conclusões.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O aparecimento das equações diferenciais, surgiram em estudos de cálculo com Isaac Newton (1642-1727) e, como nome mais presente quando se fala em cálculo diferencial temos o matemático, Leibniz (1646-1716), devendo a este a notação de derivação, usada até hoje, e o sinal de integração. Inicialmente, classificaremos uma equação diferencial, pois se a mesma basear-se em encontrar a função desconhecida dependendo apenas de uma única variável independente, esta é dita Equação Diferencial Ordinária (EDO), por conter apenas derivadas simples. Contudo, conforme afirma (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 1992), se a equação diferencial depende de duas ou mais variáveis esta é chamada Equação Diferencial Parcial (EDP). Uma equação diferencial é uma equação em que as funções são incógnitas e a equação envolve derivadas destas funções. As equações diferenciais são classificadas por ordem, tipo e linearidade. A ordem pode ser 1ª, 2ª, ..., ou n-ésima. Quanto ao tipo a equação pode ser ordinária ou parcial e, falando em linearidade, uma equação diferencial pode ser linear ou não linear.

Por exemplo: Dada a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2y}{d^2x} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0. \tag{2.1}$$

Podemos entender que esta equação envolve a função desconhecida y da variável independente x. Dessa forma, por suas incógnitas serem dependentes apenas de uma variável, é classificada como uma equação diferencial ordinária; e é linear, pois as incógnitas e derivadas aparecem de forma linear na equação; é também de 2ª ordem em virtude de sua maior ordem de derivação ser 2 (dois).Também podendo ser escrita da seguinte forma

$$y''(x) + 3y'(x) + 7y = 0. \tag{2.2}$$

Segue então um exemplo de uma equação diferencial parcial, para que possamos fazer uma análise comparativa com a *Equação (2.1)*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{2.3}$$

Assim está é parcial por sua incógnita depender de mais de uma variável, de 2ª ordem por sua maior ordem de derivação e é linear.

O real sentido do estudo das equações diferenciais é achar a equação diferencial que descreve uma situação física ou matemática e descobrir a solução apropriada dessa equação, temos como exemplos mais conhecidos e utilizados, o modelo que representa um objeto em queda livre, o movimento massa mola e o modelo para o crescimento populacional. Como afirma Boyce, DiPrima e Meade (1992),quando diz: "muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. [...] as relações dão equações e as taxas são derivadas."

2.1 Equações Homogêneas Linear de Segunda ordem

Uma equação diferencial linear de 2ª ordem é dita homogênea quando é escrita da seguinda forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{2.4}$$

onde $p(t)$, $q(t)$ são funções contínuas.

Teorema 2.1. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de* (2.4), *então*

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{2.5}$$

é solução de 2.4 com c_1 e c_2 constantes.

A demonstração encontra-se no livro (SANTOS, 2007) pág.264.

Teorema 2.2. *Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções da equação* (2.4) *tais que, em um ponto $t_0 \in \mathbb{R}$ com*

$$det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Então para todo par de condições iniciais (y_0, y_0') o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + g(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

tem uma única solução da forma

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

A demonstração encontra-se no livro (SANTOS, 2007) pág.265.

Definição 1: (I) O determinante

$$W[y_1, y_2](t_0) = det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

é chamado Wronskiano das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.

(II) Se duas soluções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ de (2.4) são tais que o seu Wronskiano é diferente de zero em um ponto t_0 dizemos que elas são soluções fundamentais de 2.4.

(III) Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais de (2.4), então

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

é solução geral de (2.4) com c_1 e c_2 constantes.

2.1.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Dizemos que uma equação diferencial de segunda ordem é homogênea com coeficiantes constantes se é escrita da seguinte forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \tag{2.7}$$

Suponha que a solução da equação (2.7) seja dada da seguinte forma $y(t) = e^{rt}$ com r a ser determinado. De fato, substituindo-se $y(t) = e^{rt}$, $y'(t) = re^{rt}$ e $y''(t) = r^2e^{rt}$ em (2.7), obtemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como $e^{rt} \neq 0$, então $y(t) = e^{rt}$ é solução de (2.7) se, e somente se, r é solução da equação

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.8}$$

que é chamada de equação característica de (2.7).

Como uma equação do segundo grau pode ter duas raízes reais, somente uma raíz real ou duas raízes complexas, usando a equação característica podemos encontrar a solução da equação (2.7). Vamos analisar cada caso para o discriminante.

Para $\triangle > 0$, temos duas raízes reais distintas, então $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são soluções da equação (2.7) e são soluções fundamentais, pois

$$det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{bmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a solução geral da equação (2.7) é

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{2.9}$$

para o caso em que $\triangle > 0$.

Para $\triangle = 0$, tem duas raizes reais iguais, ou seja, $r_1 = -\dfrac{b}{2a}$. Logo, $y_1(t) = e^{r_1t}$ é solução de (2.7). Para encontrar outra solução para a equação (2.7) no caso em que $\triangle = 0$ ver no livro (SANTOS, 2007) pág.276. A outra solução é da forma $y_2(t) = te^{r_1t}$. Logo, $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = te^{r_1t}$ são soluções fundamentais, pois

$$det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} e^{r_1t} & te^{r_1t} \\ r_1e^{r_1t} & e^{r_1t} + r_1te^{r_1t} \end{bmatrix} = e^{2r_1t} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a solução geral da equação (2.7) é

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t} \tag{2.10}$$

para o caso em que $\triangle = 0$.

Para $\triangle < 0$, duas raízes complexas, ou seja, $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$. A fórmula de Euler é dada por:

$$e^{a+ib} = e^a.(cosb + isenb).$$

Usando a fórmula de Euler para $y_1(t)$ e $y_2(t)$ obtemos:

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(cos\beta t + isen\beta t)$$

e

$$y_2(t) = e^{r_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(cos(-\beta t) + isen(-\beta t)) = e^{\alpha t}(cos\beta t - isen\beta t).$$

Logo, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções fundamentais, pois

$$det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{bmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} = (-2i\beta)e^{2\alpha t} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a solução geral complexa da equação (2.7) é

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \tag{2.11}$$

para o caso em que $\triangle < 0$.

Vamos encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. A solução geral complexa pode ser escrita da forma

$$y(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} = C_1 e^{\alpha t}(cos\beta t + isen\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(cos\beta t - isen\beta t),$$

ou seja,

$$y(t) = (C_1 + C_2)e^{\alpha t}cos\beta t + i(C_1 - C_2)e^{\alpha t}sen\beta t \tag{2.12}$$

Tomando $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}$ em (2.12), temos a solução real

$$u(t) = e^{\alpha t}cos\beta t.$$

Tomando $C_1 = \dfrac{1}{2i}$ e $C_2 = -\dfrac{1}{2i}$ em (2.12), temos a solução real

$$v(t) = e^{\alpha t}sen\beta t.$$

Vamos mostrar, que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções fundamentais da equação (2.7). De fato,

$$det\begin{bmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} e^{\alpha t}cos\beta t & e^{\alpha t}sen\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha cos\beta t - \beta sen\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha sen\beta t + \beta cos\beta t) \end{bmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, a solução geral da equação (2.7) é da forma

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}sen\beta t \tag{2.13}$$

para o caso em que $\triangle < 0$.

2.2 Equação Não-Homogênea

Uma equação diferencial de segunda ordem é dita não-homogênea se a mesma pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{2.14}$$

com $f(t)$ não nula.

Teorema 2.3. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular da equação $y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da equação homogênea correspondente. Então a solução geral da equação não homogênea* (2.14) *é*

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.15}$$

A demonstração encontra-se no livro (SANTOS, 2007) pág.292.

2.3 Método de Variação de Parâmetros

Nesta seção definiremos mais um método para a obtenção da solução das Equações Diferenciais de 2° ordem, para assim ter uma base comparativa com o outro método definido posteriormente.

Para tal, tomamos por base o autor (SANTOS, 2007), onde este por sua vez, define da seguinte forma:

Definição: O Método de Variação de Parâmetros é aplicável para qualquer equação linear de 2ª ordem da forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \tag{2.16}$$

para qual se conheça duas soluções fundamentais $y_1(t)$ e $y_2(t)$ da equação homogênea correspondente em um intervalo I, onde o Wronskiano $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$.

Pelo **Teorema 2.3.** devemos encontrar a solução particular da equação (2.14). Suponhamos que a solução particular seja da forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

onde devemos determinar as funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Derivando a solução particular até a ordem dois, e substituindo na equação (2.14) obtemos

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt,$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt.$$

Portanto, a solução particular da equação (2.14) é da forma

$$y_p(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt.$$

Pelo **Teorema 2.3.** a solução geral da equação (2.14) é da forma

$$y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da equação homogênea correspondente.

Exemplo 1: Encontrar a solução geral da equação

$$y'' + y = sect$$

$1 \rightarrow$ Encontrar a equação homogênea:

$y'' + y = 0$

$2 \rightarrow$ Determinar a equação característica

$r^2 + 1 = 0$

$\triangle = -4$, assim $r_1 = i$ e $r_2 = -i$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

$3 \rightarrow$ Para a solução da equação homogênea utiliza-se uma das popriedade do $\triangle$ mencionado anteriormmente, neste caso como $\triangle$ é negativo, logo a solução particular da equação homogênea é dada por

$$y_H(t) = c_1e^{0t}cost + c_2e^{0t}sent$$

ou, seja

$$y_H(t) = c_1cost + c_2sent. \tag{2.17}$$

$4 \rightarrow$ Agora vamos encontrar a solução particular da equação não-homogênea, ou seja, vamos utilizar definições anteriormente mencionadas. De fato, como $y_1(t) = cost$ e $y_2(t) = sent$ então $y_1' = -sent$ e $y_2' = cost$.

Determinar o Wronskiano

$$W[cost, sent] = det\begin{bmatrix} cost & sent \\ -sent & cost \end{bmatrix} = cos^2t + sen^2t = 1 \neq 0.$$

Então, temos ainda que $f(t) = sect$, segue que

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int \frac{sent}{sect}dt.$$

Como $secx = \dfrac{1}{cosx}$, logo temos

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int \frac{sent}{cost}dt = ln|sect| + C_1$$

onde C_1 é constante. Para y_1 temos

$$\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int costsectdt = \int \frac{cost}{cost}dt = \int dt = t + C_2.$$

Logo, mediante aos resultados encontrados podemos determinar a solução particular da equação não-homogênea, dada por

$$y_p(t) = -y_1(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt + y_2(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt \tag{2.18}$$

ou seja,

$$y(t) = -cost.ln|sect| + t.sent$$

Assim, a solução geral de uma equação não-homogênea é dada por

$$y(t) = -cost.ln|sect| + t.sent + c_1 cost + c_2 sent.$$

2.3.1 Problemas de Valor Incial (PVI)

Nesta seção vamos determinar a solução geral da equação de valor incial dado utilizando o método de Variação de Parâmetros definida anteriormente.

Poblema 1: Econtre a solução geral da equação

$$y'' + y' - 2t = 2t, \;\; y(0) = 0 \;\; y'(0) = 1. \tag{2.19}$$

Solução: Vamos determinar a equação homogênea da equação (2.19):

$y'' + y' - 2y = 0$, determinando a equação característica, temos:

$r^2 + r - 2 = 0$, assim $\triangle = 9$, $r_1 = -2$ e $r_2 = 1$. Como o $\triangle > 0$, a solução particular da equação homogênea é dada por:

$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} = c_1e^{-2t} + c_2e^t$.

Vamos agora, determinar a solução particular da equação não-homogênea para encontrar a solução geral de equação (2.19). Determinando o Wronskiano, obteremos: $W[y_1,y_2](t) = det\begin{bmatrix} y_(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}$, temos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^t$, então o

$$W[y_1,y_2](t) = 3e^{-t}.$$

Segue que

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int \frac{2te^t}{3e^{-t}}dt,$$

utilizando o seguinte método de integração,

$$\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1) + C,$$

temos:

$$\frac{2}{3}\int te^{2t}dt = \frac{1}{6}e^{2t}(2t-1)$$

Fazendo para $y_1(t)$ teremos:

$$\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int \frac{2te^{-2t}}{3e^{-t}}dt,$$

reorganizando e utilizando o seguinte método de integração,

$$\int te^{at}dt = \frac{e^{at}}{a^2}(-t-1),$$

obteremos:

$$\frac{3}{2}\int te^{-t}dt = \frac{2}{3}\frac{e^{-t}}{1}(-t-1) = \frac{2}{3}e^{-t}(-t-1).$$

Portanto a solução particular da equação não-homogênea é dada por:

$$y_p(t) = -y_1(t).\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)} + y_2(t).\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt.$$

Assim,

$$y_p(t) = -e^{-2t}.\frac{1}{6}(2t-1) + e^t.\frac{2}{3}e^{-t}(-t-1) = -t - \frac{1}{2}.$$

Logo, concluímos que a solução geral da equação (2.19) é:

$$y(t) = -t - \frac{1}{2} + c_1e^{-2t} + c_2e^t.$$

Vamos determinar c_1 e c_2. Agora, derivando a solução geral e aplicando os valores iniciais, obteremos:

$$y'(t) = -1 - 2c_1e^{-2t} + c_2e^t \Rightarrow y'(0) = -1 - 2c_1 + c_2,$$

e também aplicando as condições iniciais na solução geral, teremos

$$y(0) = -\frac{1}{2} + c_1 + c_2.$$

Formando o sistema, temos então:

$$\begin{cases} -1 - 2c_1 + c_2 = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, o sistema encontraremos $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = 1$, portanto, a solução do problema de valor inicial ficará da seguinte forma:

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t. \tag{2.20}$$

Problema 2: Encontrar a solução geral da equação

$$y'' - 6y' + 8y = \sin t, \;\; y(0) = y'(0) = 0. \tag{2.21}$$

Solução: A equação homogênea é $y'' - 6y' + 8 = 0$. Determinando a equação caracteristica da equação homogênea, temos

$r^2 - 6r + 8 = 0$, $\triangle = 4$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$, assim como $\triangle > 0$ a solução geral da equação homogênea é:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Agora, vamos encontrar a solução particular da equação não-homogênea e determinar a solução geral da equação (2.21). Determinando o Wronskiano, temos:

$$W[y_1, y_2](t) = det \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ 2e^{2t} & 4e^{4t} \end{bmatrix} = 2e^{6t}$$

segue

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt = \int \frac{e^{4t} \sin t}{2e^{6t}} dt.$$

Utilizando o seguinte método de integração,

$$\int e^{at}. \sin(bt) dt = \frac{e^{at}}{(a^2 + b^2)} [a. \sin(bt) - b. \cos(bt)] + C.$$

Temos:

$$\frac{1}{2} \int e^{-2t} \sin t dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-2t}}{(-2)^2 + 1^2} ((-2). \sin t - \cos t) \right].$$

Fazendo para

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt = \int \frac{e^{2t}. \sin t}{2e^{6t}}.$$

E integrando pelo mesmo método mencionado anteriormente, teremos:

$$\frac{1}{2} \int e^{-4} \sin dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-4t}}{(-4)^2 + 1^2} ((-4). \sin t - \cos t) \right].$$

Assim, a solução particular da equação não-homogênea é da forma:

$$y_p(t) = -y_1(t). \int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} + y_2(t). \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt \Rightarrow$$

$$y_(t) = -e^{2t} \left(\frac{e^{-2t}}{10} \right) ((-2) \sin t - \cos t) + e^{4t} \left(\frac{e^{-4t}}{34} \right) ((-4). \sin t - \cos t) \Rightarrow$$

$$y_p(t) = \frac{7}{85} \sin t + \frac{6}{85} \cos t.$$

Logo a solução geral da equação (2.21) é dada por:

$$y(t) = -y_1(t). \int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} + y_2(t). \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt + c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{7}{85} \sin t + \frac{6}{85} \cos t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}.$$

Derivando a solução geral e aplicando os valores iniciais, temos que $c_1 = -\frac{1}{10}$ e $c_2 = \frac{1}{34}$. Portanto, a solução geral é da forma:

$$y(t) = \frac{7}{85} \sin t + \frac{6}{85} \cos t - \frac{1}{10} e^{2t} + \frac{1}{34} e^{4t}. \tag{2.22}$$

2.4 Método dos Coecientes a Determinar

Utilizaremos este método para resolver equações da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \ a, \ b, \ c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0. \tag{2.23}$$

E ele só é aplicável quando a função $g(t)$ tiver as seguintes formas:

$\rightarrow g(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Assim, a solução particular da equação não-homogênea é da forma:

$$y_p(t) = t^s(A_0 + A_1 t + ... + A_n t^n) \tag{2.24}$$

onde s é o menor inteiro não negativo, que garante que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, A_1, ..., A_n$ são coeficientes a determinar.

$\rightarrow g(t) = (a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n)e^{at}$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Neste caso, a solução particular é da forma

$$y_p(t) = t^s(A_0 + A_1 t + ... + A_n t^n)e^{at} \tag{2.25}$$

em que s é o menor inteiro não negativo, garantindo que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, A_1, ..., A_n$ coeficientes a determinar.

$\rightarrow g(t) = (a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n)e^{at}\cos bt + (b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m)e^{at}\sin bt$, $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$. Assim, a solução particular tem a forma

$$y_p(t) = t^s[(A_0 + A_1 t + ... + A_q t^q)e^{at}\cos bt + (B_0 + B_1 t + ... + B_q t^q)e^{at}\sin bt] \tag{2.26}$$

onde $q = max\,\{m, n\}$, s é o menor inteiro não negativo, garantindo que nenhuma parcela de $y_p(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, A_1, ..., A_q$, $B_0, B_1, ..., B_q$ são coeficientes a determinar.

Vamos fazer alguns exemplos utilizando este método:

Exemplo 1: Determinar a solução geral da equação

$$y'' + y' - 2t = 2t, \ \ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1. \tag{2.27}$$

Solução: Determinando a equação homogênea da equação (2.27):

$y'' + y' - 2y = 0$, determinando a equação característica, temos:

$r^2 + r - 2 = 0$, assim $\triangle = 9$, $r_1 = -2$ e $r_2 = 1$. Como o $\triangle > 0$, a solução particular da equação homogênea é dada por:

$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t$.

Sabendo que $g(t) = 2t$, então a solução particular da equação não-homogênea é da forma:

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t. \tag{2.28}$$

Derivando y_p, obteremos:

$$y'_p(t) = A_1$$
$$y''_p(t) = 0,$$

Substituindo na equação (2.27):

$$A_1 - 2(A_0 + A_1 t) = 2t$$

Formando um sistema, teremos

$$\begin{cases} -2A_0 + A_1 = 0 \\ -2A_1 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que $A_0 = -\frac{1}{2}$ e $A_1 = -1$, então substituindo em (2.28), temos a solução particular da equação não-homogênea:

$$y_p(t) = -\frac{1}{2} - t.$$

E a solução geral da equação (2.27) é:

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t + c_1 e^{-2t} + c_2 e^t.$$

Derivando e substituindo os valores iniciais, chegaremos aos valores $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = 1$, logo a solução do problema de valor inicial é da forma:

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2} e^{-2t} + e^t.$$

Exemplo 2: Determine a solução geral da equação

$$y'' + y' - 2y = t^2 + 3, \;\; y'(0) = 0 = y(0). \tag{2.29}$$

Solução: Determinando a equação homogênea, temos:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Equação característica

$$r^2 + r - 2 = 0, \;\; \triangle = 9, \;\; r_1 = -2, \;\; r_2 = 1.$$

Logo, a solução da equação homogênea é:

$$y_H(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t.$$

Agora, vamos determinar a solução particular da equação não-homogênea e conseguinte determinar a soluçao geral da equação (2.29). Segue que,

$$y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2.$$

Derivando y_p temos, $y_p'(t) = A_1 + 2A_2t$ e $y_p''(t) = 2A_2$, substituindo na equação (2.29), temos:

$$2A_2 + A_1 + 2A_2t - 2A_0 - 2A_1t - 2A_2t^2 = 3 + t^2.$$

Formando um sistema, temos:

$$\begin{cases} -2A_0 + A_1 + 2A_2 = 3 \\ 2A_2 - 2A_1 = 0 \\ -2A_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, obtermos $A_0 = -\dfrac{9}{4}$, $A_1 = -\dfrac{1}{2}$ e $A_2 = -\dfrac{1}{2}$. Logo, a solução particular da equação não-homogênea é:

$$y_p(t) = -\frac{9}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2.$$

E a solução geral da equação (2.29) é dada por:

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^t - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2.$$

Para determinar c_1 e c_2, vamos aplicar as condições iniciais dadas na solução geral e também vamos derivar até a 1ª ordem a solução geral da equação:

$$y(0) = c_1 + c_2 - \frac{9}{4}$$

e

$$y'(t) = -2c_1e^{-2t} + c_2e^t - \frac{1}{2} - t \Rightarrow y'(0) = -2c_1 + c_2 - \frac{1}{2}.$$

Formando o sistema e resolvendo, encontramos $c_1 = \dfrac{7}{12}$ e $c_2 = \dfrac{5}{3}$ Logo, a soluçaõ do problema de valor inicial é:

$$y(t) = \frac{7}{12}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^t - \frac{9}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2.$$

Exemplo 3: Determinar a solução geral da equação

$$y'' - 6y' + 8y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{2.30}$$

Solução: A equação homogênea da equação (2.30) é:

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

E a equação característica é dada por: $r^2 - 6r + 8 = 0$, suas raízes são $\triangle = 4$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Logo, a solução da equação homogênea é:

$$y_H(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} = c_1e^{2t} + c_2e^{4t}.$$

A solução particular da equação não-homogênea, utilizando o item (2.26), é da forma $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$. Derivando, temos

$$y_p'(t) = -A\sin t + B\cos t$$

e

$$y_p''(t) = -A\cos t - B\sin t.$$

Substituindo na equação (2.30), obtemos

$$(-A\cos t - B\sin t) - 6(-A\sin t + B\cos t) + 8(A\cos t + B\sin t) = \sin t \quad \Rightarrow$$

$$-A\cos t - B\sin t + 6A\sin t - 6B\cos t + 8A\cos t + 8B\sin t = \sin t \quad \Rightarrow$$

$$7A\cos t - 6B\cos t + 7B\sin t + 6A\sin t = \sin t \quad \Rightarrow$$

$$\cos t(7A - 6B) + \sin t(7B + 6A) = \sin t.$$

Resolvendo o sistema, temos $A = \dfrac{6}{85}$ e $B = \dfrac{7}{85}$, agora substituindo os valores de A e B em $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$, obtemos

$$y_p(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t.$$

Logo, a solução geral da equação não-homogênea é dada por

$$y(t) = y_p(t) + y_H(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t + c_1e^{2t} + c_2e^{4t}. \tag{2.31}$$

Substituindo os valores de $y'(0) = y(0) = 0$ na equação (2.31), obteremos

$$y'(t) = -\frac{6}{85}\sin t + \frac{7}{85}\cos t + c_1.2e^{2t} + c_2.4e^{4t}$$

$$y'(0) = -\frac{6}{85}.0 + \frac{7}{85}.1 + c_1.2.1 + c_2.4.1 = \frac{7}{85} + 2c_1 + 4c_2$$

$$y(0) = \frac{6}{85}.1 + \frac{7}{85}.0 + c_1.1 + c_2.1 = \frac{6}{85} + c_1 + c_2$$

Resolvendo o sistema, obtemos o seguinte resultado, $c_1 = -\dfrac{1}{10}$ e $c_2 = \dfrac{1}{34}$, assim a solução do problema de valor inicial é da seguinte forma

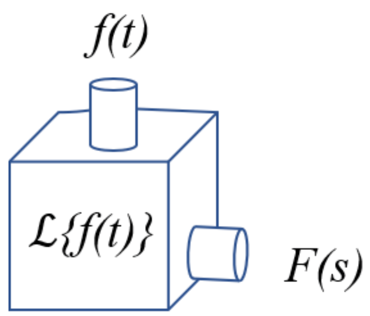
$$y(t) = \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t - \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t}.$$

3 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é um método caracterizado pelo envolvimento da operação de integração a uma função, produzindo assim, uma nova função com uma nova variável independente. Matemáticamente usada para resolver Equações Diferenciais com valores iniciais dados e de 2° ordem.

Dada a função $f(t)$, quando aplicada a transformada $\mathcal{L}\{f(t)\}$ resulta numa nova função, está dependendo de uma nova variável, $F(s)$. Assim, temos que a Transformada de Laplace converge de uma equação diferencial $f(t)$ para uma equação algébrica em $F(s)$.

Figura 1 – -Funcionamento da Transformada de Laplace



Fonte:Construção nossa(2018).

Definição: Dada uma função $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$, a Transformada de Laplace de f é uma função F de s definida como segue:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{3.1}$$

para todos os valores de $s \geq 0$ para os quais a integral imprópria [1] converge. Porém a convergência da integral não é para um número, mas para uma função F de s. A integral que define a Transformada de Laplace nem sempre converge, assim a função não admite Transformada de Laplace.

Exemplos de funções que não possuem Transformada de Laplace: $f(t) = e^{t^2}$ e $f(t) = \dfrac{1}{t}$.

Teorema 3.1. *Se $f(t)$ é integrável em cada intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$ e de ordem exponencial c, então a Transformada de Laplace de $f(t)$ existe para $c > 0$.*

[1] Usada para calcular áreas de regiões ditas ‘infinitas’ é uma integral cujo o limite superior ou inferior tende a $+\infty$ ou $-\infty$.

Demonstração. Como a função $f(t)$ é de ordem exponencial[2] c, então existem constantes c, $M > 0$ e $T > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, para todo $t > T$. Assim, se $T' \geq T$, a Transformada pode ser escrita como a soma, que segue:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{T'} e^{-st} f(t)dt + \int_{T'}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Além disso, temos

$$\left| \int_{T'}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \right| \leq \int_{T'}^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

como $|f(t)| \leq Me^{ct}$, assim segue

$$\int_{T'}^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_{T'}^{\infty} e^{-st} M.e^{ct} dt = M \int_{T'}^{\infty} e^{ct-st} dt = M \int_{T'}^{\infty} e^{-(s-c)t} dt$$

integrando por substituição, temos:

$$M \int_{T'}^{\infty} e^{-(s-c)t} dt = -\frac{M}{s-c} e^{-(s-c)t} \Bigg|_{T'}^{\infty} = -\lim_{t\to\infty} \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)t} + \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T'}.$$

Como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)t} = 0,$$

então

$$M \int_{T'}^{\infty} e^{-(s-c)t} dt = \frac{M}{s-c} e^{-(s-c)T'}$$

para todo $s > c$. Logo, a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

converge para todo $s > c$. □

Teorema 3.2. *Se a Transformada de Laplace de uma função limitada $f(t)$ EXISTE, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então*

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Demonstração. Pela Equação (3.1), podemos conseguir com a integração por substituição, assim tomando $u = st$ e $\dfrac{du}{s} = dt$, segue que

$$F(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} f\left(\frac{u}{s}\right) e^{-u} du.$$

Assim, utilizando o fato de f ser limitada, por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$. Logo,

$$|F(s)| \leq \frac{M}{s} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{M}{s}.$$

Portanto, $|F(s)| \to 0$ quando $s \to \infty$, ou seja,

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

□

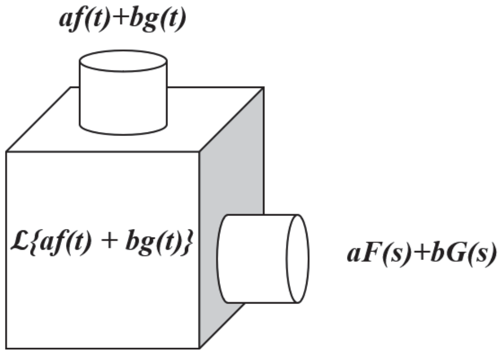
[2] Uma função $f(t)$ é de ordem exponencial, se existem constantes c, $M > 0$ e $T > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Mediante a estudos e em concordância com as propriedades apresentadas por (FIGUEIREDO; NEVES, 1997), segue algumas propriedades da Transformada de Laplace:

Propriedade 1: Linearidade da Transformada de Laplace Se a e b são constantes, então

$$\mathcal{L}\{af(t)\} + \mathcal{L}\{bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Figura 2 – Linearidade da Transformada de Laplace



Fonte:Construção nossa(2018).

Para todo s tal que as Transformadas de Laplace das funções f e g ambas existem. De uma forma geral, podemos dizer que a Transformada da soma é a soma das Transformadas, vale a distributiva da Transformada de Laplace.

Demonstração. Temos:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[af(t) + bg(t)]dt = \int_0^\infty af(t)e^{-st}dt + \int_0^\infty bg(t)e^{-st}dt,$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\},$$

como queríamos. □

Propriedade 2: A Transformada admite inversa, ou seja, $\mathcal{L}^{-1}$ de $F(s)$ quando aplicada a transformada fornece $f(t)$ novamente, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t). \tag{3.2}$$

A linearidade da Transformada de Laplace vale para a inversa da sua Transformada, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Utilizando o livro de (SANTOS, 2007), segue então alguns exemplos de Transformadas elementares, fazendo uso da definição da Transformada de Laplace:

Exemplo 1: *(Transformada da função Constante)* A Transformada de Laplace da funcão $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s}.$$

Como $\lim_{T\to\infty} \dfrac{e^{-sT}}{-s} = 0$, logo, tem-se:

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \tag{3.3}$$

Exemplo 2: *(Transformada da função Exponencial)* Seja a uma constante real. A Transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = e^{at}$ é dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt.$$

Resolvendo a integral pelo método de substituição, temos

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = - \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right|_T^\infty = - \lim_{T \to \infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} + \frac{e^{-(s-a)0}}{s-a} =$$

$$0 + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \tag{3.4}$$

Agora, colocaremos apenas os resultados de algumas Transformadas e as demonstrações encontra-se no livro de (SANTOS, 2007), para que com isso possamos encontrar as demais Transformadas, como veremos mais adiante.

Exemplo 3: *(Transformada das funções Trigonométricas)* Seja a uma constante real. Iremos determinar a Transformada de Laplace das funções $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dado por $f(t) = \cos at$ e $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $g(t) = \sin at$. Antes disso, calcularemos a Transformada de Laplace da função $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = e^{iat}$. Segundo a definição, temos

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{iat} dt = F(s) = \int_0^\infty e^{-(s-ia)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)} \right|_0^\infty =$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{e^{-sT}(\cos aT + \sin aT)}{-(s-ia)} + \frac{e^{-(s-ia)0}}{(s-ia)} = 0 + \frac{e^{-(s-ia)0}}{(s-ia)} =$$

$$\frac{1}{s-ia}, \quad \text{para} \ \ s > 0. \tag{3.5}$$

Por outro lado,

$$H(s) = \mathcal{L}\left\{h(s)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i \sin at) = \mathcal{L}\left\{f(s)\right\} + i\mathcal{L}\left\{g(s)\right\} = F(s) + iG(s).$$

Logo, a parte real de $H(s)$ é igual a $F(s)$, e a parte imaginária de $H(s)$ é igual a $G(s)$. Como

$$H(s) = \frac{1}{s - ia} = \frac{s + ia}{(s - ia)(s + ia)} = \frac{s + ia}{s^2 + a^2}.$$

Então, a Transformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \cos at$ é dada por

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{para} \quad s > 0. \tag{3.6}$$

E, a Transformada de Laplace da função $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \sin at$ é dada por

$$G(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \text{para} \quad s > 0. \tag{3.7}$$

Exemplo 4: *(Transformada da função Potência)* Seja n um inteiro positivo. A Transformada de Laplace da função $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(t) = t^n$ para $n = 0, 1, 2...$ é dada por

$$F_n(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0. \tag{3.8}$$

Exemplo 5: Dado o polinômio $f(t) = 2t^2 + 3t + 5$, encontre a Transformada de Laplace. De fato, pela **propriedade 1** e usando (3.8), temos

$$F(s) = 2.\frac{2!}{s^{2+1}} + 3.\frac{1!}{s^{1+1}} + 5.\frac{t^0}{s^1} \Rightarrow F(s) = 2.\frac{2}{s^3} + 3.\frac{1}{s^2} + 5.\frac{1}{s}.$$

No caso da função crescer muito rápido, ela pode não admitir a transformada de Laplace $F(s)$ para nenhum $s > 0$. Isso não ocorre para $f(t)$ que satisfaz o **Teorema 3.1.** Neste caso, dizemos que as funções que satisfaz o **Teorema 3.1.** são **funções admissíveis.**

Usando a **propriedade 2** e também (3.4), vamos dar seguimento com um exemplo da Transformada de Laplace inversa:

Exemplo 6 : Dada a Transformada de Laplace de uma função $f(t)$ como sendo

$$F(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}.$$

Solução: Temos que para determinar a função $f(t)$ precisamos decompor $F(s)$ em frações parciais. Se determinarmos as raízes do denominador de $F(s)$, obteremos duas raízes, $s = 1$ e $s = 2$. Assim, ficaremos

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s - 1)(s - 2)} = \frac{A}{(s - 1)} + \frac{B}{(s - 2)},$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$. Segue que

$$s + 3 = A(s-2) + B(s-1).$$

Para $s = 1$ e $s = 2$, obtemos $A = -4$ e $B = 5$, respectivamente. Assim

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)} = -4\frac{1}{s-1} + 5\frac{1}{s-2}.$$

Logo,

$$f(t) = -4e^{t} + 5e^{2t}.$$

Dado o conhecimento da Transformada de Laplace de algumas funções, fazendo a combinação poderemos obter novas funções, pois a Transformada de Laplace é uma operação linear.

Teorema 3.3. *(Transformada de Deslocamento) Seja a uma constante. Se a tranformada de Laplace da função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é $F(s)$, para $s > c$, então a Transformada da função*

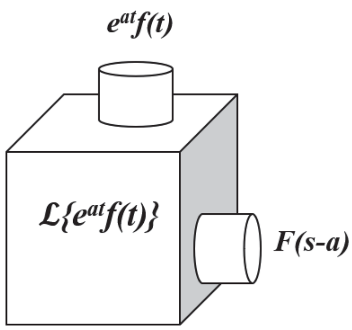
$$g(t) = e^{at} f(t)$$

é

$$G(s) = F(s-a), \quad s > a + c.$$

Fazendo uma representação figurativa do **Teorema 3.3**, temos a nível comparativo, um raciocínio análogo a Figura 1:

Figura 3 – -Teorema do Deslocamento



Fonte: Construção nossa(2018).

Demonstração. Como $g(t) = e^{at} f(t)$, então aplicando a definição, temos

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = F(s-a).$$

$\square$

Por conseguinte, segue alguns exemplos de aplicaçõoes do Teorema de Deslocamento:

Exemplo 3.3.1: Sejam a e b constantes. Usando o Teorema de Deslocamento, vamos determinar a Transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \cos at$. De fato,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{bt} \cos(at)dt = \int_0^\infty e^{-(s-b)t} \cos(at)dt.$$

Fazendo uso dos resultados dos exemplos 2 e 4 demonstrados anteriormente, chegamos ao seguinte resultado

$$F(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}, \text{ para } s > a.$$

Exemplo 3.3.2: Sejam a e b constantes. Vamos usar o Teorema de Deslocamento para obtermos a Transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{bt} \sin at$, assim, utilizando os resultados dos exemplos 2 e 5, obteremos:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{bt} \sin(at)dt = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}, \text{ para } s > a.$$

Exemplo 3.3.3: Sejam a uma constante e n um inteiro positivo. Usando o **Teorema 3.3** e os exemplos 2 e 6, obteremos a Transformada de Laplace de $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^{at}t^n$. De fato,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{bt}t^n dt = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \text{ para } s > a.$$

Definição: Dizemos que uma função $f(t)$ é seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo $[a, b]$, se $f(t)$ é contínua em $[a, b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. Dizemos que uma função $f(t)$ é seccionalmente contínua ou contínua por partes em um intervalo $[0, \infty)$ se $f(t)$ é contínua para todo intervalo da forma $[a, A]$, com $A > a$.

Teorema 3.4. *(Derivação) A Transformada destrói derivadas. Dado $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função admissível, ou seja, existem $M > 0$ e $k > 0$ tais que, $|f(t)| \leq Me^{kt}$, para todo $t > 0$.*

i) Se $f'(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então

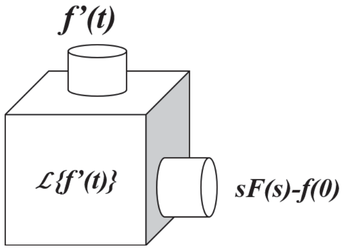
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0).$$

ii) Se $f'(t)$ é admissível e $f''(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

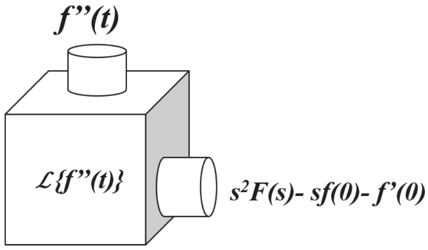
A demonstração encontra-se no livro (SANTOS, 2007) pág.490.

Figura 4 – -Transformada de Laplace da derivada de 1ª ordem



Fonte: Construção nossa(2018).

Figura 5 – -Transformada de Laplace da derivada de 2ª ordem



Fonte: Construção nossa(2018).

Exemplo 3.4.1: Seja a uma constante. Dado $f(t) = t\sin at$. Vamos utilizar o **Teorema 3.4.** para determinar a Transformada de Laplace $F(s)$.

Solução. Derivando $f(t)$, obtemos

$$f'(t) = \sin at + at\cos at.$$

Agora, derivando $f'(t)$, temos

$$f''(t) = a\cos at + a\cos at + at(-\sin at)a = 2a\cos at - a^2 t\sin at.$$

Temos que $f(t) = t\sin at$, assim ficariamos com

$$f''(t) = 2a\cos at - a^2 f(t).$$

Como conseguinte, utilizaremos resultados para encontrar a Transformada de Laplace de $f(t)$, então utilizando o resultado (3.6) e o Teorema de Derivação, temos

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = 2a\frac{s}{s^2+a^2} - a^2F(s).$$

Isso implica que

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}.$$

Exemplo 3.4.2: Seja a uma constante. Dado $f(t) = t \cos at$, vamos determinar a Transformada de Laplace $F(s)$.

Solução: Derivando $f(t)$, obtemos

$$y'(t) = \cos at - at \sin at.$$

Derivando $y'(t)$, obtem-se

$$y''(t) = -a \sin at - a \sin at - at \cos at.a = -2a \sin at - a^2 t \cos at.$$

Sabemos que $f(t) = t \cos at$, assim segue que

$$y''(t) = -2a \sin at - a^2 f(t).$$

Logo, fazendo uso do teorema anterior e usando o resultado do exemplo (3.7), obteremos:

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = -2a\frac{a}{s^2 + a^2} - a^2F(s) \Rightarrow s^2F(s) - 1 = -\frac{2a^2}{s^2 + a^2} - a^2F(s) \Rightarrow$$

$$s^2F(s) + a^2F(s) = -\frac{2a^2}{s^2 + a^2} + 1 \Rightarrow F(s)(s^2 + a^2) = \frac{-2a^2 + s^2 + a^2}{s^2 + a^2}$$

$$F(s) = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}. \tag{3.9}$$

Como queríamos está determinado a Transformada da função $f(t)$.

3.1 Problema de Valor Inicial

Vamos agora, resolver problemas de valor inicial, utilizando a Transformada de Laplace.

Exemplo 1: Vamos encontrar a solução da seguinte equação

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}cos2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{3.10}$$

Solução. Aplicando a transformada de Laplace, e pelo teorema de Derivação, temos os seguintes resultados,

$$\mathcal{L}\{y''\} = (s^2Y(s) - sy(0) - y'(0));$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = (sY(s) - y(0));$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s),$$

e utilizando o Teorema de Deslocamento, temos

$$\mathcal{L}\{4e^{-t} \cos 2t\} = 4.\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}.$$

Substituindo na equação (3.10), obteremos

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} \tag{3.11}$$

substituindo os valores iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ na equação (3.11), obtemos:

$$(s^2Y(s) - s.1 - 0) + 2(sY(s) - 1) + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - s + 2sY(s) - 2 + 5Y(s) = 4\frac{s+1}{(s+1)^2+4} \Rightarrow$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = \frac{4s+4}{s^2+2s+5} + s + 2.$$

Isolando Y(s), obtem-se

$$Y(s) = \frac{4s+4}{(s^2+2s+5)^2} + \frac{s+2}{s^2+2s+5} = 4\frac{s+1}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1+1}{(s+1)^2+4} =$$

$$\frac{2.2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Logo, pelos resultados obtidos anteriormente, temos que a solução geral da equação (3.10) é

$$y(t) = te^{-t}\sin 2t + e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Nesta aplicação, se optarmos para obter a equação geral da equação (3.10) utilizando o Método de Variação de Parâmetros, teremos os seguintes passos: Determinar a equação homogênea:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Equação característica:

$$r^2 + 2r + 5 = 0 \Rightarrow \triangle = -16, \;\; r_1 = -1 + 2i, \;\; r_2 = -1 + 2i.$$

Logo, a solução da equação homogênea é:

$$y_H(t) = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\sin 2t.$$

Agora, determinaremos a solução particular da equação não-homogênea, para determinarmos a solução geral. Temos, então que o Wronskiano é da forma:

$$W[y_1, y_2](t) = det\begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ -e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t & -e^{-t}\sin 2t + 2e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} = 2.$$

Segue que

$$\int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)}dt = \int \frac{e^{-t}\sin 2t.4e^{-t}cos2t}{2}dt,$$

e
$$\int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1,y_2](t)}dt = \int \frac{e^{-t}\cos 2t.4e^{-t}cos2t}{2}dt.$$

Analisando as integrais, podemos afirmar que estas não tem uma resolução trivial, requer um bom conhecimento sobre os métodos de integração. Assim, concluímos que neste exemplo é mais conveniente o uso da Transformada de Laplace, por conter apenas manipulações algébricas.

Exemplo 2: Vamos encontrar a solução da seguinte equação

$$y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{3.12}$$

Vamos encontrar a solução da equação (3.11) utilizando a transformada de Laplace. Pelo Teorema de Derivação, temos os seguintes resultados

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0);$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0);$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s).$$

E pelo **Exemplo 4**, temos

$$\mathcal{L}\{2t\} = 2.\frac{1!}{(s-0)^{1+1}} = 2\frac{1}{s^2}.$$

Assim, ficamos com

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + (sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2}. \tag{3.13}$$

Substituindo os valores $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$ em (3.13), obteremos:

$$(s^2Y(s) - s.0 - 1) + (sY(s) - 0) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2} \Rightarrow s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = \frac{2}{s^2} + 1 \Rightarrow$$

$$Y(s)(s^2 + s - 2) = \frac{2}{s^2} + 1.$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s-1)} + \frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{(2+s^2)}{s^2(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s-1}.$$

Obtemos:

$$\frac{s^2 + 2 = As(s+2)(s-1) + B(s+2)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s+2)}{s^2(s+2)(s-1)}.$$

Segue,

$$A(s^3 + s^2 - 2s) + B(s^2 + s - 2) + C(s^2 - s^2) + D(s^3 + 2^2) = s^2 + 2.$$

Formando o sistema teremos,

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ A + B - C + 2D = 1 \\ -2A + B = 0 \\ -2B = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos que $A = -\frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$ e $D = 1$. substituindo esses valores obteremos

$$Y(s) = \frac{-\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{1}{s-1}.$$

Logo, utilizando os resultados encontrados anteriormente, podemos determinar que a solução geral da equação (3.12), usando a Transformada de Laplace é

$$y(t) = -\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^t.$$

Neste exemplo comparando as resoluções, pelo Método de Variação de Parâmetros (2.19), ou ao Método dos Coeficientes a Determinar (2.27), e sabido que o modo mais fácil para a obtenção da solução geral é pela Transformada de Laplace, pois utilizamos resultados encontrados anteriormente sem precisar deter conhecimentos de integração e derivação, que na maioria das vezes não é trivial para alguns alunos.

Exemplo 3: Vamos encontrar a solução da seguinte equação

$$y'' + y' - 2y = t^2 + 3, \;\; y'(0) = y(0) = 0. \tag{3.14}$$

Vamos determinar a solução da equação utilizando a Transformada de Laplace. Pelo Teorema de Derivação, obtemos:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0);$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0);$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s).$$

E utilizando um dos resultados encontrados anteriormente, temos

$$\mathcal{L}\{t^2 + 3\} = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s}.$$

Substituindo, na equação (3.14), obtemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s}.$$

Usando as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, obteremos

$$Y(s)(s^2 + s - 2) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+2)(s-1)} + \frac{3}{s(s+2)(s-1)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2+3s^2}{s^3(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s+2)} + \frac{E}{(s-1)}.$$

Daí, segue que

$$2 + 3s^2 = A(s^2+s-2) + B(s^3+s^2-2s) + C(s^4+s^3-2s^2) + D(s^4-s^3) + E(s^4+2s^3).$$

Formando o sistema

$$\begin{cases} C + D + E = 0 \\ B + C - D + 2E = 0 \\ A + B - 2C = 3 \\ A - 2B = 0 \\ -2A = 2 \end{cases}$$

Obteremos que $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{9}{4}$, $D = \frac{7}{12}$ e $E = \frac{5}{3}$. Substituindo os valores, temos:

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{7}{12}\left(\frac{1}{s+2}\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s-1}\right).$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial da equação (3.14) é:

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{9}{4} + \frac{7}{12}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^t.$$

Fazendo uma análise comparativa com a resolução pelo Método dos Coeficientes a Determinar (2.29), temos que pelo Método da Transformada de Laplace tem grande valia quanto a trivialidade em obter a solução, pois a mesma necessita que tenhamos o conhecimento de algumas manipulações algébricas e chega-se ao resultado fazendo uso de resultados encontrados anteriormente.

3.2 Tabela da transformada de Laplace

Esta foi construída mediante a resultados encontrados por meio da definição e teoremas ao qual encontram-se nos exemplos que antecedem e com o auxílio do livro (SANTOS, 2007).

A **tabela 1** auxiliará na obtenção das soluções das equações de valor inicial dado. Em conseguinte encontraremos uma solução de Problema de Valor Inicial (PVI), agora com o uso da tabela abaixo, a nível comparativo onde demonstraremos a solução por meio da utilização dos três Métodos aqui já mencionados, Método de Variação de Parâmetros, Método dos Coeficientes a Determinar e a Transformada de Laplace.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s > a$
e^{iat}	$\frac{1}{s-ia},\ s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2},\ s > a$
$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2},\ s > a$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$
$\sin at - at\cos at$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2},\ s > 0$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2},\ s > 0$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2},\ s > 0$

Tabela 1 – Tabela das Transformadas de Laplace.

Problema 1: Resolver o problema

$$y'' - 6y' + 8y = \sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0. \tag{3.15}$$

Por conseguinte, utilizaremos a Transformada de Laplace para determinar a solução da equação. Dado a equação (3.15), pelo Teorema de Derivação, obtem-se

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0);$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0);$$

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s),$$

e pelo exemplo 3.3.2, do Teorema de Deslocamento (ou pela tabela das Transformadas de Laplace), teremos

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Assim, ficamos com a seguinte equação

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 6(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}. \tag{3.16}$$

Substituindo $y'(0) = y(0) = 0$, obteremos

$$(s^2Y(s) - s.0 - 0) - 6(sY(s) - 0) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$s^2Y(s) - 6sY(s) + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y(s)(s^2 - 6s + 8) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Logo,

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 6s + 8)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{Cs + D}{s^2+1}. \tag{3.17}$$

Daí, temos

$$1 = A(s-4)(s^2+1) + B(s-2)(s^2+1) + (Cs + D)(s-2)(s-4).$$

Substituindo nesta equação $s = 2$, $s = 4$ e $s = i$, obteremos:

Para $s = 2$ implica que $1 = A(-2).5 \Rightarrow A = -\frac{1}{10}$.

Para $s = 4$ implica que $1 = B.2.17 \Rightarrow B = \frac{1}{34}$.

Para $s = i$ implica que $c = \frac{6}{85}$ e $D = \frac{7}{85}$.

Logo, substituindo os valores na equação (3.17), teremos

$$Y(s) = -\frac{1}{10}.\frac{1}{s-2} + \frac{1}{34}.\frac{1}{s-4} + \frac{6}{85}.\frac{s}{s^2-1} + \frac{7}{85}.\frac{1}{s^2-1}.$$

Utilizando os resultados da tabela (1), obteremos a solução do problema de valor inicial da equação não-homogênea, dada por

$$y(t) = -\frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{34}e^{4t} + \frac{6}{85}\cos t + \frac{7}{85}\sin t.$$

Neste exemplo foi determinada a solução do problema de valor inicial pelos três métodos: Método dos Coeficientes a Determinar, Variação de Parâmetros e pela Transformada de Laplace. Fazendo uma analise do passo a passo das resoluções o método que demonstra mais facilidade vai de encontro ao propósito desta pesquisa. A Transformada demonstra mais trivialidade de compreensão em relação aos demais métodos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa foi notável que se tratando da Transformada de Laplace, está apresenta diversas utilidades, o que tornou difícil a linha a ser seguida. Assim optei por demonstrar algumas soluções gerais dos problemas de equações diferenciais com valores inicias dados. Foi utilizando, além da Transformada de Laplace, o método de Variação de Parâmetros e o método de Coefientes Constates, acreditando provar que quando comparados um dos métodos teria uma maior facilidade de compreensão em seu processo resolutivo.

O detalhamento em todas as resoluções foi um dos objetivos do trabalho, dessa forma demonstraria que além da eficácia da Transformada de Laplace, a extenção das resoluções por outro método em relação a está é de uma enorme significativa. Para mais, as resoluções das EDO's pela Transformada de Laplace, não dispunha de manipulações de integração ou derivação, apenas álgebrica.

Foi sabido também que a Transformada de Laplace não está resumida apenas as resoluções de EDO's na matemática, esta pode ser aplicada na física, como mostra o exemplo a seguir tirado do livro (BASSALO; CATTANI, 2010), onde a Transformada de Laplace é usada para encontrar a solução geral no caso de um Movimento Harmônico Simples[1].

Aplicação: Uma mola de massa m, de coeficente de elasticidade k, é mantida na vertical. Aplica-se ao sistema uma percussão representada pela força-impulso: $F_0\delta(t)$. Determine a equação do movimento da mola, sabendo que $y(0) = y'(0) = 0$.

Solução: Vamos recordar que a equação diferencial que representa o movimento da mola é $my'' + ky = f(t)$, assim temos que

$$my'' + ky = F_0\delta(t)$$

, Assim

$$\mathcal{L}\{my''\} = m[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)]$$
$$\mathcal{L}\{ky\} = kY(s)$$

Pela tabela das Transformada de Laplace. temos que a Transformada de Distribuição de Dirac pa a função $\delta(t) = 1$, assim

$$\mathcal{L}\{F_0\delta(t)\} = F_0$$

Assim segue que,

$$m[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + kY(s) + F_0,$$

[1] MHS é um movimento executado por uma partícula de massa m subetida a uma força que pe proporcional ao seu deslocamento.

e aplicando $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, obteremos:

$$Y(s)(s^2 + m) = F_0 \Rightarrow Y(s) = \frac{F_0}{m}.\frac{1}{s^2 + \frac{k}{m}}$$

Fazendo uso da tabela de Transformadas e detendo alguns conhecimentos de HMS, teremos que

$$y(t) = \frac{F_0}{\sqrt{km}}.\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Portanto, toda investigação feita para a elaboração deste trabalho, permitiu mostrar a utilidade e trivialidade do uso da Transformada de Laplace nas resoluções de EDO's com coeficentes constantes o que possivelmente pode ser uma fonte de consulta para o estudo das resoluções dos Problemas de Valor Inicial (PVI) por diferentes Métodos.

REFERÊNCIAS

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Elementos da Física Matemática**. [S.l.]: São Paulo, 2010. Citado na página 43.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Wiley New York, 1992. Citado nas páginas 15 e 16.

FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. [S.l.]: Rio de Janeiro, 1997. Citado na página 30.

SANTOS, R. J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. [S.l.]: Belo Horizonte, 2007. Citado nas páginas 16, 17, 19, 31, 34 e 40.