UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CÂMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IONARA MACÊDO DE ARAÚJO

DEFININDO AS FUNÇÕES ELEMENTARES UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Campina Grande, PB
2018

IONARA MACÊDO DE ARAÚJO

DEFININDO AS FUNÇÕES ELEMENTARES UTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho.

Campina Grande, PB

2018

A659d Araújo, Ionara Macêdo de.

Definindo as funções elementares utilizando Equações diferenciais ordinárias [manuscrito] / Ionara Macedo de Araujo. - 2018.

52 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Departamento de Matemática - CCT."

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Funções elementares. 3. Função exponencial. I. Título

21. ed. CDD 515.25

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

IONARA MACÊDO DE ARAÚJO

DEFININDO AS FUNÇÕES ELEMENTARES ÚTILIZANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em: 11 / 12 / 18

BANCA EXAMINADORA

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira (Examinador)
Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Luciana R Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Examinadora)
Departamento de Matemática - CCT/UEPB

Dedico, primeiramente, a Deus, que esteve presente comigo todos os dias. À minha família, por todo carinho, zelo, amor e apoio proporcionado durante todo o tempo que me dediquei ao meu crescimento profissional, sem eles eu não chegaria até aqui.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por todo amor, cuidado, paciência, força e misericórdia que tornou este capítulo na minha vida possível. Tudo foi feito com Ele e para Ele.

Á minha família, que esteve e torceu junto comigo em todos os momentos, mesmo em meio as tribulações durante a graduação. Sem vocês eu não teria conseguido. Eu amo vocês!

Aos colegas da UEPB, em especial a Roseane Matias, Luana Gabriela, Amandda Araújo, Roberto Santos, Paulo Ricardo, por todo companherismo, amizade, carinho e força durante o curso. Vocês foram meu abrigo durante os dias tristes e fortaleza nos dias de felicidade. Sem dúvidas, a graduação foi melhor por ter vocês comigo.

Aos meus amigos, Iana, Alanne, Nilmara, Alana, Iasmim e Alberto, por sempre me apoiarem e estarem junto comigo na busca por minha felicidade e sucesso. Os amo demais!

Aos meus professores, as pessoas que conheci na Universidade, pelos amigos que fiz, aqueles que permaneceram e os que se foram. Sem dúvidas, vocês me ajudaram a chegar até aqui. Muito obrigada!

Á minha orientadora querida, por toda dedição, companherismo e paciência. Além da pessoa maravilhosa que és. Por seu toque de amor ao ensinar. És um exemplo de professor que quero seguir. Obrigada por todo conhecimento transferido.

Por último, deixo o meu mais sincero obrigada ao meu pai, Jozinaldo (*in memoriam*), que no decorrer do curso partiu deixando uma saudade imensa. Mas sei que esteve presente comigo desde sua partida, me dando forças para prosseguir nessa caminhada que se tornou mais árdua depois que ele se foi. EU TE AMO DEMAIS!!! Esta vitória é por você.

Para cada instante da vida, eu morreria uma infinidade de vezes, tão bom é ser estar aqui... Morrerei apenas uma vez. Nesta equação diferencial e integral, o benefício tende ao infinito e o custo a zero

Luiselza Pinto

Sumário

Resumo

Neste trabalho, apresentamos definições e propriedades das funções elementares: seno, cosseno e exponencial, a partir de resultados de existência e unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias e bem como de Análise na Reta e Curvas Planas . Os resultados aqui apresentados surgiram a partir de um estudo do artigo (5) de Diamond .

Palavras - chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Funções Elementares. Existência e Unicidade de Soluções.

Abstract

In this work, we present definitions and properties of the elementary functions: sine, cosine and exponential, from the results of existence and unicity of Ordinary Differential Equations as well as of Linear Analysis and Flat Curves. The results presented here arose from a study of Diamond's article (5).

Keywords: Edo.Elementary Functions. Existence and Unicity of Solutions.

Introdução

Existem várias funções que podem modelar problemas e situações do cotidiano. Dentre estas estão as funções elementares: Seno, Cosseno e Exponencial que são o objeto de estudo deste trabalho.

Sabendo que as funções elementares são vistas, muitas vezes, desde o Ensino Fundamental até a graduação decidimos neste trabalho apresentá-las utilizando soluções de Equações Diferenciais Ordinárias para definí-las e demonstrar suas propriedades de forma diferente do que comumente são introduzidas.

Achamos necessário e interessante mostrar essas propriedades utilizando Equações Diferenciais Ordinárias para assim podermos conhecer outro modo de estudá-las.

Durante o Ensino Fundamental, as funções seno e cosseno são vistas a partir do estudo no triângulo retângulo e no Ensino Médio a partir do círculo trigonométrico, todos eles estudados a partir da geometria.

Na graduação podemos encontrá-las, por exemplo, definidas por séries numéricas ou, no caso da função exponencial, por limite de sequências.

Já utilizando as EDO, ligadas mais ao ensino superior, foi visto uma nova forma de como podemos mostrar as propriedades das funções elementares e iremos ver que os resultados são válidos e de simples entendimento.

No início do nosso trabalho mostramos nas preliminares algumas definições e teoremas do Cálculo Diferencial e Análise Real, que serão utilizados e, uma seção sobre o estudo de curvas que serão utilizadas na última propriedade do estudo das funções seno e cosseno.Além disso, adicionamos uma seção que trata sobre as Equações Diferenciais Ordinárias para assim conhecê-las um pouco e, logo após, temos os teoremas que servirão de apoio para o desenvolver do trabalho.

Após isso, mostramos a função exponencial, definindo-a e demonstrando as suas propriedades já utilizando resultados das EDO's, tratados na última seção das preliminares e também usando alguns resultados enunciados de Cálculo Diferencial e Análise na Reta.

Por fim, falamos sobre as funções seno e cosseno, deixando-as assim definidas e provamos as suas propriedades como: a derivada do seno e cosseno, a soma de dois arcos, etc.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo, apresentamos definições e resultados que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre estes, os resultados envolvendo Cálculo Diferencial, Análise Real e Equações Diferenciais Ordinárias são essenciais para nosso estudo pois a partir deste iremos desenvolver o nosso trabalho.

No início desta seção serão vistos alguns resultados de Cálculo Diferencial, teoremas como Teorema do Valor Médio, Teorema de Rolle e, Teorema do Confronto e, também, definimos a série de Tayor, utilizada para mostrar a propriedade da n-ésima derivada da função exponencial, em que, esses resultados, são de bastante importância para o desenvolvimento das propriedades das funções Elementares e trazemos alguns exemplos.

No fim, temos uma seção sobre curvas, que será utilizada na demonstração da última propriedade das funções Seno e Cosseno e uma seção sobre as Equações Diferenciais Ordinárias para deixar mais claro o desenvolvimento das propriedades.

Os resultados desse Capítulo serão demonstrados sempre que possível e serão omitidos quando a prova envolver assuntos que não forem abordados aqui mas sempre serão referenciados.

1.1 Resultados Auxiliares

Definição 1.1.1 ***(Limite de Função)*** *Se f é uma função real definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, então o limite de $f(x)$, quando x tende* *a a é igual a L, se dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ satisfazendo*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Quando isso acontece, denotamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Exemplo 1.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Mostre que $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.*

Solução: *Observe que f não está definida quando $x = 1$, mas para $x \neq 1$,*

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1.$$

Seja $\varepsilon > 0$, dado e considere $\delta = \varepsilon$. Assim, se $0 < |x - 1| < \delta$, então

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon,$$

isto é,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Observação 1.1.1 *A menos de menção contrária, todas as funções consideradas neste trabalho são funções reais cujo domínio é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que sua lei de formação faz sentido.*

Definição 1.1.2 ***(Função Contínua)*** *Uma função real f é contínua em um ponto p se*

(i) *f está definida em p. Isto é, $f(p)$ é um número real;*

(ii) $\lim_{x\to p} f(x)$ *existe;*

(iii) $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Se f não for contínua em p, dizemos que f é descontínua em p.

Exemplo 1.1.2 *As funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ e $g(x) = x$, respectivamente, são contínuas em todo $a \in \mathbb{R}$*

Solução: *Seja a um número real qualquer. Então, dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$, então, para $|x - a| < \delta$, temos*

$$|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

e

$$|g(x) - g(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$$

Logo as funções constante e identidade são contínuas.

Definição 1.1.3 ***(Função Diferenciável).*** *Sejam $(a, b) \subset \mathbb{R}$ e f uma função real definida em (a, b). Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $x_0 \in (a, b)$, quando existe o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nesse caso, escrevemos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O valor $f'(x_0)$ é dito derivada de f no ponto x_0. Se f é derivável em todo ponto $x_0 \in (a, b)$, dizemos que f é diferenciável.

Proposição 1.1.1 (Desigualdade Triangular) *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos que*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Prova: *Somando $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$ obtemos $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$.* ■

Proposição 1.1.2 (Regra da Cadeia) *Sejam $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ funções tais que $f((a, b)) \subset (c, d)$ e, sejam $x_0 \in (a, b)$ e $y_0 = f(x_0)$. Se existem $f'(x_0)$ e $g'(y_0)$ então $g \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto x_0, valendo $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.*

Prova: *Temos que, por definição*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$, tal que , se $|x - x_0| < \delta_0$, então

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(|g'(y_0)| + 1)}.$$

E, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_1$ implica

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| + |f'(x_0)| < 1 + |f'(x_0)|$$

Ainda, existe $\delta_2 > 0$, tal que $|y - y_0| < \delta_2$ implica em

$$\left|\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2(|f'(x_0)| + 1)}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Como f é contínua em x_0, pois é derivável neste ponto, existe $\delta_3 > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta_3$ implica em $|f(x) - f(x_0)| < \delta_2$. Daí, tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_3\}$ e escrevendo $y = f(x)$, obtemos, para $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} - g'(y_0)f'(x_0)\right| &= \left|\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g'(y_0)f'(x_0)\right| \\ &= \left|\left(\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)\right) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + g'(y_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)\right| \\ &\leq \left|\left(\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)\right) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| + \left|g'(y_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)\right| \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da desigualdade triangular (Proposição 1.1.1). Logo,

$$\left|\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} - g'(y_0)f'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2(|f'(y_0)| + 1)}(|f'(y_0)| + 1) + |g'(y_0)|\frac{\varepsilon}{2(|g'(y_0)| + 1)}$$

e,portanto,

$$\left|\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} - g'(y_0)f'(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos. ∎

Observação 1.1.2 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável, em $a \in \mathbb{R}$, então f será contínua em a.*

Prova: Se existe o limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ então existe também o limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] &= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right]\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=0.\end{aligned}$$

Logo f é contínua no ponto a. ■

Exemplo 1.1.3 *Seja $f(x)=2x^2-3$. Então*

$$(a) f'(0)=0; \qquad (b) f'(2)=8; \qquad f'(p)=4p.$$

Solução: *Por definição*

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2h=0,$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2-8}{h}=\lim_{h\to 0}8+2h=8,$$

e em geral, para qualquer p,

$$f'(p)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(p+h)^2-2p^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4p+2h)=4p.$$

Definição 1.1.4 ***(Extensão Contínua).*** *Sejam $f: A\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g: B\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funções contínuas, tais que $A\subset B$. Dizemos que g é extensão contínua de f a B, se $f(x)=g(x)$, para todo $x\in A$.*

Observação 1.1.3 *Segue de resultados de topologia que, toda função contínua em $\mathbb{Q}$ admite uma única extensão contínua em $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.1.1 ***(Teorema de Rolle).*** *Seja f uma função tal que*

(i) f é contínua no intervalo fechado [a,b];

(ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a,b);

(iii) f (a) = f (b) = 0.

Então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Prova: Ver Lima (6), p.271. ■

Teorema 1.1.2 ***(Teorema do Valor Médio).*** *Seja f uma função tal que*

(i) f é contínua no intervalo fechado [a,b];

(ii) f é diferenciável no intervalo aberto (a,b).

Então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova: A equação da reta secante do gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

A diferença entre a altura $y = f(x)$ da curva e altura da secante no ponto x é então dada pela função

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Note que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esta função diferença é contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b). Além disso,

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) = 0,$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) = 0.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0$$

ou seja,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

donde segue o resultado. ■

Observação 1.1.4 *Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, então $f(x)$ é crescente nesse intervalo. E, se $f'(x) < 0$, ent ao $f(x)$ é decrescente.*

Prova: Primeiro, vamos mostrar que a função é crescente. E o outro resultado segue de forma análoga.
Queremos provar que se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. Pelo TVM aplicado a f em $[x_1, x_2]$, existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo f é crescente.

■

Observação 1.1.5 *Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, então f é uma função real constante.*

Prova: Para todo $x \in (a, b]$, temos $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ onde $c \in (a, x)$ Como $f'(c) = 0$, temos $f(x) - f(a) = 0$, isto é, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a, b]$ e, portanto, f é constante. ■

Teorema 1.1.3 ***(Teorema do Confronto).*** *Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto que contenha o ponto p (exceto possivelmente em p) e*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x) = L.$$

Então,

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$

Prova: Por hipótese, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ então } |h(x) - L| < \epsilon.$$

Então, da primeira desigualdade temos que $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$ ou seja, $-\epsilon + L < f(x) < \epsilon + L$, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta_1$. E da segunda, temos que $-\epsilon < h(x) - L < \epsilon$ ou seja,

$-\epsilon + L < h(x) < \epsilon + L$, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta_2$.
Tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Então, se $0 < |x - a| < \delta$, temos

$$-\epsilon + L < f(x) < \epsilon + L$$

e

$$-\epsilon + L < h(x) < \epsilon + L$$

ou seja, como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, podemos escrever:

$$-\epsilon + L < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \epsilon + L$$

Logo, se

$$0 < |x - a| < \delta,$$

temos

$$-\epsilon + L < g(x) < \epsilon + L,$$

ou seja, $|g(x) - L| < \epsilon$, o que significa que

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 1.1.4 *Mostre que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.*
Solução: *Note que $f(x) = x^3 + x - 1$ é contínua e $f(0) = -1$ e $f(1) = 1$.Logo existe um c entre 0 e 1 tal que $f(c) = 0$. Para verificar que a equação dada não possui outra raiz real, vamos usar o Teorema de Rolle. Suponha, por contradição, a equação dada tenha duas raízes distintas a e b, então $f(a) = f(b) = 0$. Como f é uma função polinomial, então f é derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Assim, pelo Teorema de Rolle, existe um c entre a e b, tal que $f'(c) = 0$. Mas,*

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $f'(x)$ nunca pode ser zero, o que contradiz o Teorema de Rolle. Portanto, a equação não *pode ter duas raízes distintas.*

Exemplo 1.1.5 *Suponha que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?*

Solução: *Pelo fato de que toda função derivável é contínua (Observação 1.1.2), temos que se f é derivável então é contínua, para todo x. Em particular, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio no intervalo $[0,2]$. Então existe um número c tal que*

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2-0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(2)\text{-}f(0) &= 2f'(c) \\ f(2) &= f(0) + 2f'(c) \\ &= -3 + 2f'(c) \end{aligned}$$

Sabemos que $f'(c) \leq 5, \forall\ x \in \mathbb{R}$. Assim, multiplicando ambos os menbros dessa desigualdade por 2, temos que $2f'(c) \leq 10$. Logo,

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7.$$

Portanto, o maior valor possível para $f(2)$ é 7.

Exemplo 1.1.6 *Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \neq 1$, temos:*

$$-x^2 + 3x \leq f(x) \leq \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Solução: *Como:*

- $\lim_{x\to 1}(-x^2+3x) = 2.$
- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2.$

Temos, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Definição 1.1.5 ***(Série de Taylor)*** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Se a é interior ao intervalo I e $a + h \in I$, então podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + ... + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + r_n(h),$$

onde $r_n(h) = \dfrac{f^n(a+\theta_n h)}{n!} \cdot h^n$ *com* $0 < \theta_n < 1$.
A série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^n(a)}{n!} \cdot h^n$ *chama-se a série de Taylor da função.*

1.2 Curvas planas

As provas dos resultados dessa seção podem ser encontrados em Tenenblat (9).

Definição 1.2.1 ***(Curva Diferenciável).*** *Uma função $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, com $I \subset \mathbb{R}$, é chamada de curva plana se $\alpha(t) = (f(t), g(t))$ para $t \in I$ em que f e g são funções contínuas em um intervalo I.*

Uma curva α é dita regular se a sua derivada é diferente de zero, ou seja, $\alpha'(t) = (f'(t), g'(t)) \neq (0,0)$, para todo $t \in I$,

Definição 1.2.2 ***(Curva Parametrizada pelo Comprimento de Arco).*** *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0,$$

em que $\| \cdot \|$ é a norma em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.2.1 *Uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|\alpha'(t)\| = 1$.*

Proposição 1.2.2 *Toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

Definição 1.2.3 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\alpha(t) = (f(t), g(t))$, $t \in I$. Definimos o vetor normal a curva α, como sendo*

$$N(t) = (-g'(t), f'(t)), t \in I.$$

Observação 1.2.1 *Considerando α e N como na definição anterior, temos que $\{\alpha'(s), N'(s)\}$ formam uma base ortonormal que tem a mesma orientação da base canônica de $\mathbb{R}^2$.*

1.3 Equações Diferenciais Ordinárias

Aqui, iremos dispor teoremas de existência e singularidade para equações diferenciais utilizados para a garantia dos resultados do próximo capítulo.

Equações diferenciais servem para compreender problemas que envolvem a matemática de forma aplicada em outras ciências como a Física, Engenharias e a Economia, por exemplo.

Definição 1.3.1 *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

que envolve uma função incógnita, $y = y(x)$, e envolve as derivadas diferenciais dessa função. x é a variável independente, y é a variável dependente e o símbolo y^k denota a derivada de ordem k, $k \in \mathbb{N}$, da função $y = y(x)$.

Definição 1.3.2 *Uma solução para uma Equação Diferencial Ordinária é uma função de classe $C^n(\mathbb{R})$ que satisfaz identicamente à equação (1.1).*

Definição 1.3.3 *Um Problema de Valor Inicial (PVI) é um problema do tipo*

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^n) = 0 \\ y(x_0) = a_1, y'(x_0) = a_2, \dots, y^{n-1}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

Dizemos que uma função y é solução do PVI acima em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, quando y satisfaz ambas as condições do problema.

Teorema 1.3.1 *Se q, x_0 e a são números reais, então existe uma única função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que y é solução de*

$$\begin{cases} y'(x) + qy(x) = 0, x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = a \end{cases}$$

Prova: Temos que $y'(x) + qy(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ é equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = -qy(x).$$

Dividindo ambos os membros por $y(x)$, obtemos

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y(x)} = -q$$

ou seja,

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y(x)} = -q.$$

Integrando ambos os lados, temos que y é solução da equação se, e somente se,

$$\int \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y(x)} dx = \int -q dx$$

e isso ocorre se, e somente se,

$$ln|y| = -qx + c$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} y &= \pm e^{-qx+c} \\ &= e^{-qx} \cdot e^{c} \\ &= c_1 e^{-qx} \end{aligned}$$

em que $c_1 \in \mathbb{R}$. Como queremos $y(x_0) = a$,

$$c_1 e^{qx_0} = a,$$

logo $c_1 = ae^{-qx_0}$.

A Unicidade segue do fato de se supormos que existe outra solução, podemos repetir os passos anteriores e encontramos que ela é igual a y como acima. ■

Teorema 1.3.2 *Se p, q, x_0, a e b são números reais, então existe uma única função diferenciável $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{cases} y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = a, y'(x_0) = b \end{cases} \tag{1.2}$$

Há uma consequência imediata no caso de equações de segunda ordem como no Teorema (1.3.2). Elas também valem para as equações de primeira ordem.

Prova: Ver Boyce & Diprima (4), p.79.

$\blacksquare$

Teorema 1.3.3 *Sejam* $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são soluções de* $y'' + py' + qy = 0$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, então* $y = \alpha u + \beta v$ *também é solução.*

(b) Sejam ϕ *uma solução de* $y'' + py' + qy = 0$*,* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\varphi(x) = \phi(x - c), \forall\, x \in \mathbb{R}$*. Então* ϕ *é uma solução.*

(c) Se ϕ *é uma solução de* $\phi''' + p\phi'' + q\phi' = 0$*. Então sua derivada* ϕ' *é uma solução.*

Prova:

(a) Escrevendo

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (\alpha u + \beta v)'' + p(\alpha u + \beta v)' + q(\alpha u + \beta v) \\ &= \alpha(u'' + pu' + qu) + \beta(v'' + pv' + qv) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Onde na terceira igualdade usamos o fato de que u e v são soluções de $y''+py'+qy = 0$.

(b) Tomando $\varphi(x) = \phi(x - c)$ e derivando uma vez, obtemos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \phi'(x - c)1 \\ &= \phi'(x - c) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\varphi''(x) = \phi''(x - c).$$

Como ϕ é solução para todo $x \in \mathbb{R}$, então também satisfaz para $\eta = x - c$ e, portanto, φ é solução.

(c) Tomando

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1.3}$$

temos que ϕ é solução de (1.2). Derivando uma vez nossa equação temos,

$$\phi''' + p\phi'' + q\phi' = 0$$

Chamando $\phi' = z$, obtemos

$$z'' + pz' + qz = 0$$

Logo z é solução e satisfaz (1.3). Portanto, ϕ' também é solução, como queríamos.

■

Capítulo 2

Função Exponencial

Este Capítulo contém os resultados principais, conceito e propriedades, da função exponencial utilizando Equações Difereciais. Dentre eles iremos falar sobre a propriedade multiplicativa, de potência, crescimento da função exponencial, dentre outras.

Definição 2.0.1 *Chamamos de função exponencial e denotamos por*

$$\begin{array}{rccc} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & exp(x) \end{array}$$

a única solução da equação diferencial

$$y' = y,$$

satisfazendo a condição inicial $y(0) = 1$.

Note que, do Teorema (1.3.1), a função exp está bem definida. Além disso, exp é contínua por ser solução de uma EDO.

2.1 Propriedades da $exp(x)$

1. **Propriedade multiplicativa**

   Queremos provar que

$$exp(x+t) = exp(x)exp(t) \text{ e } exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}, \text{ para todo } x, t \in \mathbb{R}.$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ e considere $y(x) = c \cdot exp(x)$. Aplicando a definição, temos,

$$\begin{aligned} y'(x) &= (c \cdot exp(x))' \\ &= c \cdot (exp(x))' \\ &= c \cdot (exp(x)) \\ &= y(x), \end{aligned}$$

portanto,

$$y'(x) - y(x) = 0.$$

Logo, $y(x) = c \cdot exp(x)$ é solução de $y' = y$.

Ainda,

$$\begin{aligned} y(0) &= c \cdot exp(0) \\ &= c \cdot 1 \\ &= c \end{aligned}$$

ou seja, $y(x) = c \cdot exp(x)$ é solução única, pelo Teorema 1.3.1, de $y' - y = 0$ e $y(0) = c$.

Se tomarmos qualquer $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$c = exp(t)$$

e, da primeira parte,

$$f(x) = exp(t) \cdot exp(x)$$

é solução de $f' = f$, com dado inicial $f(0) = exp(t)$.

Por outro lado, pelo Teorema (1.3.3 - b), temos que

$$h(x) = exp(x + t)$$

também é solução de $h' = h$ com $h(0) = exp(t)$, pois,

$$h(0) = exp(0 + t) = exp(t).$$

Portanto, da unicidade de soluções, temos

$$h(x) = f(x)$$

ou seja,

$$exp(x+t) = exp(x) \cdot exp(t), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Em particular, temos

$$\begin{aligned} exp(x) \cdot exp(-x) &= exp(x + (-x)) \\ &= exp(x - x) \\ &= exp(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donde,

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}, \tag{2.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. **Propriedade de Potência**

Queremos mostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos,

$$exp(nx) = (exp(x))^n, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para $n = 0$, a igualdade é satisfeita trivialmente.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar usando indução.

(i) Vejamos se é válido para $n = 1$.

Temos

$$exp(nx) = (exp(x))^n \iff exp(1 \cdot x) = (exp(x))^1 \iff exp(x) = exp(x).$$

Portanto, é válido para $n = 1$.

(ii) Agora, suponhamos, por hipótese de indução, que é válido para $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$exp(kx) = (exp(x))^k. \tag{2.3}$$

(iii) Por fim, provemos que é válido para $n = k + 1$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} exp((k+1)\cdot x) &= exp(kx + x) \\ &= exp(kx)\cdot exp(x) \\ &= (exp(x))^k \cdot (exp(x))^1 \\ &= (exp(x))^{k+1}. \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue de (2.1) e a terceira de (2.3).

Dado o exposto acima, concluímos que $exp(nx) = (exp(x))^n$ é válido para $n = k + 1$, portanto é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$exp(nx) = (exp(x))^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Por conseguinte, vamos provar que também é válido para todo $n \in \mathbb{Z}$, com $n = -k$, e $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$exp(-kx) = (exp(x))^{-k}, \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

e concluímos a propriedade para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para isso, seja $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$.

Temos que,

$$\begin{aligned} exp(nx) &= exp((-k)\cdot x) \\ &= exp(k\cdot(-x)) \\ &= (exp(-x))^k \\ &= \left(\frac{1}{exp(x)}\right)^k \\ &= (exp(x))^{-k} \\ &= (exp(x))^n, \end{aligned}$$

a terceira igualdade segue de (2.4) e a quarta de (2.2). Consequentemente, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

3. **Propriedade de Potência Racional**

Definamos $e = exp(1)$ e sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

A propriedade de potência da exponencial nos mostra que,

$$\begin{aligned}\left(exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q &= exp\left(\frac{p}{q}\cdot q\right)\\ &= exp(p)\\ &= exp(1)^p\\ &= e^p\end{aligned}$$

Logo,

$$exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}, \text{ para todo } p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0. \tag{2.5}$$

Sabemos que os números racionais são aqueles que podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, sendo $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Assim, para $r \in \mathbb{Q}$, temos

$$exp(r) = e^r.$$

A função $exp(x)$ nos dá, segundo a definição de extensão contínua (Definição 1.1.4) e Observação (1.1.3), a única extensão contínua de e^x dos números racionais para os números reais.

4. **A função $exp(x)$ é crescente e positiva**

Vamos mostrar que $exp(x)$ é positiva, por argumentos de contradição.
Suponhamos que $exp(a) = 0$, para algum $a \in \mathbb{R}$, logo a $exp(x)$ é solução de $y' = y$, satisfazendo $y(a) = 0$.
Mas, $f(x) = 0$ é solução de $y' - y = 0$, $y(a) = 0$. Da unicidade de soluções temos

$$exp(x) = 0,$$

o que é um absurdo!
Portanto, não pode existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $exp(a) = 0$. Donde, visto que exp é contínua,

$$exp(x) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ ou } exp(x) < 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$exp(0) = 1,$$

temos

$$exp(x) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ainda, note que a função exponencial é crescente, ou seja, se $t, s \in \mathbb{R}$, com $t < s$, então

$$exp(t) < exp(s).$$

De fato, como $exp(x)$ é solução da equação

$$y' = y,$$

temos que

$$(exp(x))' = exp(x) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

logo, pela Observação (1.1.4), temos que $exp(x)$ é crescente.

5. **Função Inversa da $exp(x)$**

Do seção anterior, faz sentido considerarmos a função $exp^{-1}(x)$ pois a função é positiva.

Definamos $\ln x = exp^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} \ln := exp^{-1}: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & lnx = y \end{array}$$

sempre que $exp(y) = x$.

5.1 **Propriedades do $\ln$**

Sejam $u, v \in \mathbb{R}$. Fazendo $u = exp(a)$ e $v = exp(b)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, então da propriedade multiplicativa, temos

$$\begin{aligned} u \cdot v &= exp(a) \cdot exp(b) \\ &= exp(a + b) \end{aligned}$$

e, se aplicarmos $\ln y$, que é a função inversa de $exp(x)$, temos $a = \ln u$, $b = \ln v$ e,

$$\begin{aligned} \ln(u \cdot v) &= (a+b) \\ &= \ln u + \ln v. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ainda, se $r \in \mathbb{R}$, temos, pelas propriedades de potência, que

$$\begin{aligned} u^r &= (exp(a))^r \\ &= exp(ra) \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \ln(u^r) &= ra \\ &= r \ln u. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De (2.6) e (2.7), segue

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u}{v}\right) &= \ln(u \cdot v^{-1}) \\ &= \ln u + \ln(v^{-1}) \\ &= \ln u - \ln v. \end{aligned}$$

6. **n- ésima derivada de $exp(x)$**

Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que $exp^n(x) = exp(x)$, visto que exp satisfaz a equação $y' = y$. Utilizando a série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$ (Definição 1.1.5), temos

$$\begin{aligned} exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{exp(0)^{(n)}}{n!}(x-0)^n \\ &= exp(0) + exp(0) \cdot (x-0) + \frac{exp''(0) \cdot (x-0)^2}{2!} + \cdots + \frac{exp^{(n)}(x) \cdot (x-0)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

7. **A Fórmula Limite da $exp(x)$**

Vamos provar que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 1.1.2), temos que

$$\frac{exp(\frac{1}{n}) - exp(0)}{\frac{1}{n}} = exp(c), \;\; 0 < c < \frac{1}{n}.$$

Como $exp(x)$ é uma função crescente, temos

$$exp(0) < exp(c) < exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

Logo,

$$exp(0) < \frac{exp(\frac{1}{n}) - exp(0)}{\frac{1}{n}} < exp\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.8}$$

Da desigualdade do lado esquerdo de (2.8), temos

$$exp(0) < \frac{exp(\frac{1}{n}) - exp(0)}{\frac{1}{n}}$$

ou seja,

$$1 \cdot \frac{1}{n} < \frac{exp(\frac{1}{n}) - exp(0)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} = exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Assim,

$$\frac{1}{n} + 1 < exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + 1 = exp\left(\frac{1}{n}\right).$$

Isto é, do fato de $e = exp(1) = (exp(\frac{1}{n}))^n$,

$$\frac{1}{n} + 1 < e^{\frac{1}{n}}. \tag{2.9}$$

Por outro lado, da desigualdade do lado direito de (2.8),

$$\frac{exp(\frac{1}{n}) - exp(0)}{\frac{1}{n}} < exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

temos,

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < e^{\frac{1}{n}}$$

isto é,

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{1}{n}}$$

ou seja,

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 < e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}$$

portanto,

$$e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} < 1.$$

Consequentemente,

$$e^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1.$$

Observe que,

$$e^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$$

implica em

$$e^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}. \tag{2.10}$$

Fazendo correspondência com as duas desigualdades, (2.9) e (2.10), e elevando todos os membros a n, obtemos,

$$\left[e^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n < \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < [e^{\frac{1}{n}}]^n$$

segue que

$$e\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n < e. \tag{2.11}$$

Usando o Teorema do Valor Médio (Teorema 1.1.2) para $f(x) = (1-x)^k$, quando $0 < x < 1$ e $k > 1$, temos que existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$$

ou seja,

$$\frac{(1-x)^k - 1}{x} = -k(1-c)^{k-1} > -k,$$

pois, $f'(x) = -k(1-x)^{k-1}$, para todo $x \in (0,1)$ e $(1-c) < 1$, logo,

$$-k(1-c) > -k.$$

Assim,

$$(1-x)^k - 1 > -kx$$

e, portanto,

$$(1-x)^k > 1 - kx. \tag{2.12}$$

Fazendo $k = n$ e $x = \dfrac{1}{n^2}$, em (2.12), obtemos

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Daí e de (2.11), obtemos a desigualdade,

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot e < e\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

Portanto,

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot e \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} e = e.$$

Do Teorema do Confronto, (Teorema 1.1.3) obtemos,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Como queríamos.

Capítulo 3

Funções Seno e Cosseno

Neste capítulo, iremos tratar sobre as propriedades das funções seno e cosseno a partir das relações de EDO e também fazendo uso do conteúdo de curvas para poder assim mostrar a última propriedade. Aqui veremos as propriedades da derivada de primeira ordem de ambas as funções. Além disso demonstramos a soma dos quadrados e a soma de dois arcos, a paridade de cada função, etc.

Definição 3.0.1 *A função Cosseno é definida como uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tal que* $f(x) = cos(x), \forall x \in \mathbb{R}$*, como sendo a única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Definição 3.0.2 *Definimos a função Seno como sendo uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tal que* $f(x) = sen(x), \forall x \in \mathbb{R}$*, como sendo a única solução de*

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Observe que dos Teoremas de Existência e Unicidade, temos a boa definição das funções seno e cosseno, bem como temos a garantia de sua continuidade.

3.1 Propriedades

Aqui iremos mostrar as propriedades e identidades básicas das funções trigonométricas utilizando as relações de EDO.

1. **Derivadas de Primeira Ordem**

   Vamos mostrar que,

$$\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x).$$

Para isso, tomemos $\theta(x) = sen(x)$ que, por definição, satisfaz o problema

$$\begin{cases} \theta'' + \theta = 0 \\ \theta(0) = 0 \text{ e } \theta'(0) = 1. \end{cases}$$

Utilizando o Teorema (1.3.3 - c), temos que, $y(x) = \theta'(x)$ também satisfaz $y'' + y = 0$. Ainda,

$$y(0) = \theta'(0) = 1$$

E como $\theta''(x) = -\theta(x)$ e $\theta(0) = 0$, temos

$$y'(0) = \theta''(0) = -\theta(0) = 0.$$

Da unicidade de soluções de (3.1), garantida pelo Teorema (1.3.2), temos

$$y(x) = cos(x)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x).$$

Note que, por definição, $\lambda(x) = cos(x)$ é solução de

$$\begin{cases} \lambda'' + \lambda = 0 \\ \lambda(0) = 1 \text{ e } \lambda'(0) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema (1.3.3 - c), temos que $a(x) = \lambda'(x)$ também é solução de $a'' + a = 0$, com,

$$a(0) = \lambda'(0) = 0$$

e

$$a'(0) = \lambda''(0) = -\lambda(0) = -1$$

ou seja,

$$a'(0) = -1.$$

Logo, $a(x) = \lambda'(x) = cos'(x)$ é solução de $a'' + a = 0$ com as mesmas condições iniciais que satisfaz a função $y(x) = -sen(x)$.

Assim, por unicidade de solução, temos

$$\frac{d}{dx} cos(x) = -sen(x).$$

2. **Propriedade da Soma de Dois Arcos**

Vamos provar que,

$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta$ e $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Seja $\gamma(x) = sen(x+a)$, pelo Teorema (1.3.3 - b), temos que $\gamma(x)$ é solução de

$$\begin{cases} \gamma'' + \gamma = 0 \\ \gamma(0) = sen(0+a) = sen(a) \\ \gamma'(0) = sen'(0+a) = cos(a) \end{cases} \tag{3.3}$$

Queremos provar que $sen(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos(x)$ também é solução de (3.3).

Seja $\delta(x) = sen(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos(x)$. Daí,

$$\begin{aligned} \delta(0) &= sen(0) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos(0) \\ &= 0 \cdot cos(a) + sen(a) \cdot 1 \\ &= 0 + sen(a) \\ &= sen(a). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\delta'(0) &= sen'(0) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos'(0)\\ &= cos(0) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot (-sen(0))\\ &= 1 \cdot cos(a) + sen(a) \cdot 0\\ &= cos(a) + 0\\ &= cos(a).\end{aligned}$$

Portanto, $\delta(x) = sen(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos(x)$ satisfaz as condições iniciais de (3.3). Resta provar que $\delta(x)$ é solução de $y'' + y = 0$.

De fato,

$$\delta'(x) = sen'(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos'(x),$$

e

$$\begin{aligned}\delta''(x) &= sen''(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos''(x)\\ &= -sen(x) \cdot cos(a) - sen(a) \cdot cos(x)\\ &= -(sen(x) \cdot cos(a) + sen(a) \cdot cos(x))\\ &= -\delta(x)\end{aligned}$$

ou seja,

$$\delta''(x) + \delta(x) = 0.$$

Portanto, pela unicidade de soluções de (3.3), temos

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sen\beta, \forall x, a \in \mathbb{R}.$$

Agora, seja $\epsilon(x) = cos(x + a)$. Pelo Teorema (1.3.3 - b), temos que $\epsilon(x)$ é solução de

$$\begin{cases}\epsilon'' + \epsilon = 0\\ \epsilon(0) = cos(0 + a) = cos(a)\\ \epsilon'(0) = cos'(0 + a) = -sen(a).\end{cases} \tag{3.4}$$

Queremos provar que $cos(x) \cdot cos(a) - sen(x) \cdot sen(a)$ é solução de (3.4). Assim, seja $\zeta(x) = cos(x) \cdot cos(a) - sen(x) \cdot sen(a)$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\zeta(0) &= cos(0)\cdot cos(a) - sen(0)\cdot sen(a)\\
&= 1\cdot cos(a) - sen(a)\cdot 0\\
&= cos(a) - 0\\
&= cos(a)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\zeta'(0) &= cos'(0)\cdot cos(a) - sen'(0)\cdot sen(a)\\
&= (-sen(0))\cdot cos(a) - cos(0)\cdot sen(a)\\
&= 0\cdot cos(a) - 1\cdot sen(a)\\
&= -sen(a)
\end{aligned}
$$

Portanto, $\zeta(x) = cos(x)\cdot cos(a) - sen(x)\cdot sen(a)$, satisfaz as condições iniciais de (3.4), sendo assim, nos resta provar que $\zeta(x)$ é solução de $y'' + y' = 0$.
Note que,

$$\zeta'(x) = cos'(x)\cdot cos(a) - sen'(x)\cdot sen(a).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\zeta''(x) &= cos''(x)\cdot cos(a) - sen''(x)\cdot sen(a)\\
&= -cos(x)\cdot cos(a) + sen(x)\cdot sen(a)\\
&= -(cos(x)\cdot cos(a) - sen(x)\cdot sen(a))\\
&= -\zeta(x)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\zeta''(x) + \zeta(x) = 0$$

e, portanto, ζ satisfaz (3.4). Por unicidade de soluções, temos

$$cos(x+a) = cos(x)\cdot cos(a) - sen(x)\cdot sen(a), \text{ para todo } x, a \in \mathbb{R}.$$

3. **Soma dos Quadrados**

Vamos mostrar que

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere a equação $y'' + y = 0$. Vamos multiplicá - la por y'.
Assim, temos,

$$0 = y'y'' + y'y = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}((y')^2 + y^2),$$

pois,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}((y')^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2y'y'' + 2yy') \quad = y'y'' + y'y.$$

Da Observação (1.1.5) , temos que $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ implica em $f(x) = c$ onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.
Então, $(y')^2 + y^2 = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, para qualquer solução y de $y'' + y = 0$.
Considerando $y = sen(x)$, temos que y é solução de $y'' + y = 0$, logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(sen'(x))^2 + sen^2(x) = c$$

para algum $c \in \mathbb{R}$, ou seja,pela propriedade das derivadas de primeira ordem,

$$cos^2(x) + sen^2(x) = c, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Substituindo $x = 0$, obtemos,

$$cos^2(0) + sen^2(0) = c$$

isto é,

$$1 + 0 = c$$

Portanto,

$$c = 1$$

Logo, obtemos que

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Paridade das Funções Seno e Cosseno

Vamos provar que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$cos(-x) = cos(x) \ e \ sen(-x) = -sen(x),$$

ou seja, $\theta(x) = sen(x)$ é função ímpar e $\lambda(x) = cos(x)$ é função par.

Seja $\lambda(x) = cos(x)$, que, como já vimos, é solução de (3.1). Queremos mostrar que $\kappa(x) = cos(-x)$ também é solução de $y'' + y = 0$, com as mesmas condições iniciais de λ.

Utilizando a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}cos(-x) &= \frac{d}{dx}cos(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x) \\
&= -sen(-x) \cdot (-1) \\
&= sen(-x)
\end{aligned}$$

E, derivando novamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}cos(-x) &= \frac{d}{dx}sen(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x) \\
&= cos(-x) \cdot (-1) \\
&= -cos(-x)
\end{aligned}$$

Logo, $\kappa''(x) + \kappa(x) = 0$, como queríamos.

Agora, vamos analisar se $\kappa(x) = cos(-x)$ satisfaz as condições iniciais de (3.1).

Temos,

$$\begin{aligned}
\kappa(0) &= cos(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\kappa'(0) &= cos'(0) \\
&= -sen(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da unicidade de soluções do problema (3.1), temos

$$cos(-x) = cos(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos.

Tomemos agora, $\theta(x) = sen(x)$. Queremos mostrar que $\alpha(x) = sen(-x)$ também é solução de $y'' + y = 0$.

Assim, derivando $\alpha(x)$, temos, pela Regra da Cadeia, que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}sen(x) &= \frac{d}{dx}sen(-x) \cdot (-x)\\ &= cos(-x) \cdot (-1)\\ &= -cos(-x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}sen(-x) &= -\frac{d}{dx}cos(-x)\\ &= -\frac{d}{dx}cos(-x) \cdot \frac{d}{dx}(-x)\\ &= sen(-x) \cdot (-1)\\ &= -sen(-x)\end{aligned}$$

Agora, vamos verificar as condições iniciais para $sen(-x)$.

Temos,

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= sen(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= -sen'(0)\\ &= -cos(0)\\ &= -1\end{aligned}$$

Agora, observemos que,

$$\gamma(x) = -sen(x)$$

também satisfaz

$$\begin{cases}\gamma'' + \gamma = 0\\ \gamma(0) = 0\\ \gamma'(0) = -1\end{cases} \tag{3.5}$$

De fato,

$$\gamma'(x) = -cos(x)$$

donde,

$$\gamma''(x) = sen(x)$$

portanto,

$$\gamma''(x) + \gamma(x) = sen(x) - sen(x) = 0.$$

Ainda,

$$\gamma(0) = -sen(0) = 0$$

e

$$\gamma'(0) = -cos(0) = -1.$$

Logo, $\gamma(x) = -sen(x)$ e $\alpha(x) = sen(-x)$ satisfazem (3.5).
Da unicidade de soluções, temos que

$$-sen(x) = sen(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **Zeros de $cos(x)$ e $sen(x)$**

Vamos provar que existe um primeiro zero de $cos(x)$ o qual é positivo,e na próxima propriedade, vamos mostrar que esse primeiro zero é $\frac{\pi}{2}$. Utilizando a propriedade da soma de dois arcos, se esse zero é denotado por p, então temos,

$$cos(x+p) = -sen(x) \ e \ sen(x+p) = cos(x).$$

Levando a

$$\begin{aligned} cos(x+2p) = -cos(x), \quad sen(x+2p) &= -sen(x) \\ cos(x+4p) = cos(x), \quad sen(x+4p) &= sen(x) \\ cos(p-x) = sen(x), \quad sen(p-x) &= cos(x) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Onde, demonstraremos este último posteriormente.

Vamos mostrar, inicialmente, que existe $p > 0$ tal que,

$$cos(p) = 0$$

Suponha que não é verdade, ou seja, não existe $p > 0$ tal que $cos(x) = 0$.
Nesse caso, em qualquer intervalo do tipo $[0, a]$, temos que,

$$cos(x) > 0, \forall x \in [0, a], \tag{3.7}$$

pois, $cos(0) = 1 > 0$ e $cos(x)$ não muda de sinal, pois $cos(x)$ é contínua.
Assim,

$$sen'(x) = cos(x) > 0, \forall x \in [0, a].$$

Logo, $sen(x)$ é crescente no intervalo $[0, a]$, de acordo com a Observação (1.1.4), e como $sen(0) = 0$, então,

$$sen(x) > 0, \forall x \in (0, a].$$

Ainda,

$$cos'(x) = -sen(x) < 0, \forall x \in [0, a].$$

Logo, $cos(x)$ é positivo, por (3.7), e decrescente, pela Observação (1.1.4).
Agora, como $cos(x) > 0$ para todo $x > 0$, aplicando o Teorema do Valor Médio, (Teorema 1.1.2) com $f(x) = cos(x)$ em $(t, 2t)$, $t > 0$ tal que $2t < a$, temos, para algum $c \in (t, 2t)$,onde $(t, 2t) \subset (0, a]$, que

$$\frac{cos(2t) - cos(t)}{t} = -sen(c).$$

Logo, como $sen(c) > sen(t)$ em $(0, a]$,

$$\frac{cos(t) - cos(2t)}{t} > sen(t), \quad \text{para todo } t > 0, \text{tal que } 2t < a. \tag{3.8}$$

Tomando limite quando t tende a infinito, temos

$$\lim_{t \to \infty} \frac{cos(t) - cos(2t)}{t} = 0. \tag{3.9}$$

De fato, note que $2t > t$, logo

$$cos(2t) < cos(t).$$

Assim,
$$\frac{cos(t) - cos(2t)}{t} > 0, \quad \forall\ t > 0.$$

Observe que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|cos(t)| &= \sqrt{cos^2 t} \\
&\leq \sqrt{cos^2(t) + sen^2(t)} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ou seja,
$$|cos(t)| \leq 1, \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Daí, da Desigualdade Triangular, para $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{cos(t) - cos(2t)}{t}\right| &\leq \frac{|cos(t)| + |cos(2t)|}{t} \\
&\leq \frac{1+1}{t} \\
&= \frac{2}{t}.
\end{aligned}$$

Assim,
$$0 \leq \left|\frac{cos(t) - cos(2t)}{t}\right| \leq \frac{2}{t}.$$

Como
$$\lim_{t\to\infty} \frac{2}{t} = 0,$$

do Teorema do Confronto (Teorema 1.1.3), temos (3.9).

Também pelo do Teorema do Confronto e de (3.8), temos

$$0 = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{cos(2t) - cos(t)}{t}\right) \geq \lim_{t\to\infty} sen(t) \geq \lim_{t\to\infty} 0 = 0$$

ou seja,
$$\lim_{t\to\infty} sen(t) = 0.$$

Contrariando o fato do seno ser positivo e crescente.

Portanto, $cos(x)$ deve ter o primeiro zero, p, positivo.

Agora, vamos provar (3.6).

Como,

$$0 = cos(p),$$

então,

$$sen(p) = 1.$$

De fato, na propriedade da Soma dos Quadrados, apresentamos que

$$cos^2(x+p) + sen^2(x+p) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Agora, da Propriedade da Soma de Dois Arcos, temos

$$\begin{aligned} cos^2(x+p) &= (cos(x) \cdot cos(p) - sen(x) \cdot sen(p))^2 \\ &= (-sen(x) \cdot sen(p))^2 \\ &= sen^2(x) \cdot sen^2(p) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} sen^2(x+p) &= (sen(x) \cdot cos(p) + sen(p) \cdot cos(x))^2 \\ &= (sen(p) \cdot cos(x))^2 \\ &= sen^2(p) \cdot cos^2(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$sen^2(x) \cdot sen^2(p) + sen^2(p) \cdot cos^2(x) = 1.$$

Portanto,

$$(sen^2(x) + cos^2(x))sen^2(p) = 1,$$

ou seja,

$$sen^2(p) = 1.$$

Consequentemente,

$$sen(p) = \pm 1.$$

Como, $sen(x)' > 0$ em $[0, p]$, pois $cos(x) > 0$ nesse intervalo, logo o seno é crescente e $sen(0) = 0$, temos

$$sen(p) = 1.$$

Agora, utilizando a Propriedade da Soma de Dois Arcos, temos,

$$\begin{aligned} sen(x+p) &= sen(x) \cdot cos(p) + sen(p) \cdot cos(x) \\ &= sen(x) \cdot 0 + 1 \cdot cos(x) \\ &= cos(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(x+p) &= cos(x) \cdot cos(p) - sen(x) \cdot sen(p) \\ &= cos(x) \cdot 0 - sen(x) \cdot 1 \\ &= -sen(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(x+2p) &= cos((x+p)+p) \\ &= cos(x+p) \cdot cos(p) - sen(x+p) \cdot sen(p) \\ &= -sen(x) \cdot 0 - cos(x) \cdot 1 \\ &= -cos(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sen(x+2p) &= sen((x+p)+p) \\ &= sen(x+p) \cdot cos(p) + sen(p) \cdot cos(x+p) \\ &= cos(x) \cdot 0 - sen(x) \cdot 1 \\ &= -sen(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(x+4p) &= cos((x+2p)+2p) \\ &= cos(x+2p) \cdot cos(2p) - sen(x+2p) \cdot sen(2p) \\ &= -cos(x) \cdot (-1) + sen(x) \cdot 0 \\ &= cos(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} sen(x+4p) &= sen((x+2p)+2p) \\ &= sen(x+2p)\cdot cos(2p) + sen(2p)\cdot cos(x+2p) \\ &= -sen(x)\cdot(-1) - 0\cdot cos(x) \\ &= sen(x). \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} cos(p-x) &= cos(p)\cdot cos(-x) - sen(p)\cdot sen(-x) \\ &= 0\cdot cos(x) - 1\cdot(-sen(x)) \\ &= sen(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} sen(p-x) &= sen(p)\cdot cos(-x) + sen(-x)\cdot cos(p) \\ &= 1\cdot cos(x) + sen(x)\cdot 0 \\ &= cos(x) \end{aligned}$$

6. Conexão com a Geometria

Nosso intuito aqui é mostrar que p, do item anterior, é exatamente $\frac{\pi}{2}$.

Vamos parametrizar o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$, com relação ao comprimento de arco s, por meio de uma parametrização $\alpha(s) = (x(s), y(s))$.
Derivando a expressão $x^2 + y^2 = 1$ com respeito a s, obtemos

$$\frac{d}{ds}(x^2 + y^2) = 0.$$

Logo,

$$2x\frac{dx}{ds} + 2y\frac{dy}{ds} = 0.$$

Como $\alpha'(s)$ é um vetor unitário, pois estamos considerando a parametrização pelo comprimento de arco, temos

$$|\alpha'(s)| = 1.$$

Logo,

$$1 = |\alpha'(s)| = \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}.$$

Seja N como na Definição (1.2.3). Então, pela Observação (1.2.1) , $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ e $\{N(s), \alpha'(s)\}$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que tem a mesma orientação que a base canônica formada por $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.

Agora, $N(s)$ é a derivada da curva

$$(-y(s), x(s))$$

Logo, $N(s)$ é ortogonal a $(-y(s), x(s))$.
Como, $N(s)$ também é ortogonal a $\alpha'(s)$ temos que $\alpha'(s)$ é paralelo a $(-y(s), x(s))$, ou seja, existe $C(s)$ tal que

$$(x'(s), y'(s)) = C(s)(-y(s), x(s)).$$

Assim,

$$|\alpha'(s)| = |C(s)| \cdot |(-y(s), x(s))|$$

Donde,

$$1 = |C(s)| \cdot 1,$$

isto é, $|C(s)| = 1$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Como a parametrização é no sentido anti - horário (sentido positivo), temos $C = 1$, ou seja,

$$x'(s) = -y(s) \ e \ \ y'(s) = x(s).$$

Consequentemente,

$$x''(s) = -y'(s) = -x'(s)$$

e

$$y''(s) = x'(s) = -y'(s).$$

Além disso, quando $s = 0$, como a parametrização começa de $(1,0)$, temos

$$x(0) = 1 \ e \ y(0) = 0$$

e que

$$x'(0) = -y(0) = 0$$
$$y'(0) = x(0) = 1.$$

Logo, $x(s)$ satisfaz o problema (3.1) e $y(s)$ satisfaz (3.2), ou seja,

$$x(s) = cos(s) \ e \ y(s) = sen(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

Agora, como $(x(s), y(s))$ é uma parametrização do círculo unitário no sentido anti-horário, temos que o primeiro $s > 0$, tal que $x(s) = 0$, ocorre quando

$$(x(s), y(s)) = (0, 1)$$

e nesse caso, temos $s = \frac{\pi}{2}$, ou seja, o valor de p da propriedade anterior, é $\frac{\pi}{2}$.

Conclusão

O estudo sobre as funções elementares nos propiciou um vasto aprendizado pois englobou da Análise Real ao estudo de Curvas, o uso de teoremas como o teorema do Valor Médio, Teorema do Confronto. Aqui vimos como usar as propriedades das funções elementares utilizando de Edo's, o que para mim foi de bastante valia e aprendizado, além de ter sido um desafio esta nova forma de poder estudá-las e observá-las não só pelo uso da geometria.

Referências Bibliográficas

1 ALMEIDA, A.; NERI JR, E.;DINIZ, M. **Teorema do Confronto, Limite Fundamental Trigonométrico, Teorema do Valor Intermediário**. Disponível em : <http://www.aedmoodle.ufpa.br/mod/folder/view.php?id=123289>. Acesso em: 31/10/2018.

2 BIEZUNER, R. J. **Cálculo Diferencial e Integral I**. Disponível em : http://www.mat.ufmg.br/ rodney/notasdeaula/calculoI.pdf . Acesso em: 15/11/2018.

3 BORTOLAN, M. C. **Notas de Aula: Cálculo**. Disponível em: http://www.mtm.ufsc.br/ will/disciplinas/20152/mtm5103/Bortolan.pdf . Acesso em : 16/11/2018.

4 BOYCE,E. W; DIPRIMA,R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ªed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

5 DIAMOND, H. **Defining Exponential and Trigonometric Functions Using Differential Equations**. Mathematics Magazine, Vol. 87, No. 1 (February 2014), p. (37-42).

6 LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 14ªed. Rio de Janeiro: Assossiação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada,2012.

7 QUEIROZ, O. S. de. **Introdução à Análise para a Licenciatura**. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/ olivaine/Introducao-a-Analise/20-/20notasdeaula.pdf >. Acesso em: 31/10/2018.

8 SOUZA, J. R. de.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática, 8º ano**. 3ªed. São Paulo: FTD, 2015.

9 TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ªed. São Paulo: Blucher, 2008.