UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA-CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PABLO DREANN ROCHA DA SILVA

UMA INTRODUÇÃO AOS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTO

CAMPINA GRANDE
2018

PABLO DREANN ROCHA DA SILVA

UMA INTRODUÇÃO AOS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Orientadora: Profª Ms. Joselma Soares dos Santos

CAMPINA GRANDE
2018

S586i Silva, Pablo Dreann Rocha da.
Uma introdução aos regimes de capitalização simples e composto [manuscrito] / Pablo Dreann Rocha da Silva. - 2018.
60 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Matemática financeira. 2. Regimes de capitalização. 3. Juros. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

PABLO DREANN ROCHA DA SILVA

UMA INTRODUÇÃO AOS REGIMES DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada.

Aprovado em: 14/ 12/ 2018

BANCA EXAMINADORA

Joselma Soares dos Santos

Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Onildo dos Reis Freire

Profº. Ms. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais e a minha noiva por ter me dado o apoio necessário para que eu alcançasse essa vitória.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me capacitado durante o curso e proporcionado maravilhas em minha vida!

Aos meus pais, pelo apoio e dedicação que têm para comigo desde sempre.

A minha noiva, que dedicou grande parte do seu tempo em percorrer comigo os caminhos que me levaram a mais essa conquista.

A minha orientadora, Professora Joselma Soares dos Santos, pela orientação e dedicação nessa trajetória.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

A todas as pessoas que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desse sonho almejado por mim.

“ O homem atual está a exigir outros conteúdos, naturalmente outras metodologias, para que se atinjam os objetivos maiores de criatividade e cidadania plena. Isso exige entender melhor o homem, a humanidade e o conhecimento.”

Ubiratam D’Ambrosio

RESUMO

A Matemática Financeira consiste no estudo das relações comerciais envolvendo compras à vista ou à prazo, taxa de juros, financiamentos, descontos, depósitos e formação de capital. O uso da Matemática Financeira está presente em toda e qualquer relação comercial, daí a importância de se ter um mínimo de conhecimento neste assunto. Nesse sentido, o trabalho tem como objetivo principal o estudo do Regime de Capitalização Simples e do Regime de Capitalização Composto, e através de resoluções de problemas, mostrar a diferença de juros simples e compostos, e onde os mesmos são utilizados.

Palavras-Chave: Matemática Financeira. Juros simples. Juros compostos.

ABSTRACT

Financial Mathematics consists of the study of commercial relations involving sight or term purchases, interest rates, financing, discounts, deposits and capital formation. The use of financial mathematics is present in any and all business relationship made by a person, hence the importance of having a minimum of knowledge in this subject. In this sense, the main objective of the work is to study the Simple Capitalization Regime and the Composite Capitalization Regime, and through problem solving, show the difference of simple and compound interest, and where they are used.

Keywords: Financial math. Simple interest. Compound interest.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, a Matemática financeira é parte integrante em todos os níveis da educação escolar; daí a importância do estudo dessa temática como apropriação dos significados nas situações econômicas e financeiras e o desenvolvimento no raciocínio lógico. A partir dessa concepção, há algumas atuais definições sobre a Matemática financeira. Dentre elas, destaco:

> A Matemática financeira é uma ferramenta útil na análise de algumas alternativas de investimentos ou financiamentos de bens de consumo. (Matemática Financeira em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da informação, 1998-2018. Disponível em: < htpp://WWW.somatemática.com.br > Acesso em: 02 Abril 2018).

Dessa forma, empregam-se procedimentos matemáticos para facilitar a operação financeira. Sua origem está ligada a dos regimes econômicos, ao surgimento do crédito e do sistema financeiro.

Para entender melhor essa questão, Santos (2005) esclarece:

> De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática financeira é o ramo da matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A matemática financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (time value Money). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são a taxa de juros, o capital e o tempo. (p. 157)

Sendo assim, na definição acima, a autora Giovana Santos afirma que um determinado valor - capital em dinheiro - hoje poderá ser diferente em outro tempo, porque além das variáveis capital e tempo, há ainda a taxa de juros, justificada pelo uso ou empréstimo do dinheiro, ou da inflação - aumento geral dos preços de produtos e serviços.

Bigode (2000) mostra um conceito de Razão relativo a uma taxa percentual: "é a razão entre um número e 100." (p. 218). Ainda acrescenta que "uma razão cujo segundo termo é igual a 100 é chamada de taxa percentual." (p. 226).

Tratando-se de Razão e Proporção, é possível verificar uma relação com a Regra de três. Conforme Souza e Spinelli (1999), a igualdade entre duas razões é chamada de "proporção". (p. 270). Podemos evidenciar essa ligação de conteúdos a partir do que dizem os autores:

> Uma proporção é uma igualdade formada por duas razões. Como em cada razão há dois números, em uma proporção há quatro. Nos problemas com grandezas diretamente proporcionais, normalmente são conhecidos três números da proporção, sendo necessário calcular o quarto. Esse método de resolução de problemas com grandezas proporcionais é chamado de **regra de três**. (p.274, grifo do autor).

A porcentagem, que também é conhecida por "percentagem", e ainda por "taxa de porcentagem", é corriqueiramente usada nos meios de comunicação, principalmente na exposição de pesquisas de opinião e indicadores econômicos. Segundo Balielo e Sodré (2005), "o termo por cento é proveniente do Latim *per centum* e quer dizer por cem. Toda razão da forma a/b na qual o denominador $b = 100$, é chamado taxa de porcentagem." De acordo com esses autores, o termo "por cento" mostra-se nas primeiras obras de aritmética do século XV, na Itália, e o símbolo % havia surgido como uma abreviação da palavra "cento", utilizada nas operações mercantis. (p.17). Santos (2005), ao dissertar sobre porcentagem, afirma que:

> Porcentagem é uma comparação. A porcentagem está presente em inúmeras situações. Não há como entender o mundo do capital, das compras, das vendas, do planejamento financeiro, etc. sem entender porcentagem. Precisamos entendê-la para realizar cálculos, interpretar gráficos, tabelas, e principalmente, usá-la a nosso favor. (p.157).

Na solução de problemas que envolvem a porcentagem, é possível utilizar o método da regra de três, por exemplo, se uma mercadoria recebeu um desconto de 15%, correspondente a R\$ $1.200{,}00$, qual o seu preço inicial? Para montar uma proporção, parte-se dos dados conhecidos como grandezas "taxas de porcentagem" e "valor em reais" e do termo desconhecido x da seguinte forma:

Porcentagem   Valor

$$15\% \longrightarrow 1200\ reais$$

$$100\% \longrightarrow X$$

Daí,

$$\frac{15}{100} = \frac{1200}{X}.$$

$$15.x = 1200.100$$

$$x = \frac{120.000}{15}$$

$$x = 8.000\, reais$$

A partir da análise sob o aspecto econômico-financeiro, o conceito de juros leva a afirmação de que é a remuneração pelo empréstimo de um dinheiro. Quando se está devendo, paga-se com juros. De acordo com Santos (2005), por meio de sua definição:

> [...] aquela quantia que é cobrada ou recebida a mais sobre um valor emprestado ou aplicado durante certo tempo à referida taxa. Quando pedimos dinheiro emprestado a um banco, sempre teremos que pagar juros pelo empréstimo obtido. Quando efetuamos depósitos em poupança ou outro tipo de investimento, o valor excedente que recebemos por mantermos nosso capital aplicado é o juro. É como se fosse um aluguel que se paga pelo uso do dinheiro. (p.161).

Entretanto, podemos definir sob diferentes prismas o conceito de juros. Como por exemplo: político, o econômico, o jurídico ou até em um ângulo filosófico. Conforme Alencar (2006), a economia conceitua juros como sendo a remuneração paga pelo tomador de um empréstimo junto ao detentor do capital emprestado. Juridicamente, os juros são ditos “frutos civis” do capital, remuneração pela disponibilidade de uma importância em dinheiro por determinado tempo. (p.1).

Por meio das decisões de governos, estão presentes enfoques políticos, no que se trata de conceitos de juros, tendo critérios objetivos e subjetivos que:

> Consistiam na escassez de capital e renúncia à liquidez monetária, aliada à oferta e procura da moeda em investimentos [...] os juros passaram a ser instrumentos de políticas de desenvolvimento econômico com manipulação da oferta monetária disponível. (ALENCAR, apude CALDAS, 1996, p.76).

Do ponto de vista filosófico, Giannetti (2005), filósofo e economista conceitua como:

> [...] a realidade dos juros não se restringe ao mundo das finanças, como supõe o senso comum, mas permeia as mais diversas e surpreendentes esferas da vida prática, social e espiritual, a começar pelo processo de envelhecimento a que nossos

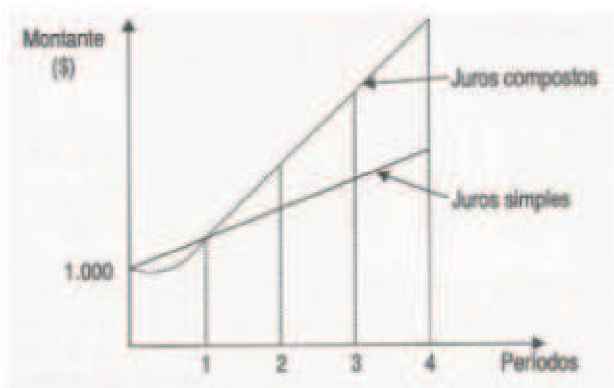
> corpos estão inescapavelmente sujeitos. Os juros são o prêmio da espera na ponta credora- os ganhos decorrentes da transferência ou cessão temporária de valores do presente para o futuro; e são o preço da impaciência na ponta devedora – o custo de antecipar ou importar valores do futuro para o presente. (p.10).

Além disso, os juros são classificados em simples ou compostos, o que dá origem a dois regimes de capitalização. Se tratando do regime de capitalização simples, a taxa percentual incide apenas sobre o capital inicial e não se incorpora no capital, mesmo com o passar do tempo, tendo assim, um crescimento linear. Já nos juros compostos, o regime de capitalização é diferente, porque a cada período o juro gerado é incorporado ao capital atual (saldo devedor) e sua acumulação se dá de forma exponencial, sendo este regime o mais utilizado no meio financeiro. O exemplo a seguir considera um capital de $R\$\ 1.000{,}00$ aplicado a uma taxa de 20% ao ano, por quatro vezes consecutivas, demonstrando o comportamento dos juros nos dois regimes de capitalização, conforme Mathias e Gomes (2004, p.100).

Tabela 1 – Quadro comparativo juro simples/composto

n	Juros simples		Juros Compostos	
	Juro por período	Montante	Juro por período	Montante
1	1000 x 0,20 = 200	1.200,00	1000 x 0,20 = 200	1.200,00
2	1000 x 0,20 = 200	1.400,00	1200 x 0,20 = 240	1.440,00
3	1000 x 0,20 = 200	1.600,00	1440 x 0,20 = 288	1.728,00
4	1000 x 0,20 = 200	1.800,00	1728 x 0,20 = 346	2.074,00

Fonte: Mathias e Gomes, 2004, p. 100.



Conforme acabamos de ver neste exemplo, podemos observar que:

i) No regime de Capitalização Simples (ou linear), os juros incidem exclusivamente sobre o capital inicial (sendo constante, isto é, em todos os períodos o juro tem o mesmo valor). Comporta-se como se fosse uma Progressão Aritmética (P.A.), crescendo de forma linear ao longo do tempo.

ii) No regime de Capitalização composto (ou exponencial) é incorporado ao capital não somente os juros referente a cada período, mas também os juros sobre os juros acumulados até o momento anterior. É um comportamento equivalente a uma Progressão Geométrica (P.G.) no qual os juros incidem sempre sobre o saldo apurado no início do período correspondente (e não unicamente sobre o capital inicial), crescendo de forma exponencial ao longo do tempo.

O valor (ou saldo) acumulado ao final de cada periodo de tempo, qué é chamado de "Montante", é dado pela soma do capital com o juros. Além disso, ao final do primeiro período o montante é igual tanto com o cálculo de juros simples, quanto com o de juros compostos, já que ainda não ocorreu a capitalização (ou seja, incorporação do juros no capital). A partir do segundo período é evidente a diferença entre a base de cálculo para o juro composto, porque a cada novo período a base se altera, isso resulta num montante maior com relação ao juros simples, em conformidade com a tabela 1.

Esse seguimento de cálculos encaminha à possibilidade de uso de fórmulas matemáticas, elas são generalizações de procedimentos para se alcançar ao resultado de forma mais direta. Para a solução de problemas, geralmente usamos as variáveis J para representar o valor do juro, C para representar o valor do capital, i para representar a taxa de juros (dada em porcentagem) e n para representar o prazo da operação (tempo). Além disso, vale salientar que em todas as fórmulas de Matemática Financeira, que serão estudadas, tanto o prazo da operação quanto a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo. Desta forma, se uma aplicação foi efetivada pelo prazo de um mês, mas os juros definidos em taxa anual não há coincidência nos prazos. Neste caso, antes de aplicar os valores dados nas fórmulas é necessário transformar a taxa de juro anual para o intervalo de tempo definido pelo prazo da operação, ou vice-versa, o que for considerado mais apropriado para os cálculos.

Agora, segundo Giovanni e Parente, o juro (J) é proporcional ao capital (C), à taxa de juro (i) e ao prazo empregado (t). Então, pode-se estabelecer a seguinte regra de três composta. (1993, p.210):

Capital $\downarrow$	Juro $\downarrow$	Prazo $\downarrow$
100	i	1
C	J	n

De onde segue que,

$$\frac{i}{J}=\frac{100}{C}\times\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 100\times J = C\times i\times n \quad \Rightarrow \quad J=\frac{C\times i\times n}{100}.$$

Nos problemas de matemática financeira, conforme vimos, a taxa de juros i é dada em forma percentual, no entanto geralmente, ao substituirmos essa taxa nas fórmulas usamos a taxa na forma unitária que nada mais é que o valor dado da taxa dividido por 100 (por exemplo, a taxa percentual de 20% corresponde a taxa unitária de $\frac{20}{100}=0{,}20$). Consequentemente nos problemas em que determinamos a taxa, a mesma é encontrada na forma unitária e para determinar a taxa na forma de porcentagem basta multiplicar a taxa encontrada por 100.

Assim, considerando a taxa na forma unitária, segue da última igualdade que,

$$J = C\times i\times n.$$

Esta fórmula para o cálculo de juros é utilizada nos regimes de capitalização simples e composta, o que diferencia conforme já comentamos anteriormente é a forma como os juros são formados e incorporados ao capital no decorrer do tempo.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo do Regime de Capitalização Simples e do Regime de Capitalização Composto. Para isto, o mesmo foi dividido em dois capítulos. No primeiro capítulo estudamos o Regime de Capitalização Simples, onde vimos que os juros incidem exclusivamente sobre o capital inicial, não ocorrendo qualquer alteração da base de cálculo durante o período de cálculo dos juros. E no segundo capítulo estudamos o Regime de Capitalização Composto, onde os juros quando são produzidos num período, serão acrescidos ao valor aplicado e no próximo período também produzirão juros, formando o chamado “juros sobre juros”. Em ambos os capítulos, estudamos as principais fórmulas utilizadas nestes regimes, e procuramos mostrar onde os mesmos são aplicados nas operações financeiras do nosso cotidiano além de aplicar os conceitos e fórmulas estudadas na resolução de problemas, para isto utilizamos as referências [2], [6], [11], [13] e [14].

1. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

No Regime de Capitalização Simples, a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial da operação, comportando como uma Progressão Aritmética, crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo.

Os juros simples, têm aplicações práticas bastante limitadas. São raras as operações financeiras e comerciais que formam temporalmente seus montantes de juros segundo o regime de capitalização simples ou linear. O uso de juros simples restringe-se principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo.

No entanto, as operações que adotam juros simples, além de apresentarem geralmente prazos reduzidos, não costumam apurar o seu percentual de custo (ou rentabilidade) por este regime. Os juros simples são utilizados para o cálculo dos valores monetários da operação (encargos a pagar, para aplicações), e não para a apuração do efetivo resultado percentual.

É importante ressaltar, ainda, que muitas taxas praticadas no mercado financeiro (nacional e internacional) estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se exponencialmente (juros compostos). Por exemplo, a Caderneta da Poupança paga tradicionalmente uma taxa de juros de 6% ao ano para seus depositantes, creditando todo mês o rendimento proporcional de 0,5%. A taxa referenciada para esta operação é linear, porém os rendimentos são capitalizados segundo o critério de juros compostos, ocorrendo ao longo dos meses juros sobre juros.

Para uma avaliação mais rigorosa do custo da rentabilidade expressos em percentual, mesmo para aquelas operações que referenciam suas taxas em juros simples, é sugerida a utilização do critério de juros compostos, conforme veremos no próximo capítulo.

1.1 FÓRMULA DE JUROS SIMPLES

Como a taxa de juros simples incide apenas sobre o capital inicial, o valor acumulado dos juros após n períodos de tempo é calculado a partir da seguinte expressão:

$$J = C \times i \times n,$$

onde:

J = valor dos juros (expresso em unidades monetárias);

C = capital (é o valor (em $) representativo de determinado momento);

i = taxa de juros (expressa em sua forma unitária);

n = prazo da operação.

Exemplo 1.1.1: Calcular o valor do juro referente a uma aplicação financeira de $ 7.500,00, que rende 1,25% de taxa nominal ao ano pelo período de 2 anos e 3 meses.

Solução: Temos,

$C = \ \$\,7.500,00$

$i = \ 1{,}25\% \ (ao\ ano) = 0{,}0125$

$n = 2\ anos\ e\ 3\ meses = 2{,}25\ anos$.

Como $J = C \times i \times n$, obtemos:

$$J = 7500 \times 0{,}0125 \times 2{,}25$$

$$J = 210{,}93.$$

Portanto, o valor de juros é $ 210,93.

Exemplo 1.1.2: Em quanto tempo um capital de $ 4.000,00 aplicado a 29,3% ano pelo regime linear renderá $ 1.940,00?

Solução: Temos,

$C = \$4.000,00$

$i = 29,3\%\ ao\ ano\ (= 0,293)$

$J = \$1940,00$

Como $J = C \times i \times n$, obtemos

$$1940 = 4000 \times . 0,293 \times n$$

$$1940 = 1.172\, n$$

$$n = \frac{1940}{1172} \cong 1,66\ anos.$$

Ou ainda, como 1 ano tem 12 meses, então o prazo é de aproximadamente 20 meses.

Portanto, serão necessários aproximadamente 20 meses.

Exemplos 1.1.3: Uma aplicação de $\$\ 15.000,00$ é efetuada pelo prazo de 3 meses à taxa de juros simples de $26\%\ ao\ ano$. Que outra quantia deve ser aplicada por 2 meses à taxa linear de 18% ao ano para se obter o mesmo rendimento financeiro?

Solução: Inicialmente são dados,

$C = \$15.000,00$
$n = 3\ meses$
$i = 26\%\ ao\ ano.$

Como o prazo e a taxa estão em tempos diferentes, determinemos primeiro a taxa mensal proporcional, que é

$$\frac{26\%}{12} \cong 2,166667\%\ ao\ mês\ (= 0,02166667).$$

Como $J = C \times i \times n$, obtemos, que o valor dos juros ao final de 3 meses é:

$$J = 15.000,00 \times 0,02166667 \times 3$$

$$\Rightarrow J = \$975,00$$

Queremos agora, encontrar outra quantia que renda $R\$\ 975{,}00$ de juros, onde $n = 2\ meses$ e $i = 18\%\ ao\ ano$.

Novamente, como o prazo e a taxa estão em tempos diferentes, iremos determinar a taxa mensal proporcional, que é,

$$\frac{18\%}{12} = 1{,}5\%\ ao\ mês\ (= 0{,}015).$$

Daí, sendo $J = C \times i \times n$, obtemos,

$$975{,}00 = C \times 0{,}015\ \times\ 2$$

$$\Rightarrow 975{,}00 = \ 0{,}03C$$

$$\Rightarrow C\ = \frac{975{,}00}{0{,}03}$$

$$\Rightarrow C\ = \$32.500{,}00.$$

Logo, a quantia que deve ser aplicada por dois meses para obter o mesmo rendimento financeiro é \$32.500,00.

1.2 MONTANTE E CAPITAL

Um determinado capital, quando aplicado a uma taxa periódica de juros por um determinado tempo, produz um valor acumulado denominado de montante, e denotado em juros simples por M. Em outras palavras, o montante é constituído do valor do capital mais o valor acumulado dos juros, isto é:

$$M = \ C + \ J\ .$$

No entanto, sabe-se que o valor acumulado dos juros após n períodos de tempo é:

$$J = \ C \times \ i\ \times n.$$

Substituindo esta expressão básica na fórmula do montante supra, e colocando-se C em evidência, obtemos o valor do montante acumulado após n períodos de tempo:

$$M = C\,(\,1\,+\,\ i\,\times n).$$

Evidentemente, o valor de C desta fórmula pode ser obtido através de simples transformação algébrica:

$$C = \frac{M}{(1 + i \times n)}.$$

A expressão $(1 + i \times n)$ é definida como fator de capitalização (ou de valor futuro - FCS) dos juros simples. Ao multiplicar um capital por este fator, corrige- se o seu valor para uma data futura, determinando o montante ou Valor Futuro. O inverso, ou seja, $\frac{1}{(1+i \times n)}$ é denominado de fator de atualização (ou de valor presente - FAS). Ao se aplicar este fator sobre um valor expresso em uma data futura, apura-se o seu equivalente numa data atual, ou seja, o capital ou Valor Presente.

Exemplo 1.2.1: Determinar os juros e o montante de uma aplicação de \$ 300.000,00, por 19 meses, à taxa linear de 3,5 % $ao\ mês$.

Solução: Temos:

$C = \ \$\,300.000{,}00$
$n\ = 19\,meses$
$i\ =\ 3{,}5\%\,ao\ mês(0{,}035)$

Por definição o valor do juro é dado por $J =\ C \times\ i\ \times n$, de onde segue que,

$$J =\ 300.000\ \times\ 0{,}035\ \times\ 19 \Rightarrow J = \$199.500{,}00.$$

E, como por definição o montante é $M =\ C + J$. Logo,

$$M = 300.000{,}00 + 199.500{,}00 = \$499.500{,}00.$$

Portanto, o valor dos juros e do montante são, respectivamente, \$199.500,00 e \$499.500,00.

Observe que também podemos calcular o montante usando diretamente a fórmula, $M =\ C\ (1 + i \times n)$. Neste caso, temos:

$$M =\ 300.000.(1 + 0{,}035 \times 19)$$
$$\Rightarrow M = 300.000 \times 1{,}665 = \$499.500{,}00$$

Exemplo 1.2.1: Uma pessoa aplicou $R\$$ 12.000,00 numa Instituição Financeira resgatando, após 7 meses, o montante de $R\$$ 13.008,00. Qual a taxa de juros equivalente linear mensal que o aplicador recebeu?

Solução: Temos:

$M = \$13.008,00$

$C = \$12.000,00$

$n = 7\ meses$

Como, $M = C\ (1 + i \times n)$, obtemos:

$$13.008 = 12.000\ (1 + 7i)$$

$$\Rightarrow \frac{13.008}{12.000} = 1 + 7i$$

$$\Rightarrow 1,084 = 1 + 7i$$

$$\Rightarrow 0,084 = 7i$$

$$\Rightarrow i = \frac{0,084}{7} = 0,012$$

Logo, $i = 0,012$, ou equivalentemente, $i = 1,2\%\ ao\ mês$.

1.3 TAXA PROPORCIONAL E TAXA EQUIVALENTE

Para se compreender mais claramente o significado destas taxas deve-se primeiro reconhecer que toda operação envolve dois prazos: (1) o prazo a que se refere a taxa de juros; e (2) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros.

Ilustrativamente, admita um empréstimo bancário a uma taxa (custo) nominal de 24% ao ano. O prazo a que se refere especificamente a taxa de juros é anual. A seguir, deve-se identificar a periodicidade de ocorrência dos juros. Ao se estabelecer que os encargos incidirão sobre o principal somente ao final de cada ano, os dois prazos considerados são coincidentes.

O crédito direto do consumidor promovido pelas Financeiras é outro exemplo de operação com prazos iguais. Caracteristicamente, a taxa cobrada é definida ao *mês* e os juros capitalizados também *mensalmente.*

Mas em inúmeras outras operações estes prazos não são coincidentes. O juro pode ser capitalizado em prazo inferior ao da taxa, devendo-se nesta situação ser definido como o prazo da taxa será rateado ao período de capitalização.

Por exemplo, sabe-se que a Caderneta de Poupança paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% ao ano, a qual é agregada (capitalização) ao principal todo mês através de um percentual proporcional de 0,5%. Tem-se aqui, então, dois prazos- ***prazo da taxa***: *ano* e ***prazo de capitalização***: *mês.*

É necessário para o uso das fórmulas de matemática financeira, conforme foi abordado anteriormente, expressar estes prazos diferentes na mesma unidade de tempo. Ou transforma-se o prazo específico da taxa para o de capitalização ou, de maneira inversa, o período de capitalização passa a ser expresso na unidade de tempo da taxa de juros.

No regime de juros simples, diante de sua própria natureza linear, esta transformação é processada pela denominada *taxa proporcional de juros* também denominada de taxa *linear ou nominal.* Esta taxa proporcional é obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

Por exemplo, uma taxa de juros de 30% *ao ano* é proporcional a taxa de juros de $2,5\%$ *ao mês*. Pois, para esta taxa de 30% *ao ano*, se a capitalização for definida mensalmente (ocorrerão 12 vezes juros no período de um ano), assim o percentual de juros que incidirá sobre o capital a cada mês será dado pela:

$$\textit{Taxa Proporcional: } \frac{30\%}{12} = 2{,}5\% \; ao \; mês.$$

A aplicação de taxas proporcionais é muito difundida, principalmente em operações de curto e curtíssimo prazo, tais como: cálculo de juros de mora, descontos bancários, creditos de curtíssimo prazo, apuração de encargos sobre saldo devedor de conta corrente bancária, etc.

As taxas de juros simples se dizem *equivalentes* quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros.

Por exemplo, em juros simples, um capital de $\$ 500.000{,}00$, se aplicada a $2{,}5\%\ ao\ mês$ ou $30\%\ ao\ ano$ pelo prazo de um ano, produz o mesmo montante linear de juros. De fato,

i. Considerando a taxa mensal $i = 2{,}5\%\ ao\ mês$ e o prazo de $n = 1$ ano$(= 12$ meses), temos:

$$J = \$\ 500.000{,}00\ \times\ 0{,}025\ \times\ 12 = \$150.000{,}00.$$

ii. Considerando a taxa anual $i = 30\%\ ao\ ano$ e o prazo de $n = 1$ ano, temos

$$J = \ \$500.000{,}00\ \times 0{,}30\ x\ 1 = \$150.000{,}00.$$

Consequentemente, por definição, as taxas de juros de $2{,}5\%\ ao\ mês$ e de $30\%\ ao\ ano$ são exemplos de taxas equivalentes.

No regime de juros simples, *taxas proporcionais (nominais ou lineares)* e *taxas equivalentes* são consideradas a mesma coisa, sendo indiferente a classificação de duas taxas de juros como proporcionais ou equivalentes.

No exemplo ilustrativo acima, observe que $2{,}5\%\ ao\ mês$ é equivalente a $30\%\ ao\ ano$, verificando-se ainda uma proporção entre as taxas. A taxa de $1{,}5\%$ está ao período de um mês, e a de 18% há doze meses. Logo:

$$\frac{1}{12} = \frac{2{,}5}{30}.$$

Mas, por definição, tem-se que as grandezas dadas acima são proporcionais, pois o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, isto é:

$$12\ \times 2{,}5 = 1 \times 30\ \Leftrightarrow 30 = 30.$$

Conceitos e aplicações práticas de taxas equivalentes são bastante expandidas ao tratar-se, no capítulo seguinte, de juro composto.

Exemplo 1.3.1: Calcular a taxa mensal proporcional de juros de:

a) $14{,}4\%\ ao\ ano$;

Solução: Como 1 ano tem 12 meses, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{14{,}4\%}{12} = 1{,}2\%\ ao\ mês.$$

b) $6{,}8\%\ ao\ quadrimestre$;

Solução: Como 1 quadrimestre tem 4 meses, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{6{,}8\%}{4} = 1{,}7\%\ ao\ mês.$$

c) $11{,}4\%\ ao\ semestre$;

Solução: Como 1 semestre tem 6 meses, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{11{,}4\%}{6} = 1{,}9\%\ ao\ mês.$$

d) $54{,}72\%\ ao\ biênio$;

Solução: Como 1 biênio tem 2 anos, a taxa mensal proporcional é:

$$\frac{54{,}72\%}{24} = 2{,}28\%\ ao\ mês.$$

Exemplo 1.3.2: Determinar a taxa de juros simples anual proporcional às seguintes taxas:

a) $2{,}5\%\ ao\ mês$;

Solução: Como 1 ano tem 12 meses, a taxa anual proporcional é:

$$2{,}5\% \times 12 = 30\%\ ao\ ano.$$

b) $56\%\ ao\ quadrimestre$;

Solução: Como 1 quadrimestre tem 4 meses e 1 ano tem 12 meses, a taxa anual proporcional é:

$$\frac{56\%}{4} \times 12 = 168\%\ ao\ ano.$$

Neste exemplo, poderíamos fazer diretamente $56\% \times 3 = 168\%\ ao\ ano$, pois em 1 ano temos 3 quadrimestres.

c) $12{,}5\%\ para\ 5\ meses.$

Solução: A taxa anual proporcional é:

$$\frac{12{,}5\%}{5} \times 12 = 30\%\ ao\ ano.$$

Exemplo 1.3.3: Calcular o montante de \$85.000,00 aplicado por:

a) 7 meses à taxa linear de $2{,}5\%\ ao\ mês$;

Solução: Neste caso, a taxa e o prazo estão na mesma unidade de tempo, daí utilizando a fórmula do montante, $M = C\ (1 + i\ \times\ n)$, obtemos:

$$M = 85.000{,}00\ (1 + 0{,}025\ \times\ 7) = \$99.875{,}00.$$

b) 9 meses à taxa linear de $11{,}6\%\ ao\ semestre$;

Solução: Neste caso, como a taxa e prazo estão em tempos diferentes, iremos encontrar o prazo em semestres, que é

$$n = \frac{9}{6} =\ 1{,}5 \text{ semestres.}$$

Daí, como o montante é dado por $M = C\ (1 + i\ \times\ n)$, obtemos:

$$M =\ R\$\ 85.000{,}00\ (1 + 0{,}116\ \times\ 1{,}5)\ =\ \$\ 99.790{,}00.$$

Observação: Ao invés de encontrarmos o prazo em semestre, também podemos encontrar a taxa mensal proporcional, que é:

$$\frac{11{,}6\%}{6} ao\ mês.$$

Neste caso, o montante é dado por,

$$M = R\$\,85.000{,}00\left(1 + \frac{0{,}116}{6} \times 9\right) = \$99.790{,}00.$$

É importante ressaltar que caso tivéssemos usado um valor aproximado de $\frac{11{,}6\%}{6} \cong 1{,}933\%$, o valor do montante encontrado não seria exatamente $99.790,00 mais sim um valor aproximado.

c) 1 ano e 5 meses à taxa linear de 21% *ao ano*.

Solução: Neste caso, como a taxa e prazo estão em tempos diferentes, iremos encontrar o tempo em meses e a taxa mensal proporcional mensal que são, respectivamente,

$$n = \text{ 1 ano e 5 meses} = \text{17 meses e } i = \tfrac{21\%}{12} = 1{,}75\%\ ao\ mês.$$

Daí, como o montante é dado por $M = C\,(1 + i \times n)$, obtemos:

$$M = R\$\,85.000{,}00\,(1 + 0{,}0175.\,17) = \$\,110.287{,}50.$$

Exemplo 1.3.4: O montante de um capital de $6.600,00 ao final de 7 meses é determinado adicionando-se $1.090,32 de juros. Calcular a taxa linear mensal e anual utilizada.

Solução: Temos,

$$C = \$6.600{,}00$$
$$n = 7\ meses$$
$$J = \$\,1090{,}32$$

Queremos determinar a taxa de juros i, para isto, vamos usar a fórmula dos juros simples:

$$J = C \times i \times n,$$

de onde segue que,

$$1090{,}32 = 6600 \times i \times 7$$

$$\Rightarrow \frac{1090,32}{6600} = 7i$$

$$\Rightarrow 0,1652 = 7i$$

$$\Rightarrow i = \frac{0,1652}{7}$$

$$\Rightarrow \quad i = 0,0236 = 2,36\% \; ao \; mês.$$

Logo, a taxa mensal utilizada foi de $2,36\% \; ao \; mês$.

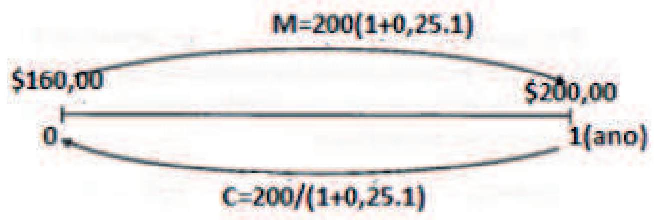
Como também queremos encontrar a taxa linear anual, conforme vimos anteriormente, multiplica-se a taxa mensal por 12, já que um ano possui 12 meses, ou seja, a taxa anual utilizada foi de

$$2,36\% \times 12 = 28,32\% \; ao \; ano.$$

1.4 EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA EM JUROS SIMPLES

O problema da equivalência Financeira constitui-se no raciocínio básico da matemática financeira. Conceitualmente, dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum, esta data comum é geralmente chamada de “data focal".

Por exemplo, $\$200,00$ vencíveis daqui a um ano e $\$160,00$ hoje, são equivalentes a uma taxa de juros simples de 25%, uma vez que os $R\$160,00$, capitalizados, produziriam $\$200,00$ dentro de um ano, ou os $R\$200,00$, do final do primeiro ano, resultariam em $R\$160,00$ se atualizados para hoje. Ou seja, ambos os capitais produzem, numa data de comparação (data local) e a taxa de $25\% \; ao \; ano$, resultados idênticos graficamente:



Exemplo 1.4.1: Uma TV em cores é vendida nas seguintes condições:

- Preço à vista = $ 1.800,00;
- Condições à prazo = 30% de entrada e $ 1.306,00 em 30 dias.

Determinar a taxa de juros simples cobrada na venda à prazo.

Solução 1: O valor à vista $1.800,00.

A prazo, a entrada será $30\%\ de\ 1.800,00\ = \$540,00$, e $\$\ 1.306,00$ em 30 dias ($=$ 1 mês).

Note que, como a entrada será 30% restaria para ser pago $\$1.800,00\ - \$540,00\ =$ $\$1.260,00$. Ou seja, será pago $\$1.306,00\ - \$1.260,00\ = \$46,00$ de juros.

Assim, ao adiar o pagamento de $\$1.260,00$ por 30 dias ($=$ 1 mês), paga-se $46,00 de juros. Como, $J = C \times i \times n$, temos $i = \frac{J}{C \times n}$, ou seja,

$$i = \frac{46}{1260 \times 1}$$

$$\Rightarrow i \cong 0{,}0365$$

$$\Rightarrow i \cong 3{,}65\%\ ao\ mês.$$

Logo, a taxa de juros simples cobrada é de aproximadamente $3{,}65\%\ ao\ mês$.

Solução 2: Este problema pode ser resolvido de forma mais direta, usando a definição de equivalência financeira. Para isto, note que temos duas formas de pagar a TV

I. à vista $1.800,00.
II. à prazo, a entrada será $30\%\ de\ 1.800,00\ = \$540,00$, e $\$\ 1.306,00$ em 30 dias ($=$ 1 mês).

Pela definição de equivalência financeira, escolhendo a “data focal” zero, devemos ter

$$1800 = 540 + \frac{1306}{1 + i.1}$$

$$\Rightarrow \frac{1306}{1+i} = 1800 - 540$$

$$\Rightarrow \frac{1306}{1+i} = 1260$$

$$\Rightarrow (1+i) \times 1260 = 1306$$

$$\Rightarrow 1260 + 1260i = 1306$$

$$\Rightarrow 1260i = 1306 - 1260$$

$$\Rightarrow i = \frac{46}{1260} \cong 0{,}0365$$

$$\Rightarrow i \cong 3{,}65\%\ ao\ mês.$$

Exemplo 1.4.2: Uma dívida é composta de três pagamentos no valor de $R\$\,2.800{,}00$, $R\$\,4.200{,}00$ e $R\$\,7.000{,}00$, vencíveis em 60, 90 e 150 dias, respectivamente. Sabe-se ainda que a taxa de juros simples de mercado é de $4{,}5\%\ ao\ mês$. Determinar o valor da dívida se o devedor liquidar os pagamentos:

a) Hoje;
b) Daqui a 7 meses.

Solução:

a) Como queremos determinar o valor da dívida se o devedor liquidar os pagamentos hoje, basta encontrar o PV - Valor Presente de cada um dos pagamentos na data focal zero (o que equivale ao valor à vista). Lembremos que para encontrar o PV, basta multiplicar os valores dados por $\frac{1}{(1+i \times n)}$, com $i = 4{,}5\%\ ao\ mês$.

Encontrando o PV_1 referente a primeira parcela, no valor de $R\$\ 2.800{,}00$ vencível em 60 dias (2 meses):

$$PV_1 = \frac{2800}{1 + (0{,}045 \times 2)}$$

$$\Rightarrow PV_1 = \frac{2800}{1{,}09}$$

$$\Rightarrow PV_1 \cong 2.568{,}81.$$

Encontrando o PV_2 referente a segunda parcela, no valor de $R\$\ 4.200{,}00$ vencível em 90 dias (3 meses):

$$PV_2 = \frac{4200}{1 + (0{,}045 \times 3)}$$

$$\Rightarrow PV_2 = \frac{4200}{1{,}135}$$

$$\Rightarrow PV_2 \cong 3.700{,}44.$$

Encontrando o PV_3 referente a terceira parcela, no valor de $R\$\ 7.000{,}00$ vencível em 150 dias (5 meses):

$$PV_3 = \frac{7000}{1 + (0{,}045 \times 5)}$$

$$\Rightarrow PV_3 = \frac{7000}{1{,}225}$$

$$\Rightarrow PV_3 \cong 5.714{,}29.$$

Logo, o valor a vista é:

$$PV_1 + PV_2 + PV_3 = 2.568{,}81 + 3.700{,}44 + 5.714{,}29 = \$11.983{,}54.$$

b) Como queremos determinar o valor da dívida se o devedor liquidar os pagamentos daqui a 7 meses, basta encontrar o FV - Valor Futuro de cada um dos pagamentos na data focal 7. Lembremos que para encontrar o FV, basta multiplicar os valores dados por $1 + i \times n$ com $i = 4{,}5\%\ ao\ mês$.

Encontrando o FV_1 referente a primeira parcela, no valor de $R\$\ 2.800{,}00$ vencível em 60 dias (2 meses):

$$FV_1 = 2800 \times (1 + 0{,}045 \times 5)$$

$$\Rightarrow FV_1 = 2.800\,.\,1{,}225$$

$$FV_1 = \ 3.430{,}00$$

Encontrando o FV_2 referente a segunda parcela, no valor de $R\$$ 4.200,00 vencível em 90 dias (3 meses):

$$FV_2 = 4200 \times (1 + 0{,}045 \times 4)$$

$$\Rightarrow FV_2 = 4.200\,.\,1{,}18$$

$$FV_2 = \ 4.956{,}00$$

Encontrando o FV_3 referente a terceira parcela, no valor de $R\$$ 7.000,00 vencível em 150 dias (5 meses):

$$FV_3 = 7000 \times (1 + 0{,}045 \times 2)$$

$$\Rightarrow FV_3 = 7.000\,.\,1{,}090$$

$$FV_3 = 7.630{,}00.$$

Logo, o valor daqui a 7 meses é:

$$FV_1 + FV_2 + FV_3 = 3.430 + 4.956 + 7.630 = \ R\$16.016{,}00.$$

Exemplo 1.4.3: Uma máquina calculadora está sendo vendida a prazo nas seguintes condições:

- $R\$128{,}00$ de entrada;
- $R\$$ 192,00 em 30 dias;
- $R\$$ 192,00 em 60 dias;

Sendo de 1,1% ao mês a taxa linear de juros, pede-se calcular até que preço é interessante comprar a máquina à vista.

Solução: Temos o seguinte fluxo de pagamentos:

$R\$128.00$ $\quad$ $R\$192{,}00$ $\quad$ $R\$\ 192.00$

Para saber o valor a vista, basta saber somar o valor das parcelas na data zero, que é:

$$128 + \frac{192}{(1 + 0{,}011 \times 1)} + \frac{192}{(1 + 0{,}011 \times 2)} = 128 + \frac{192}{1{,}011} + \frac{192}{1{,}022} =$$

$$= 128 + 189{,}91 + 187{,}87 = 505{,}78.$$

Logo, é interessante comprar a máquina à vista por até $R\$505{,}78$.

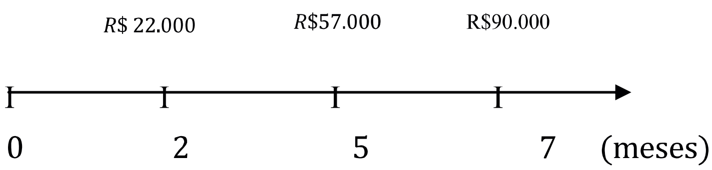
Exemplo 1.4.4: Uma pessoa tem uma dívida composta dos seguintes pagamentos:

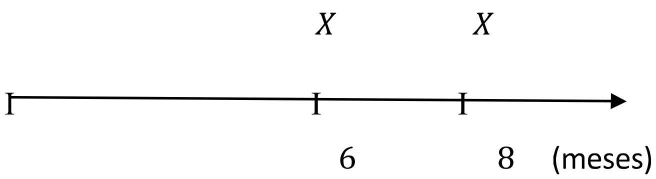
- $R\$\ 22.000{,}00$ de hoje a 2 meses;
- $R\$\ 57.000{,}00$ de hoje a 5 meses;
- $R\$\ 90.000{,}00$ de hoje a 7 meses.

Deseja trocar estas obrigações equivalentemente por dois pagamentos iguais, vencíveis o primeiro ao final do 6º mês e o segundo no 8º mês. Sendo de $3{,}7\ \%\ ao\ mês$ de juros simples, calcular o valor destes pagamentos admitindo-se as seguintes datas de comparação:

a) Hoje;
b) No vencimento do primeiro pagamento proposto;
c) No vencimento do segundo pagamento proposto;

Solução: Temos as seguintes formas de pagamento da mesma dívida, onde $i = 3{,}7\ \%\ ao\ mês$:





Queremos encontrar o valor do pagamento X.

a) Considerando a data focal: zero (hoje), por equivalência de capital, temos que:

$$\frac{22.000}{1+0{,}037\,X\,2}+\frac{57.000}{1+0{,}037\,X\,5}+\frac{90.000}{1+0{,}037\times 7}=\frac{X}{1+0{,}037\times 6}+\frac{X}{1+0{,}037\times 8}$$

$$\Rightarrow \frac{22.000}{1{,}074}+\frac{57.000}{1{,}185}+\frac{90.000}{1{,}259}=\frac{X}{1{,}222}+\frac{X}{1{,}296}$$

$$\Rightarrow 20484{,}1713+48101{,}2658+71485{,}3058=0{,}8183X+0{,}7716X$$

$$\Rightarrow 140070{,}7429 \;=\; 1{,}5899X$$

$$\Rightarrow X \;=\; 88.100{,}35.$$

Logo, o valor de cada um dos pagamentos é de aproximadamente \$88.100,35.

b) Considerando a data focal: 6, por equivalência de capital, temos que:

$$22.000\times(1+0{,}037\times 4)+57.000\times(1+0{,}037\;\times\;1)+\frac{90.000}{(1+0{,}037\;\times\;1)}=$$

$$=X+\frac{X}{(1+0{,}037\;\times\;2)}$$

$$\Rightarrow 22.000\times 1{,}148+57.000\times 1{,}037+\frac{90.000}{1{,}037}=X+\frac{X}{1{,}074}$$

$$\Rightarrow 25.256{,}00\;+\;59.109{,}00\;+\;86.788{,}81\;=\;X\;+0{,}9311X$$

$$\Rightarrow 171.153{,}81\;=\;1{,}9311X$$

$$\Rightarrow X=\frac{171153{,}81}{1{,}9311}$$

$$\Rightarrow X\;=\;88.630{,}22.$$

Logo, o valor de cada um dos pagamentos é de aproximadamente \$88.630,22.

c) Considerando a data focal = 8, por equivalência de capital, temos que:

$$22.000 \times (1 + 0{,}037 \times 6) + 57.000 \times (1 + 0{,}037 \times 3) + 90.000 \times (1 + 0{,}037 \times 1) = X(1 + 0{,}037 \times 2) + X$$

$$\Rightarrow 22.000 \times 1{,}222 + 57.000 \times 1{,}111 + 90.000 \times 1{,}037 = 1{,}074X + X$$

$$\Rightarrow 26.884{,}00 + 63.327{,}00 + 93.330{,}00 = 2{,}074X$$

$$\Rightarrow 2{,}074X = 183.541{,}00$$

$$\Rightarrow X = \frac{183.541{,}00}{2{,}074}$$

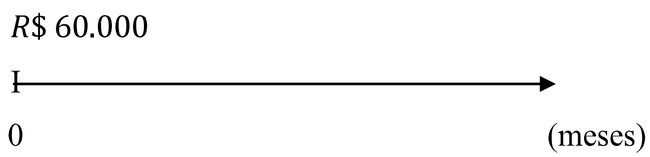
$$\Rightarrow X = 88.496{,}14.$$

Logo, o valor de cada um dos pagamentos é de aproximadamente $88.496,14.

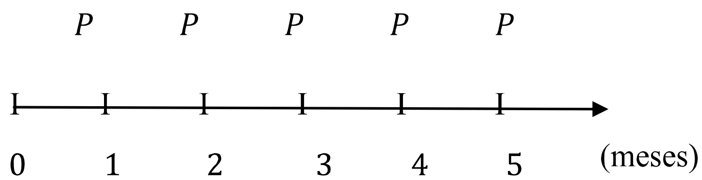
Exemplo 1.4.5: Um financiamento no valor de $R\$\ 60.000{,}00$ é concedido para pagamento em 5 prestações mensais e iguais, sendo cobrada uma taxa de juros simples de $2{,}2\%\ ao\ mês$. determinar o valor de cada prestação pelo critério de capitalização linear.

Solução: Temos um financiamento de $R\$\ 60.000{,}00$, onde $i = 2{,}2\%\ ao\ mês$, com as seguintes formas de pagamento:

Pagamento à vista.



Pagamento em 5 prestações mensais e iguais $i = 2{,}2\%\ ao\ mês$.



Queremos encontrar o valor da prestação P. Escolhendo a data focal: 0, temos que:

$$\frac{P}{1+0{,}022\times 1}+\frac{\mathrm{P}}{1+0{,}022\times 2}+\frac{\mathrm{P}}{1+0{,}022\times 3}+\frac{\mathrm{P}}{1+0{,}022\times 4}+\frac{\mathrm{P}}{1+0{,}022\times 5}=$$
$$=60.000$$

$$\Rightarrow \frac{P}{1{,}022}+\frac{\mathrm{P}}{1{,}044}+\frac{\mathrm{P}}{1{,}066}+\frac{\mathrm{P}}{1{,}088}+\frac{\mathrm{P}}{1{,}11}=60.000$$

$$\Rightarrow 0{,}98\,P+0{,}96\,P+0{,}94\,P+0{,}92\,P+0{,}90\,P=60.000$$

$$\Rightarrow 4{,}7\,P \;=\; 60.000$$

$$\Rightarrow P \;=\; 12.765{,}96.$$

Logo, o valor de cada prestação é de aproximadamente $\$12.765{,}96$.

IMPORTANTE: Na questão de equivalência financeira em juros simples, é importante ressaltar que os prazos não podem ser desmembrados (fracionados) sob pena de alterar os resultados. Em outras palavras, dois capitais equivalentes, ao fracionar os seus prazos, deixam de produzir o mesmo resultado na data focal escolhida, pelo critério de juros simples. Além disso, os valores encontrados dependem da data focal escolhida, por este motivo no **Exemplo 1.4.4**, para resolver o item (b) não podemos simplesmente capitalizar o valor do pagamento encontrado no item (a) para a data focal 6. O mesmo não acontecerá no regime de capitalização composta, conforme veremos os valores encontrados não dependem da data focal escolhida, isto é, podemos escolher qualquer data para comparar os capitais.

2. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTO

O Regime de Capitalização Composto (Juros compostos) é bastante utilizado no sistema financeiro, já que oferece uma rentabilidade melhor. Assim, é o mais útil para os cálculos de problemas do dia-a-dia, já que na maioria das operações financeiras, como por exemplo: nas operações bancárias (cadernetas de poupança, empréstimos, financiamentos, aposentadoria privada, cartão de crédito, investimentos a longo prazo, etc), no cálculo da prestação de um financiamento de um automóvel ou imóvel e no parcelamento de compras em geral, que estão presentes no nosso cotidiano é este o regime utilizado.

A taxa de juros é sempre aplicada ao somatório do capital acumulado no final de cada período. Desta forma podemos dizer que, Juros compostos são a aplicação de juros sobre juros, ou seja, os juros compostos são aplicados ao saldo (montante) acumulado ao final de cada período que antecede o período considerado, comportando-se como uma Progressão Geométrica, ou seja, os juros crescem de forma exponencial. As definições de juro e montante são as mesmas estudadas no regime de Capitalização Simples, o que vai diferenciar é a forma como os juros são formados e incorporados ao capital no decorrer do tempo, e consequentemente as fórmulas para calculá-los também serão diferentes, conforme veremos mais adiante.

Para ilustrar a definição dada acima, observemos inicialmente, o seguinte exemplo:

"Um capital de $R\$\ 1.000{,}00$ foi aplicado durante três anos a uma taxa de juros de 10% ao ano, utilizando o regime de juros composto. Qual o valor do montante?"

Note que:

I. Durante o primeiro ano o juro gerado foi de $1.000{,}00 \times 0{,}1 = 100{,}00$, logo, por definição, o montante acumulado ao final do primeiro ano, que iremos denotar por M_1, é de $1.000{,}00 + 100{,}00 = 1.100{,}00$.

II. Durante o segundo ano o juro gerado foi de $1.100{,}00 \times 0{,}1 = 110{,}00$, logo, o montante acumulado ao final do segundo ano, que iremos denotar por M_2, é de $1.100{,}00 + 110{,}00 = 1.210{,}00$.

III. Durante o terceiro ano o juro gerado foi de $1.210{,}00 \times 0{,}1 = 121{,}00$, logo, o montante acumulado ao final do terceiro ano, que iremos denotar por M_3, é de $1.210{,}00 + 121{,}00 = 1.331{,}00$.

Observando os resultados encontrados em uma tabela, temos:

ANO	SALDO ANTERIOR	CÁLCULO DOS JUROS	MONTANTE
0			R$ 1.000,00
1	R$ 1.000,00	1.000,00 x 0,1 = 100,00	R$ 1.100,00
2	R$ 1.100,00	1.100,00 x 0,1 = 110,00	R$ 1.210,00
3	R$ 1.210,00	1.210,00 x 0,1 = 121,00	R$ 1.331,00

Importante: Note que, ao contrário do que ocorre em juros simples, o valor dos juros em cada período não é constante, já que o mesmo incide sobre o montante acumulado no período anterior, e conforme já comentamos o crescimento dos juros ocorre de forma exponencial.

2.1 FÓRMULA DO MONTANTE NOS JUROS COMPOSTOS

Por definição o montante é a soma do capital com os juros. Usando a definição de juros compostos, onde os juros incidem sobre o saldo (montante) acumulado ao final de cada período que antecede o período considerado, veremos de maneira mais clara como fica o valor do montante na aplicação período a período. Para isto, consideramos agora:

$\boldsymbol{M_k} =$ o valor do montante acumulado ao final do período k ($k = 1,2,\dots,n$);
$\boldsymbol{C}$ = o valor do capital;
$\boldsymbol{i}$ = a taxa de juros;
$\boldsymbol{n}$ = o número de períodos ou o prazo da operação.

Assim, temos que:

- Ao final do primeiro período, o valor do montante é:

$$M_1 = C + J = C + C \times i = C \times (1 + i).$$

- Ao final do segundo período, o valor do montante é:

$$M_2 = M_1 + J = M_1 + M_1 \times i = M_1 \times (1+i) = C \times (1+i) \times (1+i)$$

$$\Rightarrow M_2 = C \times (1+i)^2.$$

- Ao final do terceiro período, o valor do montante é:

$$M_3 = M_2 + J = M_2 + M_2 \times i = M_2 \times (1+i) = C \times (1+i)^2 \times (1+i)$$
$$\Rightarrow M_3 = C \times (1+i)^3.$$

- Ao final do quarto período, o valor do montante é:

$$M_4 = M_3 + J = M_3 + M_3 \times i = M_3 \times (1+i) = C \times (1+i)^3 \times (1+i)$$
$$\Rightarrow M_4 = C \times (1+i)^4.$$

- Ao final do quinto período, o valor do montante é:

$$M_5 = M_4 + J = M_4 + M_4 \times i = M_4 \times (1+i) = C \times (1+i)^4 \times (1+i)$$
$$\Rightarrow M_5 = C \times (1+i)^5.$$

Note que, os montantes obtidos formam uma progressão geométrica de primeiro termo $C \times (1+i)$ e razão $(1+i)$, assim, para encontrar o montante ao final de um período k qualquer ($k = 1,2,\dots,n$), basta encontrar o termo geral desta progressão, que é por definição:

$$M_k = C \times (1+i) \times (1+i)^{k-1} = C \times (1+i)^k.$$

Desta forma, o valor acumulado, isto é o Montante M, após n períodos de tempo é:

$$M = C \times (1+i)^n. \quad (1)$$

IMPORTANTE: No estudo de juros compostos o valor presente (Capital) não se refere necessariamente a um valor expresso no momento (data focal) zero. O valor presente pode ser apurado em qualquer data focal anterior à do valor futuro (montante). Assim, para evitar confusão, iremos representar nas fórmulas de juros compostos o Capital (ou valor presente) por PV e o Montante (ou valor futuro) por FV. Desta forma, a fórmula obtida em (1) será reescrita do seguinte modo:

$$FV = PV \times (1+i)^n. \qquad (2)$$

De onde segue que,

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}. \qquad (3)$$

Pelas fórmulas obtidas em (2) e (3) podemos observar que:

i) Para obter o valor futuro, basta multiplicar o valor atual por $(1+i)^n$, que é chamado Fator de Capitalização ou Fator de Valor Futuro.

ii) Para obter o valor atual, basta multiplicar o valor futuro por $\frac{1}{(1+i)^n}$ que é chamado de Fator de Atualização ou Fator de Valor Presente.

Exemplo 2.1.1: Um banco lança um título pagando $6\%\ ao\ trimestre$. Se uma pessoa necessitar de $R\$58.000{,}00$ daqui a 3 anos, quanto deverá aplicar neste título?

Solução: Dados:

$i\ =\ 6\%\ a.t. (= 0{,}06)$
$FV = R\$58.000{,}00$
$n = 3\ anos =\ 12\ trimestres$

Queremos encontrar o valor presente. Como, $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$, obtemos

$$PV = \frac{58.000}{(1+0{,}06)^{12}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{58.000}{1{,}06^{12}}$$

$$\Rightarrow PV = 28.824{,}22.$$

Logo, deverá ser aplicado $R\$28.824{,}22$.

Exemplo 2.1.2: Sendo a taxa corrente de juros de $10\%\ a.q.$ (ao quadrimestre), quanto deve ser aplicado hoje para se resgatar $R\$38.500{,}00$ daqui a 28 meses?

Solução: Dados

$i =\ 10\%\ a.q. (=\ 0{,}1)$

$FV = R\$ \, 38.500,00$

$n = 28 \, meses = 7 \, quadrimestres$

Queremos encontrar o valor presente. Como $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$, obtemos

$$PV = \frac{38.500}{(1+0,1)^7}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{38.500}{(1,1)^7}$$

$$\Rightarrow PV = 19.756,59.$$

Logo, deverá ser aplicado $R\$19.756,59$.

Exemplo 2.1.3: Quanto rende um capital de \$4.000,00 aplicado por $10 \, meses$ a juros compostos de $2\% \, ao \, mês$?

Solução: Dados

$PV = R\$ \, 4.000$

$n = 10 \, meses$

$i = 2\% = 2/100 = 0,02$

Conforme vimos, o montante ou valor futuro é dado por, $FV = PV(1+i)^n$, de onde segue que

$$FV = 4000 \, (1+0,02)^{10}$$

$$\Rightarrow FV = 4000 \;\; X \, 1,02^{10}$$

$$\Rightarrow FV = 4000 \, X \, 1,21899$$

$$\Rightarrow FV = 4875,97$$

Como queremos o rendimento, isto é, o valor dos juros, basta fazer a diferença entre o montante (FV) 4.875,97 e o capital (VP) 4.000,00. Portanto o rendimento é de $R\$ \, 875,97$.

Exemplo 2.1.4: Uma aplicação de \$22.000,00 efetuada em certa data produz, à taxa composta de juros de $2{,}4\%\ ao\ mês$, um montante de \$26.596,40 em certa data futura. Calcular o prazo da operação.

Solução: Dados

$PV\ =\ \$\ 22.000{,}00$

$i\ =\ 2{,}4\%\ ao\ mês\ (= 0{,}024)$

$FV =\ \$\ 26.596{,}40$

Desse modo, iremos determinar o prazo usando a expressão, $FV\ =\ PV\ \times\ (1+i)^n$, de onde obtemos:

$$26.596{,}40 = 22.000\ \times\ (1 + 0{,}024)^n$$

$$\Rightarrow 26.596{,}40 = 22.000\ X\ 1{,}024^{\,n}$$

$$\Rightarrow 1{,}208927\ =\ (1{,}024)^n$$

Aplicando-se logaritmos tem-se:

$$Log\ 1{,}208927\ = n\ X\ \mathrm{Log}\ 1{,}024$$

$$\Rightarrow\ n =\ 8\ meses.$$

Portanto, o prazo da operação é de 8 meses.

Exemplo 2.1.5: Calcular a taxa mensal de juros de uma aplicação de R\$68.700,00 que produz um montante de R\$82.084,90 ao final de 8 meses.

Solução: Dados:

$PV\ =\ R\$\ 68.700{,}00$

$FV =\ R\$\ 82.084{,}90$

$n\ =\ 8\ meses$

Queremos determinar a taxa mensal de juros i. Usando a expressão,

$$FV =\ PV\ (1+i)^n,$$

obtemos,

$$82.084,90 = 68700\ (1+i)^8$$
$$\Rightarrow \frac{82.084,90}{68.700,00} = (1+i)^8$$
$$\Rightarrow 1,19483 = (1+i)^8$$
$$\Rightarrow \sqrt[8]{1,19483} = \sqrt[8]{(1+i)^8}$$
$$\Rightarrow 1,0225 = 1 + i$$
$$\Rightarrow 1,0225 - 1 = i$$
$$\Rightarrow i = 0,0225$$
$$\Rightarrow i = 2,25\%\ ao\ mês.$$

Logo, a taxa de juros é 2,25% $ao\ mês$.

2.2 TAXAS EQUIVALENTES EM JUROS COMPOSTOS

O conceito enunciado de taxa equivalente permanece válido para o regime de juros compostos diferenciando-se, no entanto, a fórmula de cálculo da taxa de juros.

Por se tratar de capitalização exponencial, a expressão da taxa equivalente composta é a média geométrica da taxa de juros do período inteiro, isto é, se a taxa de juros relativamente a um período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I, onde:

$$I = (1+i)^n - 1$$

ou

$$1 + I = (1+i)^n \Rightarrow \sqrt[n]{1+I} = \sqrt[n]{(1+i)^n} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[n]{1+I}$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[n]{1+I} - 1.$$

(I representa a taxa do prazo maior e i a taxa do prazo menor)

Por exemplo, a taxa equivalente composta mensal de 10,3826% ao semestre é de 1,66%. $ao\ mês$. De fato, sendo $I = 10,3826\%\ ao\ semestre$, a taxa equivalente mensal i é dada por $i = \sqrt[6]{1 + 0,103826} - 1 \cong 0,0166 = 1,66\%\ ao\ mês.$

Assim, para um mesmo capital e prazo de aplicação, é indiferente (equivalente) o rendimento de $1{,}66\%\ ao\ mês$ ou $10{,}3826\%\ ao\ semestre$. Ilustrativamente, um capital de \$100.000,00 aplicado por dois anos produz:

- Para $i = 1{,}66\%\ ao\ mês$ e $n = 2\ anos = 24$ meses:

$$FV = 100.000{,}00\ (1{,}0166)^{24} = \$148.457{,}63.$$

- Para $i = 10{,}3826\%\ ao\ semestre$ e $n = 2$ anos= 4 semestres:

$$FV = 100.000{,}00\ (1{,}103826)^{4} = \$\ 148.457{,}63.$$

É importante observar que, dependendo da aproximação decimal utilizada, haverá uma pequena diferença nos resultados obtidos.

Exemplo 2.2.1: Considerando uma taxa de $10\%\ ao\ semestre$, determine:

a) Taxa Equivalente Mensal:

Solução: Temos $I = 10\%\ ao\ semestre$, queremos encontrar a taxa mensal i, tal que:

$i = \sqrt[n]{1+I} - 1$, com $n = \frac{6}{1}$ meses, isto é,

$$i = \sqrt[6]{1+0{,}10} - 1$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[6]{1{,}1} - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 1{,}016 - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 0{,}016 = 1{,}6\%\ ao\ mês.$$

Logo, a taxa equivalente mensal é de aproximadamente 1,6%.

b) Taxa Equivalente para 4 meses:

Solução: Temos $I = 10\%\ ao\ semestre$, queremos encontrar a taxa para 4 meses i, tal que:
$i = \sqrt[n]{1+I} - 1$, com $n = \frac{6}{4}$ períodos de 4 meses, isto é,

$$i = \sqrt[\frac{6}{4}]{1+0{,}10} - 1$$

$$\Rightarrow i = \sqrt[\frac{6}{4}]{1{,}10} - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 1{,}0656 - 1$$

$$\Rightarrow i \cong 0{,}0656 = 6{,}56\%\ para\ 4\ meses.$$

Logo, a taxa equivalente para 4 meses é de aproximadamente 6,56% .

c) Taxa Equivalente anual

Solução: Temos $i = 10\%\ ao\ semestre$, queremos encontrar a taxa anual I, tal que:

$I = (1+i)^n - 1$, com $n = \frac{12}{6}$ semestres, isto é,

$$I = (1+0{,}10)^{\frac{12}{6}} - 1$$

$$\Rightarrow I = (1{,}10)^2 - 1$$

$$\Rightarrow I = 0{,}21 = 21\%\ ao\ ano.$$

Logo, a taxa equivalente anual é de 21%.

Exemplo 2.2.2: Capitalizar as seguintes taxas:

a) 2,3% $ao\ mês$ para um ano;

Solução: Temos $i = 2{,}3\%\ ao\ mês$, queremos encontrar a taxa anual I, tal que:

$I = (1+i)^n - 1$, com $n = \frac{12}{1}$ meses, isto é,

$$I = (1+0{,}023)^{12} - 1$$

$$\Rightarrow I = (1{,}023)^{12} - 1$$

$$\Rightarrow I \cong 0{,}3137 = 31{,}37\%\ ao\ ano.$$

Logo, a taxa equivalente anual é de aproximadamente 31,37%.

b) 7,45% $ao\ trimestre$ para um ano;

Solução: Temos $i = 7{,}45\%\ ao\ trimestre$, queremos encontrar a taxa anual I, tal que:

$I = (1+i)^n - 1$, com $n = \frac{12}{3}$ trimestres, isto é,

$$I = (1 + 0{,}0745)^4 - 1$$

$$\Rightarrow I = (1{,}0745)^4 - 1$$

$$\Rightarrow I \cong 0{,}3330 = 33{,}3\%\ ao\ ano.$$

Logo, a taxa equivalente anual é de aproximadamente 33,3%.

c) $6{,}75\%\ ao\ semestre$ para um ano;

Solução: Temos $i = 6{,}75\%\ ao\ semestre$, queremos encontrar a taxa anual I, tal que:

$I = (1 + i)^n - 1$, com $n = \frac{12}{6}$ semestres, isto é,

$$I = (1 + 0{,}0675)^2 - 1$$

$$\Rightarrow I = (1{,}0675)^2 - 1$$

$$\Rightarrow I \cong 0{,}1396 = 13{,}96\%\ ao\ ano.$$

Logo, a taxa equivalente anual é de aproximadamente 13,96% .

Exemplo 2.2.3: Calcular a taxa equivalente composta a 34% ao ano para os seguintes prazos:

a) 1 mês;

Solução: Temos $I = 34\%\ ao\ ano$ e $n = \frac{12}{1}\ meses$. Como $i = \sqrt[n]{1 + I} - 1$, obtemos a taxa equivalente mensal:

$$i = \sqrt[12]{1 + 0{,}34} - 1 \cong 0{,}02469 = 2{,}469\%\ ao\ mês.$$

b) 1 semestre;

Solução: Temos $I = 34\%\ a.a. e\ n = \frac{12}{6} = 2\ semestres$. Como $i = \sqrt[n]{1 + I} - 1$, obtemos a taxa equivalente semestral:

$$i = \sqrt[2]{1 + 0{,}34} - 1 \cong 0{,}1576 = 15{,}76\%\ ao\ semestre.$$

c) 5 meses;

Solução: Temos $I = 34\% \, a.a. \, e \, n = \frac{12}{5}$ períodos de 5 meses. Como $i = \sqrt[n]{1+I} \; -1$, obtemos a taxa equivalente para 5 meses:

$$i = \sqrt[\frac{12}{5}]{1+0{,}34} - 1 \cong 0{,}1297 = 12{,}97\% \; para \; 5 \; meses.$$

Exemplo 2.2.4: Determinar as taxas mensal e anual equivalentes de juros de um capital de $R\$ \; 67.000{,}00$ que produz um montante de $R\$171.929{,}17$ ao final de 17 meses.

Solução: Dados:

$$PV = R\$67.000{,}00$$
$$FV = R\$ \; 171.929{,}17$$
$$n = 17 \; meses$$

Como $FV = PV \; (1+i)^n$, obtemos:

$$171.929{,}17 = 67.000 \; (1+i)^{17}$$

$$\Rightarrow \frac{171.929{,}17}{67.000} = (1+i)^{17}$$

$$\Rightarrow 2{,}5661 = (1+i)^{17}$$

$$\Rightarrow \sqrt[17]{(1+i)^{17}} = \sqrt[17]{2{,}5661}$$

$$\Rightarrow 1 + i = 1{,}057$$

$$\Rightarrow i = 0{,}057 = 5{,}7\% \; ao \; mês.$$

Calculando a taxa equivalente anual I, que é dada pela fórmula $I = \; (1+i)^n - 1$ obtemos:

$$I = \; (1 + 0{,}057)^{12} - 1$$

$$\Rightarrow I = \; (1{,}057)^{12} - 1 = 0{,}945$$

$$\Rightarrow I = \; 94{,}5\% \; ao \; ano.$$

Logo, as taxas mensal e anual são, respectivamente, $i = 5{,}7\%$ e $I = \; 94{,}5\%$.

2.3 TAXA NOMINAL E EFETIVA

A taxa efetiva de juros é a taxa dos juros apurada durante todo o prazo n, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização. Ou seja, taxa efetiva é o processo de formação dos juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização. É obtida pela seguinte expressão:

$$\text{Taxa efetiva } (i_f) = (1 + i)^q - 1.$$

onde q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Por exemplo, uma taxa de $2{,}3\%$ *ao mês* determina um montante efetivo de juros de $31{,}37\%$ *ao ano*. De fato, pela definição dada acima, temos:

$$i_f = (1 + 0{,}023)^{12} - 1 = 31{,}37\% \text{ ao ano}.$$

Quando se diz, por outro lado, que uma taxa de juros é *nominal,* geralmente é admitido que o prazo de capitalização dos juros (ou seja, período de formação e incorporação dos juros ao principal) não é o mesmo daquele definido para a taxa de juros.

Por exemplo, seja a taxa nominal de juros de 36% *ao ano* capitalizada mensalmente. Os prazos não são coincidentes. O prazo de capitalização é de um mês e o prazo a que se refere a taxa de juros igual a um ano (12 meses).

Assim, 36% ao ano representa uma taxa nominal de juros, expressa para um período inteiro, a qual deve ser atribuída ao período de capitalização.

Quando se trata de taxa nominal é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples. Assim, no exemplo, a taxa por período de capitalização é de $36\%/12 = 3\%$ *ao mês* (taxa proporcional ou linear).

Ao se capitalizar esta taxa nominal, apura-se a taxa efetiva de juros, a qual é superior àquela declarada para a operação. Baseando-se nos dados do exemplo ilustrativo acima, tem-se:

- Taxa nominal da operação para o período = 36% *ao ano*.

- Taxa proporcional simples mensal (taxa definida para o período de capitalização) = 3% $ao\ mês$.
- Taxa efetiva de juros anual: $i_f = (1+0{,}03)^{12} - 1 = 0{,}426 = 42{,}6\%\ ao\ ano$.

Observe que a taxa nominal não revela a efetiva taxa de juros de uma operação. Ao dizer que os juros anuais são de 36%, mas capitalizados mensalmente, apura-se que a efetiva taxa de juros atinge 42,6% $ao\ ano$.

Para que 36% $ao\ ano$ fosse considerada a taxa efetiva, a formação mensal dos juros deveria ser feita a partir da taxa equivalente composta, ou seja:

✓ $Taxa\ equivalente\ Mensal\ de$ 36% $ao\ ano$:

$$i = \sqrt[12]{1+0{,}36} - 1 \Rightarrow i = \sqrt[12]{1{,}36} - 1 = 2{,}6\%\ ao\ mês.$$

Note que a taxa de 2,6% $ao\ mês$ é equivalente a taxa de 36% $ao\ ano$. De fato,

✓ $Taxa\ Efetiva\ Anual$:

$$i_f = (1+0{,}026)^{12} - 1 \Rightarrow \quad {}^{i}{}_{f}\, i_f = (1{,}026)^{12} - 1 = 36\%\ ao\ ano.$$

Com este exemplo, devemos prestar bastante atenção como as taxas estão sendo anunciadas, para não sermos enganados. Pois, conforme acabamos de ver, se for anunciada uma taxa nominal de juros de 36% $ao\ ano$ capitalizada mensalmente, a taxa de juros que realmente está sendo aplicada (taxa efetiva) é de 42,6% $ao\ ano$. Ou seja, a tradução da frase "36% $ao\ ano$ com capitalização mensal" é "3% $ao\ mês$, que na realidade dão 42,6% $ao\ ano$".

Convenciona-se que, quando houver mais de um período de capitalização e não houver uma menção explícita de que se trata de uma taxa efetiva, a atribuição dos juros a estes períodos deve ser processada através da taxa proporcional. Por outro lado, quando os prazos forem coincidentes (prazo da taxa e o de formação dos juros) a representação da taxa de juros é abreviada. Por exemplo, a expressão única "10% $a.a.$" indica que os juros são também capitalizados em termos anuais.

2.4 EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA EM JUROS COMPOSTOS

Já trabalhamos com os conceitos envolvendo equivalência de capitais no sistema de capitalização simples. Veremos agora esses mesmos conceitos, mas sob outro enfoque: por meio do sistema de capitalização composta. É claro que os conceitos e a maneira de vermos os problemas serão os mesmos. Mudaremos apenas o regime de capitalização e o fato de que a escolha da data focal no sistema composto é irrelevante.

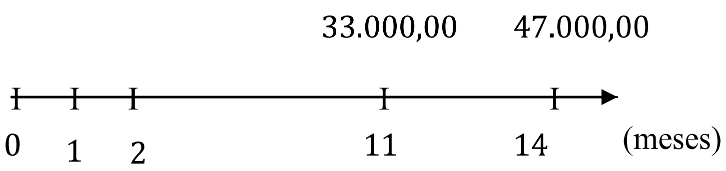
Para resolver problemas envolvendo equivalência financeira, ao escolhermos a data focal, basta lembrarmos que:

I) Para obtermos um valor futuro (posterior a data focal) basta multiplicarmos o valor presente por $(1+i)^n$, ou seja, $FV = PV\,(1+i)^n$.

II) Para obtermos um valor atual (anterior a data focal), basta multiplicarmos o valor futuro por $\frac{1}{(1+i)^n}$, ou seja, $PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$.

Exemplo 2.4.1: Admita que uma pessoa irá necessitar de $R\$\,33.000{,}00$ em 11 meses e $R\$\,47.000{,}00$ em 14 meses. Quanto deverá ela depositar hoje numa alternativa de investimento que oferece uma taxa efetiva de rentabilidade de 17% *ao ano*?

Solução: Temos, o seguinte fluxo de pagamentos



Como o prazo é dado em meses e a taxa é de 17% *ao ano*, encontraremos inicialmente a taxa equivalente mensal:

$$i = \sqrt[12]{1+0{,}17} - 1 = \sqrt[12]{1{,}17} - 1 = 0{,}01317 = 1{,}317\%\ ao\ m\hat{e}s.$$

Assim, o valor a ser depositado hoje, isto é, na data focal 0 é:

$$PV = \frac{33000}{(1+0{,}01317)^{11}} + \frac{47.000}{(1+0{,}01317)^{14}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{33.000}{(1{,}01317)^{11}} + \frac{47.000}{(1{,}01317)^{14}}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{33.000}{1{,}154797} + \frac{47.000}{1{,}201026}$$

$$\Rightarrow PV = 28.576{,}45 + 39.133{,}21$$

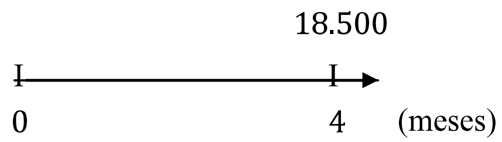
$$\Rightarrow PV = R\$67.709{,}66.$$

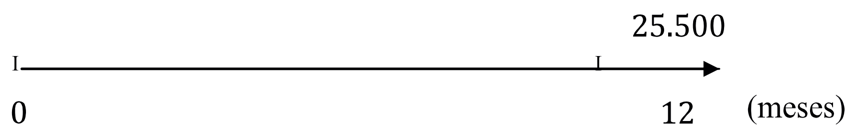
Exemplo 2.4.2: Para um poupador que deseja ganhar 2,5% $ao\, mês$, o que é mais interessante:

a) receber \$ 18.500,00 de hoje a 4 meses ou;

b) \$ 25.500,00 de hoje a 12 meses?

Solução: Temos as seguintes situações:

a) 

b) 

Para saber a melhor alternativa, basta escolher uma data focal e comparar os resultados nesta data. Escolhendo a data focal zero, temos:

a) $PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{18.500}{(1+0{,}025)^4} = \frac{18.500}{1{,}103812} = 16.760{,}10.$

b) $PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{25.500}{(1+0{,}025)^{12}} = \frac{25.500}{1{,}34488} = 18.960{,}80.$

Logo, é mais interessante o poupador receber \$25.500,00 de hoje a 12 meses, pois este equivale a um maior PV.

Observação: Para resolver as questões de juros compostos, não importa a data focal escolhida, o resultado final da questão será o mesmo, porém em uma data diferente. Assim, neste último exemplo:

- se escolhermos, por exemplo, a data focal 2, temos:
  a) $PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{18.500}{(1+0,025)^2} = \frac{18.500}{1,0506} = 17.608,99.$

  b) $PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{25.500}{(1+0,025)^{10}} = \frac{25.500}{1,2801} = 19.920,32.$
- se escolhermos, por exemplo, a data focal 4, temos:
  a) $PV = 18.500,00$

  b) $PV = \frac{FV}{(1+i)^n} = \frac{25.500}{(1+0,025)^8} = \frac{25.500}{1,2184} = 20.929,09.$

- se escolhermos, por exemplo, a data focal 12, temos:
  a) $FV = PV(1+i)^n$=$18.500(1+0,025)^{8=}18.500 \times 1,2184 = 22.540,40.$

  b) $FV = 25.500,00.$

Ou seja, é mais interessante o poupador receber $\$25.500,00$ de hoje a 12 meses, pois este equivale a um maior valor em qualquer uma das datas.

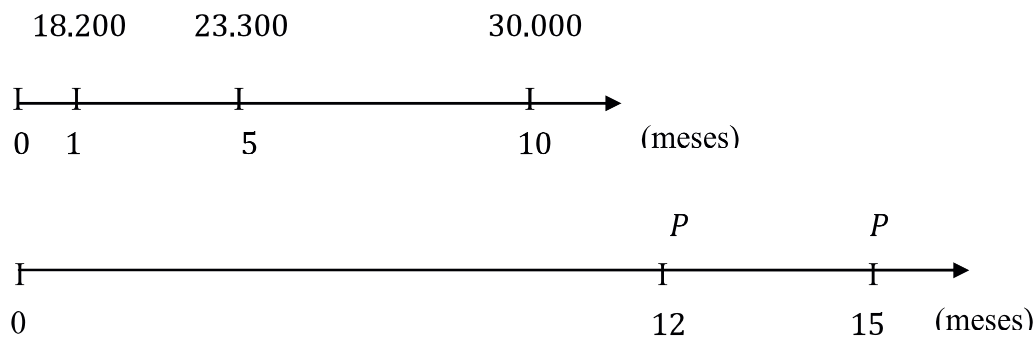
IMPORTANTE: Com este exemplo, vemos que não importa a data focal escolhida, porém em alguns casos acabamos precisando fazer mais contas. Então, o melhor é olhar a questão e ver uma data conveniente, que você se sinta mais seguro para resolver.

Exemplo 2.4.3: João tem as seguintes obrigações financeiras com Pedro:

- Dívida de $ 18.200,00 vencível no fim de um mês;
- Dívida de $ 23.300,00 vencível no fim de 5 meses;
- Dívida de $ 30.000,00 vencível no fim de 10 meses.

Prevendo dificuldades no pagamento desses compromissos, João propõe substituir este plano original por dois pagamentos iguais, vencendo o primeiro de hoje a 12 meses. Determinar o valor desses pagamentos para uma taxa de juros de $2,8\%$ $ao\ mês$.

Solução: Temos os seguintes fluxos de pagamentos:



Como ambos representam o mesmo compromisso, ao somar os valores numa mesma data focal, os resultados devem ser iguais. Assim, escolhendo a data focal zero, temos:

$$\frac{18.200}{(1+0{,}028)^{1}}+\frac{23.300}{(1+0{,}028)^{5}}+\frac{30.000}{(1+0{,}028)^{10}}={\frac{P}{(1+0{,}028)^{12}}}^{12}+\frac{P}{(1+0{,}028)^{15}}$$

$$\Rightarrow \frac{18.200}{1{,}028}+\frac{23.300}{1{,}1480626}+\frac{30.000}{1{,}3180478}=\frac{P}{1{,}3928918}+\frac{P}{1{,}5132013}$$

$$\Rightarrow 17.704{,}2802\ +\ 20.295{,}0606\ +\ 22.760{,}9365\ =\ P\times\frac{1}{1{,}3928917}\quad +P\times\frac{1}{1{,}5132013}$$

$$\Rightarrow 60.760{,}2773\ =\ 0{,}71793090P\ +\ 0{,}66085061P$$

$$\Rightarrow 60.760{,}2773 =\ 1{,}37878151P$$

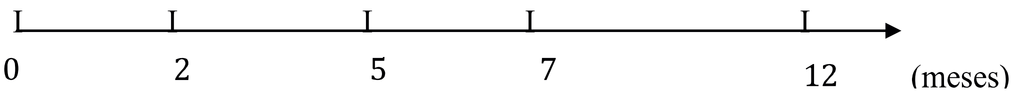
$$\Rightarrow P\ =\ \frac{60.760{,}2773}{1{,}37878151}=4.068{,}10.$$

Logo, serão feitos dois pagamentos de $44.069,4757 .

Exemplo 2.4.4: Uma pessoa deve a outra a importância de $12.400,00. Para a liquidação da dívida, propõe os seguintes pagamentos: $3.500,00 ao final de 2 meses; $4.000,00 ao final de 5 meses; $ 1.700,00 ao final de 7 meses e o restante em um ano. Sendo de 3% *ao mês* a taxa efetiva de juros cobrada no empréstimo, pede-se calcular o valor do último pagamento.

Solução: Temos uma dívida de $R\$$ 12.400,00 para ser liquidada com os pagamentos:

3.500 4.000 1.700 X



Como esta proposta é para liquidar uma dívida de \$12.400,00, com $i = 3\%\ ao\,mês$ considerando a data focal zero, temos:

$$12.400 = \frac{3.500}{(1+0,03)^2} + \frac{4.000}{(1+0,03)^5} + \frac{1.700}{(1+0,03)^7} + \frac{X}{(1+0,03)^{12}}$$

$$\Rightarrow 12.400 = \frac{3.500}{1,0609} + \frac{4.000}{1,15927} + \frac{1.700}{1,22987} + \frac{X}{1,42576}$$

$$\Rightarrow 12.400 = 3.299,0857 + 3.450,4472 + 1.382,2599 + \frac{X}{1,42576}$$

$$\Rightarrow 12.400 = 8.131,7928 + \frac{X}{1,42576}$$

$$\Rightarrow 4.268,2072 = \frac{X}{1,42576}$$

$$\Rightarrow X = 6.085,44.$$

Logo, o valor do último pagamento é \$6.085,44.

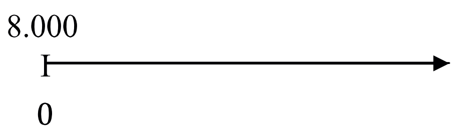
Exemplo 2.4.5: Um comerciante contraiu um empréstimo de $R\$\ 8.000,00$ a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma de $R\$\ 5808,00$ após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira.

a) Calcule o valor da 2ª parcela do empréstimo.

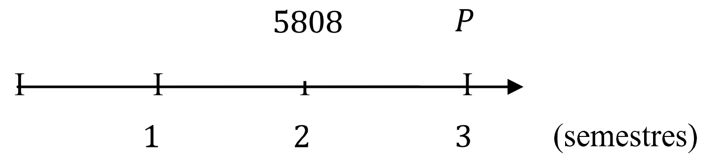
b) Caso o comerciante optasse por quitar a divida em três parcelas semestrais fixas, a primeira a partir do primeiro semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

Solução:

a) Considerando os esquemas de pagamentos dados abaixo, ambos são equivalentes, ou seja, $R\$\ 8.000,00$, na data zero, tem o mesmo valor da soma de $R\$\ 5808,00$ dois semestres após ($data\ 2$), mais um pagamento P, na data 3, ambos na data zero;



0



Igualando os valores dos pagamentos em ambos os esquemas, na data focal zero, obtemos:

$$8.000 = \frac{5.808}{(1+0{,}1)^2} + \frac{P}{(1+0{,}1)^3}$$

$$\Rightarrow 8.000 = \frac{5.808}{1{,}1^2} + \frac{P}{1{,}1^3}$$

$$\Rightarrow 8.000 = \frac{5.808}{1{,}21} + \frac{P}{1{,}331}$$

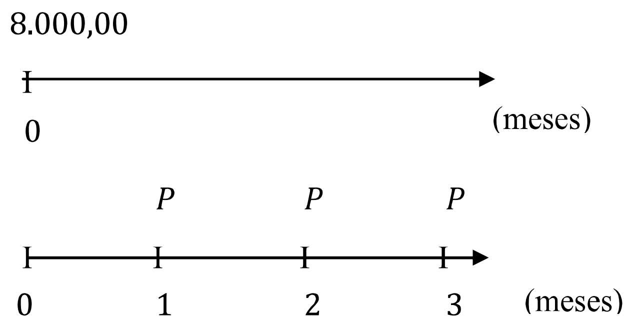
$$\Rightarrow 8.000 = 4.800 + \frac{P}{1{,}331}$$

$$\Rightarrow 3.200 = \frac{P}{1{,}331}$$

$$\Rightarrow P = 4.259{,}20.$$

Logo, o valor da 2ª parcela é $R\$\ 4.259{,}20$.

b) Considerando os esquemas equivalentes de pagamentos dados abaixo, o pagamento de $R\$\ 8.000{,}00$ na data zero tem o mesmo valor da soma das 3 parcelas semestrais P, pagas a partir primeiro semestre após a contratação, todas na data zero.



Igualando os valores dos pagamentos de ambos os esquemas, na $data\ zero$, obtemos:

$$8.000 = \frac{P}{(1+0,1)} + \frac{P}{(1+0,1)^2} + \frac{P}{(1+0,1)^3}$$

$$\Rightarrow 8.000 = \frac{P}{1,1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3}$$

$$\Rightarrow 8.000 = \frac{1,21P + 1,1P + P}{1,331} \Rightarrow 10.648 = 3,31P$$

$$\Rightarrow P = \frac{10.648}{3,31}$$

$$\Rightarrow P = 3.216,92.$$

Logo, o valor da parcela é $R\$ \ 3.216,92$.

Desse modo, com todos os exemplos vistos, podemos observar que os juros compostos diferem dos juros simples, pois são calculados sobre o montante obtido no período anterior. Somente no primeiro período é que os juros são calculados sobre o capital inicial, ou seja, os juros compostos são um regime de juros sobre juros. Assim, o crescimento é muito mais rápido do que no regime de juros simples.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa mostra a importância sobre a necessidade do conhecimento da Matemática financeira na vida cotidiana, pôde-se perceber que é de suma importância que todo cidadão tenha o mínimo de conhecimento nesse âmbito para se ter uma relação comercial com consciência.

É preciso fazer uma comparação às taxas de juros cobradas, uma vez que a maioria das pessoas não questiona os percentuais de acréscimo no momento da compra à prazo. Para calcular a taxa exata ou efetiva necessita-se do conhecimento de matemática financeira, com uso de fórmulas ou de uma calculadora financeira, incluindo corretamente os dados mínimos, como o preço à vista, se a compra é com ou sem entrada, o valor da prestação e o número de parcelas, para se obter a taxa percentual de juro mensal que está sendo cobrada.

Ao serem apresentados exemplos práticos sobre as situações de finanças corriqueiras, destaco a necessidade de está por dentro desse assunto. A população precisa está consciente quanto à realização de compras (sabendo escolher por exemplo, quando é melhor comprar a vista ou a prazo), nos financiamentos em geral, nos empréstimos, dentre outros.

Em suma, acredito que esse conhecimento matemático é de extrema importância para a tomada de decisões apropriadas nas relações de consumo e do mundo do trabalho. Cada cidadão se torna um consumidor consciente, capaz de não só controlar seus gastos, mas, também, de planejar seu futuro, sabendo administrar melhor seus recursos financeiros.

REFERÊNCIAS

[1] AITH, Márcio. Juros fantásticos. *Veja*, São Paulo, n.2023, p.144, ago.2007

[2] ALENCAR, Mastsung F.C.R. Noções básicas sobre juros e o combate à usura. *Jus Navigandi*, Teresina, ano 10, n. 1000, 28 mar. 2006. Disponível em: HTTP://jus2.uol.com.br/doutrina/texto.asp?id=8158. Acesso em: 04 out. 2018.

[3] ANDRINI, Álvaro; ZAMPIROLO, Maria José C. de V. *Novo praticando matemática*. São Paulo: Editora do Brasil, 2002. V.4. 8ª série.

[4] ASSAF NETO ALEXANDRE. Matemática Financeira e suas Aplicações. Alexandre Assaf Neto. – 12 ed. – São Paulo: Atlas, 2012.

[5] BALIELO. Desirée F. SODRÉ, Ulysses. *Ensino fundamental:* aplicações das razões e proporções. 2005. Disponível em: HTTP://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/razões-aplic.htm Acesso em: 24 set. 2018.

[6] BIGODE, Antonio José Lopes. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo: FTD, 2000.

[7] CARVALHO, Thales Mello; CYLLENO, Pedro Eziel. *Matemática comercial e financeira:* complementos de matemática. 2 ed. Rio de Janeiro: Fename,1971.

[8] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[9] GIANNETTI, Eduardo. *O valor do amanhã:* ensaio sobre a natureza dos juros. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

[10] GIARDINETO. José Roberto Boettger. Matemática *escolar e matemática da vida cotidiana.* Campinas: Autores Associados, 1999.

[11] GIOVANNI, José Ruy; PARENTE, Eduardo. *Aprendendo matemática 6ª série.* São Paulo: FTD, 1993.

[12] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática financeira.* 4 ed. São Paulo: Atlas, 2004.

[13] SANTOS, Giovana Lavínia da Cunha. *Educação financeira*: a matemática financeira sob nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005.

[14] SOUZA, Maria Helena de; SPINELLI, Walter. Matemática: livro do professor 6ª série. São Paulo: Ática,1999.