UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

PEDRO EMANUEL DE SOUZA FERNANDES

SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM NO ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

CAMPINA GRANDE - PB
2018

PEDRO EMANUEL DE SOUZA FERNANDES

SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM NO ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2018

F363s Fernandes, Pedro Emanuel Souza.

Solução de Reissner-Nordström no espaço-tempo não-comutativo [manuscrito] / Pedro Emanuel Souza Fernandes. - 2018.

30 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva , Departamento de Física - CCT."

1. Relatividade geral. 2. Equações de Einstein-Maxwell. 3. Não-Comutatividade. I. Título

21. ed. CDD 531.11

PEDRO EMANUEL DE SOUZA FERNANDES

SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM NO ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Aprovado em 13 de dezembro de 2018

Banca Examinadora

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
Examinador

Prof. ~~Dr.~~ Alex da Silva
Examinador

A todos que contribuíram.

"I'm smart enough to know that I'm dumb."

Richard Feynman

Agradecimentos

Agradeço a Aelson, um parceiro de aulas que me ensinou bastante com seu conhecimento, tornando as aulas sempre mais interessantes com suas indagações.

A minha namorada Sandy que no final do curso me ajudou bastante sempre me motivando e incentivando. Te amo!

A todos os meus amigos de Esperança e da universidade, se fosse citar todos os nomes a lista seria grande demais para caber aqui, mas muitos estão no grupo "NEGUS". Todos contribuíram para o meu desenvolvimento e me proporcionaram reuniões divertidas com diversas conversas, desde as mais filosóficas até as mais engraçadas.

Ao meu orientador Jean Spinelly por ser um professor fora de série me ensinando não só conteúdos, mas também o que é ser um professor, se tornando minha referência.

A minha mãe, que sempre incentivou aos estudos apesar de todos os "perrengues"que passamos.

A seu João da coordenação pelo bom atendimento sempre, pela paciência e tranquilidade todas as vezes que fui lá e precisei dos seus servições.

Enfim à todos que contribuíram (foram muitos!) para o meu crescimento enquanto estudante e pessoa. Muito Obrigado!

SOLUÇÃO DE REISSNER-NORDSTRÖM NO ESPAÇO-TEMPO NÃO-COMUTATIVO

Pedro Emanuel de Souza Fernandes[1]

RESUMO

Neste trabalho explanamos uma das soluções das equações acopladas de Einstein-Maxwell, a solução de Reissner-Nordström considerando um espaço-tempo não-comutativo. Tal solução derivou-se de um processo que inicia na publicação da teoria da relatividade restrita, proposta por Albert Einstein em 1905, e culmina com a teoria da relatividade geral publicada em 1915. A relatividade geral teve como intuito a unificação da relatividade restrita com a gravitação Newtoniana, onde a gravidade passa a ser vista como uma característica do espaço-tempo definida pela métrica do espaço em questão. O resultado final da relatividade geral são as equações de campo de Einstein, onde para se adequar a esta teoria, fez-se necessário modificações nas equações de Maxwell, surgindo assim as equações acopladas de Einstein-Maxwell. Vale salientar também o impacto da introdução do conceito de não-comutatividade na cosmologia. A solução de Reissner-Nordström é uma das soluções das equações de Einstein-Maxwell que visa encontrar como se dá a métrica de um corpo carregado com simetria esférica, neste caso, como falamos no inicio, trataremos a situação em que as coordenadas do respectivo espaço-tempo não comutam, ou seja, a solução de Reissner-Nordström não-comutativa.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade Geral. Equações de Einstein-Maxwell. Não-Comutatividade. Solução de Reissner-Nordström Não-Comutativa.

[1]Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

REISSNER-NORDSTRÖM SOLUTION IN NON-COMMUTATIVE SPACE-TIME

Pedro Emanuel de Souza Fernandes[1]

ABSTRACT

In this work we explore one of the Einstein-Maxwell solutions generalized equations, the Reissner-Nordström solution considering a noncommutative space-time. Such a solution is derived from a process that begin in the publication of the special relativity theory, proposed by Albert Einstein in 1905, and culminates with the general relativity theory published in 1915. General relativity had as its intent the unification between special relativity and Newtonian gravitation, where gravity is now seen as a characteristic of space-time defined by the metric of space in question. The final result of general relativity are Einstein's field equations, where to adapt to this theory, it was necessary to modify Maxwell's equations, thus arising the generalized Einstein-Maxwell equations. It is worth noting also the impact of introducing the concept of noncommutativity into cosmology. The Reissner-Nordström solution is one of the solutions of Einstein-Maxwell generalized equations that aims to find the metric of a charged body with spherical symmetry, in this case, as we said at the beginning, we will deal with the situation in which the coordinates of the respective space-time do not commute, ie the noncommutative Reissner-Nordström solution.

KEYWORDS: General Relativity. Einstein-Maxwell Equations. Non-commutativity. Non-Commutative Reissner-Nordstrom Solution.

[1]Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1 Introdução

O processo que levou à formulação da teoria da Relatividade Geral, que é considerada como a teoria relativística da gravitação, foi longo e árduo.

Uma das primeiras explicações para a relatividade foi proposta por Galileu Galilei (1564-1642) que, provavelmente inspirado em partes pela analise de Giordano Bruno, propôs um experimento imaginário, no qual duas pessoas entravam na cabine de um navio e faziam vários experimentos lá dentro, tanto com o navio parado quanto em movimento. Segundo Galileu, todos os experimentos davam exatamente o mesmo resultado, estando o navio parado ou se movendo rapidamente. Desse modo, nenhum experimento, realizado dentro da cabine do navio, seria capaz de determinar se ele estava se movendo. Consequentemente, nenhum experimento na Terra permitiria saber se ela está parada ou em movimento (MARTINS, 1986). Porém, esta abordagem não era completamente correta e a sua versão final foi formulada por Isaac Newton (1642-1727), onde, embasado no postulado de que o espaço e o tempo são absolutos, sanou os problemas da mecânica clássica vigentes na época, perpetuando sua teoria por anos.

Algum tempo depois, em meio a casos específicos que não concordavam com a relatividade clássica de Galileu-Newton, surgiu a teoria da relatividade restrita (TRR), proposta por Einstein no ano de 1905. A relatividade restrita foi inspirada por diversos trabalhos anteriores que tratavam os problemas da relatividade clássica, como por exemplo as transformações de Lorentz, e fundamenta-se em dois postulados. O primeiro postulado estabelece que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais, isto é, são covariantes por transformações de Lorentz. Já o segundo afirma que a velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer referencial (TIPLER e LLEWELLYN, 2014).

No ano de 1915 Einstein finalizou o seu trabalho sobre a teoria da relatividade geral (TRG), que viria a explicar os fenômenos que envolvem referenciais não-inerciais, generalizando, então, a relatividade restrita. Na TRG, a gravitação passa a ser vista como uma característica do espaço-tempo atribuída a modificação causada no mesmo devido a influência de uma massa-energia naquela região, ou seja, uma geometria não-euclidiana devido a curvatura causada pela presença de massa-energia (WEINBERG, 1972; LANDAU e LIFSHITZ, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

Com o intuito de compreendermos como uma determinada distribuição de massa e energia deforma o espaço-tempo, estudaremos a solução de *Reissner-Nordström não-comutativa*, a qual foi obtida por Alavi (2009). Essa é a solução da TRG que descreve os campos gravitacional e elétrico gerados por um corpo carregado esféricamente simétrico, em um espaço-tempo no qual as coordenadas não comutam. Para tanto, assumindo esse tipo de geometria, resolveremos, simultaneamente, as equações de campo da TRG e do eletromagnetismo.

O trabalho está dividido da seguinte forma: Inicialmente abordaremos a teoria da gravitação Newtoniana; depois faremos uma discussão suscinta sobre a TRG, com ênfase na apresentação das equações de campo, e mostraremos como são as equações do eletromagnetismo na presença de campo gravitacional; em seguinda, falaremos sobre o conceito de espaços-tempo não-comutativos; na sequência, deduziremos a solução de Reissner-Nordström em um espaço não-comutativo; e, por fim, apresentaremos, nas conclusões, as implicações causadas pela não-comutatividade na referida solução.

Usaremos, neste trabalho, o sistema natural de unidades no qual $G = c = \hbar = 1$. Além disso, adotaremos a assinatura $(+ - - -)$.

2 Teoria Newtoniana da Gravitação

A propriedade de que os corpos têm de caírem quando são largados de uma certa altura a partir do solo bem como o movimento dos corpos celestes eram aspectos bem conhecidos desde tempos remotos.

Durante uma parte considerável da história da humanidade, esses movimentos foram tidos como naturais, descartando-se a necessidade de um agente causador. Até que em

1687, o físico Isaac Newton (1643-1727), em sua obra *"Philosophiae naturalis principia mathematica"*, formulou uma teoria capaz de explicar a causa desses movimentos e descrevê-los com exatidão: *a lei da gravitação universal*. Formalmente, esta lei é escrita como

$$\vec{F} = -Mm\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \ , \tag{1}$$

onde $\vec{F}$ é a força que a partícula de massa M, localizada na posição $\vec{r}_0$, exerce sobre a partícula de massa m, que se encontra na posição $\vec{r}$.

Em sua essência, a lei da gravitação estabelece que a interação gravitacional entre dois corpos massivos acontece mesmo que eles estejam separados por uma dada distância. Então, para justificarmos esta propriedade, dizemos que dois corpos que possuem massa interagem devido ao campo que geram ao seu redor. Sendo assim, podemos afirmar que, quando colocamos m no ponto P, M interage com m através do campo gravitacional existente em P.

Teoricamente, o campo gravitacional é definido como (RYDER, 2009)

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -M\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \ . \tag{2}$$

Mas, como a força gravitacional é conservativa, existe uma função Φ tal que:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \ , \tag{3}$$

onde Φ é o potencial gravitacional definido por

$$\Phi = -\frac{M}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \ . \tag{4}$$

Logo, usando as equações (2) e (3), e o fato que

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right) = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \tag{5}$$

chegamos à equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi\rho\left(\vec{r}\right) \ , \tag{6}$$

onde

$$\rho(\vec{r}) = M\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{7}$$

é a densidade de massa que representa uma partícula de massa M localizada em $\vec{r}_0$. Este resultado nos leva a concluir que, na teoria newtoniana, podemos descrever a gravitação por uma única função escalar, $\Phi(\vec{r})$, a qual é solução da equação de Poisson.

Vale salientar que, caso considerássemos a interação entre uma determinada distribuição de massa e uma partícula massiva, o potencial gravitacional também seria solução da equação (6). Contudo, a densidade não seria dada pela expressão (7). Naturalmente, se quisermos calcular a força gerada por uma distribuição sobre uma partícula de massa m, deveremos resolver a equação de Poisson, calcular o campo gravitacional a partir de (3) e, finalmente, escrever a força como o produto da massa pelo campo $\vec{g}$.

Uma análise mais aprofundada mostra que a teoria newtoniana é incompatível com a TRR, isto é, que a equação de Poisson não satisfaz ao primeiro postulado da relatividade restrita. Essa incompatibilidade fez com que os físicos procurassem alguma solução para este problema. Muitos tentaram modificar ligeiramente a gravitação de Newton a fim de concilia-la com a TRR, mas sem sucesso. Foi, então, que Einstein percebeu a necessidade de um novo olhar para o problema, deixando de lado uma das teorias mais bem-sucedidas da história e dando origem a TRG (RYDER, 2009).

3 Teoria da Relatividade Geral

A relatividade geral é fundamentada em dois princípios, sendo estes, o *princípio da covariância*, que diz que as leis da física devem ser iguais em todos os referenciais, e o *princípio da equivalência* que nos diz que, localmente, o campo gravitacional equivale a um referencial não-inercial.

O primeiro estabelece que as leis da física devem ser modificadas de modo a se tornarem covariantes por transformações gerais de coordenadas. Por outro lado, o segundo nos leva a concluir que a gravitação não é uma Força, como prevista por Newton, mas sim uma curvatura no espaço-tempo ocasionada pela presença de matéria e energia, em que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ determina as características desse espaço (BERGMAN, 1975; CARMELI, 1982). Como afirma Crawford (1994):

> "A interação gravitacional tem uma natureza única entre todas as forças: todos os corpos caem ao longo da mesma trajetória espacial independentemente da sua massa e da sua constituição. Este facto sugere que a gravidade não é realmente uma força mas uma propriedade geométrica do espaço ou, no contexto da relatividade, do espaço-tempo." (CRAWFORD, 1994)

Nesta seção, apresentaremos as equações de campo da TRG e, em seguida, mostraremos como devemos modificar as equações do eletromagnetismo para que satisfaçam o princípio da covariância.

3.1 Equações de Einstein

Enquanto na teoria Newtoniana a gravitação é descrita por um potencial gravitacional Φ, que é solução da equação de Poisson (6), na teoria relativística, ou seja, no espaço-tempo de Riemann, admitimos a existência de 10 potenciais gravitacionais que são descritos pelas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Obviamente, devemos ter 10 equações tensorias satisfeitas pelas 10 componentes do tensor métrico que, no limite gravitacional em que o campo gravitacional é fraco, devem concordar com a equação (6).

A equação de Poisson é uma equação diferencial de segunda ordem. Sendo assim, as equações de campo da teoria da Relatividade Geral devem conter derivadas de segunda ordem do tensor métrico, o que mostra que um dos lados das equações deve conter o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, já que este tensor possui tais características. Por outro lado, a componente 00 do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é proporcional a densidade de massa $\rho(x)$. Levando isso em conta e buscando assegurar a conservação da energia, isto é, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, Einstein concluiu que as equações de campo da TRG são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \ , \tag{8}$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R é o escalar de Ricci, os quais são definidos por

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma} \tag{9}$$

e

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \ , \tag{10}$$

onde $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ são os símbolos de Christoffel, os quais são dados por

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \ . \tag{11}$$

As equações de campo de Einstein são por si só não-lineares. Assim, podemos concluir que o princípio da superposição não é valido na teoria, ou seja, uma soma das soluções das equações de campo de Einstein não é uma solução e o único método de procedimento é baseado no esquema de aproximação "pós-newtoniano" (RYDER, 2009).

As equações de Einstein podem ser obtidas à partir da ação integral,

$$S = \int \sqrt{-g}\,(R - 16\pi L_F)\, d^4x \ , \tag{12}$$

na qual a densidade lagrangiana do campo gravitacional equivale ao escalar de Ricci R, enquanto que L_F é a densidade lagrangiana dos ourtos campos, na ausência da gravitação. De fato, aplicando o princípio variacional, $\delta = 0$, encontramos as equações (8), com

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial(\partial_{\alpha} g^{\mu\nu})} \right] \right\} \ . \tag{13}$$

3.2 Equações de Maxwell na presença da gravitação

Os experimentos, realizados durante quase dois séculos, demonstraram que todos os fenômenos eletromagnéticos estão ligados à existência de uma quantidade extensiva denominada carga elétrica ou simplesmente carga e que eles podem ser entendidos em termos de dois campos vetoriais: o campo elétrico $\vec{E}$ e o campo magnético $\vec{B}$.

As leis que regem a geração e a propagação desses campos são as chamadas equações de Maxwell. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais que expressam a divergência e o rotacional dos campos elétrico e magnético em termos de uma densidade de carga ρ e uma densidade de corrente $\vec{J}$, além das primeiras derivadas parciais de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em relação ao tempo, conforme segue[1]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \; , \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \; , \tag{15}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \; , \tag{16}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{J} \; . \tag{17}$$

Neste conjunto de equações estão contidas informações cruciais para a descrição dos fenômenos que envolvem o eletromagnetismo. A existência dos monopolos elétricos contidos na lei de Gauss (14), a não existência de monopolos magnéticos na lei de Gauss para o magnetismo (15), a origem de campos elétricos a partir da variação de campos magnéticos na Lei de Faraday (16), como também a origem dos campos magnéticos a partir de uma corrente e/ou uma variação de um campo elétrico providos pela Lei de Ampere-Maxwell (17).

Na forma covariante de Lorentz, essas equações são dadas por:

$$\frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 4\pi J^{\mu} \tag{18}$$

e

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0 \; , \tag{19}$$

onde o tensor $f_{\mu\nu}$ é definido como

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu} \; . \tag{20}$$

[1]Essas são as equações de Maxwell no vácuo.

Aqui, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ é a derivada parcial com respeito a coordenada $x^\mu = (t, x, y, z)$, $J^\alpha = (\rho, J_x, J_y, J_z)$ é o quadrivetor densidade de corrente, $A_\alpha = (\phi, -A_x, -A_y, -A_z)$ é o quadrivetor potencial eletromagnético e $f_{\mu\nu}$ é o tensor do campo de Maxwell, que em termos dos campos elétricos e magnéticos, é dado por:

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{21}$$

A expressão (18) representa as equações com fonte, isto é, a lei de Gauss da eletricidade e a de Ampère-Maxwell. Por outro lado, (19) descreve as equações sem fonte, ou seja, a lei de Gauss do campo magnético e a de Faraday (JACKSON, 1983).

Vale salientar que podemos obter as equações de Maxwell (18) e (19) através das equações de Euler-Lagrange. Para isso, necessitamos de uma densidade lagrangiana

$$L = -\frac{1}{16\pi} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - J^\alpha A_\alpha \ , \tag{22}$$

onde os primeiro e segundo termos são, respectivamente, as densidades lagrangianas do campo eletromagnético e das cargas e correntes que geram o campo.

Diferentemente da Mecânica Newtoniana, a eletrodinâmica clássica é consistente com a relatividade restrita. Dito de outra forma, as equações de Maxwell são covariantes por transformações de Lorentz. Desse modo, podem ser aplicadas a qualquer sistema inercial (GRIFFITHS, 1999). Porém, essas equações não são covariantes por transformações gerais de coordenadas[2], porque para qualquer transformação, que não seja a de Lorentz, as derivadas parciais não se transformam como um tensor. Sendo assim, para solucionarmos esse problema, devemos substituir as derivadas parciais, contidas em tais equações, por derivadas covariantes (CARMELI, 1982). Fazendo isso, as equações de Maxwell tornam-se:

$$\nabla_\nu f^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu \tag{23}$$

[2]Conforme vimos, localmente o campo gravitacional é equivalente a um referencial não-inercial. Logo, qualquer observador que se encontre na presença de um campo gravitacional, isto é, no espaço-tempo curvo, deve ser considerado como um referencial não-inercial. Consequentemente, as equações de transformação não serão as de Lorentz.

e

$$\nabla_\alpha f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\alpha} + \nabla_\nu f_{\alpha\mu} = 0 \ , \tag{24}$$

onde

$$f_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu \ . \tag{25}$$

Admitindo que estamos numa variedade Riemaniana, podemos ver que esta expressão é idêntica a (20). Consequentemente, no espaço-tempo curvo a relação entre o tensor do campo de Maxwell, $f_{\mu\nu}$, e o quadripotencial, A_μ, não muda.

Podemos, também, obter as equações de Maxwell para o espaço-tempo curvo a partir do formalismo lagrangiano. Para tanto, devemos reescrever a densidade lagrangiana (22) por

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{-g}L = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - \sqrt{-g}J^\alpha A_\alpha \ , \tag{26}$$

onde g é a determinante da matriz que representa o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$.

Até este momento escrevemos as equações de campo de Maxwell na presença da gravitação. Isto é suficiente apenas no caso em que os efeitos do campo eletromagnético, produzido por cargas e correntes, são desprezíveis. Mas, na verdade, o campo eletromagnético também pode modificar a geometria do espaço-tempo. Neste caso, a métrica do espaço-tempo deverá ser solução das equações acopladas de Einstein-Maxwell, as quais são formadas pela equações de Einstein (8) e as de Maxwell no espaço-tempo curvo (23) e (24), em que o tensor momento-energia, $T_{\mu\nu}$, é o do campo eletromagnético.

4 Não-Comutatividade

A não-comutatividade foi sugerida incialmente pelo físico Heisenberg, tendo a geometria não-comutativa origem nos trabalhos de Weyl e Moyal, que estudavam procedimentos de quantização no espaço de fase. Mas, foi Synder o primeiro a desenvolver uma teoria consistente para espaços não-comutativos. Segundo BASTOS (2012) a ideia de Snyder era que se pudesse encontrar uma descrição coerente para a estrutura do espaço-tempo de modo que as divergências em teoria quântica de campos pudessem ser eliminadas. Na teoria quântica de campos, as partículas são interpretadas como modos de vibração de campos fundamentais que preenchem o espaço-tempo.

Podemos então definir um espaço de fase como um espaço em que trocamos as coordenadas x^μ, x^ν pelos operadores hermitianos $\hat{x}^\mu$, $\hat{x}^\nu$, assim a noção de ponto é substituída por uma célula de Planck (SZABO, 2003) $l_p = 10^{-33} cm$, sendo esta célula de Planck regiões de escalas pequenas onde os efeitos quânticos se tornam relevantes e a comutatividade perde o sentido. Logo, no caso não-comutativo mais simples, temos que a relação de comutação é dada por (DOUGLAS, 2001):

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu} \ , \tag{27}$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ é uma matriz real anti-simétrica constante com dimensão de área e μ, ν=0, 1, 2...D-1, em que D é a dimensão do espaço-tempo (FRESNEDA, 2008).

Então, se as coordenadas não comutam, elas não podem ser simultaneamente diagonalizadas e o espaço subjacente desaparece, ou seja, temos uma situação em que a variedade do espaço-tempo é substituída por um espaço de estados de Hilbert (SZABO, 2003). Logo, a relação de incerteza se faz necessária, sendo esta dada por

$$(\Delta x^\mu)^2 (\Delta x^\nu)^2 \geq \frac{1}{2i} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]^2 \ . \tag{28}$$

Substituindo o termo $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]$ por $[i\Theta^{\mu\nu}]$, temos que

$$(\Delta x^\mu)^2 (\Delta x^\nu)^2 \geq \frac{1}{2} |\Theta^{\mu\nu}|^2 \ . \tag{29}$$

Assim, em situações em que lidamos com distâncias da ordem de comprimento de Planck, o espaço-tempo perde sua estrutura de variedade continua e suave e é substituído pela estrutura não-comutativa (BASTOS, 2012), ou seja, torna-se impossível medir com precisão a posição de uma partícula e a ideia de ponto é perdida.

5 Solução das equações de Einstein-Maxwell em um espaço-tempo não-comutativo

Nesta seção, determinaremos as componentes do tensor métrico, bem como o campo elétrico gerado por uma partícula de massa M e carga Q, em um espaço-tempo não-comutativo. Para tanto, assim como na situação em que a geometria é comutativa, resolveremos as equações de Einstein-Maxwell. A diferença é que, por conta da não-comutatividade, trataremos o corpo localizado como uma distribuição de massa e carga com simetria esférica.

Devido a simetria da fonte do campo gravitacional, vamos escrever o elemento de linha como (CARROL, 2004):

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2) \ , \tag{30}$$

em que ν e λ são funções das coordenadas r e t. Logo, utilizando as coordenadas $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, vemos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são, respectivamente,

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(e^{\nu}, -e^{\lambda}, -r^2, -r^2\mathrm{sen}^2\theta\right) \tag{31}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2}\mathrm{sen}^{-2}\theta\right) \ . \tag{32}$$

Assim, as equações de Einstein tornam-se

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_0^0 \ , \tag{33}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1 \ , \tag{34}$$

$$-\frac{1}{2} e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} = 8\pi T_0{}^1 \ , \tag{35}$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\upsilon'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) = 8\pi T_2^2 \ , \tag{36}$$

onde a “linha”e o “ponto”denotam as derivadas com respeito a r e t, respectivamente. Como consequência das equações (33) e (34), obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial r}(\nu + \lambda) = 8\pi r e^{\lambda}(T_0^0 - T_1^1) \ . \tag{37}$$

Também por causa da simetria, podemos assumir que

$$A_0 = A_0\,(r,t)\,; \ \ A_1 = A_1\,(r,t)\,; \ \ A_2 = A_3 = 0 \ . \tag{38}$$

Contudo, uma análise mais detalhada das equações de Maxwell nos mostra que as componentes do quadrivetor A_μ podem sofrer uma transformação de calibre do tipo $\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, onde, no presente caso, Λ é uma função arbitrária das coordenadas r e t (CARMELI, 1982)[3]. Assim, com intuito de simplificar os nossos cálculos, vamos escolher essa função de maneira que A_1 seja nula e que A_0 seja diferente de zero. Fazendo isso, encontramos que as únicas componentes covariantes não-nulas do tensor $f_{\mu\nu}$ são

$$f_{10} = A_0' = -f_{01} \ . \tag{39}$$

Além disso, usando (32) e levando em conta que $f^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\alpha\beta}$, obtemos:

$$f^{01} = -e^{-(\nu+\lambda)}A_0' = -f^{10} \ . \tag{40}$$

Consequentemente, utilizando esses resultados, o tensor energia-momento do campo eletromagnético [Ver Apêndice A],

$$T_{\rho\sigma(e)} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - f_{\rho\alpha}f_\sigma^\alpha\right) \ , \tag{41}$$

torna-se:

$$T^\nu_{\mu(e)} = \frac{1}{8\pi}(A_0')^2 e^{-(\nu+\lambda)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{42}$$

[3]Embora altere as expressões das componentes do quadrivetor A_μ, este tipo de transformação deixa os campos elétrico e magnético invariantes.

Até aqui o caminho seguido pela solução não-comutativa é o mesmo da comutativa. Agora, introduzindo a não-comutatividade, iremos admitir que a massa e a carga não serão mais representadas por uma função delta de Dirac, mas por uma distrbuição gaussiana de largura minima $\sqrt{\Theta}$ (NICOLINI, SMAILAGIC e SPALLUCCI, 2006; ALAVI, 2009). Então:

$$\rho_M = \frac{M}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\Theta}\right) \tag{43}$$

e

$$\rho_Q = \frac{Q}{(4\pi\Theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\Theta}\right) . \tag{44}$$

Conforme vimos, as equações de Maxwell com fonte tomam a seguinte forma:

$$\nabla_\beta f^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha \tag{45}$$

ou ainda

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g} f^{\alpha\beta}) = 4\pi J^\alpha \ . \tag{46}$$

Uma vez que estamos descartando a existencia de correntes, o quadrivetor densidade de corrente é dado por $J^\alpha = (\rho_Q, 0, 0, 0)$. Então, levando isso em conta, usando o fato que

$$\sqrt{-g} = r^2 e^{(\nu+\lambda)/2} \mathrm{sen}\theta \tag{47}$$

e fazendo $\alpha = 0$ e 1 nas equações (46), obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g} f^{0\beta}) = 4\pi J^0 \implies -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2} A_0'\right] = 4\pi\rho_Q \tag{48}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta(\sqrt{-g} f^{1\beta}) = 4\pi J^1 \implies \partial_t \left[r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2} A_0'\right] = 0 \ . \tag{49}$$

A partir da equação (49) concluimos que a quantidade $r^2 \exp\left[-\left(\nu+\lambda\right)/2\right] A_0'$ é uma função apenas de r. Desse modo, podemos reescrever a equação (48) como

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2} A_0'\right] = 4\pi\rho_Q \ . \tag{50}$$

Então, multiplicando por r^2, usando (48) e integrando, encontramos

$$A_0' = -\frac{q(r)}{r^2}e^{(\nu+\lambda)/2} \ , \tag{51}$$

onde

$$q(r) = \frac{4\pi Q}{(4\pi\Theta)^{3/2}}\int_0^r u^2 e^{-u^2/4\Theta}du \implies q(r) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\Theta}\right) \ , \tag{52}$$

sendo

$$\gamma\left(\frac{3}{2},\frac{r^2}{4\Theta}\right) = \int_0^{r^2/4\Theta} x^{1/2}e^{-x}dx \tag{53}$$

a chamada função *gamma incompleta*[4].

Finalmente, substituindo (51) encontramos tensor energia-momento do campo eletromagnético,

$$T^{\nu}_{\mu(e)} = \frac{q^2(r)}{8\pi r^4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{54}$$

Por outro lado, segundo o apêndice B, o tensor energia-momento que descreve a massa é dado por

$$T^{\nu}_{\mu(M)} = \begin{pmatrix} \rho_M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_M + r\partial_r\rho_M/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_M + r\partial_r\rho_M/2 \end{pmatrix} \ . \tag{55}$$

Das equações (54) e (55), vemos que as componentes T^0_0 e T^1_1, do tensor energia-momento $T^\nu_\mu = T^\nu_{\mu(M)} + T^\nu_{\mu(e)}$, são iguais. Então, usando este resultado na equação (37), chegamos à conclusão que $\nu + \lambda = f(t)$. Contudo, podemos transformar t em uma nova função $\bar{t}$, tal que, nesse novo sistema de coordenadas, $\nu + \lambda = 0$. Além disso, como $T^1_0 = 0$, a equação (35) indica que ν não depende de t. Então, de posse desses resultados, podemos admitir, sem nenhuma perda de generalidade, que ν e λ são funções apenas de r e que $\nu = -\lambda$.

[4] De forma geral a função gamma incompleta é dada por $\gamma\left(\frac{a}{b}, x\right) = \int_0^x u^{a/b-1}e^{-u}du$.

Então, levando isso em conta, substituindo (54) e (55) em (33) e multiplicando o resultado por r^2, encontramos:

$$\frac{d}{dr}\left(re^{-\lambda}\right) = 8\pi\left[r^2\rho_M + \frac{q(r)^2}{8\pi r^2}\right] \ . \tag{56}$$

Consequentemente, utilizando as expressões (43) e (44) na equação acima e integrando entre 0 e r, obtemos o seguinte resultado

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) - \frac{4Q^2}{r\pi}\int_0^r \frac{1}{u^2}\gamma^2\left(\frac{3}{2}, \frac{u^2}{4\Theta}\right)du \tag{57}$$

Mas,

$$\int_0^r \frac{1}{u^2}\gamma^2\left(\frac{3}{2}, \frac{u^2}{4\Theta}\right)du = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{r}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\Theta}\right)\right] \ , \tag{58}$$

onde

$$\gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \int_0^x u^{-1/2}e^{-u}du \ . \tag{59}$$

Com isso,

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) - \frac{Q^2}{\pi r\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\Theta}\right) \ . \tag{60}$$

Portanto, o elemento de linha do espaço-tempo de Reissner-Nordström não-comutativo é

$$\begin{aligned} ds^2 \ &= \ \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) - \frac{Q^2}{\pi r\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\Theta}\right)\right]dt^2 \\ &\quad - \left[1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2}\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) - \frac{Q^2}{\pi r\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\Theta}\right)\right]^{-1} dr^2 \\ &\quad - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \ . \end{aligned} \tag{61}$$

No limite $r/\sqrt{\Theta} \to \infty$ retorna-se para a métrica da solução de Reissner-Nordström no espaço-tempo comutativo. Então, o elemento de linha ds^2 (61) descreve a geometria da solução de Reissner-Nordström em um espaço-tempo não-comutativo e nos dá informações uteis a cerca dos efeitos da não-comutatividade para este tipo de situação (ALAVI, 2009).

Podemos encontrar o horizonte de eventos de um buraco negro usando $g_{00}(r_H) = 0$, logo:

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right) + \frac{Q^2}{2\pi\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right) \\ &\pm\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right)\right)^2 + \frac{4Q^2}{\pi}\gamma^2\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right)\right]^{1/2} . \end{aligned} \quad (62)$$

Por conveniência, a equação (62) é invertida de forma a termos a massa M em função de r_H, sendo assim:

$$M = \frac{Q^2}{2\sqrt{2\pi\Theta}} + \frac{1}{\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r_H^2}{4\Theta}\right)}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{4}r_H + \frac{Q^2}{4\sqrt{\pi}r_H}G(r_H)\right] , \quad (63)$$

onde

$$G(r_H) = \gamma^2\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{4\Theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\Theta}}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{r^2}{2\Theta}\right) . \quad (64)$$

No limite $r_H/\sqrt{\Theta} << 1$ a massa M dada pela equação (63) leva-nos a

$$M \longrightarrow M_0 \approx 0,5\sqrt{\pi\Theta} + 0,2\frac{Q^2}{\sqrt{\pi\Theta}} . \quad (65)$$

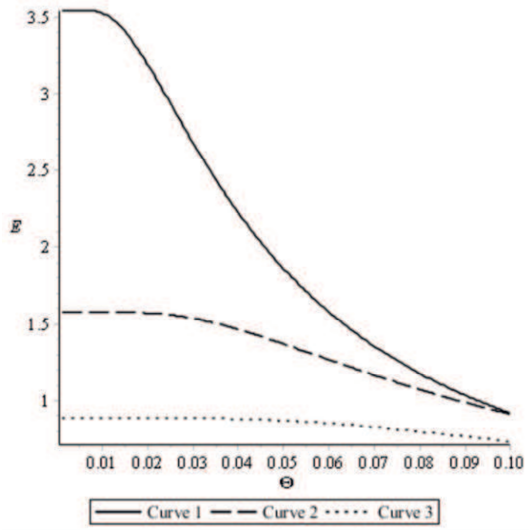
O que nos mostra que a não-comutatividade implica em um valor limite que permite a existência de um horizonte de eventos, e que, a função da carga neste caso é de aumentar este valor limite de massa, como consequência temos três situações possíveis (ALAVI, 2009):

1. Para $M > M_0$ há um buraco negro com uma métrica regular na origem;
2. Para $M = M_0$ o horizonte de eventos diminui para zero;
3. Para $M < M_0$ não há horizonte de eventos.

No espaço-tempo plano, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial e pode ser descrito, de maneira indiferente, por $E = f^{01}$ ou $E = f_{01}$. Contudo, em geral, no espaço-tempo curvo as componentes f^{01} e f_{01} nem sempre são iguais. Dessa maneira, a relação entre o campo elétrico e o tensor do campo eletromagnético não é evidente. No entanto, no presente caso, devido a forma da métrica [Eq. (61)], as componentes f^{01} e f_{01}

são iguais e podemos interpretar uma ou outra como sendo o campo elétrico. Portanto, de acordo com as equações (39), (40) e (51), o campo elétrico é

$$E(r) = \frac{2Q}{r^2\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\Theta}\right) \ . \tag{66}$$



A figura mostra a variação do campo elétrico em função de Θ, para alguns valores de r. Como podemos observar, o efeito da não-comutatividade torna-se cada vez menos relevante à medida que nos afastamos do corpo que gera a deformação do espaço-tempo. De fato, com o crescimento da coordenada r, o comportamento de campo, na geometria não-comutativa, se aproxima daquele em que o espaço-tempo é comutativo. De certa forma, já esperávamos que isso acontecesse, pois conforme nos distanciamos da distribuição esta se aproxima de um ponto.

6 Conclusões

Abordamos aqui uma das soluções das equações acopladas de Einstein-Maxwell em um espaço-tempo não comutativo, conhecida como Solução de Reissner-Nordström Não-comutativa. Tal solução mostra como é definida a métrica do espaço-tempo, dado uma distribuição de matéria esférica contendo massa M e carga Q, quando as coordenadas do espaço não comutam.

Primeiramente, assumimos que o problema possuía simetria esférica. Como tratava-se de um caso estático, a densidade de correntes era nula, possibilitando então escolher um gauge no qual apenas uma das componentes do quadrivetor potencial eletromagnético A_0 fosse diferente de zero. Assim, calculamos o tensor energia-momento do campo eletromagnético na presença de campo gravitacional, podendo então, resolver as equações de Einstein-Maxwell e mostrar como se dá a métrica sobre estas condições, o horizonte de eventos, e a relação massa M de um buraco negro com o horizonte de eventos.

A partir dos resultados, mostramos que a métrica depende não somente de M e Q mas também do parâmetro Θ, em que quando temos o termo $r/\sqrt{\Theta}$ indo para o infinito, a métrica retorna ao caso comum, ou seja, o caso em que o espaço é considerado comutativo. Determinamos então a equação de $r_\pm$ que descreve os dois horizontes de evento contidos na solução, podendo então, inverter a equação para que tivéssemos uma função de $M(r_\pm)$ que mostrou um valor limite de massa no qual o buraco negro pode encolher, onde a função da carga Q nessa situação é de aumentar este valor minimo de massa. Surgindo então três cenários possíveis, sendo eles, quando $M > M_0$ há um buraco negro com uma métrica regular na origem, quando $M = M_0$ o horizonte de eventos diminui para zero e quando $M < M_0$ não há horizonte de eventos.

Com relação ao campo elétrico, vimos que assim como acontece com o elemento de linha, no limite em que $r/\sqrt{\Theta} \to \infty$, a expressão do campo elétrico recai no resultado que foi obtido no caso em que a geometria é comutativa.

7 Referências

ALAVI, S. A. **Reissner-Nordstrom black hole in noncommutative spaces**. Department of Physics, Sabzevar Tarbiat Moallem university, P. O. Box 397, Sabzevar, Iran, 2009.

BASTOS, S. B. **Não-comutatividade em problemas com massa dependente da posição**. 2012. Tese (Dissertação em Física) -Universidade Federal do Ceará - Fortaleza-CE.

BERGMANN, P. G. **Introduction to the Theory of the Relativity**. New York: Dover Publicações, 1975.

CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. **Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity**. San Francisco: Adison Wesley, 2004.

CRAWFORD, P. **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Colóquio Ciência, 1994.

DOUGLAS, M.; NEKRASOV, N. **Noncommutative field theory**. Reviews of Modern Physics, out. 2001.

FERRARO, R. **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

FRESNEDA, R. **Alguns Problemas de Quantização em Teorias com Fundos Não-Abelianos e em Espaços-Tempo Não-Comutativos**. 2008. Tese (Doutorado em

Física) -Universidade de São Paulo -SP.

GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Electrodynamics**. 3° edição. Prentice Hall, 1999.

JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. 2ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

LANDAU, L,; LIFCHITZ, E. **Teoria do Campo**. São Paulo: HEMUS-Livraria Editora Ltda, 1974.

MARTINS, R. de A. **Galileo e o princípio da relatividade**. Cadernos de História e Filosofia da Ciência (9): 69-86, 1986.

NICOLINI, P.; SMAILAGIC, A; SPALLUCCI, E. **Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole**. Physics Letter B, v. 632, p. 547-551, jan. 2006.

RYDER, L. H. **Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

SZABO, R. J. **Quantum Field Theory on noncommutative spaces**. Department of Mathematics- Heroit-Watt University, jan. 2003.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. **Física moderna**. 6° edição. Rio de Janeiro. Editora LTC. 2014.

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. Massachusetts Institute of Technology. 1972.

A Tensor energia-momento do campo eletromagnético

Conforme vimos, a densidade lagrangiana do campo eletromagnético é dada pelo primeiro termo da expressão (22). Sendo assim, para determinarmos o tensor energia-momento correspondente, devemos considerar

$$L_F = -\frac{1}{16\pi} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \ . \tag{67}$$

Da equação (67), segue que

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{16\pi} f_{\alpha\beta} f_{\mu\nu}\left[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} + \sqrt{-g}\left(g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + g^{\beta\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}\right)\right] \ , \tag{68}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{16\pi}\left(f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} + 2\sqrt{-g}f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right) \ . \tag{69}$$

Logo, utilizando o fato de que

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\rho\sigma} \ , \tag{70}$$

chegamos à:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right). \tag{71}$$

Ao observamos a equação (22), percebemos que a densidade lagrangiana do campo eletromagnético não depende de derivadas do tensor métrico. Então, o segundo termo da expressão (13), a qual determina o tensor $T_{\mu\nu}$ no espaço-tempo curvo, deve ser nulo. Desse modo, substituindo (71) em (13), chegamos à conclusão de que o tensor energia-momento do campo eletromagnético na presença da gravitação é dado por:

$$T_{\rho\sigma} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right) \ . \tag{72}$$

Vale salientar que, na ausência da gravitação, a equação (72) continua sendo válida. Porém, neste caso, o tensor métrico do espaço-tempo curvo de Riemann $g_{\mu\nu}$ deverá ser substituido pelo tensor métrico do espaço-tempo plano de Minkowisk, $\eta_{\mu\nu}$ (CARMELI, 1982).

B Tensor energia-momento de uma distribuição de massa esférica

Para encontrarmos as componentes do Tensor Energia-Momento, associado a um corpo massivo esfericamente simétrico, devemos levar em conta o conservação da energia

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0 \ , \tag{73}$$

ou ainda,

$$\partial_\nu T^\nu_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} T_\alpha{}^\nu + \Gamma^\nu_{\nu\alpha} T_\mu{}^\alpha = 0 \ . \tag{74}$$

Assumindo que a métrica possui simetria esférica, vemos que:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} g^{00} \partial_1 g_{00} \qquad \text{e} \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{2} g^{22} \partial_r g_{22} \ . \tag{75}$$

Ainda devido à simetria esférica, temos que $T^2_2 = T^3_3$, onde $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$. Além disso, para preservarmos a propriedade tipo Schwarzshild ($g_{00} = -1/g_{11}$), devemos ter $T^0_0 = T^1_1 = \rho_M$, em que ρ_M é a densidade de massa.

Logo, fazendo $\mu = \nu = 1$ em (74) e usando o fato que $g_{22} = r^2 \text{sen}^2\theta$, chegamos à

$$\partial_r T^1_1 + g^{22} \partial_r g_{22} (T^1_1 - T^2_2) = 0 \ . \tag{76}$$

Daí,

$$T^2_2 = \rho_M + \frac{1}{2} r \partial_r \rho_M \ . \tag{77}$$

Finamente, temos que o tensor energia-momento é dado por:

$$T^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \rho_M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_M + r\partial_r \rho_M/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_M + r\partial_r \rho_M/2 \end{pmatrix} \ . \tag{78}$$