UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

JEAN DA SILVA SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

PATOS - PB
2018

JEAN DA SILVA SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Artigo de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias

Área de concentração: Geometria

Patos - PB
2018

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e em segundo lugar aos meus pais Genival José dos Santos e Elenilda Pereira da Silva e a minha namorada Magali Gambarra.

S231t Santos, Jean da Silva.
Teorema Fundamental das Curvas Planas. [manuscrito] / Jean da Silva Santos. - 2018.
22 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2018.

"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Geometria. 2. Curvas planas. 3. Teorema Fundamental das Curvas Planas. I. Título

21. ed. CDD 516

JEAN DA SILVA SANTOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 27 de novembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Alcides Olinto da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Quando agradecemos a todos, deixamos de enfatizar aqueles que mais importam. Masm quando citamos nomes, podemos nos esquecer de algumas pessoas. No entanto, a gratidão é sempre necessária.

Agradeço a Deus por tudo que me deu e que me fez passar até hoje, pois até mesmo as dificuladdes sei que foram colocadas para que me fortalecesse e eu visse minha capacidade.

Aos meus pais e familiares pela luta diária e incentivo constante e sempe me ensinando a ser grato a Deus, me ensinando valores, caráter, simplicidade e força de vontade.

Aos meus professores que contribuíram de forma grandiosa pela coisa mais valiosa que levamos na vida, que é o conhecimento. Prof. Me. Júlio Pereira que sempre me motivou e sempre me viu capaz, apostando suas fichas em mim e que mesmo sem ser na sua área que é educação. Ao Prof. Me. Arlandson Matheus, que foi também fundamental principalmente onde sentia mais dificuldade que foi na digitação no latex, que mesmo sem ser meu orientador tirou muito tempo seu para poder me ajudar e de forma muito generosa. E por fim, meu imenso agradecimento ao Prof. Me. Ginaldo Farias, por cada dia de esforço, dedicação e comprometimento para a realização deste trabalho e sempre também me motivando e mostrando a minha capacidade. Tirando muito do seu tempo para me dar aulas e assim me fazer ter a capacidade e o conhecimento para poder fazer e apresentar este trabalho.

De forma especial, quero agradecer a minha namorada Magali Gambarra que Deus me presenteou e me deu como uma verdadeira benção e sempre esteve e está ao meu lado mos momentos bons e também ruins e que em alguns momentos que eu pensei em fraquejar sempre esteva me levantando e me dizendo e mostrando o quanto sou capaz e o quão longe eu posso ir. Obrigado por tudo, por cada palavra, e por sempre ser minha motivação tanto para este trabalho, quanto na vida.

Por fim, que dizer que na vida as coisas não são fáceis, mas que a gente pode sempre olhar e pesar as coisas boas deixando as coisas não tão dificéis por mais que sejam e que sempre podemos e devemos dar o nosso melhor a cada dia, pois sempre podemos ser melhores do que fomos e do que somos.

*“ O coração da matemática são seus pró-
prios problemas.”*
Paul Halmos

Sumário

TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Jean da Silva Santos*

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Para tal, iremos apresentar conceitos pleliminares que fornecem a base para o referido Teorema, tais como o conceito de curva regular, parametrização por comprimento de arco e curvatura de uma curva. O estudo dessas propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas diferenciáveis é feito no sentido de encontrar qual é o invariante geométrico. O que constitui a essência do Teorema fundamental das curvas planas. Estes conceitos, além de imprescindíveis para o nosso estudo, nos convida a um primeiro contato com a geometria diferencial.

Abstract

The present work aims to study the fundamental theorem of flat curves. For this we will present plethoric concepts that provide the basis for this theorem, such as the concept of regular curve, parametrization by length of arc and curvature of a curve. The study of these geometric properties of the parameterizable flat curves is done in the sense of finding the geometric invariant. What constitutes the essence of the fundamental theorem of flat curves. These concepts, in addition to being indispensable for our study, invite us to a close contact with differential geometry.

*Aluno de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Email: jeanjesus11@hotmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

1 Introdução

Geometria Diferencial é o estudo da geometria usando o cálculo. A Geometria diferencial, originada da junção do cálculo com a geometria, nasceu, de certo modo, como uma ciência aplicada, principalmente em questões originadas da cartografia, de onde herdou parte de sua terminologia inicial. Posteriormente passou a ser de grande utilidade na astronomia e na engenharia. O estudo da geometria diferencial é focado em dois pontos: as curvas e as superfícies. Nela, muitas definições e conceitos têm como pré- requisitos cálculo integral, cálculo diferencial e geometria analítica. A geometria diferencial das curvas direciona seu estudo às curvas parametrizadas. A Geometria Diferencial das curvas tem grande importância para o desenvolvimento científico e tecnológico, tendo aplicações em várias áreas, como, por exemplo: estatatística, geologia, economia, teoria da informação, dentre outras. A Geometria Diferencial pode ser classificada em Geometria Diferencial Global e Geometria Diferencial Clássica. A primeira se detém ao estudo das propriedades das curvas e superfícies no espaço euclidiano. Nela se estudam as propriedades locais, isto é, aquelas que dependem somente do comportamento da curva ou superfície na vizinhança de um ponto. Já a segunda, é o estudo das propriedades das curvas e superfícies de maneira geral, da curva como um todo. Neste artigo, iremos estudar o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Além disso, este trabalho tem a tendência para a geometria diferencial classica, uma vez que o nosso objetivo aqui é estudar as curvas e fazer uma reparametrizada pelo comprimento de arco. Alem disso, temos como maior objetivo e foco, o estudo do Teorema fundamental das curvas planas e sua importancia em aplicações em outras área.

2 Curvas Planas

2.1 Curva Prametrizada Diferenciavel

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada diferenciável no plano é uma aplicação* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *de classe* C^∞ *definida num intervalo aberto* $I = (a, b)$ *da reta. Se* $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$*, dizemos que* t *é o parâmetro da curva* $\alpha(I) = x(t)|t)t \in I$ *é o traço da curva e o vetor* $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ *é o vetor tangente (ou vetor velocidade) à curva* α *em* $t \in I$*.*

Observação 1. *Uma aplicação* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é de classe* C^∞ *se, e só se, suas funções coordenadas* $x, y :\longrightarrow \mathbb{R}$ *são de classe* C^∞*. E que a derivada de ordem* j *de* α *é dada por* $\alpha^{(j)}(t) = (x^j(t), y^j(t))$ *para todo* $t \in I$*.*

Definição 2.2. *Dizemos que uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em t= t_0 ∈I quando α ´(t_0) ≠ 0. Nesse caso, a reta r_{t_0} que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor α ´(t_0) é chamado de reta tangente a α em t_0 e é dada por*

$$r_{t_0} = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0)|s \in \mathbb{R}$$

Um ponto singular de α é um valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha'(t) = 0$. quando α é regular em todos os pontos $t \in I$, dizemos que α é uma curva parametrizada diferenciável regular.

Para o desenvolvimento da geometria diferencial local das curvas é essencial a existência de uma reta tangente a curva em todos os pontos. Portanto, restrigimos o nosso estudo apenas ás curvas regulares, isto é, às curvas sem pontos singulares.

Exemplo 1. *Vejamos alguns exemplos de curvas.*

(a) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha = (x_0, y_0) + t(a, b),$$

com $a^2 + b^2 \neq 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois α ´(t) = (a,b) ≠ (0,0) para todo $t \in \mathbb{R}$, cujo traço é a reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e é paralela ao vetor (a, b).

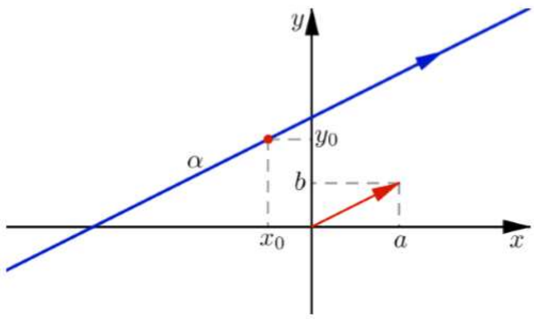

Figura 1: Traço da curva α

(b) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t) + (x_0, y_0)$$

com $r > 0$, é uma curva parametrizada diferenciável regular, pois $\alpha'(t) = (-sint, rcost)$ e portanto, $\| \alpha'(t)\| = r \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
O traço da curva α é o círculo de centro (x_0, y_0) e raio r.

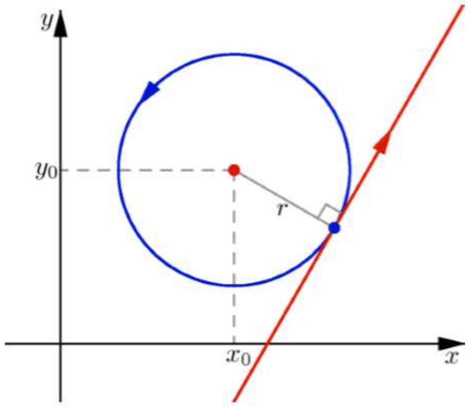

Figura 2: Traço da curva α

(c) A curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t^3, t^2)$$

é diferenciavel, mas não é regular, pois $\alpha'(t) = (3t^3, 2t^2) = (0,0)$ para todo $t = 0$, ou seja, $t = 0$ é um ponto singular.

Observando que as coordenadas de um ponto da curva satisfazem a equação $y^3 = x^2$, podemos traçar a curva.

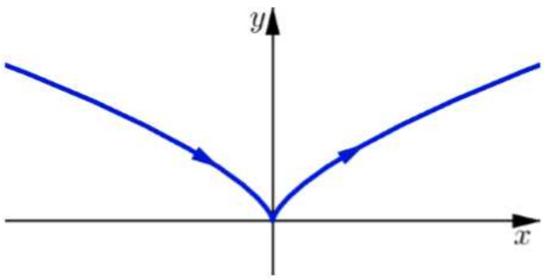

Figura 3: Traço da curva α

(d) A aplicação $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t, |t|)$$

não é uma curva parametrizada diferenciável, pois a função coordenada $t \longrightarrow |t|$ não é diferenciável na origem.

Definição 2.3. *Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é simples quando a aplicação α é injetora., isto é, $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ se $t_1 \neq t_2$, t_1, $t_2 \in I$.*

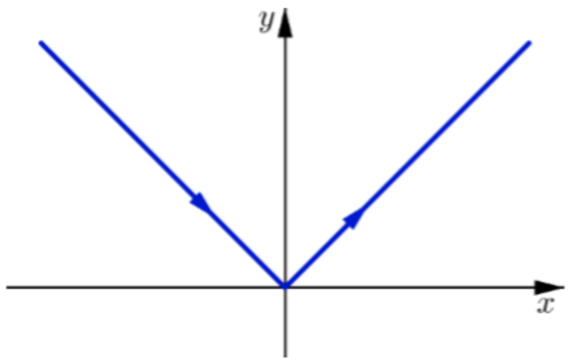

Figura 4: Traço da curva α

É fácil verificar que as curvas dos exemplos (a), (c) e (d) são simples , e que a curva (b) é periódica de período 2π.

Exemplo 2. *Continuamos com os exemplos:*

(e) A aplicação $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2)$$

é uma curva parametrizada diferenciável regula, pois α ´(t)= ($3t^2 - 4t$) $\neq$ (0, 0) para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas, α não é simples, pois:

$$\alpha(t) = \alpha(s) \iff \begin{cases} t^3 - 4t = s^3 - 4s \\ \text{e} \\ t^2 - 4 = s^2 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} t(t^2 - 4) = s(s^2 - 4) \\ \text{e} \\ t^2 - 4 = s^2 - 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 2 \,\text{e}\, s = -2 \\ \text{ou} \\ t = s \end{cases}$$

Para fazer um esboço do traço α, observe o sinal das funções coordenadas $x(t)$ = $t^3 - 4t$ e $y(t) = t^2 - 4$ nos intervalos $(-\infty, -2); (-2, 0); (0, 2)e(2, +\infty)$. Observe também que $\alpha'(-2) = (8, -4) \neq (8, 4) = \alpha'(2)$, apesar de termos $\alpha'(2) = \alpha'(-2) = \alpha'(-2) = (0, 0)$. Assim, não faz sentido falar do vetor tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$ e, sim, no vetor tangente à curva α no ponto t.

2.2 Mudança de parâmetro; comprimento de arco

Duas curvas diferenciáveis podem ter o mesmo traço. Por exemplo, as curvas $\alpha(t) = (t, 2t), t \in \mathbb{R}$, e $\beta(s) = (2s + 1, 4s + 2), s \in \mathbb{R}$, tem o mesmo traço, que é a reta

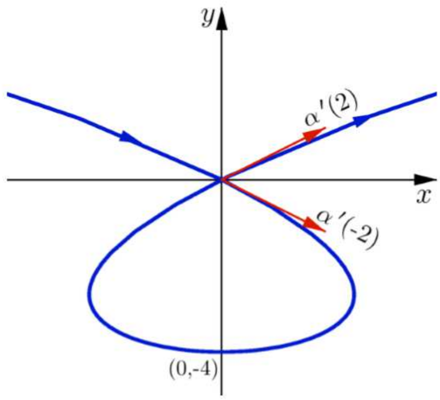

Figura 5: Traço da curva α

que passa pela origem e é paralela ao vetor $(1, 2)$, pois $\beta(s) = \alpha(2s + 1)$. Observe que o vetor tangente a β no ponto s é o dobro do vetor tangente α no ponto $(2s + 1)$, já que $\beta'(s) = 2\alpha'(2s + 1)$.
O mesmo acontece com o os pares de curvas:

(i) $\alpha_1 = (2\cos t, 2 \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ e β_1 (s) $= 2\cos \frac{s}{2}, 2\text{sen } \frac{s}{2}$, $s \in \mathbb{R}$, pois $\beta_1(2s) = \alpha_1(s)$. Neste exemplo, também temos $\alpha_1' = 2\beta'(2s), s \in \mathbb{R}$.

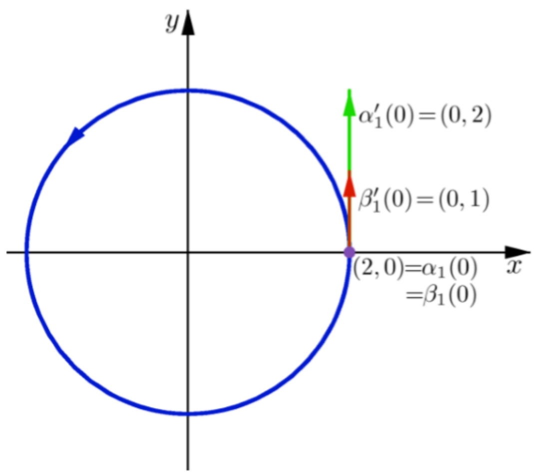

Figura 6: Os traços das curvas α_1 e β_1 coincidem , mas os vetores tangentes não

(ii) $\alpha_2 = (\cos t, \text{sen } t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $\beta_2 = (\sin s, \cos s)$ $s \in \mathbb{R}$, pois $\alpha_2(t) = \beta_2$ $(-t + \frac{\pi}{2})$. Neste exemplo, α_2´(t) $= \beta_2$´ $(-t + \frac{\pi}{2})$

Na realidade, dada uma curva parametrizada diferenciável regular, podemos obter várias curvas paramétricas diferenciáveis regulares que têm o mesmo traço que α, da seguinte maneira.

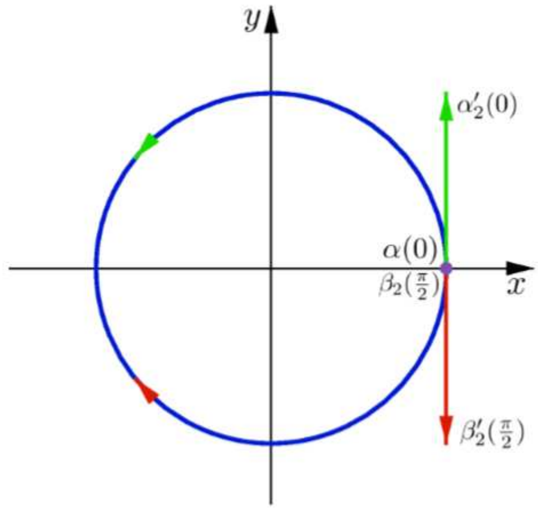

Figura 7: Os traços das curvas α_1 e β_1 coincidem , mas os vetores tangentes e o sentido do percusso não

Proposition 1. *Sejam I e J intervalos aberto de da reta $\alpha :\longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável regular e h:J $\longrightarrow$ I uma função diferenciável C^∞ tal que h(J) = I e h´(s) $\in$ 0 para todo $s \in J$. Então a aplicação $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular que têm o mesmo traço de α.*

Prova. Como α e h são de classes C^∞, temos que $\alpha \circ$ h é de classe C^∞ com $(\alpha \circ h)'(s) = \alpha'(h(s)), h(s) \neq 0$, pois $h'(s) \neq 0$ e $\alpha'(h(s)) \neq 0$ para todo $s \in I$.

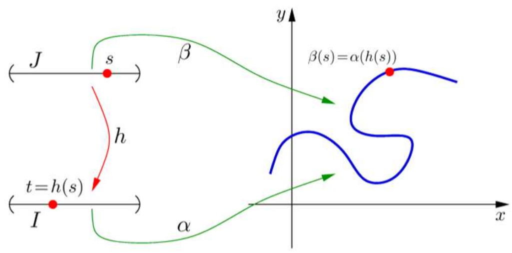

Figura 8: Os traços das curvas α e $\beta = \alpha \circ h$ coincidem

Além disso, traço $\alpha \circ h) = (\alpha \circ h)(J) = (\alpha(h(J)) = \alpha(I) =$ traço α
A curva $\beta = \alpha \circ h$ é chamada reparametrização de α por h, e a função h é dita mudança de parâmetro.

Observação 2.1. *A mudança de parâmetro $h : J \longrightarrow I$ é um difeomorfismo de classe C^∞.*

Definição 2.4. *A orientação de uma curva plana α é o sentido de percurso do traço de α.*

Seja $\beta = \alpha \circ h$ uma reparametrização da curva α. Então, β e α têm a mesma orientação se $h'(s)$ 0 para todo $sinJ$; e α têm orientações opostas se $h'(s) = 0$ para todo $s \in J$.

Exemplo 3. *Seja a curva diferenciável regular $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (r\cos t + a, r\sin t + b)$, com $r > 0$, e o difeomorfismo de classe $C^\infty h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por $h(s) = \frac{s}{r}$. Então $\beta = \alpha \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \beta(s) = (r\cos\frac{s}{r} + a, r\sin\frac{s}{r} + b)$, é uma reparametrização de α. Além disso $|\beta'(s)| = 1$ para todo $s \in \mathbb{R}$*

Exemplo 4. *A curva diferenciável $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (-2s + 1, -4s + 2)$, é uma parametrização da curva $\alpha : \mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, 2t)$, que têm orientação oposta, pois a mudança de parâmetro $h : \mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}$, $h(s) = -2s + 1$, é uma função decrescente (Fig.9)*

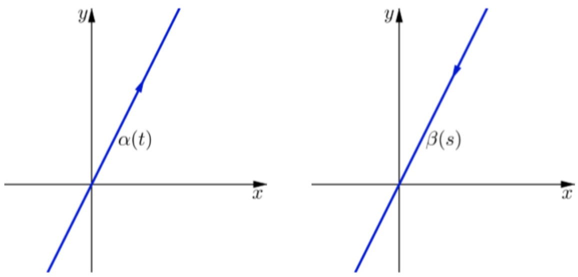

Figura 9: Os traços das curvas α_1 e $\beta_1 = \alpha \circ h$ coincidem, mas o sentido do percusso não

Definição 2.5. *Se $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável regular, a função $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(s)||ds$$

é chamada função comprimento de arco da curva a partir de t_0, onde $t_0 \in I$.

Observação 2.2. *A função comprimento de arco $s : I \longrightarrow J$ onde J=s(I), é um difeomoprfismo de classe c^∞ sobre o intervalo aberto J. De fato, $s'(t) = ||\alpha'(t)|| = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} > 0$ e as funções $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty), f(x) = \sqrt{x}$, $H : I \longrightarrow \mathbb{R}, H(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2$, onde $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, são de classe c^∞, temos que s' é de classe c^∞ e , portanto, s é de classe c^∞. Logo, pela observação 2.1, $s : I \longrightarrow J$ é um difeomorfismo de classe c^∞ sobre o intervalo aberto $J = s(I)$.*

Definição 2.6. *Dizemos que uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada no comprimento de arco se*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(s)||ds = t_1 - t_0$$

para todo $t_0, t_1 \in \leq t_1$. Isto é, o comprimento do arcop da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Proposição 2.1. *Uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está parametrizxada pelo comprimenbto de arco se , e somente se, $||\alpha'|| = 1$ para todo $t \in I$.*

Prova:
($\Leftarrow$) Se $||\alpha'(t)|| = 1$ para todo $t \in I$, então $s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(s)||ds = t_1 - t_0$ para quaisquer $t_0, t_1 \in t_1, t_0 \leq t_1$.
($\Rightarrow$) Seja $t_0 \in I$ fixo e considerarmos a função $s :\longrightarrow \mathbb{R}$ comprimento de arco a partir de t_0. Então,

$$\int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\xi)||d\xi = t - t_0, set \geq t_0,$$

e

$$s(t) \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\xi)||d\xi = -\int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\xi)||d\xi = -(t_0 - t) = t - t_0, set_0 \geq t,$$

ou seja, $s(t) = t - t_0$ para todo $t \in I$. Logo, $s'(t) = ||\alpha'(t)|| = 1$ para todo $t \in I$.

Demonstração. □

Exemplo 5. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a curva regular dada por $\alpha(s) = (rcos\frac{r}{s} + a, rsin\frac{r}{s} + b)$, cujo o traço é o circulo de centro (a, b) e raio $r > 0$. Então, α está árametrizado pelo comprimento de arcos, pois $||\alpha'(s)|| = 1$ já que $\alpha'(s) = (-sin\frac{s}{r}, cos\frac{s}{r})$.*

Proposition 2. *Toda curva regular $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ admite uma reparametrização β, tal que β está parametrizada pelo comprimento de arco.*

Prova:
Seja $t_0 \in I$ fixo e consideremos $s : I \longrightarrow J, s(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(\xi)||d\xi$, a função comprimento de arco a partir de t_0. pela observação 2.4, $h : s^{-1} : J \longrightarrow I$ é uma função de classe C^∞ com $h'(u) = \frac{1}{s'(h(u))} = \frac{1}{||\alpha'(h(u))||}$, para todo $u \in J$.
Logo $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$,$\beta(u) = \alpha \circ h(u)$, é uma reparametrização de α tal que

$$\beta'(u) = \alpha'(u).h'(u) = \alpha'(h(u)).\frac{1}{||s'(h(u))||}.$$

Então, $||\beta'(u)|| = 1$ para todo $u \in J$. Assim, pela proposição 3, β é uma reparametrizaçãoα que está parametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração. □

Exemplo 6. *Seja* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a curva regular dada por* $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$*, onde* $a^2 + b^2 \neq 0$*, e seja* $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função comprimento de arco de* α *a partir de* $t_0 = 0$*. Então,*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\xi = \sqrt{a^2 + b^2} t,$$

e, portanto, $h = s^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dada por* $h(u) = \frac{u}{\sqrt{a^2+b^2}}$*. Logo,* $\beta = \alpha \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $\beta(u) = (a.\frac{u}{\sqrt{a^2+b^2}} + c, b\frac{u}{\sqrt{a^2+b^2}} + d)$ *é uma reparametrização de* α *pelo comprimento de arco.*

Demonstração. □

Exemplo 7. *A curva regular* $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (e^t, cost, e^t sint)$*, é chamada espiral logaritmica. como*

$$\alpha'(t) = (e^t cost - e^t sent, e^t sint - e^t cost),$$

temos que $||\alpha'(t)|| = \sqrt{2}e^t$*. Logo, a função comprimento de arco a partir de* $t_0 = 0$ *é dada por*

$$\int_0^t \sqrt{2} e^{\xi} d\xi = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

Assim, $s(\mathbb{R}) = (-\sqrt{2}, \infty)$ *e* $h = s^{-1} : (-\sqrt{2}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dada por* $h(u) = log(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1.$
Portanto, $\beta = \alpha \circ h : (-\sqrt{2}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$*,*
$\beta(u) = \alpha(h(u)) = ((\frac{u}{\sqrt{2}} + 1)cos(log(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1)), (\frac{u}{\sqrt{2}} + 1)sen(log(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1)))$*, é uma reparametrização de* α *pelo comprimento de arco.*

Demonstração. □

2.3 Fórmulas de Frenet

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(s) = (x(s), y(s))$, uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $||\alpha'(s)|| = 1$ para todo $s \in I$.
Para cada $s \in I$, o vetor $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e será designado por $t(s)$, isto é, $t(s) = (x'(s), y'(s))$.
Seja *n(s)* o vetor unitário do $\mathbb{R}^2$ ortogonal a $t(s)$ tal que a base ortoginsl $t(s), n(s)$ tem a mesma orientação da base canônica e_1, e_2. Então, $n(s) = (-y'(s), x'(s))$, pois $||n(s)|| = 1$, $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$ e

$$det \begin{bmatrix} x'(s) & -y'(s) \\ y'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

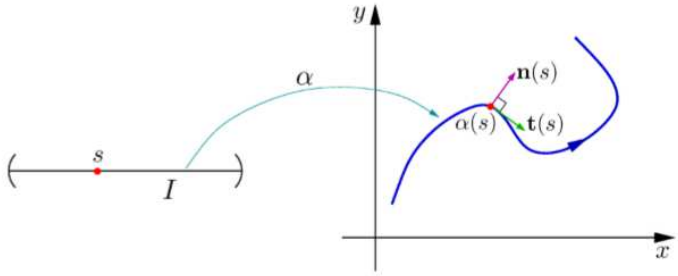

Figura 10: Vetores normal e tangente a curva α em s

A base ordenada $t(s)$ é chamada de referencial de Frenet da curva α em s. E a reta $r_n(s_0)$ normal a α em s_0 é a reta que passa pelo ponto $\alpha(s_0)$ e é paralela ao vetor normal $n(s_0)$, ou seja

$$r_n(s_0) = \alpha(s_0) + \lambda n(s_0) | \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como, para cada $s \in I, t(s), n(s)$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, temos que $t'(s) = \alpha''(s)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $t(s)$ e $n(s)$.
Mas como $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ para todo $s \in I$, temos que $\langle t'(s), t'(s) \rangle = 0$, ou seja, $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$.
Logo, $t'(s)$ é paralelo a $n(s)$, isto é, existe uma função $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$t'(s) = k(s)n(s),$$

para todo $s \in I$, onde

$$k(s) = \langle t'(s), n'(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$$

é chamada *curvatura* de α em $s \in I$.
De modo análogo, como $n(s)$ é um vetor unitário, segue-se que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$ e é, portanto, paralelo a $t(s)$. Além disso, como $\langle n(s), t(s) \rangle = 0$, temos que

$$\langle n'(s), t(s) \rangle = -\langle n(s), t'(s) \rangle = -\langle n(s), k(s)n(s) \rangle = -k(s).$$

Logo,

$$n'(s) = -k(s)t(s)$$

Resumindo: Se $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva parametrizada regular pelo comprimento de arco s, então o referencial de Frenet $t(s), n(s)$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s), \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

que são as fórmulas de Frenet de uma curva plana.

Exemplo 8. *Seja* $\alpha(s) = (as + x_0, bs + y_0), s \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$ *uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco cujo o traço é a reta que passa pelo ponto* x_0, y_0 *e é paralela ao vetor unitário* (a, b)*. Então, a curvatura de* α *é identicamente nula.*
De fato, como $t(s) = \alpha'(s) = (a, b)$ *é constante, seque-se que* $t'(s) = 0$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$*.*

Exemplo 9. *Consideremos a curva regular parametrizada pelo comprimento de arco*

$$\alpha(s) = (rcos\frac{s}{r} + a, rsin\frac{s}{r} + b),$$

onde $s \in \mathbb{R}er > 0$*, cujo traço é o círculo de centro* (a, b) *e raio* r*.Então,*

$$t(s) = \alpha'(s) = (-sin\frac{s}{r}, cos\frac{s}{r})en(s) = (-cos\frac{s}{r}, -sin\frac{s}{r}).$$

Logo, $k(s) = \langle t'(s), n(s)\rangle = \frac{1}{r} > 0$*, pois* $t'(s) = \frac{1}{r}(-cos\frac{s}{r}, -sin\frac{s}{r})$*.*
ou seja, α *tem uma curvatura constante igual a* $\frac{1}{r}$

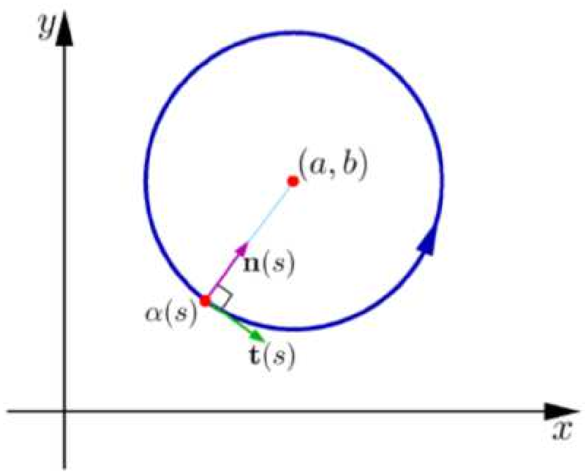

Figura 11: Vetores normal e tangente ao círculo α em s.

Definição 2.7. *Seja* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. definimos a curvaturacomsinal de* α *no ponto* $\alpha(s)$ *por*

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

Em outra palavras,

$$k(s) = \langle T'(s) n(s) \rangle :$$

Note que

$$|k(s)| = ||T'(s)||.$$

A curvatura com sinal dá mais informções geométricas para curvas planas em $\mathbb{R}^2$ do que obteríamos se usassemos a outra definição: quando a curvatura é positiva, a curva está se curvando para a esquerda (vetor T' no mesmo sentido que N), enquanto que quando a curvatura é negativa, a curva está se curvando para a direita (vetor T' no sentido oposto a N; veja o exemplo abaixo para ilustração concreta n caso do círculo).

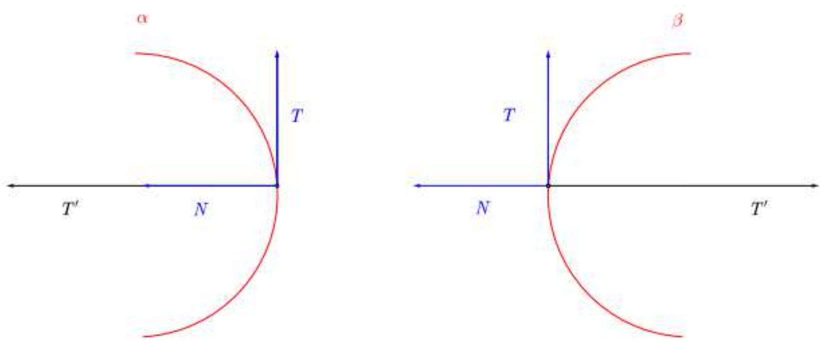

Figura 12: Curvatura positiva e curvatura negativa.

Proposição 2.2. *Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Se*

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)).$$

então

$$|k(s)| = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2}$$

e

$$k(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s).$$

Prova:

A primeira fórmula segue de

$$|k| = ||T'|| = ||(x'', y'')||$$

e a segunda fórmula de

$$k = \langle (x'', y''), (-y', x') \rangle = -x''y' + y''x'.$$

Proposição 2.3. *Seja $\theta(s)$ o ângulo que um dado vetor fixo tem que rodar no sentido positivo para coicncidir com o vetor tangente $T(s)$. Então $\alpha(s) = \theta'(s)$.*

Demonstração. seja u tal vetor fixo (que podemos assumir unitário) e seja vo vetor unitário obtido por rotação, no sentido positivo, de $\frac{\pi}{2}$ radianos. Então,

$$T(s) = cos\theta(s)u + sin\theta(s)v$$

$$T'(s) = (-sin\theta(s)u + cos\theta(s)v)\theta'(s).$$

Portanto $(T'(s)|u) = -sin\theta(s)\theta'(s)$. Por outro lado, pela definição de α, temos $(T'(s)|u) = \alpha(s)(N_s)|u)$, e como o ângulo entre N_s e u é igual a $\frac{\pi}{2} + \theta(s), (T'(s)|u) = \alpha(s)cos(\theta(s) + \frac{\pi}{2}) = -\alpha(s)sin\theta(s)$. Em conclusão,$\alpha(s) = \theta'(s)$. □

3 Teorema fundamental das curvas planas

Teorema 3.1. *Teorema fundamental das curvas planas*
Seja $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja curvatura com sinal, coincide com k.
E mais, se $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é outra curva parametrizada por comprimento de arco nessas condições, existe um movimento rígido $T \circ R$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\alpha(s) = T \circ R(\alpha(s))$$

Demonstração. A ideia para obtermos a curva α que prove a primeira parte do Teorema é evidente da proposição anterior. Fixemos $s_0 \in I$ e definamos, para cada $s \in I$,

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du,$$

$$\alpha(s) = (\int_{s_0}^{s} cos\theta(t)dt, \int_{s_0}^{s} sin\theta(t)dt)$$

Essa curva α satisfaz as condições exigidas: está parametrizada por comprimento de arco pois$\alpha'(s) = (cos\theta(s), sin\theta(s))$; como este vetor faz um ângulo $\theta(s)$ com o eixo OX, pela proposição 5 a sua curvatura com sinal é igual a $'(s) = k(s)$.
Essa curva α satisfaz as condições exigidas: está parametrizada por comprimento de arco pois$\alpha'(s) = (cos\theta(s), sin\theta(s))$; como este vetor faz um ângulo $\theta(s)$ com o eixo OX, pela proposição anterior, a sua curvatura com sinal é igual a $\theta'(s) = k(s)$.

Para provar a segunda parte do Teorema, lembremos que a matriz de rotaçãono sentido anti - horário é dada por

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Assim, seja $\tilde{\theta}(s)$ o ângulo entre OX e o vetor tangente $\tilde{\alpha}(s)$ de $\tilde{\alpha}$. Então, $\tilde{\alpha}(s) = (cos\tilde{\theta}(s), sin\tilde{\theta}(s))$. consequentemente,

$$\tilde{\alpha}(s) = (\int_{s_0}^{s} cos\tilde{\theta}(t)dt, \int_{s_0}^{s} sin\tilde{\theta}(t)dt + \alpha(s_0).(*)$$

Por outro lado, pela proposição anterior, $\theta'(s) = k(s)$, pelo que

$$\tilde{\theta}(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)du + \tilde{\theta}(s_0) = \theta(s) + \tilde{\theta}(s_0).$$

inserindo isto em $(*)$ obtemos,

$$\tilde{\alpha}(s) = (\int_{s_0}^{s} cos(\theta(t) + \tilde{\theta}_0)dt, \int_{s_0}^{s} sin(\theta(t) + \tilde{\theta}_0)dt) + \tilde{\alpha}(s_0)$$

$$\tau_{\tilde{\alpha}(s_0)} = (\int_{s_0}^{s} cos(\theta(t) + \tilde{\theta}_0)dt, \int_{s_0}^{s} sin(\theta(t) + \tilde{\theta}_0)dt)$$

relembrando,

$$cos\theta(t) + \tilde{\theta}(t_0) = cos\theta(t)cos\tilde{\theta}(t_0) - sen\theta(t)sen\tilde{\theta}(t_0)$$

$$sin\theta(t) + \tilde{\theta}(t_0) = sin\theta(t)cos\tilde{\theta}(t_0) + sen\theta(t)cos\tilde{\theta}(t_0)$$

logo,

$$\tau_{\tilde{\alpha}(s_0)} = (cos\tilde{\theta}_0) \int_{s_0}^{s} cos(\theta(t)dt - sin\theta_0 \int_{s_0}^{s} sin\theta(t)dt,$$

$$cos\tilde{\theta}(t_0) \int_{s_0}^{s} sin\theta(t)dt - sin\tilde{\theta}(t_0) \int_{s_0}^{s} cos\tilde{\theta}(t)dt)$$

Dessa forma, concluimos que

$$\tilde{\alpha}(s) = \tau_{\tilde{\alpha}(s_0)} \circ R_{\theta_0}(\int_{s_0}^{s} cos\theta(t)dt, \int_{s_0}^{s} sin\theta(t)dt)$$

□

Exemplo 10. *Seja* $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma curva parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura é constante, igual a* $k > 0$*. Então,* $k_s = \pm k$ *para cada* $s \in I$*, mas como* k_s *é uma função suave,*$k_s = k$ *para qualquer* s *ou* $k_s = -k$ *para qualquer* s*.*

Vejamos o que acontece .
Pelo Teorema fundamental das curvas planas, existe uma curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *cuja curvatura com sinal é constante, igua a* k, *e* $\tilde{\alpha}$ *é o resultado da aplicação de um movimento rígido a* α. *Determinemos tal curva* α:
Como $\theta_0 = \int_0^s kdu = ks$,

$$\alpha(s) = (\int_0^s cos(kt)dt, \int_0^s sin(kt)dt) = (\frac{sin(ks)}{k}, -\frac{cos(ks)}{k} + \frac{1}{k}).$$

Fazendo $R = \frac{s}{r}$ *vem*

$$(Rsin\frac{s}{r}, -Rcos\frac{s}{r} + R) = \tau_a(Rsin\frac{s}{r}, -Rcos\frac{s}{r}),$$

Onde $a = (0, R)$ *Já vimos que*

$$(Rsin\frac{s}{r}, -Rcos\frac{s}{r}),$$

é uma parametrização por comprimento de arco da circunferência de raio R *e centro* $(0, 0)$, *pelo que o traço de* α *é a circunferência de raio* R *e centro* $(0, R)$. *Em conclusão, como rotações e translações transformam circunferências em circunferências, o traço de* α *é também uma circunferência.*

4 Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho propiciou uma ocasião para aprofundarmos nossa reflexão a respeito do Teorema Fundamental das Curvas Planas. No âmbito da Geometria, o estudo do Teorema Fundamental das Curvas planas é de suma importância pois se procura formalizar a esência do Teorema de que o único invariante geométrico de uma curva plana, a menos de sua posição no plano sob movimentos rígidos, é a sua curvatura. Os conceitos preliminares estudados para a formulação e prova do teorema nos fornece um intinerário que permite o aprofundamento em conceitos que constituem a Geometria Diferêncial.

Referências

[1] LIMA, E.L. - *Curso de Análise*, volume 1. Projeto Euclides, 1979.

[2] DOCARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superficies.* 4ª ed. Textos universitários. SBM, 2010

[3] BIEZUNER, Rodney Josué. *Geometria diferencial.* 13-13 de oct de 2016. 157 p. Notas de aula.

[4] CUNHA, Marcelo Terra. *Curvas no plano e no espaço.* 22-22 de sep de 2014. 6 p. Notas de aula.

[5] MONTIEL, S. E. Ros, A. - *Curvas y Superficies*, Proyecto Sur de Edciones, S. L., 1997

[6] TENENBLAT, K. *Introdução a Geometria Diferencia*l. 2ª Ed. São Paulo. Editora Blucheer, 2008.