UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALANY VANELLI BARBOSA DE ALMEIDA

LOGARITMOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE
2018

ALANY VANELLI BARBOSA DE ALMEIDA

LOGARITMOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento á exigência para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientador: Prof[a]. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano.

CAMPINA GRANDE

2018

A447l Almeida, Alany Vanelli Barbosa de.
Logaritmos e algumas aplicações [manuscrito] / Alany Vanelli Barbosa de Almeida. - 2018.
45 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Matemática. 2. Logaritmo. 3. Logaritmo - Aplicações. I. Título

21. ed. CDD 513.22

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

ALANY VANELLI BARBOSA DE ALMEIDA

LOGARITMOS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento á exigência para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovada em: 04/12/2018.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profª. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano. (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico aos meus Avôs, Cleonice Barbosa de Vasconcelos e Manuel Vital de Vasconcelos (em memória), com todo meu amor e gratidão por tudo que fizeram por mim.

AGRADECIMENTOS

A Deus que me iluminou ao longo desse curso e esteve sempre ao meu lado me encorajando para que pudesse superar todos os obstáculos possíveis.

Aos meus pais, Valéria Barbosa e Antônio César, que me deram através de Deus a vida, me ensinaram o caminho da honestidade e força pra lutar, em especial a minha mãe a qual sempre estava ao meu lado incentivando para que eu pudesse alcançar esse objetivo.

Agradeço também a todos da minha família os quais são minha base e sempre acreditou em mim, com um carinho maior a minha tia Maria do Socorro, a qual sempre estava do meu lado pra tudo que precisasse.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial as minhas parceiras de cursos, Luanna Jessika e Juliana Lira as quais sempre estavam do meu lado durante todo o curso, com vocês todos os momentos de tensão e cansaço físico e mental se tornaram suportáveis e muitas vezes até divertidos.

A Universidade Estadual da Paraíba por ter me dado conhecimento técnico, politico e intelectual, através de todos os professores do curso de Licenciatura de Matemática, pois, cada um com o seu jeito foi capaz de transmitir lições que vão além do conteúdo.

Por fim, a minha querida orientadora Prof.ª Katia Suzana Medeiros Graciano, que foi um presente que Deus me deu nessa caminhada, agradeço por todo apoio, paciência e compreensão, pela atenção e fornecimento de material para que este trabalho fosse realizado com êxito.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem histórica do surgimento de uma poderosa ferramenta matemática, que durante séculos contribuiu para simplificar os cálculos aritméticos: os logaritmos. Considerado um assunto desafiador, apresenta grande dificuldade de compreensão e na resolução dos problemas propostos. Com intuito de facilitar o ensino desse conteúdo foi elaborada uma sequência didática com enfoque na criação dos logaritmos, destacando ainda algumas mudanças que ocorreram ao longo da sua evolução. Posteriormente, são apresentados ao leitor os conceitos básicos dos logaritmos. Com uma abordagem diferenciada através da contextualização, mostrou-se que os logaritmos são aplicáveis em inúmeras situações do cotidiano, motivando o alunado aos estudos.

Palavras-Chave: logaritmos, história, aplicações.

ABSTRACT

The present work aims at a historical approach to the emergence of a powerful mathematical tool, which for centuries contributed to simplify arithmetic calculations: logarithms. Considered a challenging subject, presenting great difficulty in understanding and solving the problems proposed. In order to facilitate the teaching of this content, a didactic sequence was developed with a focus on the creation of logarithms, highlighting some changes that have occurred throughout its evolution. Subsequently, the basic concepts of logarithms are presented to the reader. With a differentiated approach through contextualization, it was shown that the logarithms are applicable in many everyday situations, motivating students to study.

Keywords: logarithms, history, applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A história da matemática se iniciou no mesmo tempo em que o homem buscou resolver os problemas que enfrentava em seu cotidiano. A humanidade desenvolveu a matemática e é hoje uma das áreas do conhecimento mais relevante, cujas aplicações nas mais diversas áreas das ciências são cada vez mais significativas para a evolução dessas, de uma maneira geral. Conhecer a história da matemática é avançar junto com o ser humano.

No decorrer da evolução humana, devido ás necessidades, o homem procurou desenvolver ferramentas matemáticas que propiciassem novos conhecimentos ou até que saciassem tais necessidades. Nos séculos XV e XVI com a necessidade de simplificar os cálculos aritméticos, que naquela época era muito utilizado na astronomia e na navegação, surge uma poderosa ferramenta matemática que contribuiu durante aproximadamente três séculos e meio. Surpreendendo a todos quanto as suas inúmeras aplicações, o logaritmo surge com rapidez e precisão, transformando operações complicadas em algo mais simples.

Diversos matemáticos contribuíram na construção dos logaritmos que conhecemos hoje, porém um ficou eternizado por suas aplicações, John Napier (1550 – 1617) que em seu desenvolvimento abrangeu o método de tabelas e regras.

Impressionado ao conhecer as tabelas de Napier, Henry Briggs (1591 – 1631) estabeleceu algumas modificações e com o seu apoio os logaritmos foram recebido com entusiasmo pelo os cientistas da Europa e China.

Desta forma, o presente trabalho aborda o estudo de logaritmos.

Dando valorização ao contexto histórico dos logaritmos com a motivação de abranger explicitamente a história da invenção, o processo histórico e atual das propriedades dos logaritmos e da função logarítmica, com o objetivo de mostrar que com o avanço tecnológico os logaritmos perderam sua função inicial, mas não perderam posição de destaque no ensino da matemática e nas aplicações nas ciências modernas. É apresentando como ferramenta aplicável em inúmeras áreas do conhecimento.

Assim, iniciamos este trabalho fazendo uma breve descrição história sobre os logaritmos, do aparecimento até os dias atuais, no capítulo 2. No capítulo 3, são introduzidas as definições e propriedades explicitando suas fórmulas, esclarecendo através de demonstrações cada propriedade. E a seguir no capítulo 4, são apresentadas inúmeras aplicações do logaritmo e suas propriedades que modelam fenômenos físicos, químicos, biológicos, geográficos, econômicos e sociais. Que comprovam ter apreciável valor intrínseco. Tendo em vista, uma proposta central de possibilitar uma interação entre a teoria e a prática.

2. Contexto Histórico

Neste capítulo falaremos sobre a história dos logaritmos e alguns matemáticos que fizeram parte dessa história, tendo como referências os livros de Boyer e Eves, todos baseados na história da matemática.

2.1 História dos Logaritmos

Quatro notáveis invenções foram concebidas para que as demandas dos cálculos numéricos importantes se tornassem cada vez mais rápidos e precisos, as quais podemos citar: a notação indo-arábica, as frações decimais, os logaritmos e os modernos computadores. E vamos considerar o terceiro desses grandes dispositivos poupadores de trabalho, os logaritmos.

Com uma evolução histórica bastante interessante, os logaritmos foram criados pra facilitar os cálculos, de astrônomos, comerciantes, navegadores, entre outros profissionais. A dificuldade em cálculos aritméticos sempre existiu, principalmente em multiplicação e divisão, por isso alguns matemáticos dedicaram parte do seu tempo para encontrar alguns métodos práticos que facilitassem a vida de todos.

Nos séculos XV e XVI, considerado os séculos das grandes navegações, havia uma necessidade premente de encontrar maneiras de facilitar os cálculos matemáticos, realizados pelos astrônomos e cartógrafos para a realização dessas navegações com segurança. Havia também a necessidade de otimizar os cálculos relativos a juros para melhoria das atividades bancárias.

Com o surgimento dos logaritmos, já no século XVIII, Pierre Simon Laplace (1749-1827) o grande astrônomo francês disse: “a descoberta dos logaritmos tinha multiplicado a vida dos astrônomos por dois.” A ideia desde o principio era substituir a multiplicação e divisão por adição e subtração, ideia essa que já existia desde o século II, as tábuas trigonométricas que foram apresentadas por Claudio Ptolomeu, que já permitia realizar produtos através de somas. Dois matemáticos, o alemão Michael Stifel (1486-1567) e o francês Nicolas Chuquet (1450-1500), já tinham chamado a atenção de que se você tiver uma progressão geométrica, como mostra na tabela a seguir, para encontrar, por exemplo, 16x64?

Tabela 1– Progressão aritmética e progressão geométrica

1	2	4	8	16	32	64	...	Progressão Geométrica
	1	2	3	4	5	6	...	Progressão Aritmética

Fonte: Próprio autor

Basta somar os números abaixo de 16 e 64, respectivamente, isto é, 4+6=10, e o resultado de 16x64 = 2^{10}, isto é uma consequência trivial do fato que:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

e que,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

E outra maneira que também era utilizada pelos astrônomos era a de prostaférese, que permitia substituir o produto de dois senos ou produto de dois cossenos por soma de dois senos ou de dois cossenos, a prostaférese era na verdade uma consequência imediata das identidades trigonométricas que foram obtidas as seguintes relações:

I) cos(a+b)= cos a.cos b – sen a.sen b

II) cos(a-b)= cos a.cos b + sen a.sen b

Fazendo II – I, temos:

2sen a sen b= cos(a-b) – cos(a+b) , ou seja

sen a sen b= $\frac{1}{2}$[cos(a-b) – cos(a+b)].

Existiam essas duas maneiras de substituir multiplicação e divisão por adição e subtração. Mas como a progressão geométrica juntamente com a progressão aritmética, os cálculos eram desenvolvidos rapidamente, esse foi o método mais utilizado pelo os astrônomos e que deixou a prostaférese totalmente abandonada.

As descobertas cientificas quase sempre são feitas simultaneamente, por duas ou mais pessoas trabalhando, independentemente. Tal descoberta é fruto da necessidade humana para solucionar os problemas. Diversos matemáticos contribuíram na construção dos logaritmos como conhecemos hoje, porém, um ficou eternizado por suas publicações.

Falaremos agora sobre dois matemáticos que contribuíram na construção dos logaritmos.

2.2 John Napier (1550-1617)

John Napier foi um nobre teólogo escocês, nasceu no castelo de Merchiston, perto de Edimburgo. Viveu a maior parte de sua vida na majestosa propriedade da família. Protestante praticante gastou grande parte da sua energia em controvérsias religiosas do seu tempo.

Aos 13 anos, ingressou na Universidade de Saint Andrews e interessou-se por teologia e aritmética, porem acaba abandonando a universidade e vai estudar na Europa, depois de longos anos adquirindo conhecimentos da literatura e matemática, Napier acaba voltando para Escócia. Era considerado violentamente um anticatólico, no ano de 1593 publicou uma obra contra a igreja católica, e escreveu também sobre várias maquinas de guerras infernais, mais para se descontrair de suas polêmicas politicas e religiosas, John Napier não era matemático profissional, mas tinha a matemática como lazer. Seu interesse era por alguns aspectos da computação e trigonometria, especialmente estudos relacionados à simplificação de cálculos. Dispondo de alguns destaques que resultaram em algumas obras que entraram para a história da matemática. Seu estudo prolongou por 20 anos, tendo sido publicado em 1614 sob título “Mirifici logarithmorum canonis descriptio” (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

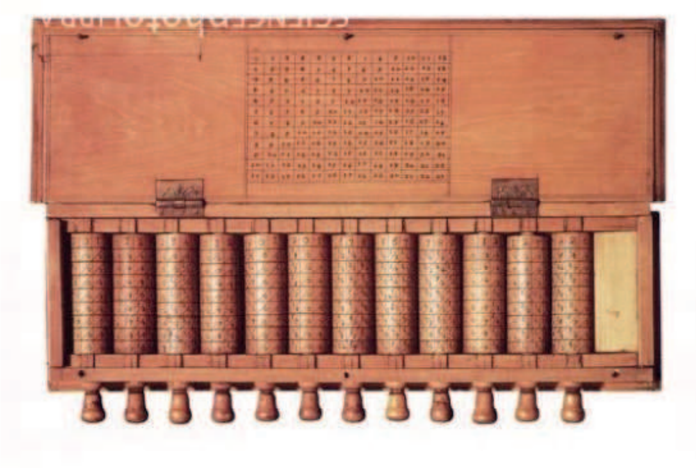
Baseado em uma abordagem geométrica, o método de Napier era associado nas progressões geométricas com as progressões aritméticas, sem utilizações de expoentes e conceitos de base.

De acordo Maor (2004, p. 19), a idéia de Napier era:

> Se pudermos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Além disso, elevar um número à enésima potência [...] seria equivalente a somar o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n, e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas, ou seja, a divisão por n. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Napier propôs uma magnifica invenção, que ficou conhecida como barras de Napier ou ossos de Napier que eram compostos por dez quadrilongos pedaços de madeira, como mostra a figura 1.

Figura 1– Barras de Napier



Fonte :Biachini e Paccola (2004)

Para simplificar as operações, principalmente a de produto e quocientes, as tábuas de logaritmos desvendaram os mistérios que freavam o processo cientifico, as primeiras tábuas de logaritmos foram inventadas, independentemente por John Napier e pelo suíço Joost Bürgi (1552-1632). O primeiro fez seu lançamento em Edimburgo e o segundo, em Praga. A influencia de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de Bürgi.

Napier em seu desenvolvimento dos logaritmos abrangeu o método de tabelas e regras, com finalidade grande de ajudar os astrônomos livrando-os dos erros de cálculos com grandes números. Assim, escreveu também tabelas de logaritmos de funções trigonométricas, incluindo tabelas de senos e seus logaritmos.

Em toda sua obra era implícito o numero “e” do logaritmo natural, somente cerca de um século depois, o matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) estudou de maneira mais profunda, que inclusive utilizou a letra “e” para representa-lo e batizou em homenagem ao descobridor dos logaritmos, chamando de neperiano todo logaritmo que possuísse essa base.

Aos seus 67 anos, Napier faleceu no castelo de Merchiston, em 1617.

Os logaritmos, sem dúvida, foi uma invenção extraordinária para a época, chegando ao conhecimento de muitos amantes da Matemática, após a publicação de Napier em 1614. Muitos matemáticos ficaram encantados com os trabalhos de Napier, dentre eles está Henry Briggs (1561-1631).

2.3 Henry Briggs

Impressionado ao conhecer as tabelas de Napier, Henry Briggs que nasceu em 1591, Yorkshire, Inglaterra, estudou na universidade de Cambrige e formou-se em 1581. Prosseguiu nos estudos, logo obteve o doutorado em 1588, na universidade de Saint-Andrews, onde foi professor de geometria e mais tarde em Oxford. Foi o primeiro a reconhecer a importância dos logaritmos de Napier, tendo estabelecido contato com o mesmo para uma troca de ideias, e propôs o uso de potencias de dez como mostra Horsburgh (1914):

> Na primeira visita Napier e Briggs discutiram algumas alterações no sistema de logaritmos. Antes da primeira visita a Napier, em uma carta Briggs havia sugerido que seria mais conveniente, ao passo que o logaritmo de todo o seno ainda era tida como zero, para tomar o logaritmo da décima parte do seno como uma potência de 10 e eles tinham iniciado o cálculo das tábuas de seu sistema proposto. Napier concordou que a mudança era desejável, e afirmou que ele tinha anteriormente desejado fazer uma mudança, mas ele preferiu publicar as tábuas já preparadas, como ele não poderia concluí-lo por motivo da falta de saúde e por outros importantes, comprometendo a construção de novas tábuas. Ele propôs, contudo, um pouco diferente da sugerida pelo sistema Briggs, a saber, que logaritmos de 1 deve ser zero, mas não para toda a condição de unidade, mas, ao mesmo tempo. Tal como sugerido por Briggs, o logaritmo da décima parte da condição deve ser uma potência 10. Briggs e Napier admitiram de uma única vez que esse método decidido era o melhor e colocou sobre o calculo das tábuas o novo sistema que é essencialmente o sistema de logaritmos já em uso. (HORSBURGH, 1914, P.11).

Concordando com as modificações, no entanto por conta da sua idade avançada, Napier não tinha mais energia para computar novas tabuas. Além das mudanças da base 10 as tabuas também foram modificadas, Briggs escreveu as tábuas no que tinha determinado com Napier, iniciando assim, escolheu que log 1 = 0 e log 10 = 1, utilizando relações matemáticas já provadas, porque log 1 = 0, pois $10^0 = 1$ e o log de 10 = 1, $10^1 = 10$. Seguindo esse raciocínio, Briggs definiu seus logaritmos como é conhecido nos dias de hoje, logaritmos de base dez. Para as criações dessas tábuas ele se apropriou da média geométrica dos números. No ano de 1624, Briggs publica suas primeiras tabuas de logaritmos de base 10, para todos os inteiros de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, com uma precisão de 14 casas decimais. Parte desta tabela aparece na figura 2.

Figura 2 – tabela de logaritmos decimais.

2	Logarithmi.			Logarithmi.
1	0	0000,00000,00000	34	1	5314,78917,04226
2	0	3010,29995,66398	35	1	5440,68044,35028
3	0	4771,21254,71966	36	1	5563,02500,76729
4	0	6020,59991,32796	37	1	5682,01724,06700
5	0	6989,70004,33602	38	1	5797,83596,61681
6	0	7781,51250,38364	39	1	5910,64607,02650
7	0	8450,98040,01426	40	1	6020,59991,32796
8	0	9030,89986,99194	41	1	6127,83856,71974
9	0	9542,42509,43932	2	1	6232,49290,39790
10	1	0000,00000,00000	43	1	6334,68455,57959

Fonte: SCHUBRING, 2008, p.387

Com o apoio de Briggs, os logaritmos de Napier foram recebidos com muito entusiasmo pelos cientistas da Europa e da China.

Briggs morreu em 26 de janeiro de 1631, na Inglaterra. O logaritmo ao longo do tempo foi sofrendo diversas mudanças, e também foi ganhando muita importância para outras áreas, e em 1728 foi implantada por Leonhard Euler (1707 – 1783) a forma como estudamos até hoje.

Como Napier previa, a sua invenção revelou-se de fundamental importância para o desenvolvimento da ciência, pois simplificava, com rapidez e precisão, e durante quase quatro séculos os logaritmos eram utilizados como instrumentos de cálculo.

Devido o avanço da tecnologia, as tábuas de logaritmos foram perdendo suas utilidades, dando espaço as calculadoras, porém a função logarítmica nunca será esquecida, a principal dessa razão é da natureza teórica. Vários fenômenos naturais e diversas leis matemáticas e até mesmo sociais são estreitamente relacionadas com os logaritmos. Dessa forma, o que no começo era importante apenas por causa das tábuas, os logaritmos mostraram ter apreciável valor intrínseco.

3. Logaritmos

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e propriedades relacionadas ao logaritmo, tendo como referências o livro de Gelson Iezzi.

"O termo logaritmo (logarithmus) foi criado por Napier e são formados pela junção das palavras gregas lógos e arithmós, que significam razão e número, respectivamente." (IEZZI, et al. 1997)

3.1 Definição: Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de **b** na base **a**, o expoente que se deve dar à base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

Em símbolos: se a, b E IR, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em $\log_a b = x$, dizemos:

a é a base do logaritmo

b é o logaritmando

x é o logaritmo

Exemplos:

a) $\log_2 32 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 = 32$

b) $\log_5 625 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5^4 = 625$

Observação: Quando a base é 10, por convenção, omitimos a base, ou seja, o logaritmo é dito decimal ou de Briggs.

$$\log_{10} x = \log_x$$

Para que $\log_a b = x$ tenha significado, para todo x real, precisamos impor $a > 0$, $a \neq 1$, e $b > 0$.

A essas restrições chamamos de condições de existência dos logaritmos:

$1 \neq a > 0 \Leftrightarrow a^x > 0 \Leftrightarrow b > 0$

Assim, não existem, por exemplo:

a) $\log_2 (-6)$, pois não existe x tal que $2^x = -6$

b) $\log_1 5$, pois não existe x tal que $1^x = 5$

3.2 Antilogaritmo

Sejam **a** e **b** dois números reais positivos com **a** diferente de 1. Se o logaritmo de **b** com base **a** é igual a **x**, então **b** é o antilogaritmo de **x** na base **a**. Em símbolos:

Se a, b $\in$ R, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$ então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a\ x$$

Exemplos:

a) $\text{antilog}_2 3 = 8$, pois $\log_2 8 = 3$

b) $\text{antilog}_{\sqrt{2}} 3 = 2\sqrt{2}$, pois $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 3$

3.3 Consequências da definição

Decorrem da definição de logaritmos as seguintes propriedades para $0 < a \neq 1$, $b > 0$.

1)"O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero".

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

2) " O logaritmo da base em qualquer base é igual a um"

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

3)"O logaritmo de uma potência, cuja base seja igual a do logaritmo, será igual ao expoente da potência".

$$\log_a a^b = b, \text{ pois } a^b = a^b$$

4)" **a** elevado ao logaritmo de **b** na base **a** é igual a **b**

$$a^{\log_a b} = b$$

A justificativa desta propriedade está no fato de que o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ficar igual a b.

5)"Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais".

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

$$\log_a{}^b = \log_a{}^c \Leftrightarrow a^{\log_a{}^c} = b \Leftrightarrow c = b$$

3.4 Base "e"

O número **e**, é conhecida como constante de Euler, é irracional e vale aproximadamente 2,71828...

Quando um logaritmo possui base **e**, ele é chamado de logaritmo neperiano, e é representado por ln. Deste modo:

a) $\log_e 2 = \ln 2$

b) $\log_e \frac{1}{7} = \ln \frac{1}{7}$

3.5 Propriedades operatórias dos logaritmos

3.5.1 Logaritmo do produto

Sendo a, b e c números reais e positivos, e a ≠ 1, temos:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Sejam $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b.c) = w$. Queremos mostrar que $w = x + y$.

Pela definição de logaritmos, obtemos as seguintes relações:

$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a (b.c) = w \Rightarrow a^w = b.c$ (III)

Substituindo as relações (I) e (II) na relação (III), temos :

$$a^w = a^x . a^y \Rightarrow a^w = a^{x+y} \Rightarrow w = x + y$$

Portanto, $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_3 (81.9) = \log_3 81 + \log_3 9 = 4 + 2 = 6$

b) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8} = \log_2 (\sqrt{2} . \sqrt{8}) = \log_2 \sqrt{16} = \log_2 4 = 2$

3.5.2 Logaritmo do quociente

Sendo a, b e c números reais e positivos, e a ≠ 1, temos:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Sejam $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = w$. Queremos mostrar que $w = x - y$.

Pela definição de logaritmos, obtemos as seguintes relações:

$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = w \Rightarrow a^w = \frac{b}{c}$ (III)

Substituindo as relações (I) e (II) na relação (III), temos :

$$a^w = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^w = a^{x-y} \Rightarrow w = x - y$$

Portanto, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_3 \frac{27}{81} = \log_3 27 - \log_3 81 = 3 - 4 = -1$

b) $\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1$

3.5.3 Logaritmo da potência

Em qualquer base a ($0 < a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base de uma potência. Em símbolos:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$, então :

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

Demonstração

$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha$ (II)

Substituindo a relação (I) em (II), temos:

$$a^y = (a^x)^{\alpha} \Rightarrow a^y = a^{\alpha . x} \Rightarrow y = \alpha . x$$

Observações:

Como corolário dessa propriedade, decorre:

"Em qualquer base a (0 < a ≠ 1), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando."

Em símbolos:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $n \in IN^*$, então:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Se $b > 0$, então $b^\alpha > 0$, para todo α real e vale a identidade:

$$\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b$$

Mas, se soubermos apenas que $b^\alpha > 0$, então temos:

$$\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a | b |$$

Exemplos:

a) $\log_3 2^5 = 5. \log_3 2$

b) $\log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 2$

c) se $x \neq 0$, então $\log x^2 = 2.\log | x |$

3.6 Cologaritmo

È definido como o valor oposto ao do logaritmo. Assim, escrevemos:

$$\text{colog}_a b = - \log_a b$$

Observe também que $- \log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a (\frac{1}{b})$

Portanto, podemos escrever que:

$$\text{colog}_a b = - \log_a b = \log_a (\frac{1}{b})$$

Exemplos:

a) $\log_{10} (\frac{2}{3}) = \log 2 - \log 3 = \log 2 + \text{colog } 3$

b) $\log_3 x - \log_3 (x - 1) = \log_3 x + \text{colog}_3 (x - 1)$ onde $x > 1$

3.7 Mudança de Base

Considere o logaritmo $\log_a b$, em que $b > 0$ e $0 < a \neq 1$. Se desejarmos escrever esse logaritmo em uma base **c**, em que $0 < c \neq 1$, utilizaremos a seguinte propriedade:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } \log_c a \neq 0, \text{ ou seja } a \neq 1.$$

Demonstração:

Consideremos $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$ e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Provemos que $x = \frac{y}{z}$

De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b \\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a \end{array}\right\} \Rightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y$$

$$\Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

Observação:

A propriedade de mudança de base pode também ser assim apresentada;

Se a, b e c são números reais positivos e a e c diferentes de um, então tem-se:

$$\log_a b = \log_c b \,.\, \log_a c$$

Demonstração:

A demonstração é bastante simples, basta que transformemos o $\log_c b$ para base a:

$$\log_c b \,.\, \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} \,.\, \log_a c = \log_a b$$

Exemplos:

1) Escrever $\log_7 5$ na base 2.

$\log_7 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 7}$

2) Escrever $\log_3 4$ na base 4.

$\log_3 4 = \dfrac{\log_4 4}{\log_4 3} = \dfrac{1}{\log_4 3}$

Nesse ultimo exemplo, observamos que $\log_3 4$ é igual ao inverso de $\log_4 3$:

$\log_3 4 = \dfrac{1}{\log_4 3}$

É claro que, se $\log_3 4 = \dfrac{1}{\log_4 3}$, então $(\log_3 4) . (\log_4 3) = 1$.

Dessa forma, ampliando tal raciocínio, se forem satisfeitas todas as condições de existência dos logaritmos, podemos escrever que:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Uma outra forma de escrever essa propriedade é:

$$(\log_a b) . (\log_b a) = 1.$$

3.8 Função logarítmica

Dado um número real a (0< a≠1) chamamos função logarítmica de base **a** a função f de IR_+^* em IR que associa a cada **x** o número $\log_a x$.

Em símbolos:

$$f : IR_+^* \Rightarrow IR$$
$$x \Rightarrow \log_a x$$

3.8.1 Propriedades

1) Se $0 < a \neq 1$ então as funções f de IR_+^* em IR definida por $f(x) = \log_a x$ e g de IR em IR_+^* definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

2) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

3.8.2 Imagem

Se $0 < a \neq 1$então a função f de IR_+^* em IR definida por $f(x) = \log_a x$

admite a função inversa g de IR em IR_+^* definida por $g(x) = a^x$. Logo f é bijetora e, portanto, a imagem de f é:

Im = IR.

Esta função é **bijetora**, pois:

a) É **injetora**, ou seja: elementos distintos possuem imagens distintas.

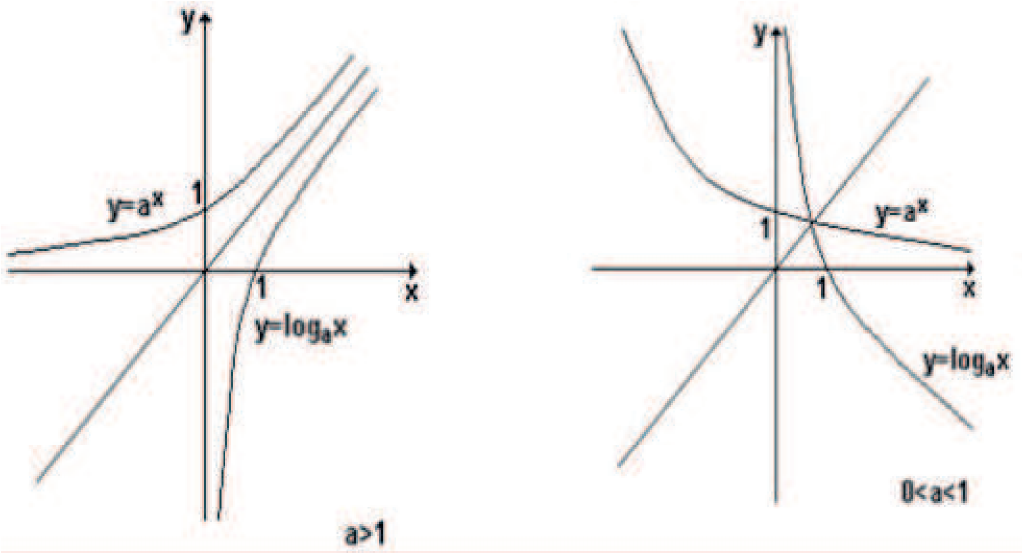
b) É **sobrejetora**, pois o conjunto imagem coincidem com o seu contradomínio.

Assim sendo, a função exponencial é bijetora e, portanto, é uma função inversível, ou seja, admite uma função inversa.

3.8.3 Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$), podemos observar que, nas funções inversas, os seus gráficos são curvas simétricas em relação á bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, ou seja, simétricos em relação á reta y = x.

Figura 3 – Representação gráfica da função logarítmica



Fonte: Página Brasil Escola

Da simples observação dos gráficos acima, podemos concluir que:

1) Para a > 1, as funções exponencial e logarítmica são crescentes.

2) Para 0 < a < 1, elas são decrescentes.

3) O domínio da função $y = \log_a x$ é o conjunto IR_+^*

4) O conjunto imagem da função y = $\log_a x$ é o conjunto IR dos números reais

5) O domínio da função y = a^x é o conjunto R dos números reais

6) O conjunto imagem da função y = a^x é o conjunto IR_+^*

7) Observe que o domínio da função exponencial é igual ao conjunto imagem da função logarítmica e que o domínio da função logarítmica é igual ao conjunto imagem da função exponencial. Isto ocorre porque as funções são inversas entre si.

Exemplo:

a) Construa o gráfico cartesiano da função f(x) = $\log_2$ x (x > 0)

Solução:

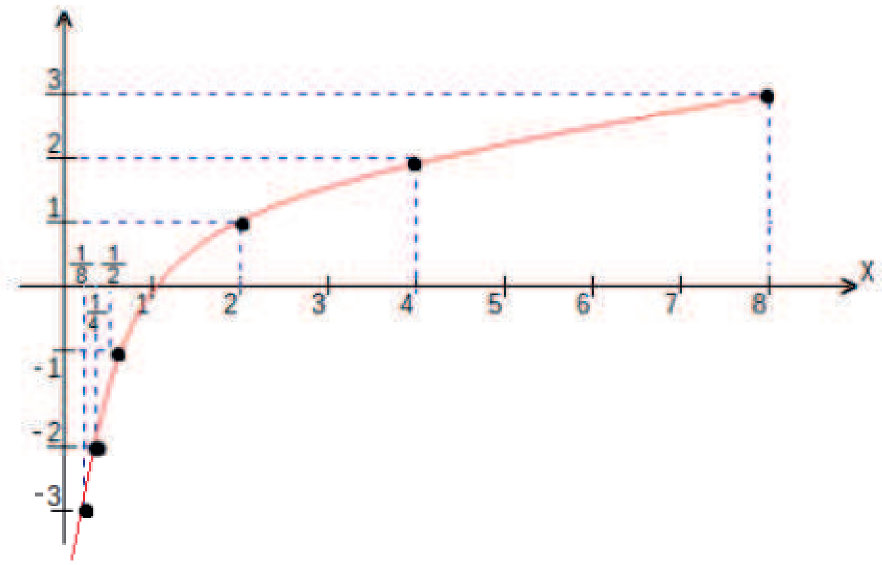
Inicialmente, vamos construí a tabela distribuindo valores para y e depois calculando x.

Tabela 2– Distribuindo valores para y e depois calculando x

Y	Y = $\log_2 x$	X
-2	$\log_2 x = -2$	$\frac{1}{4}$
-1	$\log_2 x = -1$	$\frac{1}{2}$
0	$\log_2 x = 0$	1
1	$\log_2 x = 1$	2
2	$\log_2 x = 2$	4

Fonte: Próprio autor

Figura 4 – gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_2 x$ $(x > 0)$



Fonte: Página Brasil Escola

3.9 Equações Logarítmicas

As equações logarítmicas podem ser classificadas em três tipos:

1° tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

É a equação que apresenta, ou é redutível a, uma igualmente entre dois logaritmo de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na quarta consequência da definição.

Temos:

Se $0 < a \neq 1$, então:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0$$

Exemplos:

a) Resolva, em R, a equação logarítmica.

$$\log_5 (3x-18) = \log_5 6$$

Solução:

Como as bases são iguais, por definição temos:

$$\log_5 (3x-18) = \log_5 6 \Rightarrow 3x - 18 = 6$$

Resolvendo a equação do 1° grau, temos: $3x - 18 = 6 \Rightarrow x = 8$

Logo, a solução da equação é S = { 8 }.

b) Determinar o conjunto solução, em R, da equação $\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 21$

Solução:

Como as bases são iguais, temos: $\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 21$ se, e somente se,

$X^2 - 4x = 21 \Rightarrow X^2 - 4x - 21 = 0$

Resolvendo a equação do 2° grau, temos: $x_1 = -3$ e $x_2 = 7$

Verificando as condições de existência, temos:

Para $x_1 = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 4.(-3) = 9 + 12 = 21 > 0$ (convém)

Para $x_2 = 7 \Rightarrow 7^2 - 4.7 = 49 - 28 = 21 > 0$ (convém)

Logo, S = {-3,7}

2° tipo: $\log_\alpha f(x) = \alpha$

É a equação que apresenta, ou é redutível á, uma igualdade entre um logaritmo e um número real.

Para equações deste tipo não é necessário preocupar-se com a condição de existência, basta aplicarmos a definição de logaritmo.

Se $0 < a \neq 1$e $\alpha \in$ R, então:

$$\log_\alpha f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^\alpha$$

Exemplo:

c) Resolva a equação $\log_5 (4x - 1) = 0$

Solução:

$\log_5 (4x - 1) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 5^0 \Rightarrow 4x - 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

3° tipo: Incógnita auxiliar

São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de base de incógnita.

Exemplo:

d) Calcule a solução da equação $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$.

Solução :

A equação proposta é equivalente á equação

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos: $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$.

Mas $y = \log_2 x$, então:

$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$

$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Portanto, $S = \{ 4, \frac{1}{2} \}$

Assim concluímos os conceitos de forma explicita sobre logaritmos e suas propriedades.

4. Aplicações Logarítmicas

Como já foi abordado, a invenção dos logaritmos foi para facilitar a realização de cálculos, hoje a grande utilidade dos logaritmos são suas aplicações; como objeto de estudo neste trabalho, serão apresentados agora algumas aplicações:

4.1 Cultura de Bacilos

Bacilos são bactérias que possuem formato de bastonete. Estes microrganismos são muito pequenos, sendo que a visualização deles só é possível com o auxilio de microscópios. Muitos bacilos são causadores de doenças, muitas delas graves, nos seres humanos.

Os bacilos são divididos em dois tipos: gram-positivos e gram-negativos. Os bacilos gram-negativos são os causadores de grande parte das doenças graves em seres humanos.

Exemplo:

O número de bacilos existentes numa determinada cultura, no instante t, é dado por

$$N = N_0 . 2^{\frac{(t)}{(k)}}$$

Em que N_0 e k são constantes. As variáveis t e N estão expressas em horas e milhões de unidades respectivamente.

a) Interprete o significado das constantes N_0 e k.

b) Qual a função que exprime o número de horas que esta função leva a passar de N_0 para N, em função de N?

Solução:

a) No instante t = 0 vemos obter $N = N_0 . 2^0$ logo $N = N_0$.

Portanto, N_0 é o número de bacilos existentes no inicio da contagem de tempo.

Fazendo t = k tem-se $N = N_0 . 2^0$. Isto significa que k é o número de horas que decorrem até duplicar o número de bacilos.

b) $\dfrac{N}{N_0} = 2^{\frac{(t)}{(k)}} \Leftrightarrow \dfrac{t}{k} = \log_2 (\dfrac{N}{N_0})$.

Vemos que a expressão de t, em função de N, envolve um logaritmo de variável independente, logo é uma função logarítmica.

4.2 Resfriamento de um corpo

Conhecida como a “lei de resfriamento de Newton”, quando se expõe um corpo de temperatura T_c a um ambiente de temperatura T_a, de forma que $T_c \neq T_a$, nota-se que, após algum tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente.

Comparando os resultados de diferentes situações envolvendo resfriamento de um corpo podemos constatar que a taxa de resfriamento depende de fatores, tais como:

- a diferença de temperatura entre o corpo e o meio externo;
- a superfície do corpo exposta;
- o calor especifico da substância que o constituí;
- as condições do ambiente no qual este corpo foi colocado;
- o tempo em que o objeto permanece em contato com o ambiente.

Pode-se representar isto através de uma equação;

$$\Delta T = -K(T_c - T_a)\Delta t$$

Onde,

$\Delta T \Rightarrow$ variação de temperatura sofrida pelo corpo;

$K \Rightarrow$ representa um coeficiente de proporcionalidade, que dependerá da superfície exposta, do calor específico do corpo e também da função de características do meio ambiente;

$T_c \Rightarrow$ temperatura inicial do corpo;

$T_a \Rightarrow$ temperatura ambiente;

$\Delta t \Rightarrow$ intervalo de tempo.

Exemplo:

(VUNESP) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado ás 22 horas. Ás 22h30min o médico da polícia chegou imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C; a temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dado por $D(t) = D_0 . 2^{(-2\alpha t)}$, em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante t = 0, D(t) é a diferença de temperatura num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

Tabela 3 – Os dados da questão

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do quarto (°C)	Diferença de temperatura (°C)
t = ?	Morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
t = 1	23h30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Fonte: Próprio autor

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) a constante α;

b) a hora em que a pessoa morreu.

Solução:

a) $D(t) = 16.2^{-2\alpha}$

$D(1) = 15$

logo,

$D(1) = 16.\ 2^{-2\alpha}$

$16.\ 2^{-2\alpha} = 15$

$2^{-2\alpha} = \frac{15}{16}$

$\log_2 2^{-2\alpha} = \log_2 \frac{3.5}{2^4}$

$-2\alpha . \log_2 2 = \log_2 3 + \log_2 5 - 4. \log_2 2$

Como $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, temos:

$-2\alpha = 1,6 + 2,3 - 4$

$-2\alpha = -0,1$

$\alpha = \dfrac{-0,1}{-2}$

$\therefore \quad \alpha = 0,05$

b) D(t) = 20

$16.2^{-2(0,05)t} = 20$

$2^{-0,1t} = \dfrac{20}{16}$

$2^{-0,1t} = \dfrac{5}{4}$

$2^{-0,1t} = \dfrac{5}{2^2}$

$\log_2 2^{-0,1t} = \log_2 5 - 2.\log_2 2$

$-0,1t.\log_2 2 = 2,3 - 2.1$

$-0,1t.1 = 0,3$

$t = \dfrac{0,3}{-0,1}$

$t = -3$

Logo, a morte ocorreu 3 horas antes do encontro do corpo, que foi ás 22h30min. Portanto, a hora exata do homicídio foi ás 19h e 30min.

4.3 Potencial Hidrogeniônico (pH)

A sigla pH é utilizada para representar o potencial hidrogeniônico presente em uma determinada solução ou mistura. Referente a concentração de cátions hidrônio (H^+ ou H_3O^+), consiste num índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer.

A concentração do pH se dá da seguinte forma:

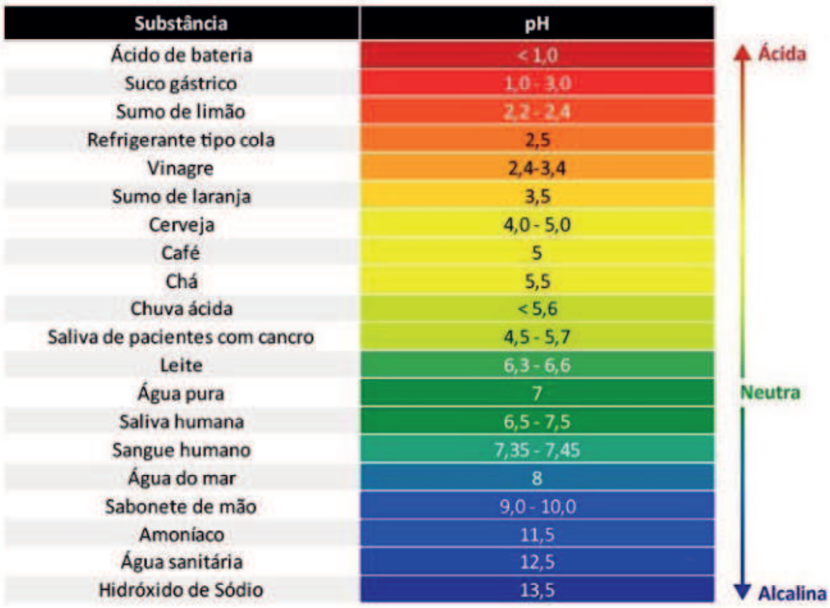
Tabela 4 – A concentração do pH

0 < ph ≤ 7	solução ácida	$[H^+] > [OH^-]$
pH = 7	solução neutra	$[H^+] = [OH^-]$
7 < pH ≤ 14	solução básica	$[H^+] < [OH_-]$

Fonte: Próprio autor

Na figura abaixo mostra alguns valores comuns de pH.

Figura 5 – Valores comuns de pH



Substância	pH
Ácido de bateria	< 1,0
Suco gástrico	1,0 - 3,0
Sumo de limão	2,2 - 2,4
Refrigerante tipo cola	2,5
Vinagre	2,4-3,4
Sumo de laranja	3,5
Cerveja	4,0 - 5,0
Café	5
Chá	5,5
Chuva ácida	< 5,6
Saliva de pacientes com cancro	4,5 - 5,7
Leite	6,3 - 6,6
Água pura	7
Saliva humana	6,5 - 7,5
Sangue humano	7,35 - 7,45
Água do mar	8
Sabonete de mão	9,0 - 10,0
Amoníaco	11,5
Água sanitária	12,5
Hidróxido de Sódio	13,5

Fonte: Página Brasil Escola

Desde ano de 1909 o químico dinamarquês, Peter Sorensen (1868 - 1939) sugeriu o termo p para representar o potencial hidrogeniônico e o h vem do íon de hidrogênio (H_+). Calcular o pH de qualquer substância será utilizado o logaritmo na base 10, podemos escrever a expressão da seguinte forma:

$$pH = -\log [H^+]$$

Exemplo:

A análise de um determinado afluente (rio) mostrou que a quantidade de íons hidrônios (H^+) presentes era igual a 10^{-6} mol.L^{-1}. Sabendo que é normal encontrar as águas de rios e lagos com pH variando entre 4 e 9, determine o valor do pH da água analisada.

Solução:

Como o exercício forneceu a concentração em quantidade de matéria do hidrônio, basta utilizar a expressão do pH:

$pH = -\log [H^+]$

$pH = -\log 1{,}0.10^{-6}$

$pH = -\log 1{,}0 + (-\log 10^{-10})$

$pH = -\log 1{,}0 – (-6).(\log 10)$

$pH = -0 + 6 \log 10$

$pH = 6$

Logo, o pH da água analisada é igual a 6.

4.4 Nível de Intensidade Sonora

Possuindo uma sensibilidade peculiar, a altura de um som experimentado pelo ouvido humano é baseada no nível de intensidade.

O som pode ser classificado como fraco ou forte quanto a sua intensidade; medido em decibéis (dB), em homenagem a Alexander Graham Bell (1847 – 19922) e expresso em W/m^2. Podemos definir o nível de intensidade em uma escala logarítmica.

$$\beta = 10.\log \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Onde:

β é o nível de intensidade sonora

I é intensidade correspondente ao nível β;

I_0 é uma constante que representa o nível de referência tomado como limiar de audição : $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), sons até 55 dB são aceitáveis. Na figura abaixo alguns tipos de níveis de intensidade sonora:

Figura 6 – Tipos de níveis de intensidade sonora

Níveis de Ruído em Decibels

Conforto Acústico	Muito baixo	0 *dB*		Limiar do som	
		5 *dB*	Passarinho		
		10 *dB*	Cochicho		
		15 *dB*	Torneira		
		20 *dB*	Conversa		
	Baixo	25 *dB*	Relógio		
		30 *dB*	Biblioteca	Limite para o sono	
		35 *dB*	Enfermaria		
		40 *dB*			
	Moderado	45 *dB*			
		50 *dB*	Aspirador de pó		
	Moderado	55 *dB*	Bebê chorando	Irritação	
	Moderado Alto	60 *dB*		Irritação aumenta consideravelmente	
Riscos de Danos à Saúde	Moderado Alto	65 *dB*	Cachorro latindo		
		70 *dB*			
		75 *dB*	Sala de aula		
		80 *dB*	Piano		
	Alto	85 *dB*	Telefone tocando	Tolerâncias diárias de exposição	8 h
		90 *dB*	Secador de cabelos		4 h
		95 *dB*	Moto		2 h
		100 *dB*	Cortador de grama		1 h
	Muito alto	105 *dB*	Caminhão		30 min
		110 *dB*	Pátio no intervalo das aulas		15 min
		115 *dB*	Banda tocando		7 min
		120 *dB*	Tiro		
		125 *dB*	Auto-falante		
		130 *dB*	Britadeira		
		135 *dB*	Avião		
		140 *dB*			

Fonte: Página Brasil Escola

Exemplo:

De acordo com uma tabela de níveis de intensidade sonora, o nível de intensidade medido para pessoas em conversação normal e a 1 m de distância é de 60 dB. Sabendo que a intensidade mínima percebida pelo ouvido humano é de 10^{-12} W/m^2, determine a intensidade sonora da voz de uma pessoa em conversação normal em W/m^2.

Solução:

Da equação do nível de intensidade sonora e utilizando propriedades logarítmicas, temos:

$\beta = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$60 = 10\ .\ \log(I) - \log(I_0)$

$6 = \log(I) - \log(10^{-12})$

$6 = \log(I) + 12\ .\ \log(10)$

$6 = \log(I) + 12$

$\log(I) = -6$

$I = 10^{-6}\ W/m^2$

Logo, a intensidade sonora da voz de uma pessoa em conversação normal em W/m^2 é igual $10^{-6}\ W/m^{2.}$

4.5 Abalos Sísmicos

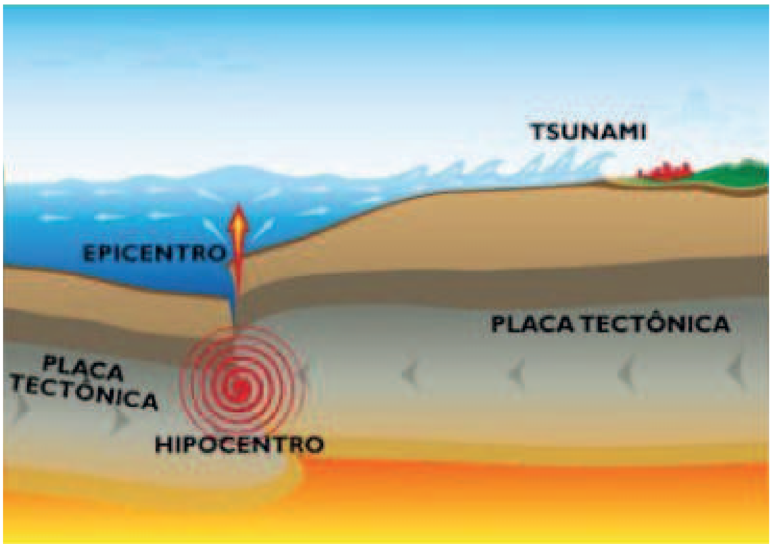
4.5.1 Tsunami

Tsunami são ondas de grande energia geradas por abalos sísmicos que se propagam no oceano, e também são conhecidos como maremotos. Com a ruptura causada pelo tremor no leito do mar, empurra a agua pra cima na forma de uma onda de pequena amplitude e pode atingir centenas de quilômetros de extensão e percorrer milhares de quilômetros, com uma velocidade de aproximadamente 700 Km/h.

As causas mais comuns que provocam um tsunami podem ser deslocamentos das placas tectônicas, terremotos, erupções vulcânicas e queda de meteoritos.

A magnitude de um tsunami é calculada pela logarítmica da amplitude do tsunami e amplitude de referência.

Figura 7 – Terremoto



Fonte: Página Brasil Escola

4.5.2 Terremotos

Conhecidos também como abalos sísmicos, os terremotos são fenômenos naturais que ocorrem com maior intensidade em regiões de instabilidade geológicas, ou seja, nas bordas das placas tectônicas. Essas placas são suspensas sobre o manto terrestre, camada que fica logo abaixo da crosta.

Classificados conforme o nível de energia mecânica liberada, os terremotos tem uma medida padrão de magnitude, a qual representa em índices quantitativos a intensidade do tremor registrado.

No ano de 1935, dois sismólogos Charles Francis Richter (1900 – 1985) e Beno Guttemberg (1885 – 1960), desenvolveram a escala Richter, que resulta em uma escala logarítmica e a mais utilizada para realizar as medições sísmicas, essa escala considera um índice quantitativo que se estende de 1 até 9, em ordem crescente conforme o nível de magnitude.

Segundo esta escala, é considerada as seguintes classificações em relações aos graus de magnitude:

Tabela 5 – Classificações em relações aos graus de magnitude

$3,5 \leq M \leq 5,4$	não há grandes registros de danos;
$5,5 \leq M \leq 6,0$	sentindo de forma mais intensa, com registro de danos em edifícios e estradas
$6,1 \leq M \leq 6,9$	há registros de problemas mais sérios as áreas afetadas;
$7,0 \leq M \leq 7,9$	são registradas destruições em grandes proporções;
$M \geq 8,0$	são potencialmente graves, com capacidade de destruir cidades inteiras.

Fonte: Próprio autor

A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. A fórmula utilizada é a seguinte:

$$M = \log A - \log A_0$$

Onde,

M = magnitude

A = é a amplitude máxima

A_0 = é amplitude de referência

Exemplo:

(UCS-RS) Terremotos costumam ser avaliados por sua magnitude e por sua intensidade. A intensidade refere-se aos efeitos das vibrações na superfície terrestre. A magnitude é o valor obtido na Escala Richter a partir da amplitude máxima das vibrações do solo a 100 km do epicentro do terremoto. A expressão $M_1 - M_2 = \log \frac{A_1}{A_2}$, em que log denota o logaritmo decimal, relaciona as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos com as amplitudes A_1 e A_2 das ondas sísmicas geradas. Segundo essa expressão, a relação entre as amplitudes A_1 e A_2 das ondas geradas pelos terremotos de magnitudes 9 e 6,3 ocorridos, respectivamente, em 2004 na Indonésia e em abril de 2009 na Itália, é dada por?

Solução:

$\log\frac{A_1}{A_2} = (9 - 6{,}3) = 2{,}7$

$\frac{A_1}{A_2} = 10^{(2,7)}$

Logo, a relação entre as amplitudes A_1 e A_2 das ondas geradas pelos terremotos de magnitudes 9 e 6,3 ocorridos, respectivamente, em 2004 na Indonésia e em abril de 2009 na Itália, é dada por $A_1 = 10^{2,7}.\ A_2$

4.6 O logaritmo na matemática financeira

Em regime de juros compostos, a aplicação do logaritmo na matemática financeira é feita para calcular qual é o tempo que determinado capital devera ser aplicado até que gere determinado valor total, ou seja, um montante. Fórmula para o cálculo dos juros compostos:

$$\mathbf{M = C \cdot (1 + i)^t}$$

Onde,

M = montante, **C** = capital, **i** = taxa e **t** = tempo.

Exemplo:

(UERJ-2003) Jorge quer vender seu carro por R$ 40.000,00. Pedro, para comprá-lo, dispõe de R$ 5.000,00, e aplica esse valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28% a cada dois anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada dois anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48**.**

Solução:

Dinheiro aplicado

$M_d = 5000.(1 + 0{,}28)^{\frac{t}{2}}$

Desvalorização do carro

$M_c = 40000(1 - 0{,}19)^{\frac{t}{2}}$

Como queremos encontrar o tempo em que os montantes serão iguais, devemos igualar os montantes.

Com isso, teremos:

$$5000.(1{,}28)^{\frac{t}{2}} = 40000.(0{,}81)^{\frac{t}{2}}$$

$$\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = \frac{40000}{5000}$$

$$\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = 8 \quad (\textit{Aplicaremos logaritmos dos dois lados da igualade.})$$

$$\log\left(\frac{1{,}28}{0{,}81}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 8$$

Como temos, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48 , logo:

$$\frac{1{,}28}{0{,}81} = \frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4} \qquad e \qquad 8 = 2^3$$

Sendo assim, voltemos à expressão a ser calculada.

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3$$

Aplicando as propriedades de logaritmo que diz que:

$$\log a^h = h.\log a$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

Temos que:

$$\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{\frac{t}{2}} = \log 2^3$$

$\Rightarrow \frac{t}{2}$ ($\log 2^7 - \log 3^4$) = 3.log2

$\Rightarrow$ t = $\frac{6.\log 2}{7.\log 2 - 4\log 3}$

$\Rightarrow$ como log2 = 0,3 e log3 = 0,48 , temos:

$\Rightarrow$ t = $\frac{6.0{,}3}{7.0{,}3 + 4.0{,}48} = \frac{18}{1{,}8}$ = 10

Portanto, apenas depois de 10 anos Pedro teria dinheiro para comprar o carro de Jorge.

Com isso retratamos algumas das aplicações dos logaritmos nas áreas do conhecimento.

5. CONCLUSÃO

Tendo em vista o conteúdo estudado para a elaboração desse trabalho pode-se dizer que, devido às necessidades momentâneas humanas, o homem procurou corriqueiramente ao longo dos anos desenvolveram ferramentas matemáticas que lhe proporcionassem novos conhecimentos ou que saciassem tais necessidades de mudança. Com isso, a partir dos séculos XV e XVI, a invenção dos logaritmos foi de grande importância para o avanço da tecnologia, dando mais rapidez e precisão aos cálculos aritméticos.

Com o avanço da tecnologia e com a utilidade das calculadoras e computadores, as tábuas de logaritmo perderam utilidade como instrumento de cálculo. Mas com o auxilio das funções logarítmicas, foi possível modelar ou dimensionar vários fenômenos que até então não eram de domínio do conhecimento humano.

Os logaritmos exercem certo fascínio por conta de suas aplicações às quais tomaram rumos diversos, expandindo dessa forma suas áreas de atuação e beleza operacional.

Este trabalho evidenciou parte da grande importância dos logaritmos para os seres humanos, tendo em vista uma experiência adquirida por ter compreendido melhor os logaritmos e despertando o desejo de conhecer cada vez mais a relação da matemática com outras ciências.

Por fim, podemos perceber que os logaritmos podem ter uma abrangência muito grande, e proporcionar um grande conhecimento cultural, intelectual e técnico.

REFERÊNCIAS

AREFF, A.N. Progressão e logaritmos: 2° grau, noções de matemática, volume 2. São Paulo. Editora moderna, 1979.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide
2ª edição .São Paulo; Editora Edgard Biucher,1996.

BRITO E.I; FERREIRA, S. D. C. **Um pouco de história**. Acesso em 10 de julho de 2018. Disponível em:
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/
historia.htm>.

DANTE, L. R. **Matemática do ensino Médio**, volume único: livro do professor/ Luiz Roberto Dante.1 Ed. São Paulo: Ática,2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2004

FRANCA, G. **Medicina legal**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2008.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática**. 2.ed. Porto Alegre: Globo, 1958.

HORSBURGH, E.M. **Modern instruments and methods of calculation; a handbook of the Napier tercentenary exhibition**. Edinburg: Royal Society of Edinburgh, 1914

HUGUES-HALLETT, D. *et al*. **Cálculo e aplicações**. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

IEZZI, G. et al. Matemática: **Ciências e Aplicações**, Volume 1 Ensino Médio- 2 edição 2004 São Paulo.

LIMA, E. L. **Logaritmos.Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática**, 1996.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática**: e outras histórias. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM,2004
THOMAS, G. B. **Cálculo**. 12 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. V. 1.

MAOR; Eli. e: **a história de um número**. 2.ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

M.L.OHS E. **Uma abordagem histórica dos logaritmos**. Acesso em 25 de julho de 2018. Disponível em:
<http://www.fisicajp.net/sde08/anais_semana_de_
exatas_2008.pdfpage=33>.

PIERES, A**. Lei de resfriamento de Newton**. Acesso em 05 de setembro de 2018. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20011/Adriano/principal.html>

QUÍMICA, E. **de.Tabela de pH e Como Funciona**. Acesso em 06 de setembro de 2018. Disponível em: <http://quimicaemaula.blogspot.com.br/2011/09/tabela-de-ph-e-como-funciona.html>.

SAMPAIO, J. C. V.**John Napier, Henry Briggs e a invenção dos logaritmos**. Acesso em 11 de julho de 2018. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/logshistoriaPDF>.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões di-dáticas para a sala de aula**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

TERREMOTOS: logaritmos. **GE Matemática 2015**: vestibular + ENEM, São Paulo, ed. 6, p. 68-75, 2014.

TERREMOTOS **no brasil**. Disponível em:http://cae.freeservers.com/geografia_tremores_no_Br.html. Acesso em: 10 setembro. 2018

THOMAS, George B; et al. **Cálculo**. Vol. 1. 10ª edição. São Paulo, Addison Wesley, 2002.

VASCONCELOS, K. de.Logaritmos e suas aplicações - **Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso** - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande. 2011.