UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Luzia Valesca Bandeira da Silva

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E OPERADORES AUTOADJUNTOS

PATOS
2018

Luzia Valesca Bandeira da Silva

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E OPERADORES AUTOADJUNTOS

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

Patos
2018

S586f Silva, Luzia Valesca Bandeira da.
Fundamentos de álgebra linear e operadores auto adjuntos [manuscrito] / Luzia Valesca Bandeira da Silva. - 2018.
73 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2018.

"Orientação : Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Álgebra linear. 2. Auto adjuntos. 3. Operadores adjuntos. I. Título

21. ed. CDD 512.5

Elaborada por Kênia O. de Araújo - CRB - 15/649 BC/UEPB

LUZIA VALESCA BANDEIRA DA SILVA

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR E OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 03 de dezembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Marcelo da Silva Vieira

Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Paulo Romero Ferreira Filho.

Prof. Paulo Romero Ferreira Filho (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A minha mãe Geralda, pois tudo que consegui foi graças a sua dedicação em me deixar como herança o conhecimento.

Agradecimentos

Foram 5 anos de luta e esforço e não teria conseguido sozinha. Primeiro quero agradecer a Deus por me conceber forças e não me deixar desistir, foi graças a Ele que venci. Quero agradecer aos meus pais Geralda e Antônio, por me educarem e me incentivarem sempre a estudar, desde o início sempre acreditaram em mim, em especial a minha mãe, a qual sempre tive como heroína, meu espelho e de quem sinto muito orgulho. Se hoje consegui vencer toda essa jornada foi graças a senhora.

Além dos meus pais, agradeço aos meus irmãos, particularmente, Rozana Bandeira, a qual serei eternamente grata, pois me acolheu e foi como uma mãe para mim, um exemplo de esforço e dedicação, uma grande professora, e de quem eu sinto muito orgulho.

Agradeço também as minhas tias Josefa e Severina por sempre acreditarem em mim, além delas agradeço ao meu namorado Abmael, pois superou cada batalha ao meu lado me incentivando e me dando força, foi um grande parceiro durante toda a minha caminhada.

Agradeço também ao meu orientador Dr. Marcelo Vieira por depositar sua confiança em mim e contribuir para o desenvolvimento deste trabalho, além disso foi como um pai durante a graduação, me estimulando sempre a continuar o curso., um exemplo de professor.

Outra pessoa a qual quero agradecer de todo coração é meu coorientador Marcos Thadeu, que também contribuiu muito para este trabalho, me ensinou muito durante a graduação e além disso foi um grande amigo que o curso me proporcionou.

Durante esses anos adquiri pessoas que se tornaram muito especiais para mim, dentre elas, a minha turma, vocês foram demais e superamos cada batalha com muito bom humor, sem vocês não teria conseguido. Agradeço em especial a Mateus, que foi um grande parceiro durante o curso; e Maria e Larissa, que foram verdadeiras amigas, e fundamentais para a conclusão, estiveram sempre ao meu lado e as terei sempre como irmãs. Agradeço também a Amanda que foi minha companheira durante toda essa jornada, outra irmã que o curso me deu.

No decorrer da graduação aprendi a admirar muitos professores, dentre eles as professoras Lidiane Campelo; suas aulas de Estágio Supervisionado foram muito valiosas, me ensinastes a parte humana de ser professor, uma profissional que eu admiro e que conquistou o meu carinho; e Nayana Lôbo que me incentivou sempre a acreditar em mim, uma grande professora e amiga, a qual tenho muita admiração.

Aos meus amigos, Larissa Ferreira, Kaliane Matos, Mayara Layze, Jackeline Maysa, Luciana Ferreira, Carlos, Maria Aline, Raiana, José Eder, Léo e Micael por serem os amigos que eu sempre desejei ter, por estarem do meu lado me apoiando, não me deixando desistir jamais. Quero agradecer também a família Rosa Mística, me acolheram tão bem, em especial aos meus alunos pelos quais sou apaixonada.

Por fim, a todos que me desejaram sorte e boas energias ao fim dessa caminhada, e que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento dessa monografia e da minha graduação.

“Do more of what makes you happy”.

RESUMO

Apresentamos uma revisão dos principais conceitos da álgebra linear, com um destaque aos operadores autoadjuntos. Motivados pela grande presença desse conhecimento em outras áreas, como por exemplo a mecânica quântica, vemos a necessidade de um estudo mais profundo. Assim, trazendo um razoável número de exemplos e demonstrações, mostramos ao leitor diversos resultados acerca dos conceitos fundamentais da álgebra linear, assim como dos operadores adjuntos e autoadjuntos.

Palavras Chave: Álgebra Linear; Adjuntos; Autoadjuntos.

ABSTRACT

We present a review of the main concepts of linear algebra, with a focus on the auto-adjunct operators. Motivated by the great presence of this knowledge in other areas, such as quantum mechanics, we see the need for a deeper study. Thus, with a reasonable number of examples and demonstrations, we show the reader several results about the fundamental concepts of linear algebra, as well as of the adjunct and self-adjoint operators.

Keywords: Linear algebra; Adjoints, Selfadjoints.

Sumário

Introdução

Uma das áreas mais importantes da matemática é a Álgebra Linear, devido a variedade de aplicações desse conhecimento em outros campos, como por exemplo, a computação gráfica, a física, a genética e etc.

A Álgebra Linear generaliza ideias da clássica geometria analítica, dentre elas, o conceito de vetor. Além disso, estudam-se as transformações lineares e seus tipos particulares, como exemplo os operadores adjuntos. Essa classe de operadores amplamente utilizada na física é o objeto de estudo desse trabalho.

Apresentamos uma caracterização dos operadores adjuntos entre espaços vetoriais sobre o corpo dos números reais ou dos números complexos e resultados acerca de seus autovalores e autovetores.

No capítulo 1 apresentamos a definição de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, definimos os conceitos de base e dimensão, e como consequência dessas definições, resultados sobre os espaços vetoriais.

No capítulo 2, trazemos um aparato de resultados acerca de aplicações lineares entre espaços vetoriais chamadas transformações lineares. Além disso, estabelecemos critérios para obtermos isomorfismos. Para isso, definimos o que se entende por núcleo e imagem e apresentamos o Teorema do Núcleo e da Imagem. Mostramos a relação biunívoca entre as transformações lineares e as matrizes. Por fim, definimos transformações lineares particulares, onde o contradomínio é um corpo chamadas funcionais lineares.

No capítulo 3 buscamos uma forma de escrever as matrizes dos operadores lineares de uma maneira mais simples. Vemos que essa forma se traduz na busca por matrizes diagonais ou operadores diagonalizáveis. Nesse sentindo, definimos autovalores e autovetores, assim como o conceito de polinômio característico, que efetivamente responde ao questionamento.

No capítulo 4 definimos um produto entre vetores de mesmo espaço, chamado produto interno, o conceito de norma de um vetor e resultados importantes. Tratamos de ortogonalidade entre vetores e entre espaços vetoriais.

O capítulo 5 estabelecemos uma correspondência um a um entre vetores e funcionais lineares conhecida como Teorema da Representação de Riesz e como consequência definimos os operadores adjuntos. Demonstramos que a matriz de um operador adjunto em uma base ortonormal é a transposta conjugada da matriz do operador associado na mesma base. Além disso, definimos os operadores auto-adjuntos como sendo os operadores adjuntos com representação matricial em uma base ortonormal igual a de seu operador associado. Por fim, mostramos que os autovalores de um operador auto-adjunto são reais.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos resultados que são considerados relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. O conteúdo trata-se de um resumo do primeiro curso de Álgebra Linear. Trataremos como conhecidos pelo leior os conteúdos básicos de matrizes, sistemas lineares e algumas propriedades dos números complexos. As principais referências para estes resultados são [2], [5] e [4].

O termo vetor é usado para indicar deslocamento, velocidade ou força que tem ao mesmo tempo módulo, direção e sentido. É representado por uma seta ou segmento de reta orientado, o comprimento da seta representa o módulo do vetor e a seta aponta na direção e sentido do vetor, ao tratarmos de espaços vetoriais de seus resultados o vetor é um elemento do espaço vetorial.

1.1 Espaços Vetoriais

É fundamental definirmos espaço vetorial, pois ao longo do trabalho fazemos uso deste conceito em praticamente todo o texto. Essa estrutura algébrica é definida sobre uma outra estrutura, mais completa no sentido de ter mais propriedades, chamada corpo, como podemos ver na seguinte definição.

Definição 1.1. Um corpo é um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto x + y & (x, v) \mapsto x \cdot v \end{array}$$

chamadas de adição e multiplicação, que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) A adição é comutativa:

$$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

(ii) A adição é associativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

(iii) Existe um único elemento $0 \in \mathbb{K}$ (elemento neutro), tal que

$$x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{K}.$$

(iv) A cada $x \in \mathbb{K}$ corresponde um único elemento $-x \in \mathbb{K}$, tal que

$$x + (-x) = 0.$$

(v) A multiplicação é comutativa:

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in \mathbb{K}.$$

(vi) A multiplicação é associativa:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}$$

(vii) Existe um único elemento $1 \in \mathbb{K} - \{0\}$, tal que

$$x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{K}.$$

$(viii)$ A cada $x \in \mathbb{K} - \{0\}$ corresponde um único elemento x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ em $\mathbb{K}$, tal que

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

(ix) A multiplicação é distributiva em relação a adição:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Definição 1.2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e V um conjunto não-vazio munido de duas operações, uma soma e a outra multiplicação por escalar dadas por

$$\begin{array}{ll} + : V \times V \to V & \cdot : \mathbb{K} \times V \to V \\ (u, v) \mapsto u + v & (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \end{array}$$

Dizemos que $(V, +, .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ quando as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$;

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$;

(iii) Existe $0 \in V$, tal que $v + 0 = 0 + v = v$;

(iv) Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$, tal que $v + (-v) = -v + v = 0$;

(v) Para todo $v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$;

(vi) Para todo $u, v \in V$ e $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}, \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;

(vii) Para todo $v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

$(viii)$ Para todo $v \in V, 1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.

Observamos que todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo. De fato, se $\mathbb{K}$ é um corpo, então as duas operações internas em $\mathbb{K}$ podem ser vistas como a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

Ao longo deste trabalho, quando não especificamos o corpo de um espaço vetorial, subentende-se que estamos trabalhando com espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1. Seja $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ munido das operações.

$$u + v = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Então, $(\mathbb{R}^n, +, \ .)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

De fato, sendo $u = (x_1, ..., x_n)$, $v = (y_1, ..., y_n)$, $w = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

(i) Assim,

$$\begin{aligned} u + v = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) &= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n) \\ &= (y_1, ..., y_n) + (x_1, ..., x_n) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= [(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)]+(z_1,...,z_n)\\
&= [(x_1+y_1,...,x_n+y_n)]+(z_1,...,z_n)\\
&= ((x_1+y_1)+z_1,...,(x_n+y_n)+z_n)\\
&= (x_1+(y_1+z_1),...,x_n+(y_n+z_n))\\
&= (x_1,...,x_n)+[(y_1+z_1),...,(y_n+z_n)]\\
&= (x_1,...,x_n)+[(y_1,...,y_n)+(z_1,...,z_n)]\\
&= u+(v+w).
\end{aligned}$$

(iii) Seja $0=(0,...,0)\in\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
u+0 &= (x_1,...,x_n)+(0,...,0)\\
&= (x_1+0,...,x_n+0)\\
&= (x_1,...,x_n)\\
&= u
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0+u &= (0,...,0)+(x_1,...,x_n)\\
&= (0+x_1,...,0+x_n)\\
&= (x_1,...,x_n)\\
&= u.
\end{aligned}$$

(iv) O simétrico de u é $-u=(-x_1,...,-x_n)\in\mathbb{R}^n$, pois

$$\begin{aligned}
u+(-u) &= (x_1,...,x_n)+(-x_1,...,-x_n)\\
&= (x_1+(-x_1),...,x_n+(-x_n))\\
&= (x_1-x_1,...,x_n-x_n)\\
&= (0,...,0).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -u+u &= (-x_1,...,-x_n)+(x_1,...,x_n) \\ &= (-x_1+x_1,...,-x_n+x_n) \\ &= (0,...,0). \end{aligned}$$

Logo $(0,0,...,0)$ é o vetor nulo.

(v)

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)u &= (\alpha\beta)(x_1,...,x_n) \\ &= ((\alpha\beta)x_1,...,(\alpha\beta)x_n) \\ &= (\alpha(\beta x_1),...,\alpha(\beta x_n)) \\ &= \alpha(\beta x_1,...,\beta x_n) \\ &= \alpha(\beta u) \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} \alpha(u+v) &= \alpha[(x_1,...,x_n)+(y_1,...,y_n)] \\ &= \alpha[(x_1+y_1),...,(x_n+y_n)] \\ &= (\alpha(x_1+y_1),...,\alpha(x_n+y_n)) \\ &= (\alpha x_1+\alpha y_1,...,\alpha x_n+\alpha y_n) \\ &= (\alpha x_1,...,\alpha x_n)+(\alpha y_1,...,\alpha x_n) \\ &= \alpha(x_1,...,x_n)+\alpha(y_1,...,y_n) \\ &= \alpha u+\alpha v \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)u &= (\alpha+\beta)(x_1,...,x_n) \\ &= ((\alpha+\beta)x_1,...,(\alpha+\beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1+\beta x_1,...,\alpha x_n+\beta x_n) \\ &= (\alpha x_1,...,\alpha x_n)+(\beta x_1,...,\beta x_n) \\ &= \alpha(x_1,...,x_n)+\beta(x_1,...,x_n) \\ &= \alpha u+\beta u \end{aligned}$$

$(viii)$

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(x_1, ..., x_n) \\ &= (1.x_1, ..., 1.x_n) \\ &= (x_1, ..., x_n) \\ &= u \end{aligned}$$

Logo $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.2. Seja $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ **é uma função**$\}$. Definimos as operações adição e multiplicação por escalar.

$$\begin{aligned} f + g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

O espaço $(V, +, \cdot)$ com as operações definidas acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato,

(i) Temos que

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x) \\ &= (g+f)(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $f + g = g + f$;

(ii) Note que

$$\begin{aligned} [f + (g+h)](x) &= f(x) + (g+h)(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= (f+g)(x) + h(x) \\ &= [(f+g)+h](x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Logo, $f + (g + h) = (f + g) + h$;

(iii) Seja 0 a função identicamente nula, isto é,

$$\begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0(x) = 0. \end{aligned}$$

Então $(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Assim $f + 0 = 0 + f$;

(iv) Dada a função f, definimos a função $-f$ por $(-f)(x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então

$$[f + (-f)](x) = f(x) + ((-f)(x)) = 0 = 0(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo $f + (-f) = 0$;

(v) Temos que

$$\begin{aligned} [\alpha(\beta f)](x) = \alpha(\beta f)(x) &= \alpha(\beta f(x)) \\ &= (\alpha\beta) f(x) \\ &= [(\alpha\beta) f](x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f$;

(vi) Note que

$$\begin{aligned} [\alpha(f + g)](x) = \alpha(f + g)(x) &= \alpha(f(x) + g(x)) \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) \\ &= (\alpha f + \alpha g)(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$;

(vii) Temos que

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta) f](x) &= (\alpha + \beta) f(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) \\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) \\ &= [\alpha f + \beta f](x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, $(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f$;

$(viii)$ Note que $(1f)(x) = 1f(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Portanto, $1f = f$.

Consequentemente, como as oito propriedades são satisfeitas $(V, +, \cdot)$ com as operações definidas acima é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Esses exemplos são apenas uma pequena amostra da infinidade de espaços vetoriais existentes. Uma forma de encontrarmos espaços vetoriais é através de subconjuntos deles. Sob algumas condições eles também são espaços vetoriais, como veremos a seguir.

1.2 Subespaços Vetoriais

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço vetorial de V, quando W também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Equivalentemente,

Proposição 1.1. *W é subespaço de V quando as condições abaixo são satisfeitas:*

(i) $0 \in W$;

(ii) $\lambda u \in W$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in W$;

(iii) $u + v \in W$, *para todo* $u, v \in W$.

Exemplo 1.3. O conjunto

$$A = \{[\alpha_{ij}] \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R}); \alpha_{ij} = 0 \; se \; i \neq j\}$$

das matrizes diagonais é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais. De fato, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in A$ e $v = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in A$. Notamos que o vetor nulo, ou seja, a matriz nula pertence a A. Assim,

$$\alpha u = \alpha \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix} \in A$$

Ademais,

$$u + v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix} \in A.$$

Logo A é um subespaço de $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.4. $W = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. De fato, sejam $u = (1, y_1), v = (1, y_2) \in W$. Então,

$$u + v = (1, y_1) + (1, y_2) = (1 + 1, y_1 + y_2) = (2, y_1 + y_2) \notin W.$$

Logo W não é um subespaço de V.

Algumas operações entre subespaços vetoriais resultam ainda em subespaços, como a soma e a interseção, como vemos na seguinte proposição. Porém é importante ressaltar que a união de subespaços, em geral, não é um subespaço vetorial.

Exemplo 1.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, $U = \{(x, y); x = 0\}$ e $Z = \{(x, y); x + y = 0\}$ subespaços vetoriais de V. Observamos que, sejam $(0, 1) \in U$ e $(-1, 1) \in Z$, temos que $(0, 1) + (-1, 1) = (-1, 2)$. Porém $(-1, 2) \notin U$, pois $= -1 \neq 0$ e $(-1, 2) \notin Z$, pois $-1 + 2 = 1 \neq 0$. Assim $(-1, 2) \notin U \cup Z$.
Portanto $U \cup Z$ não é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, U e W subespaços de V. Então:*

(*a*) *$U \cap W$ é um subespaço de V;*

(*b*) *O conjunto $U + W = \{u + w : u \in U \text{ e } w \in W\}$ é um subespaço de V, denominado de soma de U e W.*

Demonstração. a) Note que

(i) Como $0 \in U$ e $0 \in W$, então $0 \in U \cap W$;

(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in U \cap W$. Então $u \in U$ e $u \in W$. Daí, como U e W são subespaços de V, então $\lambda u \in U$ e $\lambda u \in W$. Deste modo, $\lambda u \in U \cap W$;

(iii) Sejam $u, v \in U \cap W$, então $u, v \in U$ e $u, v \in W$. Como U e W são subespaços de V, então $u + v \in U$ e $u + v \in W$, e, sendo assim, $u + v \in U \cap W$.

Portanto, $U \cap W$ é um subespaço de V.

b) Notamos que

(i) Como U e W são subespaços vetoriais, então $0 \in U$ e $0 \in W$, portanto $0 = 0 + 0 \in U + W$;

(ii) Sejam $v_1 + v_2 \in U + W$ e $u_1 + u_2 \in U + W$, com $u_1, v_1 \in U$ e $u_2, v_2 \in W$. Então

$$(v_1 + v_2) + (u_2 + u_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U + W$$

pois $u_1 + v_1 \in U$ e $u_2 + v_2 \in W$;

(iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, assim

$$\alpha(u_1 + u_2) = \alpha u_1 + \alpha u_2 \in U + W,$$

pois, como U e W são subespaços, $\alpha u_1 \in U$ e $\alpha u_2 \in W$.

Portanto pelos itens $(i), (ii)$ e (iii) da Proposição 1.1, $U + W$ é um subespaço.

$\square$

Definição 1.3. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e U e W subespaços de V. Dizemos que V é soma direta de U e W, se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $V = U + W$,

(ii) $U \cap W = \{0\}$.

Notação: $V = U \oplus W$.

Exemplo 1.6. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e consideremos os subespaços $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ de V. Então, $V = U \oplus W$. Inicialmente vamos mostrar que U e W são subespaços.
De fato, seja $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Temos:

(i) $\{0\} \in U$;

(ii) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (x, 0) \in U$, então $\lambda u = \lambda(x, 0) = (\lambda x, \lambda 0) = (\lambda x, 0) \in U$;

(iii) Sejam $u, v \in U$, isto é $u = (a, 0)$ e $v = (b, 0)$, logo $u+v = (a, 0)+(b, 0) = (a+b, 0) \in U$.

Portanto U é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.
Seja $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$,

(i) $\{0\} \in W$;

(ii) Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $t = (0, y) \in W$. Assim, $\lambda t = \lambda(0, y) = (\lambda 0, \lambda y) = (0, \lambda y) \in W$;

(iii) Sejam $t, s \in W$, com $t = (0, c)$ e $s = (0, d)$. Portanto, $t + s = (0, c) + (0, d) = (0, c + d) \in W$.

Logo W é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. Daí, vamos mostrar que $\mathbb{R}^2 = U + W$.
Pela Proposição 1.2 item (b), o conjunto $U+W \subset \mathbb{R}^2$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$. Mostraremos que $\mathbb{R}^2 \subset U + W$.
Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = \overbrace{(x, 0)}^{\in U} + \overbrace{(0, y)}^{\in W} \in U + W,$$

portanto $\mathbb{R}^2 \subset U + W$. Como $U + W \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \subset U + W$ então $\mathbb{R}^2 = U + W$. Ademais, vamos mostrar que $U \cap W = \{(0,0)\}$. Seja $(x, y) \in U \cap W$. Então $(x, y) \in U$ e $(x, y) \in W$. De $(x, y) \in U$ temos que $y = 0$ e de $(x, y) \in W$ temos que $x = 0$. Logo $(x, y) = (0, 0)$ e, portanto, $U \cap W = (0, 0)$.
Assim, podemos concluir que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

O conceito de soma direta é importante, pois, como pode ser visto em [2], esse conceito acarreta em uma possível decomposição do espaço vetorial. Porém, neste trabalho não trazemos esses resultados, por se tratar de resultados que não são importantes para o nosso objetivo. O leitor interessado pode consultar as referências [1] ou [2].

1.3 Combinação Linear

Como consequência da definição de espaço vetorial, notamos que um vetor é sempre soma de múltiplos de elementos do espaço. Esta observação nos leva a seguinte definição:

Definição 1.4. Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, ..., v_n \in V$ e escalares $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Então o vetor

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$$

é um elemento de V chamado combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

Dessa forma podemos construir conjuntos de vetores que são combinações lineares de vetores dados. O conjunto de todas as combinações lineares de um conjunto de vetores é um espaço vetorial e o chamamos de conjunto gerado. A proposição a seguir formaliza esse conceito.

Proposição 1.3. *Sejam os vetores $v_1, ..., v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear de $v_1, ..., v_n$, denotado por*

$$W = [v_1, ..., v_n] = \{v \in V : v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

é um subespaço de V, chamado de subespaço gerado por $v_1, ..., v_n$.

Demonstração. (i) $0 \in W$, pois $0 = 0v_1 + ... + 0v_n$;

(ii) Sejam $v, w \in W$ com $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ e $w = b_1w_1 + ... + b_nv_n$ onde $a_i, b_i \in$

$\mathbb{R}\ \forall i \in \{1,2,...,n\}$. Utilizando as propriedades associativa e comutativa,

$$\begin{aligned} v + w &= (a_1v_1 + ... + a_nv_n) + (b_1v_1 + ... + b_nv_n) \\ &= (a_1v_1 + b_1v_1 + ... + a_nv_n + b_nv_n) \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + ... + (a_n + b_n)v_n \in W \end{aligned}$$

(iii) Considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (a_1v_1 + ... + a_nv_n) \in W$. Tem-se

$$\lambda u = \lambda(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = \lambda(a_1v_1) + ... + \lambda(a_nv_n) = (\lambda a_1)v_1 + ... + (\lambda a_n)v_n.$$

Logo $(\lambda a_1)v_1+...+(\lambda a_n)v_n \in W$ e, portanto, pelos itens (i), (ii) e (iii) da Proposição (1.1), o conjunto $[v_1, ..., v_n]$ é um subespaço de V.

□

Observamos que o conceito de combinação linear gera uma certa dependência entre os vetores do espaço vetorial. Assim é natural pensarmos se, dado um subconjunto do espaço, existem vetores que não dependem de nenhum outro. A resposta para essa indagação é dada através do conceito de independência linear.

Definição 1.5. Sejam V um espaço vetorial e $A = v_1, ..., v_n \subset V$. Consideremos a equação

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0 \tag{1.1}$$

Dizemos que o conjunto A é linearmente independente (LI), ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são LI, quando a equação (1.1) admite apenas a solução trivial. Ou seja, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Se $a_i \neq 0$ para algum $i = 1, ..., n$, dizemos que o conjunto A é linearmente dependente (LD) ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são LD.

Observações.

(i) O conjunto vazio é um conjunto linearmente independente;

(ii) Todo conjunto contendo o vetor nulo é LD;

(iii) Um conjunto unitário não-nulo é LI;

(iv) Quando vetores são linearmente independentes, um não pode ser escrito em função do outro.

(v) Seja $A_n = \{v_1, ..., v_n\}$ um conjunto LI e v_{n+1} um vetor que não pode ser escrito como combinação linear com os vetores de A_n, então o conjunto $A_{n+1} = \{v_1, ..., v_{n+1}\}$ é LI.

(v) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente. De fato, consideremos A um conjunto LI e $B \subset A$. Vamos usar indução sobre o número de elementos de um conjunto A. Para $n = 1$ o resultado é imediato, pois neste caso temos $A = B$. Suponhamos válido para $n = k$ e mostremos que é válido para $n = k + 1$. Se $A = B$ o resultado segue. Do contrário existe um vetor $v_i \in A$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, tal que $v_i \notin B$, por isso $B \subset A - \{v_i\}$ e pela hipótese de indução, segue que B é LI.

Exemplo 1.7. Considerando $\mathbb{C}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, observamos que o conjunto $A = \{1, i\}$ é linearmente independente.
De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que

$$a.(1) + b.(i) = 0 \Rightarrow a + bi = 0 + 0i \Rightarrow a = 0 \ e \ b = 0.$$

Exemplo 1.8. $P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, o conjunto de matrizes de Pauli, é um conjunto LI. De fato, sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -bi \\ bi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + bi = 0 \\ a - bi = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, \ b = 0 \ e \ c = 0.$$

Na física, essas matrizes são usadas para descrever o *spin* de elétrons.

1.4 Base e dimensão de um Espaço Vetorial

Através dos conceitos de subespaço gerado, visto na Proposição 1.3, e de dependência linear, vemos que podemos caracterizar um espaço vetorial através de um subconjunto de vetores que obedecem a esses dois conceitos. Esse conjunto será suficiente para descrevermos e encontrarmos propriedades acerca dos espaços vetoriais.

Definição 1.6. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, e B um subconjunto de V. Dizemos que B é uma base para V quando:

(i) B é LI;

(ii) B gera V.

Exemplo 1.9. O conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sobre um espaço vetorial $\mathbb{R}$.

(i) Inicialmente vamos verificar se B é LI.

$$\begin{aligned} & a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto $a = b = c = d = 0$. Logo, B é LI.

(ii) Vamos verificar se o conjunto B gera $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tomando uma combinação linear

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí $a = x, b = y, c = z$ e $d = w$ e, assim, B gera $\mathbb{M}_{2\times 2}\mathbb{R}$.

Portanto B é uma base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Observamos que todo espaço vetorial possui uma base, e a demonstração dessa afirmação poder ser encontrada em [2]. Assim, sempre conseguimos um conjunto de vetores que bem caracterizam um espaço vetorial.

É importante ressaltar que a base de um espaço vetorial não é única, porém todas elas possuem a mesma cardinalidade. Assim podemos definir o conceito de dimensão de um espaço vetorial.

Definição 1.7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quando V possui uma base com n vetores, dizemos que V tem dimensão n e denotamos por $dimV = n$. Se n é finito, dizemos que V tem dimensão finita, caso contrário, dizemos que V tem dimensão infinita e denotamos por $dimV = \infty$.

Exemplo 1.10. (a) $dim\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$, onde $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais;

(b) $dim\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$, onde $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$;

(c) $dim\mathbb{R}^n = n$;

(d) $dim\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \infty$ onde $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ denota o conjunto dos polinômios com coeficientes reais.

(e) Como vimos no Exemplo 1.9, o conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sobre $\mathbb{R}$. Logo $dim\mathbb{M}_{2\times 2} = 4$.

Os espaços vetoriais neste trabalho são, em geral, de dimensão finita. Para resultados acerca de espaços de dimensão infinita, o leitor interessado pode consultar qualquer livro de Análise Funcional, como por exemplo, a referência [7].

Notamos que como as bases de um espaço vetorial possuem sempre o mesmo número de vetores, dado um conjunto de vetores, ora com mais vetores, ora com menos vetores que a dimensão do espaço, podemos completar ou reduzir o conjunto de forma a encontrar uma base para o espaço. Os resultados a seguir mostram um algoritmo para se fazer isso.

Teorema 1.1. *Se $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores em V será linearmente dependente.*

Demonstração. Seja $\alpha = \{w_1, ..., w_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores de V, com $m > n$. Basta mostrarmos que existem escalares $x_1, ..., x_m$, não todos nulos, tais que:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_m w_m = 0 \tag{1.2}$$

Como β é uma base de V, cada vetor w_i pertencente a α é uma combinação linear dos vetores de β, isto é, existem números $b_{ij} \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} w_1 = b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + ... + b_{1n}v_n; \\ w_2 = b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + ... + b_{2n}v_n; \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m = b_{m1}v_1 + b_{m2}v_2 + ... + b_{mn}v_n. \end{cases} \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3), temos que

$$\begin{cases} x_1(b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + ... + b_{1n}v_n) + \\ +x_2(b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + ... + b_{2n}v_n) + \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ +x_m(b_{m1}v_1 + b_{m2}v_2 + ... + b_{mn}v_n) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x_1b_{11} + x_2b_{21} + ... + x_mb_{m1})v_1 + \\ &+(x_1b_{12} + x_2b_{22} + ... + x_mb_{m2})v_2 + \\ &+ ... + (x_1b_{1n} + x_2b_{2n} + ... + x_mb_{mn})v_n = 0. \end{aligned}$$

Agora, como $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI, os coeficientes dessa combinação linear são nulos, ou seja,

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + ... + b_{m1}x_m = 0; \\ b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{m2}x_m = 0; \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ b_{1n}x_1 + b_{2n}x_2 + ... + b_{mn}x_m = 0. \end{cases}$$

Esse sistema linear homogêneo possui m variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$ e n equações. Como $m > n$, então existem soluções não-triviais, ou seja, existe $x_i \neq 0$ para algum $i = 1, ..., m$. Logo, $\alpha = \{w_1, ..., w_m\}$ é LD. □

Teorema 1.2. *(Completamento) Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Demonstração. Seja B um subconjunto LI de V. Se B gera V então B é uma base para V. Se $[B] \neq V$, então existe um $v \in V$, tal que $v \notin [B]$. Logo, temos que $B' = B \cup \{v\}$ é LI. Se $[B'] = V$ então acabou a prova. Caso contrário, podemos repetir o processo e expandi-lo para obter um subconjunto B'' de V LI, com mais vetores do que B'. Como a dimensão de V é finita, esse processo deve parar, pois, pelo pelo Teorema 1.1, nenhum conjunto LI em V pode ter mais que n vetores. Quando o processo terminar. obtemos um conjunto LI, o qual será denotado por B^*, que contém B e que gera V. Portanto, B^* é uma base para V. □

Proposição 1.4. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $dimV = n$ e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ um conjunto LI em V. Então B é uma base para V.*

Demonstração. Se B gerar V, então B é uma base para V. Suponha por absurdo que B não gera V, então existe um vetor $v \in V$, tal que $v \notin [B]$. Logo, o conjunto $A = \{v_1, ..., v_n, v\}$ é LI, o que contraria o Teorema 1.1, pois $n(A) = n + 1 > dimV = n$. $\square$

Proposição 1.5. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com $dimV = n$ e B um conjunto gerador para V. Então B pode ser reduzido a uma base B' para V.*

Demonstração. Seja $B = \{v_1, ..., v_r\}$ com $r \geq n$. Se B é LI, então B é uma base para V e $n = r$. Se B é LD, então existe um vetor v_i, que sem perda de generalidade vamos supor ser v_r, que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Logo, temos

$$[v_1, ..., v_{r-1}, v_r] = [v_1, ..., v_{r-1}],$$

Se $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{r-1}\}$ é LI, então a demonstração acabou. Se B_1 é LD, existe um vetor v_i, que sem perda de generalidade, vamos supor que v_{r-1}, que pode ser escrito como combinação linear dos demais. Logo,

$$[v_1, ..., v_{r-2}, v_{r-1}] = [v_1, ..., v_{r-2}],$$

em que $B_2 = \{v_1, v_2, ..., v_{r-2}\}$. Se B_2 é LI, então a demonstração acabou. Repetindo esse processo, como dimensão de V é finita, obtemos uma base B' para V. $\square$

Observamos que dada a dimensão de um espaço vetorial, podemos obter resultados acerca da dimensão de seus subespaços, como podemos ver nos próximos dois resultados.

Proposição 1.6. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $dimV = n$ e W é um subespaço de V.*

(i) W é de dimensão finita e $dim\ W \leq dim\ V$;

(ii) $dim\ W = dim\ V$ se, e somente se, $W = V$.

Demonstração. (i) Se $W = \{0\}$, então $dim\ W \leq n = dim\ V$. Se $W \neq \{0\}$, então qualquer base B para V gera W, pois $W \subset V$. Logo, pela Proposição 1.5, o conjunto gerador B de W pode ser reduzido a uma base B' para W, a qual tem no máximo n vetores. Portanto, W é de dimensão finita e $dim\ W \leq n = dim\ V$.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $W = V$, é claro que $dim\ V = dim\ W$.
($\Leftarrow$)Suponhamos que $dim\ W = dim\ V = n$ e seja $B = \{w_1, ..., w_n\}$ uma base de W. Logo, $[B] = W$. Como $W \subset V$, esses n vetores são LI em V e, pela Proposição 1.4, temos que B forma uma base para V. Portanto $V = [B] = W$.

$\square$

Proposição 1.7. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e U, W subespaços de V. Então,*

$$dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Demonstração. Seja $B_0 = \{u_1, ..., u_k\}$ uma base de $U \cap W$. Pelo Teorema 1.2 esta base B_0 pode ser estendida a uma base $B_1 = \{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_m\}$ de U e a uma base $B_2 = \{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_p\}$ de W. Vamos mostrar que

$$B = \{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_m, w_1, ..., w_p\}$$

é uma base para $U+W$.

Mostramos inicialmente que B é um conjunto LI. Sejam α_i, β_j e $\gamma_l \in \mathbb{R}$, com $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$ e $1 \leq l \leq p$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m + \gamma_1 w_1 + ... + \gamma_p w_p = 0 \tag{1.4}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m}^{\in U} = \overbrace{-\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_p w_p}^{\in W}. \tag{1.5}$$

Assim, $-\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_p w_p \in U \cap W$ e daí se escreve como combinação linear de $u_1, ..., u_k$. Logo, existem escalares $x_1, ..., x_k$, tais que

$$-\gamma_1 w_1 - ... - \gamma_p w_p = x_1 u_1 + ... + x_k u_k$$
$$\Rightarrow x_1 v_1 + ... + x_k v_k + \gamma_1 w_1 + ... + \gamma_p w_p = 0.$$

Como $B_2 = \{u_1, ..., u_k, w_1, ..., w_p\}$ é uma base para W, em particular é LI, então

$$x_1 = ... = x_k = \gamma_1 = ... = \gamma_p = 0.$$

Assim, a combinação linear inicial pode ser escrita simplesmente como

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m = 0.$$

Como B_1 é base para U, temos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_n = 0,$$

Daí B é LI. Logo, como todo vetor $U+W$ se escreve como combinação linear dos vetores de B, então B é uma base de $U+W$. Por fim, notamos que

$$dim(U+W) = k+m+p = (k+m)+(p+k)-k = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

$\square$

1.5 Matriz de Mudança de Base

Quando estudamos a teoria de conjuntos vemos que a ordem dos elementos não importa, no sentido de que os conjuntos $\{1,2,3\}$ e $\{3,2,1\}$ são iguais. Porém se damos uma ordem aos elementos dos conjuntos, podemos dizer que eles são diferentes. Nesse sentido, a partir deste capítulo, as bases de um espaço vetorial são ordenadas. A justificativa para darmos este tratamento está no conceito de localização de um vetor no espaço vetorial, fixada uma base. Agora estaremos interessados no que chamaremos de "coordenadas" de um vetor em uma determinada base.

Definição 1.8. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Dado $v \in V$, existem escalares $a_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tais que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n.$$

Definimos a matriz das coordenadas de v em relação à base α por:

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.11. Seja $\alpha = \{(1,0),(0,-1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ e $v = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Note que,

$$(3,4) = 3.(1,0) + (-4).(0,-1).$$

Logo,

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

é a matriz das coordenadas do vetor $(3,4)$ de $\mathbb{R}^2$ na base $\{(1,0),(0,-1)\}$.

Observamos que as coordenadas de um vetor em uma base são únicas, ou seja, se mudarmos a base escolhida, as coordenadas do vetor serão diferentes. Assim, dadas as coordenadas de um vetor em uma base, é possível escrevermos ele em uma outra base.

Nesse sentido, a matriz de mudança de base se torna uma ferramenta prática para esse processo e a apresentamos a seguir.

Definição 1.9. Sejam $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{w_1, ..., w_n\}$ duas bases de V. Suponhamos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$,

$$w_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + ... + a_{in}v_n.$$

A matriz P dos coeficientes acima é chamada matriz de mudança de base da base α para a base β. Denotamos por $P = [I]_\alpha^\beta$ ou $P = [I]_{\beta,\alpha}$.

Observações. A matriz P dos coeficientes acima é da base velha α para a nova base β.

Sejam $\alpha = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\beta = \{u_1, ..., u_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo :

$$\begin{cases} v = x_1v_1 + ... + x_nv_n \\ v = y_1v_1 + ... + y_nv_n \end{cases} \tag{1.6}$$

Conseguimos relacionar as coordenadas de v em relação a base α,

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação a base β,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $\{v_1, ..., v_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores u_i como combinação linear dos vetores v_j, isto é,

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n \\ u_2 = a_{12}v_1 + ... + a_{n2}v_n \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ u_n = a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n. \end{cases} \tag{1.7}$$

Substituindo (1.7) em (1.6), obtemos:

$$\begin{aligned} v &= y_1u_1 + ... + y_nu_n = \\ &= y_1(a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n) + ... + y_n(a_{1n}v_1 + ... + a_{nn}v_n) \\ &= (a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n)v_1 + ... + (a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n)v_n. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato que $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Logo, denotando

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtemos

$$[v]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [v]_\beta. \tag{1.8}$$

A matriz $[I]_\alpha^\beta$ é a matriz mudança de base da base β para a base α.

Exemplo 1.12. Sejam $\alpha = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^2$. Vamos encontrar $[I]_\alpha^\beta$.
De fato, sejam

$$u_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) \Rightarrow a_{11} = \frac{4}{11} \textbf{ e } a_{21} = \frac{1}{11}$$

e

$$u_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4) \Rightarrow a_{12} = -\frac{3}{11} \textbf{ e } a_{22} = \frac{2}{11}.$$

Portanto,

$$[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 2

Transformações Lineares

As aplicações entre espaços vetoriais são de grande interesse da Álgebra Linear. O motivo para isso é a busca pela identificação de um espaço vetorial de difícil tratamento com espaços mais simples. Essa identificação, que veremos mais adiante se traduz na busca por isomorfismos. Os isomorfismos "transferem" propriedades de um espaço vetorial para outro. Assim, se construímos um outro espaço de difícil tratamento, basta mostrarmos que ele é isomorfo a algum espaço vetorial conhecido e as propriedades são transferidas para o novo espaço.

Neste capítulo veremos o conceito de transformações lineares e algumas das principais propriedades. As principais referência para os resultados deste capítulo são [2], [1] e [4].

Definição 2.1. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear quando:

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$,

para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemplo 2.1. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, y)$ é uma transformação linear. De fato,

(i) Seja $u = (x_1, y_1)$,

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (-\lambda x_1, \lambda y_1) \\ &= \lambda(-x_1, y_1) = \lambda T(u). \end{aligned}$$

(ii) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, assim

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\ &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (-(x_1 + x_2), y_1 + y_2) \\ &= (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) \\ &= (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Logo T é uma transformação linear.

Observações.

(a) As condições (i) e (ii) da Definição 2.1 podem ser escritas como

$$T(\lambda v + u) = \lambda T(v) + T(u), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V.$$

(b) Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear, então:

(i) $T(0) = 0$, de fato

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) = 0 + 0 \Rightarrow T(0) = 0;$$

(ii) $T(-u) = -T(u)$. De fato,

$$0 = T(0) = T(u-u) = T(u) + T(-u) \Longrightarrow T(-u) = -T(u);$$

(iii) $T(u-v) = T(u) - T(v)$. De fato,

$$T(u-v) = T(u + (-v)) = T(u) + T(-v) = T(u) - T(v).$$

(c) Observamos que quando $V = W$, dizemos que T é um operador linear.

(d) Um tipo especial de transformações lineares são aquelas em que o contradomínio é um corpo. A essas transformações damos o nome de funcionais lineares.

Proposição 2.1. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Se $T(v_j) = 0, \forall j \in \{1, ..., n\}$, então $T \equiv 0$.*

Demonstração. De fato, dado $v \in V$, existem $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Avaliando T em v, e aplicando a linearidade de T, temos que

$$T(v) = T(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = a_1T(v_1) + ... + a_nT(v_n) = a_10 + ... + a_n0 = 0.$$

Portanto, $T \equiv 0$. $\square$

O próximo resultado nos mostra a existência de transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita. Além disso, quando fixamos uma base para o domínio, e um conjunto arbitrário com o mesmo número de vetores da base do domínio, essa transformação é única.

Proposição 2.2. *Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{R}$ e $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ordenada de V. Dados vetores arbitrários $w_1, ..., w_n \in W$, existe uma, e somente uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$, para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Demonstração. EXISTÊNCIA: A princípio mostraremos a existência da transformação linear T nas condições acima. Dado um $v \in V$, existem $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$$

Agora, defina a função $T : V \longrightarrow W$ como

$$T(v) = T(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = a_1w_1 + ... + a_nw_n.$$

Vamos mostrar que T é linear.

(i) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n \in V$. Então,

$$\begin{aligned} T(\lambda v) &= (\lambda a_1)w_1 + ... + (\lambda a_n)w_n \\ &= \lambda(a_1w_1 + ... + a_nw_n) \\ &= \lambda T(v). \end{aligned}$$

(ii) Sejam $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n, w = b_1v_1 + ... + b_nv_n \in V$. Então,

$$\begin{aligned} T(u + v) &= (a_1 + b_1)w_1 + ... + (a_n + b_n)w_n \\ &= a_1w_1 + b_1w_1 + ... + a_nw_m + b_nw_n \\ &= (a_1w_1 + ... + a_nw_n) + (b_1w_1 + ... + b_nw_n) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

UNICIDADE: Considerando $T, L : V \longrightarrow W$ duas transformações lineares satisfazendo;

$$T(v_i) = w_i = L(v_i) \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Logo $(T - L)(v_i) = 0 \Rightarrow T = L$. □

Exemplo 2.2. Seja $\beta = \{(1,2),(2,3)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ e $(1,2,3),(3,4,5)$ dois vetores do $\mathbb{R}^3$. Mostre que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,2) = (1,2,3) \text{ e } T(2,3) = (3,4,5).$$

A saber a transformação linear T é dada por

$$T(x,y) = (3x - y, 2x, x + y).$$

De fato, como $\beta = \{(1,2),(2,3)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}(x,y) = a_1(1,2) + a_2(2,3) &= (a_1, 2a_1) + (2a_2, 3a_2)\\ &= (a_1 + 2a_2, 2a_1 + 3a_2),\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ 2a_1 + 3a_2 = y \end{cases} \Rightarrow a_1 = -3x + 2y \text{ e } a_2 = 2x - y.$$

Logo pela Proposição 2.2, existe uma única transformação linear tal que $T(1,2) = (1,2,3)$ e $T(2,3) = (3,4,5)$. Como T é linear, então

$$T(x,y) = (-3x + 2y)(1,2,3) + (2x - y)(3,4,5) = (3x - y, 2x, x + y).$$

O conjunto das transformações lineares entre dois espaços vetoriais é um espaço vetorial. A seguinte proposição mostra que as operações de soma e produto por escalar são fechadas nesse conjunto.

Proposição 2.3. *Sejam $T : V \longrightarrow W$ e $S : V \longrightarrow W$ transformações lineares e $\gamma \in \mathbb{R}$. Então a soma $T + S$ e o produto γT, dados por*

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v), \ (\gamma T)(v) = \gamma T(v), \forall v \in V,$$

são transformações lineares.

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}
(T+S)(u+\lambda v) &= T(u+\lambda v) + S(u+\lambda v) \\
&= T(u) + T(\lambda v) + S(u) + S(\lambda v) \\
&= T(u) + \lambda T(v) + S(u) + \lambda S(v) \\
&= T(u) + S(u) + \lambda T(v) + \lambda S(v) \\
&= T(u) + S(u) + \lambda(T(v) + S(v)) \\
&= (T+S)(u) + \lambda(T+S)(v).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\gamma T)(u+\lambda v) &= \gamma T(u+\lambda v) \\
&= \gamma(T(u) + \lambda T(v)) \\
&= \gamma T(u) + \gamma(\lambda T(v)) \\
&= \gamma T(u) + \lambda(\gamma T(v)) \\
&= (\gamma T)(u) + \lambda(\gamma T)(v).
\end{aligned}$$

□

Denotamos por $L(V, W) = \{T : V \longrightarrow W;$ é uma transformação linear$\}$. Pela Proposição 2.3 fica claro que $L(V, W)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

2.1 Núcleo e imagem de uma transformação linear

Relembramos que o objetivo deste capítulo é darmos propriedades sobre as transformações lineares e definirmos o que são isomorfismos lineares. Neste sentido, os conceitos de núcleo e imagem de uma transformação nos dão propriedades sobre a injetividade e sobrejetividade das transformações.

Vamos lembrar os conceitos de funções injetiva e sobrejetiva.

Definição 2.2. Sejam A e B conjuntos não vazios. Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetiva ou injetora quando, para todo $x, y \in A$, se $f(x) = f(y)$ então $x = y$. Dizemos que f é sobrejetiva ou sobrejetora quando a imagem de f é igual ao seu contra-domínio. Quando f é injetiva e sobrejetiva, dizemos que f é simplesmente bijetiva ou bijetora.

Definição 2.3. Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Definimos o núcleo de T como o conjunto

$$N(T) := \{v \in V : T(v) = 0\} = T^{-1}(0).$$

Proposição 2.4. *$N(T)$ é um subespaço de V. De fato,*

(i) $0 \in N(T)$, pois $T(0) = 0$;

(ii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in N(T)$, então $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0 \Rightarrow \lambda v \in N(T)$;

(iii) Sejam $u, v \in N(T)$ então $T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 \Rightarrow u + v \in N(T)$.

Portanto, $N(T)$ é um subespaço de V.

Exemplo 2.3. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, x + y + z, x + y - z)$. Então

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y, x + y + z, x + y - z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, -1, 0)] \end{aligned}$$

Proposição 2.5. *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então T é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetiva e seja $u \in N(T)$. Então $T(u) = 0 = T(0)$ e, como T é injetiva, $u = 0$. Portanto $N(T) = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $N(T) = \{0\}$. Vamos mostrar que T é injetiva. Sejam $u, v \in V$, tais que $T(u) = T(v)$. Logo $T(u-v) = 0$ e assim $u - v \in N(T) = \{0\}$. Daí, $u - v = 0 \Rightarrow u = v$ e portanto T é injetiva. $\square$

Definição 2.4. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Definimos a imagem de T por

$$Im(T) := \{w \in W : w = T(v) \text{ } para \text{ } algum \text{ } v \in V\} = T(V).$$

Proposição 2.6. *Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear, então a $Im(T) \subseteq W$ é um subespaço de W.*

Demonstração. (i) De fato, $0 = T(0) \in Im(T)$;

(ii) Sejam $w_1, w_2 \in Im(T)$. Então, existem $v_1, v_2 \in V$, tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Logo;

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2).$$

Assim, $w_1 + w_2 \in Im(T)$;

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in Im(T)$. Então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$, daí

$$\lambda w = \lambda T(v) = T(\lambda v).$$

Logo $\lambda w \in Im(T)$. Portanto, pela Definição 1.1, $Im(T)$ é um subespaço de V. □

Um dos resultados mais importantes deste capítulo é o Teorema do Núcleo e da Imagem. Esse Teorema nos mostra que a dimensão do domínio de uma transformação linear é exatamente a soma da dimensão do núcleo com a dimensão da imagem. Assim, apenas calculando o núcleo de uma transformação e conhecendo a dimensão do domínio, podemos decidir se T é sobrejetiva e/ou bijetora, como veremos no Exemplo 2.4.

Teorema 2.1. *(Teorema do Núcleo e da Imagem) Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear, com $dimV = n$. Então*

$$dimV = dimN(T) + dimIm(T).$$

Demonstração. Seja $B = \{u_1, ..., u_n\}$ uma base do $N(T)$. Como B é LI então pelo Teorema do Completamento B pode ser completado até formar uma base para V. Seja

$$\gamma = \{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$$

é uma base para V. Vamos mostrar que

$$\alpha = \{T(u_{r+1}), ..., T(u_n)\}$$

é uma base para $Im(T)$. De fato, dado $w \in Im(T)$ existe $u \in V$, tal que $T(u) = w$. Como $u \in V$, então existem escalares $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tais que

$$u = a_1u_1 + ... + a_ru_r + a_{r+1}u_{r+1} + ... + a_nu_n.$$

Agora, usando o fato que $T(u_i) = 0$, para $1 \leq i \leq r$, pois $u_i \in N(T)$,obtemos:

$$\begin{aligned} w = T(u) &= T(a_1u_1 + ... + a_ru_r + a_{r+1}u_{r+1} + ... + a_nu_n) \\ &= a_1T(u_1) + ... + a_rT(u_r) + a_{r+1}T(u_{r+1}) + ... + a_nT(u_n) \\ &= a_{r+1}T(u_{r+1}) + ... + a_nT(u_n). \end{aligned}$$

Daí, obtemos que $w \in [T(u_{r+1}), ..., T(u_n)]$ e, consequentemente,

$$Im(T) \subset [T(u_{r+1}), ..., T(u_n)].$$

Como $[T(u_{r+1}), ..., T(u_n)] \subset Im(T)$, resulta que,

$$Im(T) = [T(u_{r+1}), ..., T(u_n)].$$

Vamos agora mostrar que

$$\alpha = \{T(u_{r+1}), ..., T(u_n)\} \text{ é } LI.$$

De fato, consideremos a combinação linear

$$\begin{aligned} &a_{r+1}T(u_{r+1}) + ... + a_nT(u_n) = 0 \\ &\Rightarrow T(a_{r+1}u_{r+1}) + ... + T(a_nu_n) \\ &\Rightarrow T(a_{r+1}u_{r+1} + ... + a_nu_n) = 0. \end{aligned}$$

Daí, $a_{r+1}u_{r+1} + ... + a_nu_n \in N(T)$. Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} &a_{r+1}u_{r+1} + ... + a_nu_n = a_1u_1 + ... + a_ru_r = 0 \\ &\Rightarrow a_1u_1 + ... + a_ru_r + (-a_{r+1})u_{r+1} + ... + (-a_n)u_n = 0. \end{aligned}$$

Agora, usando que $\gamma = \{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ é uma base para V, temos

$$a_1 = ... = a_r = a_{r+1} = ... = a_n = 0.$$

Logo, $\alpha = \{T(u_{r+1}), ..., T(u_n)\}$ é LI e, consequentemente, uma base para $Im(T)$. Portanto,

$$dimV = n = r + (n - r) = dimN(T) + dimIm(T).$$

$\square$

Exemplo 2.4. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ é bijetora.
De fato,

$$\begin{aligned} N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, x + y, x + y + z) = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.5, resulta que T é injetora. Usando o Teorema do Núcleo e da Imagem, obtemos

$$dim\mathbb{R}^3 = dimN(T) + dimIm(T) = 0 + dimIm(T) = dimIm(T)$$

Como $Im(T)$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e com mesma dimensão, pela Proposição 1.6, resulta que $Im(T) = \mathbb{R}^3$, isto é, T é sobrejetora e, portanto, T é bijetora.

Corolário 2.1. *Se $T : V \longrightarrow W$ é uma transformação linear e $dimV = dimW$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetora. Logo, pela Proposição 2.5 tem-se que $N(T) = \{0\}$. Portanto, $dim\ N(T) = 0$ e, usando o fato que $dimV = dimW$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, obtemos

$$dimV = dimN(T) + dim\ Im(T) \Rightarrow dimW = 0 + dim\ Im(T) = dim\ Im(T).$$

Como $Im(T) \subset W$ é um subespaço de W e $dimW = dimIm(T)$ obtemos, pela Proposição 1.6, item (ii), que $Im(T) = W$, isto é, T é sobrejetiva.
($\Rightarrow$) Suponhamos que T é sobrejetiva, isto é, $Im(T) = W$. Logo, $dim\ Im(T) = dimW$. Agora, usando a hipótese que $dimV = dimW$, segue-se do Teorema do Núcleo e da Imagem que

$$dimV = dimN(T) + dimIm(T) \Rightarrow dimW = dimN(T) + dimW \Rightarrow dim\ N(T) = 0,$$

o que acarreta que $N(T) = \{0\}$, e pela Proposição 2.5, obtemos que T é injetora. $\square$

Definição 2.5. Seja $T : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear. Dizemos que T é um isomorfismo linear ou simplesmente um isomorfismo, se T é bijetora.

Observação. Quando $T : V \longrightarrow W$ é um isomorfismo, dizemos que os espaços V e W

são isomorfos, isto é denotado por: $V \approx W$. Dois espaços de dimensão finita isomorfos preservam dimensão, isto é, $dimV = dimW$.

Exemplo 2.5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\mapsto T(a, b) = a + bi \end{aligned}$$

T é um isomorfismo.
De fato,

(i) T é injetiva, pois

$$T(a, b) = 0 + 0i \Rightarrow a + bi = 0 + 0i \Rightarrow a = b = 0$$

(ii) T é sobrejetiva. Seja

$$Im(T) = \{T(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Como $a + bi = a.1 + b.i$, $Im(T) = [1, i]$. E $\{1, i\}$ é uma base para $\mathbb{C}$. Portanto $Im(T) = \mathbb{C}$.

Logo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ é um isomorfismo.

O isomorfismo do Exemplo 2.5 induz uma identificação do espaço vetorial dos números complexos, sobre o corpo dos números reais, com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Através desta identificação é que vemos que as propriedades dos números complexos são as mesmas dos pontos do plano $\mathbb{R}^2$.

2.2 Matrizes e Transformações Lineares

Uma das ferramentas mais poderosas para se trabalhar com transformações lineares são as matrizes. Como vimos na Seção 1.5, os vetores podem ser localizados no espaço vetorial tomando uma base fixada. Assim, podemos pensar na ligação entre as coordenadas de um vetor no domínio e as coordenadas de sua imagem por uma transformação linear. Essa ligação é estabelecida pela matriz da transformação.

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\lambda = \{w_1, ..., w_n\}$ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Então,

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + ... + a_{mj}w_m,$$

para cada j com $1 \leq j \leq n$. A matriz de T relativa às bases ordenadas β e λ é a matriz $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$, denotada por $[T]_\lambda^\beta$, dada por

$$[T]_\lambda^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6. Seja $\beta = \{1, x, x^2\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$ e D a transformação linear, definida por:

$$\begin{aligned} D : P_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow P_2(\mathbb{R}) \\ p &\mapsto D_{(p)} = p' \end{aligned}$$

em que p' denota a derivada do polinômio p. Encontraremos a matriz $[D]_\beta^\beta$. Sejam $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$. Temos

$$\begin{aligned} D(1) &= 1' = 0 = 0.1 + 0.x + 0.x^2 \\ D(x) &= x' = 1 = 1.1 + 0.x + 0.x^2 \\ D(x^2) &= (x^2)' = 2x = 0.1 + 2x + 0.x^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$[D]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

É importante notarmos que essa representação matricial para as transformações lineares sempre existe e é única, quando fixadas as bases do domínio e do contra-domínio. Isso é o que mostra o Teorema da Representação Matricial.

Teorema 2.2. *(Teorema da Representação Matricial) Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e β e γ bases ordenadas de V e W, respectivamente, com $\sharp\beta = n$ e $\sharp\gamma = m$. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \psi : L(V, W) &\to \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \\ T &\mapsto \psi(T) = [T]_\gamma^\beta \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Em particular, dim $L(V, W) = dimV.dimW$.

Demonstração. Sejam $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, ..., w_m\}$ as bases ordenadas de V e W, respectivamente. Vamos mostrar que ψ é linear. Sejam $A, B \in L(V, W)$, e escrevamos as combinações lineares

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j} + ... + a_{mj}w_m,$$

e

$$B(v_j) = b_{1j}w_1 + b_{2j} + ... + b_{mj}w_m.$$

Como sabemos, as representações matriciais são $[A]_\gamma^\beta = [a_{ij}]$ e $[B]_\gamma^\beta = [b_{ij}]$. Dado um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(A + \lambda B)(v_j) = A(v_j) + \lambda B(v_j) = (a_{1j} + \lambda b_{1j})w_1 + (a_{2j} + \lambda b_{2j})w_2 + ... + (a_{mj} + \lambda b_{mj})w_m.$$

Logo, vale a identidade matricial:

$$[A + \lambda B]_\gamma^\beta = [a_{ij} + \lambda b_{ij}] = [a_{ij}] + [\lambda b_{ij}] = [A]_\gamma^\beta + \lambda [B]_\gamma^\beta$$

isto é, $\psi(A + \lambda B) = \psi(A) + \lambda\psi(B)$, mostrando a linearidade de ψ.
Seja $A \in N(\psi)$, isto significa que todas as entradas da representação matricial $[A]_\gamma^\beta = [a_{ij}]$ são nulas, $a_{ij} = 0$. Isto implica que,

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j} + ... + a_{mj}w_m = 0, j = 1, ..., n.$$

Logo, pela Proposição 2.1, A é a transformação identicamente nula. Portanto $N(T) = \{0\}$ e pela Proposição 2.5, segue-se que ψ é injetiva. Provemos agora a sobrejetividade de ψ. Dada uma matriz $N = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, considere a única transformação linear $A : V \to W$, tal que

$$A(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j} + ... + a_{mj}w_m.$$

Essa construção nos garante que $\psi(A) = [a_{ij}] = N$.
Como isomorfismos lineares preservam as dimensões, temos que

$$dimL(V, W) = dim\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

e a dimensão do espaço das matrizes $m \times n$ é igual ao produto $dimV \cdot dimW$, concluímos a demonstração do teorema. $\square$

2.3 Operadores Diagonalizáveis

Partindo da matriz de transformação $[T]_\beta$ podemos obter informações sobre o operador, para isso é interessante que tenhamos uma matriz o mais simples possível. Ou seja, é mais interessante que tenhamos uma base β de V tal que a matriz $[T]_\beta$ seja diagonal. Caso a encontremos, seria bem mais fácil fazer contas como por exemplo, calcular o núcleo e a imagem de T. É por esse motivo que o objetivo traçado para esta seção é procurar condições sobre V para que exista uma matriz diagonal que represente o operador $T \in L(V, V)$.

Para isso definimos os conceitos de autovalores e autovetores de um operador linear.

Definição 2.6. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Então um autovalor de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.

Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado autovetor de T associado a λ. Denotamos por $Aut_{(\lambda)}$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.

Definição 2.7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $T \in L(V, V)$. Dizemos que T é diagonalizável quando existir uma base β tal que $[T]_\beta$ é uma matriz diagonal.

Observamos que se T é diagonalizável então existe uma base de V formada por autovetores de T.

Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear onde Vé um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Iremos discutir agora um método para descobrirmos todos os seus autovalores, caso existam. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ for um autovalor de T, então existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda Id - T)(v) = 0$, onde $Id : V \to V$ é a transformação identidade em V. Segue então que

$$\lambda \textit{ é o autovalor de } T \Leftrightarrow N(\lambda Id - T) \neq \{0\}.$$

Seja agora α uma base qualquer de V e consideremos a matriz $[\lambda Id - T]_\alpha$ do operador $(\lambda Id - T) \in L(V, V)$ nesta base. Então

$$N(\lambda Id - T) \neq \{0\} \Leftrightarrow [\lambda Id - T]_\alpha \text{ não é invertível} \Leftrightarrow det([\lambda Id - T]_\alpha) = 0.$$

A relação acima nos mostra o procedimento de como encontrar os autovalores de um operador. Seja α uma base de V, é possível notar que $[x\ Id - T]_\alpha$ é uma matriz onde, na diagonal principal, aparecem polinômios mônicos de grau um (o coeficiente do termo de maior grau é um) com coeficientes em $\mathbb{K}$ e elementos de $\mathbb{K}$ nas outras posições. Portanto

$det([x\ Id - T]_\alpha)$ é um polinômio mônico de grau n sobre $\mathbb{K}$. A equivalência acima pode ser reescrita como

$$\lambda \text{ é um autovalor de } T \Leftrightarrow \lambda \text{ é uma raiz de } det([xId - T]_\alpha)$$

Neste caso, vamos deixar claro que o polinômio independe de qualquer base que seja tomada. Sendo assim sejam α e α' duas bases de V. Pela definição de Matriz de mudança de base sabemos que existe uma matriz invertível P tal que $[T]_\alpha = P^{-1}[T]'_\alpha P$, ou seja, que as matrizes $[T]_\alpha$ e $[T]_{\alpha'}$ são semelhantes. Daí, se indicarmos por Id_n a matriz identidade de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, temos que

$$\begin{aligned} det\ ([x\ Id - T]_\alpha) &= det\ (x\ Id_n - [T]_\alpha) \\ &= det\ (x\ P^{-1}\ Id_n P - P^{-1}[T]_{\alpha'}P) \\ &= det\ (P^{-1}(x\ Id_n - [T]_{\alpha'})P) \\ &= det\ (P^{-1}) \cdot det\ (x\ Id_n - [T]_{\alpha'}) \cdot det\ (P) \\ &= det\ (x\ Id_n - [T]_{\alpha'}) \\ &= det\ ([x\ Id - T]_{\alpha'}) \end{aligned}$$

Assim, $det\ ([x\ Id - T]_\alpha)$ é um invariante de T, não dependendo da base α escolhida.

Definição 2.8. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita, $T \in L(V, V)$ um operador linear e α uma base de V. Chamamos o polinômio $det\ ([x\ Id - T]_\alpha)$ de polinômio característico de T e o denotamos por $p_T(x)$.

Ademais, segue da definição que os autovalores de T, caso existam, serão raízes de seu polinômio característicos.

Exemplo 2.7. Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T.

(i) Primeiro, notemos que $0 \in V_\lambda$, pois $T(0) = 0 = \lambda 0$.

(ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$. Então, $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$. Logo, $\alpha v \in V_\lambda$.

(iii) Sejam $v_1, v_2 \in V_\lambda$. Então, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$. Daí, obtemos $v_1 + v_2 \in V_\lambda$.

Portanto, V_λ é um subespaço de V.

Exemplo 2.8. Consideremos o operador linear

$$\begin{aligned} T :&\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \mapsto T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y). \end{aligned}$$

Encontre:

(i) Os autovalores do operador linear T;

(ii) Os autovalores do operador linear T;

(iii) Uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$ do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T;

(iv) A matriz $[T]_\beta$.

(i) Calculando a matriz T, na base canônica $\gamma = \{(1,0);(0,1)\}$, obtemos

$$[T]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora calculando o polinômio característico, temos

$$p_T(\lambda) = det(\lambda\ Id - [T]_\gamma) = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix},$$

obtemos $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$, cujas raízes são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$. Logo, os autovalores do operador linear T são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$.

(ii) Cálculo dos autovetores T associado aos respectivos autovalores.

• Para $\lambda_1 = 6$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que implica $v = (x, \frac{2}{5}x)$, $x \in \mathbb{R}$ com $x \neq 0$, são os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 6$

• Para $\lambda_2 = -1$, obtemos

$$\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que implica $v = (x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$ são os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

(iii) Considerando $x = 5$ em $v = (x, \frac{2}{5}x)$ e $x = 1$ em $v = (x, -x)$, obtemos a base $\beta = \{(5,2),(1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, formada de autovetores de T.

(iv) Agora, consideremos a base $\beta = \{(5,2), (1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, formada por autovetores de T. Neste caso,

$$\begin{aligned} T(5,2) &= (30,12) = 6.(5,2) + 0.(1,-1) \\ T(1,-1) &= (-1,1) = 0.(5,2) + (-1).(1,-1) \end{aligned}$$

Logo,

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Capítulo 3

Produto Interno

Na geometria, os conceitos de norma e ângulos são conhecidos como propriedades métricas. A álgebra linear generaliza esses conceitos através do produto interno entre vetores de um espaço vetorial. Neste capítulo apresentamos um estudo das propriedades geométricas que são atribuídas a um espaço vetorial por meio de algum produto interno definido sobre ele.

Definição 3.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um produto interno sobre V é uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : V \times V &\to \mathbb{K} \\ (u,v) &\mapsto \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall u, v, w \in V$;

(ii) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall u, v \in V$;

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\forall u, v \in V$;

(iv) $\langle v, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in V$, e $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Quando consideramos espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$, os itens (ii) e (iii) tomam a forma

(ii) $\langle \lambda u, v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ e $\forall u, v \in V$;

(iii) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, $\forall u, v \in V$.

A justificativa para essa mudança está na seguinte observação: Sejam $u, v \in V$ e $i \in \mathbb{C}$ o número imaginário. Temos

$$\langle iu, iv\rangle = ii\langle u, v\rangle = -\langle u, v\rangle \leq 0.$$

Assim, a solução para esse problema é o conjugado.

Observações. Decorrem imediatamente da definição de produto interno as seguintes propriedades:

(i) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle}$, $\forall u, v \in V$. De fato,

$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v, u\rangle} = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle.$$

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle, \forall u, v, w \in V$. De fato,

$$\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle;$$

(iii) $\langle v, 0\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$ $\forall v \in V$. De fato,

$$\langle v, 0\rangle = \langle v, 0v\rangle = 0\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0, v\rangle = 0.$$

Para cada produto interno em um espaço vetorial temos uma norma induzida. O conceito de norma de um vetor é o que generaliza o conceito de módulo de um vetor da Geometria Analítica.

Definição 3.2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sobre V. Para cada $v \in V$, definimos a norma de v por

$$\| v \| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Observação. Um espaço vetorial real V, munido de um produto interno, é chamado espaço euclidiano.

Proposição 3.1. *Seja V um espaço vetorial euclidiano. Então,*

(i) $\| v \| \geq 0, \forall v \in V$ *e* $\| v \| = 0 \Leftrightarrow v = 0$*;*

(ii) $\| \lambda v \| = | \lambda | \| v \|, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\forall v \in V$*;*

(iii) $\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\| u + v \|^2 - \frac{1}{4}\| u - v \|^2, \forall u, v \in V.$

Demonstração. (ii) De fato,

$$\| \lambda v \| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle v, v\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v, v\rangle} = | \lambda | \| v \| .$$

(iii) De fato,

$$\frac{1}{4}\| u + v \|^2 = \frac{1}{4}\langle u + v, u + v\rangle = \frac{1}{4}[\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle] \qquad (3.1)$$

Analogamente,

$$\frac{1}{4}\| u - v \|^2 = \frac{1}{4}\langle u - v, u - v\rangle = \frac{1}{4}[\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\| u - v \|^2 = -\frac{1}{4}[\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle]. \tag{3.2}$$

Somando as equações (3.1)e (3.2), temos que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\| u + v \|^2 - \frac{1}{4}\| u - v \|^2, \forall u, v \in V.$$

□

Outras propriedades métricas importantes e consequentes das definições de norma, são a Lei do Paralelogramo e a Desigualdade Triangular. Essas propriedades generalizam os resultados de mesmo nome da geometria clássica.

Proposição 3.2. *(Lei do paralelogramo) Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle ., .\rangle$. Então,*

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2), \forall u, v \in V.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 &= (\sqrt{\langle u + v, u + v\rangle})^2 + (\sqrt{\langle u - v, u - v\rangle})^2 \\
&= \langle u + v, u + v\rangle + \langle u - v, u - v\rangle \\
&= (\langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle) + (\langle u, u - v\rangle - \langle v, u - v\rangle) \\
&= (\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle) + (\langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - [\langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle]) \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= 2\langle u, u\rangle + 2\langle v, v\rangle \\
&= 2\| u \|^2 + 2\| v \|^2
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja V um espaço vetorial euclidi-*

ano. Então

$$| \langle u, v \rangle | \leq \| u \| \| v \|, \forall u, v \in V$$

Demonstração. Tomemos $u = 0$ ou $v = 0$, então

$$| \langle 0, v \rangle | = 0 \; e \quad \| 0 \| \| v \| = 0 \Rightarrow | \langle u, v \rangle | \leq \| u \| \| v \| \; .$$

Suponhamos que $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Logo, logo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale que $\| u + \lambda v \|^2 \geq 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq \| u + \lambda v \|^2 &= \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda \langle v, u \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle \\ &= \lambda^2 \| v \|^2 + 2 \langle u, v \rangle \lambda + \| u \|^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Considerando o trinômio $f(\lambda) = \lambda^2 \| v \|^2 + 2\langle u, v \rangle \lambda + \| u \|^2$, temos que $f(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Mas, como $\| v \| \neq 0$, isto ocorre, se e somente se, $\triangle \leq 0$. Logo, devemos ter

$$(2\langle u, v \rangle)^2 - 4\| v \|^2 \| u \|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\langle u, v \rangle)^2 \leq \| v \|^2 \| u \|^2.$$

□

Agora, considerando a raiz quadrada positiva de $(\langle u, v \rangle)^2 \leq \| v \|^2 \| u \|^2$, obtemos

$$| \langle u, v \rangle | \leq \| u \| \| v \| \; \forall u, v \in V.$$

Corolário 3.1. *(Desigualdade triangular) Seja V um espaço vetorial euclidiano. Então,*

$$\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|, \forall u, v \in V.$$

Demonstração. Notemos que

$$2\langle u, v \rangle \leq | 2\langle u, v \rangle | = | 2 | | \langle u, v \rangle | = 2 \, | \langle u, v \rangle |$$

Desta observação e usando a proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned}\| u+v \|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \| u \|^2 + 2\langle u, v\rangle + \| v \|^2 &\leq \| u \|^2 + 2 \mid \langle u, v\rangle \mid + \| v \|^2 \\ &\leq \| u \|^2 + 2 \| u \|\| v \| + \| v \|^2 \\ &= (\| u \| + \| v \|)^2, \forall u, v \in V \\ \Rightarrow \| u+v \| \leq \| u \|\| v \|, \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

□

Transformações de interesse neste trabalho são as que preservam produto interno, ou seja, que satisfazem a condição abaixo.

Definição 3.3. Dizemos que uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ preserva o produto interno se

$$\langle T(u), T(v)\rangle_W = \langle u, v\rangle_V, \forall u, v \in V.$$

Exemplo 3.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear tal que $\langle T(v), v\rangle = 0, \forall u, v \in V$. Então $T \equiv 0$. De fato, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e quaisquer $u, v \in V$, temos que

$$0 = \langle T(\lambda u + v), \lambda u + v\rangle = \overline{\lambda}\langle T(u), v\rangle + \lambda\langle T(v), u\rangle.$$

Escolhendo $\lambda = 1$ e $\lambda = -i$ temos que

$$\langle T(u), v\rangle + \langle T(v), u\rangle = 0 \tag{3.3}$$

$$\langle T(u), v\rangle - \langle T(v), u\rangle = 0 \tag{3.4}$$

Somando as equações 3.3 e 3.4, temos que

$$\langle T(u), v\rangle = 0, \forall u, v \in V.$$

3.1 Complemento ortogonal

Dois vetores de um espaço vetorial com produto interno são ortogonais quando o produto interno entre eles é igual a 0. Assim, podemos construir um conjunto de todos os elementos do espaço que são ortogonais a um vetor. Da mesma forma, também podemos construir o conjunto dos vetores ortogonais a um determinado subespaço vetorial. Esses conjuntos são subespaços e nos dão uma decomposição para o espaço vetorial, como veremos no decorrer dessa seção.

Definição 3.4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U um subespaço de V. Definimos o complemento ortogonal de U por

$$U^{\perp} = \{v \in V; \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in U\}$$

Proposição 3.4. *Seja V um espaço euclidiano e U um subespaço de V. Então $U^{\perp}$ é um subespaço de V.*

Demonstração. (i) Note que $0 \in U^{\perp}$, pois $\langle 0, u\rangle = 0, \forall u \in U$;

(*ii*) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in U^{\perp}$. Então,

$$\langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \lambda.0 = 0, \forall u \in U.$$

Logo, $\lambda v \in U^{\perp}$;

(*iii*) Sejam $v, w \in U^{\perp}$. Então,

$$\langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = 0 + 0 = 0, \forall u \in U.$$

Logo, $v + w \in U^{\perp}$. Portanto $U^{\perp}$ é um subespaço de V.

□

Observamos que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e temos $dimV = n$, então dados U um subespaço de V e $\gamma = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$ uma base de U, $u \in U^{\perp}$ se, e somente se, $\langle u, u_i\rangle = 0,\ \forall i = 1, 2, ..., r$.

De fato, como $u \in U^{\perp}$, então $\langle u, z\rangle = 0, \forall z \in U$. Em particular para $z = u_i, i = 1, 2, ..., r$. Reciprocamente, suponhamos que $\langle u, u_i\rangle = 0, \forall i = 1, 2, ..., r$. Então, se $z \in U$, existem $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$z = a_1u_1 + ... + a_ru_r.$$

Pela linearidade do produto interno,

$$\langle u, z\rangle = \langle u, a_1u_1 + ... + a_ru_r\rangle = a_1\langle u, u_1\rangle + ... + a_r\langle u, u_r\rangle = 0.$$

Portanto, $u \in U^{\perp}$.

Exemplo 3.2. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Mostre que $U^{\perp} = [(1, 1, 1)]$.

Observamos que

$$v = (x, y, z) \in U \Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Assim,

$$(x, y, z) \in U^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle (x, y, z), (-1, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (-1, 0, 1) \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Logo $x = y = z$ e portanto

$$U^{\perp} = [(1, 1, 1)].$$

Definição 3.5. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$.

(i) Dizemos que o conjunto

$$A = \{v_1, v_2, ..., v_r\} \subseteq V$$

é ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para $i \neq j$.

(ii) Dizemos que A é ortonormal se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{se} \quad i = j. \end{cases}$$

Exemplo 3.3. O conjunto $A = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortogonal em relação ao produto interno canônico.
De fato, denotando por $v_1 = (2, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, -5)$, obtemos $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Portanto A é um conjunto ortogonal.

Proposição 3.5. *Seja V um espaço euclidiano e $A = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ ortonormal. Então, A é LI.*

Demonstração. Suponhamos que

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}0 = \langle 0, v_i\rangle &= \langle a_1v_1 + ... + a_iv_i + ... + a_nv_n, v_i\rangle\\ &= a_1\langle v_1, v_i\rangle + ... + a_i\langle v_i, v_i\rangle + ... + a_n\langle v_n, v_i\rangle\\ &= a_i,\ \forall i = 1, ..., n.\end{aligned}$$

Portanto, $A = \{v_1, ..., v_n\}$ é LI. □

Proposição 3.6. *Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $B = \{v_1, ..., v_r\}$ um subconjunto ortonormal de V. Então, para todo $v \in V$, o vetor*

$$u = v - \langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - ... - \langle v, v_r\rangle v_r$$

é ortogonal a $[B] = [v_1, ..., v_r]$.

Demonstração. Seja $w \in [B] = [v_1, ..., v_r]$. Então, existem $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$w = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_rv_r.$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\langle u, w\rangle &= \langle v - \langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - ... - \langle v, v_r\rangle v_r, a_1v_1 + ... + a_rv_r\rangle\\ &= \langle v, a_1v_1 + ... + a_rv_r\rangle - \langle v, v_1\rangle \overbrace{\langle v_1, a_1v_1 + ... + a_rv_r\rangle}^{a_1} -\\ &- \langle v, v_2\rangle \overbrace{\langle v_2, a_1v_1 + ... + a_rv_r\rangle}^{a_2} - ... - \langle v, v_r\rangle \overbrace{\langle v_r, a_1v_1 + ... + a_rv_r\rangle}^{a_r}\\ &= [a_1\langle v, v_1\rangle + a_2\langle v, v_2\rangle + ... + a_r\langle v, v_r\rangle] -\\ &- [a_1\langle v, v_1\rangle + a_2\langle v, v_2\rangle + ... + a_r\langle v, v_r\rangle] = 0\end{aligned}$$

Portanto, u é ortogonal a $[B] = [v_1, ...v_n]$. □

Exemplo 3.4. Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortogonal de espaço euclidiano V. Então, para qualquer $v \in V$,

$$v = \frac{\overline{\langle v, v_1\rangle}}{\| v_1 \|^2}v_1 + \frac{\overline{\langle v, v_2\rangle}}{\| v_2 \|^2}v_2 + ... + \frac{\overline{\langle v, v_n\rangle}}{\| v_n \|^2}v_n.$$

De fato, suponhamos que $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$. Então, pelas propriedades de produto interno e o fato de β ser ortogonal, obtemos:

$$\begin{aligned}\langle v, v_1\rangle &= \langle a_1v_1 + ... + a_nv_n, v_1\rangle \\ &= \overline{a_1}\langle v_1, v_1\rangle + \overline{a_2}\langle v_2, v_1\rangle + ... + \overline{a_n}\langle v_n, v_1\rangle \\ &\Rightarrow \langle v, v_1\rangle = \overline{a_1} \| v_1 \|^2 \\ &\Rightarrow a_1 = \frac{\overline{\langle v, v_1\rangle}}{\| v_1 \|^2}\end{aligned}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$a_i = \frac{\overline{\langle v, v_i\rangle}}{\| v_i \|^2}, \forall i = 1, ..., n.$$

Teorema 3.1. *(Decomposição Ortogonal) Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço de V. Então $V = U \oplus U^{\perp}$. Além disso, a norma do vetor $v \in V$ é dado pela fórmula de Pitágoras.*

$$\| v \|^2 = \| u \|^2 + \| w \|^2, \text{ onde } v = u + w, \ u \in U \text{ e } w \in U^{\perp}$$

Demonstração. Como U e $U^{\perp}$ são subespaços de V, então $U + U^{\perp}$ é um subespaço de V. Seja $\gamma = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de U. Então pela proposição 3.6, para qualquer $v \in V$, o vetor

$$z = v - \overbrace{\langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - ... - \langle v, v_r\rangle v_r}^{:=u \in U}$$

é ortogonal a todo vetor de U. Assim $z \in U^{\perp}$ e daí

$$v = u + z \in U + U^{\perp}.$$

Portanto, $V \subset U + U^{\perp}$ e consequentemente, $V = U + U^{\perp}$. Consideremos agora $v \in U \cap U^{\perp}$. Então, $v \in U$ e $v \in U^{\perp}$. De $v \in U^{\perp}$, temos que $\langle v, u\rangle = 0, \forall u \in U$. Em particular, para $u = v$, $\langle v, v\rangle = 0$, acarretando que $v = 0$. Portanto, $U \cap U^{\perp} = 0$ e consequentemente, $V = U \oplus U^{\perp}$.

Agora mostraremos a fórmula de Pitágoras. Dado $v \in V$, então $v = u + w, u \in U$ e $w \in U^{\perp}$. Assim, $\langle u, w\rangle = 0$ e portanto,

$$\| v \|^2 = \langle v, v\rangle = \langle u + w, u + w\rangle = \| u \|^2 + 2\langle u, w\rangle + \| w \|^2 .$$

$\square$

Corolário 3.2. *Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita e W um subespaço de V. Então,*

$$dimV = dimW + dimW^{\perp}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.7 e do fato de $V = W + W^{\perp}$ e que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$, obtemos

$$dimV = dimW + dimW^{\perp} - dim(W \cap W^{\perp}) = dimW + dimW^{\perp}.$$

□

Exemplo 3.5. Seja V um espaço vetorial e W um subespaço de V. Mostre que

$$W = (W^{\perp})^{\perp}$$

De fato, $(W^{\perp})^{\perp} \subset W$ não apresenta dificuldade, neste caso, mostremos a inclusão oposta. Pelo Corolário 3.2, temos

$$dim(W^{\perp})^{\perp} = dim\ V - dim\ W^{\perp} = dim\ V - (dim\ V - dim\ W) = dim\ W.$$

Como $(W^{\perp})^{\perp} \subset W$ e $dim\ (W^{\perp})^{\perp} = dim\ W$, pela Proposição 1.6, item (ii), que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Capítulo 4

Operadores Adjuntos

4.1 O Teorema da representação de Riesz

Nesta seção provaremos o teorema da representação de Riesz para um espaço vetorial de dimensão finita, o qual afirma que todo funcional linear em um espaço com produto interno pode ser escrito como um produto interno e utilizaremos este teorema para construção de operador adjunto.

Dado um vetor $v \in V$, a ele associamos um funcional linear em V, como segue:

$$\begin{aligned} \phi_v : V &\to \ \mathbb{C} \\ u &\mapsto \phi_v(u) = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

De fato, ϕ_v é um funcional linear, pois, para todos $u_1, u_2 \in V$ e todo $a \in \mathbb{C}$, temos

$$\phi_v(u_1 + au_2) = \langle u_1 + au_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \overline{a} \langle u_2, v \rangle = \phi_v(u_1) + \overline{a} \phi_v(u_2).$$

Observação. A recíproca deste fato é também verdadeira, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *(Teorema da Representação de Riesz) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno e $\phi : V \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então, existe um único vetor $v \in V$ tal que $\phi = \phi_v$, isto é,*

$$\phi(u) = \phi_v(u) = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V.$$

Demonstração. Seja $\phi \in L(V, \mathbb{C})$ e fixe uma base ortonormal $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ de V. Note que pelo Exemplo 3.4 podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= \overline{\langle u, v_1\rangle}v_1 + \overline{\langle u, v_2\rangle}v_2 + ... + \overline{\langle u, v_n\rangle}v_n \\ &\Rightarrow \phi(u) = \phi(\overline{\langle u, v_1\rangle}v_1 + \overline{\langle u, v_2\rangle}v_2 + ... + \overline{\langle u, v_n\rangle}v_n) \\ &= \langle u, v_1\rangle\phi(v_1) + ... + \langle u, v_n\rangle\phi(v_n). \end{aligned}$$

Tomando $\overline{\phi(v_1)}v_1 + ... + \overline{\phi(v_n)}v_n$. Temos que

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle u, \overline{\phi(v_1)}v_1 + ... + \overline{\phi(v_n)}v_n\rangle \\ &= \langle u, v_1\rangle\overline{\overline{\phi(v_1)}} + ... + \langle u, v_n\rangle\overline{\overline{\phi(v_n)}} \\ &= \langle u, v_1\rangle\phi(v_1) + ... + \langle u, v_n\rangle\phi(v_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\phi(u) = \langle u, v\rangle = \phi_v(u), \forall u \in V \\ &\Rightarrow \phi = \phi_v \end{aligned}$$

Agora, supomos que existem $v, w \in V$, tais que

$$\phi = \phi_v = \phi_w$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\phi(u) = \phi_v(u) = \phi_w(u) \\ &\Rightarrow \langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle \\ &\Rightarrow \langle u, v - w\rangle = 0 \\ &\Rightarrow v - w = 0 \\ &\Rightarrow v = w. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in L(V, V)$, então existe um único operador $T^* \in L(V, V)$, tal que*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \ \forall u, v \in V.$$

Demonstração. (Existência) Sejam $v \in V$ e

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{K} \\ u &\mapsto f(u) = \langle T(u), v \rangle \end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO: f é um funcional linear. De fato,

$$\begin{aligned} f(u + \lambda w) &= \langle T(u + \lambda w), v \rangle \\ &= \langle T(u) + \lambda T(w), v \rangle \\ &= \langle T(u), v \rangle + \langle \lambda T(w), v \rangle \\ &= \langle T(u), v \rangle + \lambda \langle T(w), v \rangle \\ &= f(u) + f(w) \end{aligned}$$

e daí f é funcional linear. Pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único vetor $w \in V$ tal que

$$f(u) = \phi_w(u) = \langle u, w \rangle, \ \forall u \in V.$$

Ou seja,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, w \rangle, \ \forall u \in V.$$

Como w é determinado de forma única, então definimos

$$T^*(v) = w$$

Por construção,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \ \forall u, v \in V.$$

AFIRMAÇÃO: $T^* \in L(V, V)$.
Queremos mostrar que

$$T^*(u + \lambda v) = T^*(u) + \lambda T^*(v)$$

Observamos que, dados $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle u, T^*(v_1 + \lambda v_2)\rangle &= \langle T(u), v_1 + \lambda v_2\rangle \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \langle T(u), \lambda v_2\rangle \\ &= \langle T(u), v_1\rangle + \lambda\langle T(u), v_2\rangle \\ &= \langle u, T^*(v_1)\rangle + \lambda\langle u, T^*(v_2)\rangle \\ &= \langle u, T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2)\rangle\end{aligned}$$

Logo,

$$T^*(v_1 + \lambda v_2) = T^*(v_1) + \lambda T^*(v_2).$$

Portanto T^* é linear.
UNICIDADE: Suponha T_1^* e T_2^* adjuntos de T. Então,

$$\begin{cases}\langle T(u), v\rangle = \langle u, T_1^*(v)\rangle, \forall u, v \in V \\ \langle T(u), v\rangle = \langle u, T_2^*(v)\rangle, \forall u, v \in V\end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\langle u, T_1^*(v)\rangle = \langle u, T_2^*(v)\rangle; \forall u, v \in V \\ &\Rightarrow T_1^*(v) = T_2^*(v); \forall v \in V \\ &\Rightarrow T_1^* = T_2^*\end{aligned}$$

□

Definição 4.1. Seja $T \in L(V, V)$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno. Dizemos que T possui um adjunto se existir um operador linear $T^* \in L(V, V)$ tal que $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$, para todos $u, v \in V$. Diremos, neste caso, que T^* é o adjunto de T.

Observação. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita com base ortonormal $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $T \in L(V, V)$ então para T^*:

$$T^*(v) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle T(v_j), v\rangle} v_j, \forall v \in V$$

Observação. O Teorema 4.2 garante que se V é de dimensão finita, então todo operador

$T \in L(V,V)$ possui um adjunto. Isto, porém, não é verdade de modo geral quando $dim_{\mathbb{K}}V = \infty$. Neste caso, é possível mostrar que todo operador linear contínuo, entre os chamados espaços de Hillbert, admite adjuntos. Tais conceitos, bem como a demonstração da afirmação feita, podem ser encontrados em textos básicos de Análise Funcional, como exemplo o [7].

Exemplo 4.1. Considere no $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e o produto interno dado por $\langle A, B\rangle = tr\langle \overline{B}^t, A\rangle$, para todo $A, B \in V$. Dada uma matriz $M \in \mathbb{M}_n((\mathbb{C})$, defina o operador linear $T_M : V \to V$ dada por $T_M(A) = MA$. Queremos descrever a transformação $(T_M)^*$ que sabemos que existe pelo Teorema 4.2.

De fato, definindo o operador

$$\begin{aligned} T_M : & V \to V \\ & A \mapsto MA, \end{aligned}$$

observamos que

$$\begin{aligned} \langle T_M(A), B\rangle = \langle MA, B\rangle = tr(\overline{B}^t(MA)) &= tr((\overline{B}^t M)A) \\ &= tr(\overline{B}^t((M^t)^t)A) \\ &= tr((M^t\overline{B})^t A) \\ &= tr(\overline{\overline{(M^t\overline{B})}}^t A) \\ &= tr(\overline{(\overline{M}^t B)}^t A) \\ &= \langle A, \overline{M}^t B\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle T_M(A), B\rangle = \langle A, \overline{M}^t B\rangle$, para todo $A \in V$, teremos pela unicidade do adjunto que $(T_M)^*(B) = \overline{M}^t B$.

Proposição 4.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno. Sejam $T, S \in L(V,V)$ operadores lineares que admitem adjuntos T^* e S^*, respectivamente e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então*

(i) $T + S$ *admite adjunto e* $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(ii) λT *admite adjunto e* $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(iii) $T \circ S$ *admite adjunto e* $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

(iv) T^* *admite adjunto e* $(T^*)^* = T$.

Demonstração. (i) Se $u, v \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (T+S)(u), v\rangle &= \langle (T(u) + S(u), v\rangle \\
&= \langle T(u), v\rangle + \langle S(u), v\rangle \\
&= \langle (u, T^*(v)\rangle + \langle u, S^*(v)\rangle \\
&= \langle u, T^*(v) + S^*(v)\rangle \\
&= \langle u, (T+S)^*(v)\rangle
\end{aligned}$$

Como a igualdade dada acima vale para todos os vetores $u, v \in V$, então $T+S$ admite adjunto e $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(ii) Para $u, v \in V$, teremos que

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda T)(u), v\rangle &= \lambda\langle (T(u), v\rangle \\
&= \lambda\langle u, T^*(v)\rangle \\
&= \langle u, \overline{\lambda} T^*(v)\rangle \\
&= \langle u, (\overline{\lambda} T^*)(v)\rangle.
\end{aligned}$$

e, portanto, λT admite adjunto e $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(iii) Para $u, v \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (T \circ S)(u), v\rangle &= \langle T(S(u)), v\rangle \\
&= \langle S(u), T^*(v)\rangle \\
&= \langle u, S^*(T^*(v))\rangle \\
&= \langle u, S^* \circ T^*(v)\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $T \circ S$ possui adjunto e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

(iv) Para $u, v \in V$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle T^*(u), v\rangle &= \overline{\langle v, T^*(u)\rangle} \\
&= \overline{\langle T(v), u\rangle} \\
&= \langle u, T(v)\rangle.
\end{aligned}$$

e, portanto, T^* possui adjunto e $(T^*)^* = T$.

$\square$

Ademais, uma consequência da proposição acima é que o conjunto dos operadores que admitem adjuntos é um subespaço de $L(V,V)$, além disso, o operador nulo admite adjunto, sendo que é o próprio operador.

Observação. Quando o espaço vetorial V tiver dimensão finita, vimos que qualquer operador $T \in L(V,V)$ admite T^*. Para a descrição deste adjunto, é muitas vezes conveniente utilizar as matrizes de T e T^* com relação a uma base ortonormal fixada e ver como elas estão relacionadas. É o que faremos a seguir.

Proposição 4.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e de dimensão finita. Sejam $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de V e $T \in L(V,V)$. Se $[T]_\beta = (a_{ij})_{ij}$, então $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$, $\forall i, j = 1, ..., n$.*

Demonstração. Pela definição de $[T]_\beta$ que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para cada } j = 1, ..., n \tag{4.1}$$

Porém β é ortonormal, então podemos escrever $\forall v \in V$.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

Em particular, temos

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_j), v_i \rangle v_i \text{ para cada } j = 1, ..., n. \tag{4.2}$$

Comparando-se as equações (4.1) e (4.2) que nos dão ambas as coordenadas de $T(v_j)$ em termos da base β, concluímos então que

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle, \text{ para todo } i, j = 1, ..., n.$$

$\square$

Teorema 4.3. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, e seja $T \in L(V,V)$. Em relação a qualquer base ortonormal de V, a matriz de T^* é igual à transposta conjugada da matriz T.*

Demonstração. Seja $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal do espaço V e considere $[T]_\beta = (a_{ij})_{ij}$ e $[T^*]_\beta = (c_{ij})_{ij}$ as matrizes dos operadores T e T^*, respectivamente, com relação à base β. Daí, utilizando a observação 4.1 temos que $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$ e $c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \rangle$ para todos $i, j = 1, ..., n$. Usando-se a definição de T^* e as propriedades do produto interno temos

$$c_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i \langle = \overline{\langle v_i, T^*(v_j)\rangle} = \overline{\langle T(v_i), v_j\rangle} = \overline{a_{ji}}$$

Portanto $\overline{[T]}_\beta^t = [T^*]_\beta$. □

Exemplo 4.2. Considere $\mathbb{C}^3$ o produto interno usual e seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y, iz, y - iz)$. Se β for uma base canônica de $\mathbb{C}^3$, teremos então

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

Como β é ortonormal, temos que

$$[T^*]_\beta = \overline{[T]}_\beta^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$$

e portanto, $T^*(x, y, z) = (x, 2x + z, -iy + iz)$. Note que $\gamma = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ é uma base (não ortonormal) de $\mathbb{C}^3$. Daí,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ i - 3 & i - 2 & i \\ 1 - 2i & 1 - 2i & -2i \end{pmatrix}$$

e

$$[T^*]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & i - 1 \end{pmatrix}$$

.

Logo,$[T^*]_\gamma \neq \overline{[T]}_\gamma^t$.

Exemplo 4.3. Seja $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ o operador dado por $T(1, 0) = (1 + i, 2)$ e $T(0, 1) = (i, i)$. Considerando em $\mathbb{C}^2$ o produto interno canônico, determine T^*. De fato, fixe $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 + i & i \\ 2 & i \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 4.3 temos que

$$[T^*]_\beta = \overline{[T]}^t_\beta = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

Assim,

$$T^*(1,0) = (1-i, -i) \ e \ T^*(0,1) = (2, -i)$$

Logo,

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) = z_1(1,0) + z_2(0,1) \Rightarrow T^*(z_1, z_2) &= z_1 T^*(1,0) + z_2 T^*(0,1) \\ &= z_1(1-i, -i) + z_2(2, -i) \\ &= ((1-i)z_1, -iz_1) + (2z_2, -iz_2) \\ &\Rightarrow T^*(z_1, z_2) = ((1-i)z_1 + 2z_2, -iz_1 - iz_2))\end{aligned}$$

Exemplo 4.4. Considere $\mathbb{C}^2$ com produto interno usual. Seja $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ tal que a matriz em relação a base ordenada canônica é definida por

$$a_{jk} = i^{j+k} \ onde \ i \ é \ o \ número \ imaginário)$$

Determine uma base $N(T^*)$. De fato, como $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, então $T \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Assim por definição, e tomando β como a base canônica de $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Temos

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 4.3 temos,

$$[T^*]_\beta = \overline{[T]}^t_\beta = \begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$T^*(1,0) = (-1, i) \ e \ T^*(0,1) = (i, 1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}T^*(z_1, z_2) &= z_1 T^*(1,0) + z_2 T^*(0,1) \\ &= z_1(-1, i) + z_2(i, 1) \\ &= (-z_1, iz_1) + (iz_2, z_2) \\ &= (-z_1 + iz_2, z_2 + iz_1)\end{aligned}$$

Assim, buscando $N(T^*)$, temos

$$(-z_1 + iz_2, z_2 + iz_1) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} -z_1 + iz_2 = 0 \ .(-i) \\ z_2 + iz_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} +z_2 + iz_1 = 0 \\ z_2 + iz_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = -iz_1$$

Logo,

$$N(T^*) = \{(z_1, -iz_1); z_1 \in \mathbb{C}\} = [(1, -i)] \Rightarrow dim N(T^*) = 1.$$

4.2 Autoadjuntos

Definição 4.2. Seja $T \in L(V,V)$, onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno. Dizemos que T é autoadjunto se T admite adjunto T^* *e* $T^* = T$. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usamos também o termo hermitiano e no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, usamos o termo simétrico.

Proposição 4.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ com produto interno e de dimensão finita e $T \in L(V,V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é autoadjunto;*

(ii) $\overline{[T]}_\beta^t = [T]_\beta$ *para todo base ortonormal β de V;*

(iii) *Existe uma base ortonormal β de V tal que* $\overline{[T]}_\beta^t = [T]_\beta$.

Demonstração. Seja β uma base ortonormal de V. Pelo Teorema 4.3 vimos que $[T^*]_\beta = \overline{[T]}_\beta^t$. Assumindo T autoadjunto, então temos $\overline{[T]}_\beta^t = [T]_\beta$ o que mostra a relação entre os itens $(i) \Rightarrow (ii)$. Por outro lado, se assumirmos que $\overline{[T]}_\beta^t = [T]_\beta$, então $[T^*]_\beta = [T]_\beta$ e, portanto, T é autoadjunto, o que prova que $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Corolário 4.1. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e β uma base ortonormal de V. Se $T \in L(V,V)$ for um operador linear autoadjunto e se $[T]_\beta = (a_{ij})_{ij}$ então $a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \forall i,j$. Em particular, os elementos da diagonal de $[T]_\beta$ são números reais.*

Exemplo 4.5. Considere em $\mathbb{C}^2$ o produto interno usual e seja $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ a transformação linear dada por

$$T(z,w) = (2z + (1+i)w, (1-i)z + 3w), \ \forall z, w \in \mathbb{C}$$

. Se considerarmos a base canônica $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{C}^2$ teremos que

$$\begin{cases} T(1,0) = (2, 1-i) = 2(1,0) + (1-i)(0,1) \\ T(0,1) = (1+i, 3) = (1+i)(1,0) + 3(0,1) \end{cases} \Rightarrow [T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} = \overline{[T]}_\beta^t = [T^*]_\beta$$

e, portanto, T é um operador autoajdunto.

Considerações Finais

Esse trabalho mostrou alguns resultados que são importantes da Álgebra Linear, como por exemplo, a relação entre matrizes e transformações lineares. Mostramos também que partindo dessa relação é que todos os outros resultados presentes nesse trabalho são obtidos. Além disso, definimos objetos e demonstramos proposições e teoremas acerca dos operadores adjuntos e auto-adjuntos.

Construímos um texto que contribuirá tanto para o conhecimento de leitores de um curso inicial de Álgebra Linear, quanto para a revisão de conceitos por leitores mais experientes.

Fica claro que essa monografia não traz todos os resultados da área, mas desperta no leitor o interesse por continuar procurando novos resultados sobre esse campo extensamente aplicável da matemática. Sobre os operadores auto-adjuntos, concluímos que são os um dos tipos de operadores mais práticos de se trabalhar devido a sua simplicidade enquanto representação matricial. Por serem diagonalizáveis, suas representações matriciais além de serem facilmente obtidas nos fornece propriedades incríveis. O fato dos seus autovalores serem reais, ajuda muito nessa representação e por isso foi dado destaque a esse resultado nesse trabalho.

Para mim o trabalho me fez estudar novamente estes conceitos que, de certa forma foram passados despercebidos no primeiro curso de Álgebra Linear e me proporcionou um momento de estudo intenso e profundo em que me despertou um enorme interesse pela Álgebra. Espero que, ao final da leitura deste trabalho, o leitor sinta o mesmo desejo que eu senti.

Referências Bibliográficas

[1] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. *Um Curso de Álgebra Linear.* São Paulo: Edusp, 2010. 263 p.

[2] LOURêDO, Aldo Trajano; OLIVEIRA, Alexandro Marinho. *Um Primeiro Curso de Álgebra Linear.* Campina Grande-pb: Lf Editorial e Eduepb, 2015. 352 p.

[3] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear.* 3. ed. Rio de Janeiro: CNPq, 1998. 357 p.

[4] BOLDRINI, José Luís; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLEI, Henri G.. *Álgebra Linear.* 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980. 407 p.

[5] SANTOS,Djair Paulino dos. *O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos em espaços de dimensão finita.* 2014. 87 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas- Ufal, Arapiraca, 2014. Cap. 3.

[6] GRIFFITHS, David J. *Introduction to Quantum Mechanics* 1a edição, Prentice Hall, 1995, 2a edição, Benjamin Cummings, 2004, tradução brasileira, Pearson, "Mecânica Quântica".

[7] BOTELHO, G.;PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1ª Ed., 2015.