



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

MATEUS MEDEIROS GUALBERTO

TEOREMA DOS RESÍDUOS E APLICAÇÕES

PATOS - PB

2018

MATEUS MEDEIROS GUALBERTO

TEOREMA DOS RESÍDUOS E APLICAÇÕES

Monografia submetida à Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias.

PATOS - PB

2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

G899t Gualberto, Mateus Medeiros.
Teorema dos Resíduos e Aplicações [manuscrito] / Mateus Medeiros Gualberto. - 2018.
93 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2018.
"Orientação : Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."
1. Teorema dos resíduos. 2. Função analítica. 3. Variáveis complexas. I. Título
21. ed. CDD 516.24

MATEUS MEDEIROS GUALBERTO

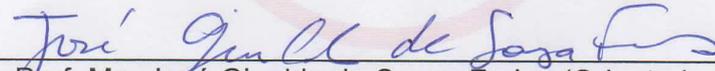
TEOREMA DOS RESÍDUOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

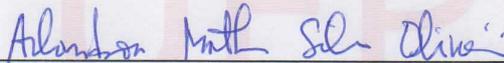
Área de concentração: Matemática

Aprovado em 28 de novembro de 2018.

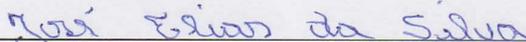
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. José Elias da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a minha primeira professora, vizinha, prima e amiga Joana D'arc (In memoriam). Se hoje sei decifrar cálculos mirabolantes é porque com ela aprendi que $2 + 2 = 4$.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a grande força de vida ao qual denominamos de Deus. Se estou em condições de redigir estas palavras é porque esta força me sustenta, independente se me é perceptível ou não. Ele existe porque existe. Agradeço também a mim mesmo, pela determinação, esforço e dedicação. Tenho plena certeza que dei muito de mim, independentemente de nota ou reconhecimento.

Sou grato aos meus familiares que sempre me incentivaram a caminhar para a frente. De modo bastante especial, agradeço enormemente a minha mãe Amariles por todas as palavras de estímulo quando pensei em desistir, pelos conselhos que guiaram minhas ações e por não medir esforços em me auxiliar naquilo que fosse preciso. Não é por coincidência que tem por nome uma flor.

Agradeço aos meus amigos, de dentro e fora de sala de aula, que são seres de luz que sempre me ajudaram e me arrancaram sorrisos em dias em que via tudo nublado. Passamos por vários momentos bons e outros nem tanto, mas em cada um deles o humor e a bagunça eram características predominantes.

Agradeço aos professores que ao longo desta jornada me proporcionaram, além do acesso ao um saber científico, questionamentos sobre a vida e o espaço que compartilhamos enquanto sociedade. Destaco aqui Joana D'arc (*In memoriam*) e Elizabete, professoras de ensino infantil, e a Prof. Me. Lidiane Campêlo, professora de Estágio Supervisionado, que particularmente conquistaram minha admiração e carinho, não só como profissionais mas também como seres humanos.

Agradeço ao meu orientador Prof. Me. José Ginaldo pela disponibilidade, sugestões e assistência na elaboração deste trabalho. Sou muito grato também ao professor Paulo Romero, pela dedicação e interesse em me ajudar, preocupação com o desenvolvimento de cada etapa desta obra e solicitude em tudo aquilo que lhe era recorrido.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma colaboraram com minha formação. Amei esta experiência.

RESUMO

No presente trabalho abordaremos algumas aplicações de um importante resultado da teoria das funções de variáveis complexas, que é o Teorema dos Resíduos. Este teorema, desenvolvido por Cauchy em 1826, enuncia basicamente que a integral de uma função analítica ao longo de uma curva fechada simples que contorna singularidades isoladas é encontrada pela simples soma de resíduos. Embora este resultado tenha várias aplicações em outros campos de estudo que não só a matemática, como por exemplo na física, as aplicações aqui trabalhadas serão no cálculo de certos tipos de integrais de funções de variáveis reais. A resolução destas integrais através dos métodos tradicionais do cálculo se mostra demasiado exaustivo ou insuficiente, e desta maneira, a referida proposição se apresenta como uma poderosa ferramenta capaz de simplificar estes desenvolvimentos. A metodologia aplicada nesta pesquisa consiste em uma revisão da literatura matemática vinculada ao tema.

Palavras Chave: Variáveis Complexas; Função Analítica; Singularidades Isoladas; Resíduos; Teorema dos Resíduos.

ABSTRACT

In this work we will present some applications of an important result in the complex functions theory, which is the Residue Theorem. This theorem, developed by Cauchy in 1826, basically states that the integral of an analytic function over a simple closed curve that involves isolated singularities is found by the simple sum of residues. Although this result has several applications in other fields of study outside mathematics, for example in physics, the applications introduced here will be the evaluations of certain types of real integrals. The resolution of these integrals through the traditional methods of calculus is too exhaustive or insufficient, hence the Residue Theorem presents itself as a powerful tool capable of simplifying these developments. The methodology applied in this research was a literature review related to the theme.

Keywords: Complex Variables; Analytical Function; Isolated Singularities; Residue; Residue Theorem.

Sumário

Introdução	8
1 Funções Analíticas	11
1.1 Números Complexos	11
1.1.1 O plano complexo	13
1.1.2 Representação Trigonométrica	14
1.1.3 Raízes n -ésimas	15
1.2 Regiões no Plano Complexo	16
1.3 Função de uma Variável Complexa	18
1.3.1 Funções Elementares	19
1.4 Limite e Continuidade	21
1.4.1 Propriedades do Limite	22
1.4.2 Continuidade	24
1.5 Função Analítica	26
1.5.1 Regras de Derivação	27
1.5.2 Condição Necessária e Suficiente para a Existência da Derivada de uma Função	28
2 Integrais de Funções de uma Variável Complexa	33
2.1 Arcos e Contornos	33
2.2 Integrais Definidas	35
2.3 Integrais Curvilíneas	35
2.3.1 Propriedades da Integral	36
2.3.2 Teorema de Cauchy	38

2.3.3	Fórmula Integral de Cauchy	40
3	Séries, Resíduos e Singularidades Isoladas	44
3.1	Séries de Taylor, Maclaurin e Laurent	44
3.1.1	Série Geométrica	45
3.1.2	Séries de Potências	46
3.2	Singularidades Isoladas	54
3.2.1	Singularidades Removíveis	54
3.2.2	Singularidades Essenciais	55
3.2.3	Singularidades do Tipo Pólo	56
3.3	Resíduos	57
4	Teorema dos Resíduos e Algumas de Suas Aplicações	64
4.1	Teorema dos Resíduos	64
4.2	Aplicações do Teorema dos Resíduos no Cálculo de Integrais Reais	68
4.2.1	Integrais Impróprias de Funções Racionais	68
4.2.2	Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonômicas	77
4.2.3	Integrais Definidas de Funções Trigonômicas	86
	Considerações Finais	91
	Referências Bibliográficas	92

Introdução

Os números complexos surgiram no século XVI a partir da busca em solucionar o problema das raízes quadradas reais negativas que apareciam na resolução de equações de terceiro e quarto graus. Inicialmente, tais números não gozavam de boa reputação e geralmente não eram considerados números legítimos. Contudo, sua aceitação se deu, em grande parte, à representação geométrica dos números complexos como pares ordenados, que foi melhor desenvolvido e articulado por Gauss. Euler foi o primeiro a empregar a notação i , hoje padrão, para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$, em um livro de memórias intitulado *De Formulis Differentialibus Angularibus*, apresentado para a Academia de São Petersburgo em 1777 (Ver [6], página 630).

As funções de variáveis complexas surgiram naturalmente como uma extensão das funções de variáveis reais. Segundo [3], página 1, quanto mais manipulações eram feitas envolvendo os números complexos, mais tornou-se evidente que muitos problemas na teoria das funções de valor real poderiam ser mais facilmente resolvidos utilizando números e funções complexas. Como por exemplo no uso desses números para mostrar que um polinômio de grau n tem n raízes, o que está totalmente relacionado com o Teorema Fundamental da Álgebra.

Dentre os vastos resultados obtidos dentro da teoria das funções complexas, um em especial é o chamado Teorema dos Resíduos. Formulado por Cauchy em 1826, tal proposição é uma versão do Teorema de Cauchy, para a situação de uma integração com singularidades isoladas no interior da região limitada por uma curva fechada simples. O Teorema enuncia basicamente que a integral de uma função analítica ao longo desta curva fechada simples, que contorna singularidades isoladas, é encontrada pela simples soma de resíduos. Este Teorema se apresenta como uma poderosa ferramenta para o cálculo de integrais impróprias de funções racionais e integrais impróprias ou definidas que envolvam funções trigonométricas.

Tais integrais aparecem frequentemente em problemas de física, em especial em problemas de contorno nas equações diferenciais de derivadas parciais.

O foco deste trabalho será o referido Teorema, englobando seu enunciado, demonstração e aplicações. O primeiro capítulo trata das funções analíticas e, para tal, definiremos funções complexas, limite e derivada de funções complexas. O segundo capítulo dedica-se ao estudo das integrais curvilíneas. Já o terceiro capítulo trabalha as séries complexas de Taylor, Maclaurin e Laurent, para em seguida estabelecer os conceitos de singularidades isoladas e resíduos. Por fim, o quarto capítulo aborda o Teorema dos Resíduos, com três aplicações do mesmo no cálculo de integrais de certos tipos de funções reais.

Capítulo 1

Funções Analíticas

Esta primeira parte trata de um dos conceitos mais elementares dentro da matemática, que é justamente o conceito de função, contudo para o caso em que a variável é um número complexo. Dentro desta esfera serão destacadas as funções analíticas, que constituem um conhecimento base para a compreensão de nosso objeto de estudo.

Preliminarmente apresentaremos alguns termos, como a definição de número e plano complexo, vizinhança e região, que estarão presentes em algumas definições, para que em seguida possamos de fato definir função complexa, limite, derivada e função analítica, como também as propriedades envolvidas nestes temas.

1.1 Números Complexos

Como citado na introdução, os números complexos são consequência da tentativa de se resolver o problema das raízes quadradas de números negativos que surgiam na resolução de algumas equações polinomiais. Para tanto, o termo desconhecido $\sqrt{-1}$, presente nas raízes dessas equações, era tratado como se fosse um número qualquer. Posteriormente veio a notação $\sqrt{-1} = i$.

Definição 1.1. Os *números complexos* são da forma $z = x + iy$, com x e y reais, onde sua *parte real* x é denotada por $Re(z)$, e sua *parte imaginária* y por $Im(z)$. O complexo $i = \sqrt{-1}$ é chamado de unidade imaginária e tem a propriedade $i^2 = -1$.

Exemplo 1.1. Temos que $2 + 7i$, $\frac{1}{5} - 2i$, $\sqrt{2} + \frac{3}{2}i$ e $-3 - \frac{2}{\sqrt{5}}i$ são exemplos de números complexos.

As operações dentro do conjunto dos números complexos \mathbb{C} , bem como as propriedades válidas para tais operações, são inteiramente similares as do conjunto dos números reais \mathbb{R} . Sendo $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ números complexos, a adição e multiplicação são definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

A seguinte proposição descreve as propriedades da adição e multiplicação de números complexos. Sua prova é simples e fica a cargo do leitor.

Proposição 1.1. Para quaisquer números complexos z , z_1 , z_2 e z_3 valem:

1. *Associatividade da adição:* $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
2. *Comutatividade da adição:* $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
3. *Existência do elemento neutro da adição:* $0 + z = z$;
4. *Existência do elemento oposto:* dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ existe $-z = -x - iy \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$;
5. *Associatividade da multiplicação:* $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$;
6. *Comutatividade da multiplicação:* $z_1z_2 = z_2z_1$;
7. *Existência do elemento neutro da multiplicação:* $1z = z$;
8. *Existência do inverso da multiplicação:* se $z = x + iy \neq 0$, então existe $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$;
9. *Distributividade da multiplicação com relação a adição:* $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então a *subtração* e a *divisão* entre números complexos são estabelecidas respectivamente por

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2); \\ \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1}, \text{ com } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

1.1.1 O plano complexo

O *plano complexo* é o conjunto das representações de todos os números complexos $z = x + iy$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano.

Dado um número complexo $z = x + iy$, seu *módulo* ou *norma* é definido como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e representa a distância do ponto z à origem $O = (0, 0)$.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido por $\bar{z} = x - iy$.

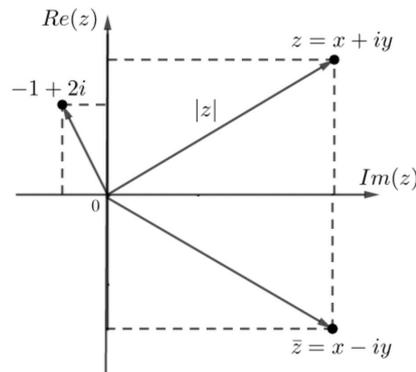


Figura 1.1: Representação do número $z = x + iy$, e seu conjugado \bar{z} , no plano complexo.

Uma relação interessante entre o módulo e o conjugado é a seguinte,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\bar{z} = |z|^2$. Esta propriedade nos permite calcular o *quociente* de dois números complexos. Para isso, basta apenas multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Por exemplo,

$$\frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 - 5i}{1^2 + 2^2} = -1 - i.$$

1.1.2 Representação Trigonométrica

Chama-se *argumento* de $z \neq 0$ o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz (Figura 1.2).

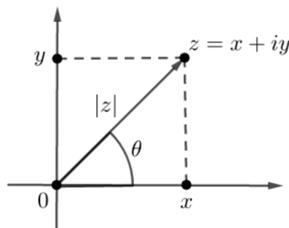


Figura 1.2: Argumento θ de z .

Como $x = |z| \cos \theta$ e $y = |z| \sin \theta$, temos a seguinte representação de z , conhecida como *representação polar* ou *representação trigonométrica*:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são as *coordenadas polares* de z .

A partir desta representação polar, podemos deduzir uma regra diferente para a multiplicação. Sendo $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ dois números complexos não nulos quaisquer, então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

É possível inferirmos um resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Percebemos que essas regras simplificam multiplicações e divisões envolvendo números complexos, pois para calcular o produto de complexos na forma polar, basta apenas multiplicar os módulos e somar os argumentos. Já para calcular o quociente, deve-se somente dividir os módulos e subtrair os argumentos.

Da fórmula (1.1) decorre, por indução, que

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)].$$

onde $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Logo, se $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n é um número inteiro positivo, vale então a conhecida *fórmula de De Moivre*,

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

A fórmula acima é válida também para expoentes negativos, pois se $n > 0$ então $-n < 0$ e, assim,

$$\begin{aligned} z^{-n} = \frac{1}{z^n} &= \frac{1}{r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]} \\ &= \frac{1}{r^n} [\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)] \\ &= r^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)]. \end{aligned}$$

1.1.3 Raízes n -ésimas

Dizemos que um número z_0 é *raiz n -ésima* de um número complexo $z \neq 0$ quando $z_0^n = z$. Para determinarmos então o valor de z_0 , tomemos as formas polares $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \operatorname{sen} \theta_0)$

e $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Pela fórmula de De Moivre percebemos que:

$$\begin{aligned} z_0^n = z &\Leftrightarrow r_0^n [\cos(n\theta_0) + i \operatorname{sen}(n\theta_0)] = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &\Leftrightarrow r_0^n \cos(n\theta_0) = r \cos \theta \quad \text{e} \quad r_0^n \operatorname{sen}(n\theta_0) = r \operatorname{sen} \theta \\ &\Leftrightarrow r_0^n = r, \quad n\theta_0 = \theta + 2k\pi, \end{aligned}$$

onde k é um inteiro. Daqui segue-se que r é a raiz n -ésima positiva de r_0 , donde

$$z_0 = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \quad (1.2)$$

Esta fórmula produz n raízes distintas, quando a k se atribui os valores $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

1.2 Regiões no Plano Complexo

Um *disco* de centro z_0 e raio $\delta > 0$ é o conjunto definido por

$$D_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta.\}$$

Uma *vizinhança* de um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é qualquer conjunto V que contenha um disco aberto centrado em z_0 . Em particular, qualquer disco $D_\delta(z_0)$ é uma vizinhança de z_0 , denotada aqui por $V_\delta(z_0)$.

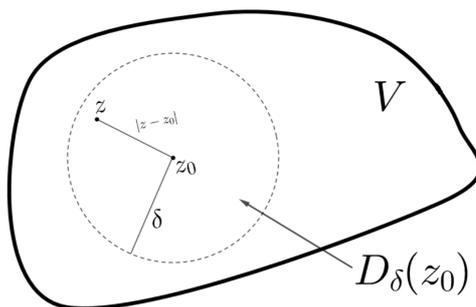


Figura 1.3: Vizinhança V .

Um ponto z_0 é dito *ponto de acumulação* de um conjunto C , se qualquer vizinhança de z_0 contém pontos do conjunto, distintos de z_0 .

Um *ponto interior* de um conjunto C é um ponto de C tal que alguma vizinhança desse ponto contém somente pontos de C . Dizemos que C é *aberto* se todos os seus pontos são interiores.

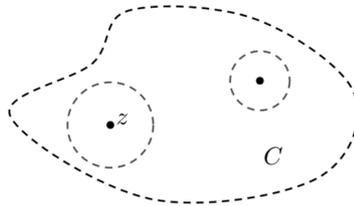


Figura 1.4: Conjunto aberto.

Dizemos que um conjunto é *fechado* quando seu complementar é aberto. Por sua vez, o *complementar* de um conjunto C é o conjunto C' dos pontos que não pertencem a C .

A *fronteira* de um conjunto C é o conjunto dos pontos z tais que qualquer vizinhança de z contém pontos de C e pontos do seu complementar C' .

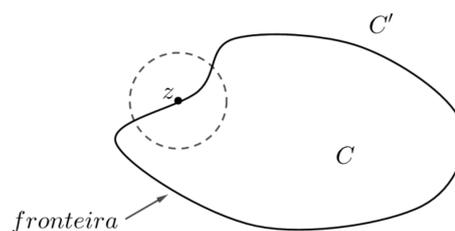


Figura 1.5: Fronteira.

Um conjunto aberto é *conexo* se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um arco ¹ todo contido no conjunto. Chama-se *região* a todo conjunto aberto e conexo.

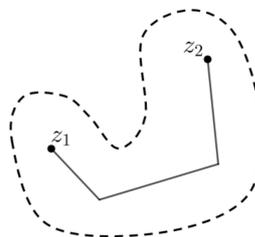


Figura 1.6: Região conexa.

¹Ver definição no Capítulo 2, Seção 2.1.

1.3 Função de uma Variável Complexa

Definição 1.2. Seja D um subconjunto dos números complexos \mathbb{C} e f uma lei que faz corresponder a cada elemento $z \in D$ um único número complexo denotado por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma *função com domínio D* . Chamamos de *imagem* de f o conjunto $I = \{w = f(z); z \in D\} \subset \mathbb{C}$ (Figura 1.7). O número complexo z é denominado *variável independente* e w *variável dependente*.

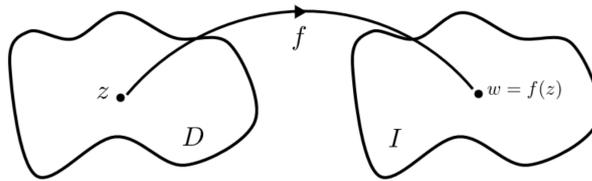


Figura 1.7: Função f .

Estão associadas a cada função $f(z)$, de uma variável complexa $z = x + iy$, duas funções das variáveis reais x e y , dadas por

$$u(x, y) = \operatorname{Re}f(z) \quad e \quad v(x, y) = \operatorname{Im}f(z).$$

Exemplo 1.2. Determine as partes real e imaginária da função $f(z) = z^2 + 3z - 5$.

Solução: Tomando $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned} z^2 + 3z - 5 &= (x + iy)^2 + 3(x + iy) - 5 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + 3x + 3iy - 5 \\ &= x^2 - y^2 + 3x - 5 + i(2xy + 3y). \end{aligned}$$

Logo $\operatorname{Re}f(z) = x^2 - y^2 + 3x - 5$ e $\operatorname{Im}f(z) = 2xy + 3y$.

1.3.1 Funções Elementares

Função Exponencial

A *função exponencial* é definida em termos de funções reais como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \quad (1.3)$$

no qual $z = x + iy$.

A identidade (1.3) segue naturalmente se supormos que a representação de $e^t, t \in \mathbb{R}$, em séries de Maclaurin é válida quando t é substituído por iy , isto é,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

As duas últimas séries aqui são as séries de Maclaurin² para $\cos y$ e $\operatorname{sen} y$, respectivamente.

Desta maneira, definimos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + \operatorname{sen} y).$$

Utilizando a fórmula anterior podemos representar um número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ como $z = r e^{i\theta}$. Temos também que a fórmula (1.2) das raízes n -ésimas pode ser reescrita como:

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4)$$

²As séries de Maclaurin aqui citadas, como se pode perceber, são relativas ao caso de uma variável real, visto habitualmente em cursos de Cálculo ou Análise na reta. Este tipo de série será trabalhada no Capítulo 3, Seção 3.1, contudo para a situação em que a variável é um número complexo.

O logaritmo

O *logaritmo* de um número complexo $z = re^{i\theta} \neq 0$ é estabelecido por:

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde $\log r$ designa o logaritmo real do número $r > 0$. Ele está definido para todo número complexo $z \neq 0$. Note que, dependendo do argumento usado para o número z , o logaritmo assume vários valores distintos. Por isso costuma-se dizer que o logaritmo é uma *função multivalente*. Contudo, sabemos que uma função tem de ser determinada univocamente. Para convertê-la em uma função *univalente*, isto é, fazer com que cada z corresponda a um único valor de $w = f(z)$, basta restringirmos o argumento de z a um intervalo do tipo

$$2k\pi \leq \theta \leq 2(k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Cada valor de k conduz ao que chamamos uma *determinação* ou *ramo* do logaritmo.

Funções Trigonométricas

Das fórmulas

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$$

decorrem as seguintes *fórmulas de Euler*:

$$\begin{aligned} e^{iy} - e^{-iy} = 2i \operatorname{sen} y &\Leftrightarrow \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}; \\ e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y &\Leftrightarrow \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}. \end{aligned}$$

É conveniente então definirmos as funções seno e co-seno de uma variável complexa z como sendo

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1.5)$$

Todas as demais fórmulas trigonométricas são obtidas em termos das funções sen e \cos ,

ou seja,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z}, \quad \operatorname{sec} z = \frac{1}{\operatorname{cos} z}, \quad \operatorname{cossec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

1.4 Limite e Continuidade

A definição de limite para funções de uma variável complexa é análoga a que é formalmente apresentada em cursos de Cálculo e Análise na reta.

Definição 1.3. Consideremos $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de acumulação do conjunto D . Dizemos que f tem *limite* L quando z tende a z_0 se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon,$$

e escrevemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

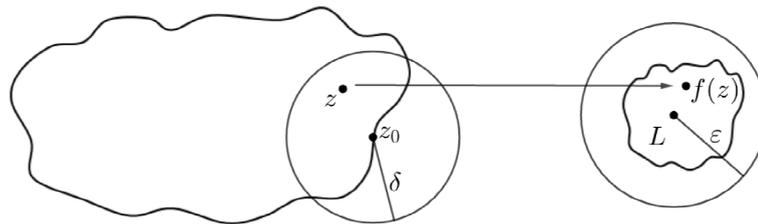


Figura 1.8: Representação geométrica do limite.

Exemplo 1.3. Sendo a e b constantes complexas, prove que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b.$$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, $a \neq 0$, para obtermos

$$|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow |a||z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |az - az_0| < \varepsilon \Rightarrow |(az + b) - (az_0 + b)| < \varepsilon.$$

O caso em que $a = 0$ é imediato. Logo, pela definição de limite,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b.$$

A Definição 1.3 pode ser ajustada para o caso em que z ou $f(z)$ tende ao infinito, originando as seguintes definições.

Definição 1.4. Uma função f com domínio D possui limite finito L com $z \rightarrow \infty$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

Temos que uma função f tende a infinito com z tendendo a z_0 se, dado $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K.$$

Dizemos que f tende a infinito com z tendendo a infinito se, para qualquer $K > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

1.4.1 Propriedades do Limite

As propriedades do limite, como os limites da soma, do produto, do quociente, etc., para funções de uma variável complexa, são estabelecidas da mesma forma como no caso de uma variável real. Portanto, a demonstração do próximo teorema será omitida em virtude deste fato.

Teorema 1.1. Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = F$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = G$, então:

- i) $\lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = cF$, sendo c uma constante complexa;
- ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = F + G$;
- iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = F \cdot G$;
- iv) se $G \neq 0$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{F}{G}$.

Teorema 1.2. Sejam $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função de domínio D , $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$.

Então, o limite de f existe em z_0 e é igual a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = U + iV \quad (1.6)$$

se, e somente se, os limites de u e v existem em (x_0, y_0) e são iguais a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = U \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = V. \quad (1.7)$$

Demonstração: (\Rightarrow) Supondo (1.6) verdadeira, temos pela definição de limite que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - (U + iV)| < \varepsilon. \quad (1.8)$$

Ou seja,

$$z \in D, \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |(u(x, y) - U) + i(v(x, y) - V)| < \varepsilon. \quad (1.9)$$

Como $|Re(z)| \leq |z|$ e $|Im(z)| \leq |z|$, então

$$|u(x, y) - U| \leq |(u(x, y) - U) + i(v(x, y) - V)| \quad (1.10)$$

e

$$|v(x, y) - V| \leq |(u(x, y) - U) + i(v(x, y) - V)| \quad (1.11)$$

Então, por (1.9) e (1.10) concluímos que

$$|u(x, y) - U| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

e, de (1.9) e (1.11) segue que

$$|v(x, y) - V| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Isto mostra que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = U \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = V.$$

(\Leftarrow) Reciprocamente, consideremos (1.7) válido. Segue, então, que, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1 \Rightarrow |u(x, y) - U| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.12)$$

e

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2 \Rightarrow |v(x, y) - V| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.13)$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, conseguimos obter o resultado (1.6), visto que, pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |f(z) - (U + iV)| &= |(u(x, y) - U) + i(v(x, y) - V)| \\ &\leq |u(x, y) - U| + |v(x, y) - V| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = U + iV$. ■

1.4.2 Continuidade

Definição 1.5. Dizemos que uma função $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é *contínua* em um ponto de acumulação $z_0 \in D$, quando

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, então f é dita simplesmente *contínua*.

O próximo resultado é consequência imediata do Teorema 1.1, e sua demonstração fica a critério do leitor.

Teorema 1.3. Se f e g são funções contínuas, com domínio comum D , então são também contínuas as seguintes funções:

- i) $cf, c \in \mathbb{C}$;

- ii) $f + g$;
- iii) $f \cdot g$;
- iv) $\frac{f}{g}$, exceto nos pontos z_0 para os quais $g(z_0) = 0$.

O Teorema subsequente trata de continuidade de funções polinomiais em z . Se $p(z)$ é uma função polinomial, esta é caracterizada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, onde os coeficientes a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 são constantes complexas.

Teorema 1.4.

- i) Qualquer função polinomial é contínua em todo o plano complexo;
- ii) Uma função racional, quociente de duas funções polinomiais contínuas, é contínua em todos os pontos para os quais o denominador é diferente de zero.

Demonstração:

- i) Sejam $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, e z_0 um ponto qualquer do plano complexo. Como a função identidade $f(z) = z$ é contínua em z_0 , então aplicando sucessivamente o item (iii) do Teorema 1.3 vemos que $f(z) = z^n$, $n \geq 1$, é também contínua em z_0 . Além disso, $g(z) = a$, $a \in \mathbb{C}$, é contínua, então segue do Teorema 1.3 (i) que cada uma das funções $a_n z^n, a_{n-1} z^{n-1}, \dots, a_0$ é contínua em z_0 . Agora, da aplicação sucessiva do Teorema 1.3 (ii) verifica-se que $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ é contínua em z_0 . Por fim, sendo z_0 um ponto qualquer de \mathbb{C} , então mostramos que p é contínua em todo o plano complexo.
- ii) Tomemos a função $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, sendo p e q polinômios. Pelo item anterior notamos que p e q são contínuas. Desta maneira, através do Teorema 1.3 (iv) concluímos que f é contínua em todo z_0 para o qual $q(z_0) \neq 0$.

■

Como consequência do Teorema 1.2 e dos resultados sobre continuidade expostos anteriormente, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.1. Uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e somente se, suas partes real e imaginária forem contínuas nesse ponto.

Exemplo 1.4. Calcule o limite:

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}.$$

Solução: Notemos que

$$\frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \frac{(z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)}{z + 2i} = z^2 - 2iz - 4$$

A última expressão acima é um polinômio, e como tal é contínua em todo o plano complexo. Como resultado,

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z^2 - 2iz - 4) = (-2i)^2 - 2i(-2i) - 4 = -12.$$

1.5 Função Analítica

A definição de derivada de uma função de variável complexa é semelhante a do caso de variável real. A diferença está na dimensão do limite da derivada, sendo esta de dimensão dois.

Definição 1.6. Seja f uma função definida em uma região R , e z um ponto de R . A *derivada* de f em z , denotada por $f'(z)$, é estabelecida pelo limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

desde que este exista. A representação $f'(z)$ pode ser substituída também por $\frac{df(z)}{dz}$. Dizemos que f é *derivável* em z , quando a derivada de f neste ponto existe.

Definição 1.7. Uma função f é dita *analítica* em um ponto z_0 quando ela é derivável em z_0 e em cada ponto de uma vizinhança deste, e analítica em uma região R quando é derivável em cada ponto de R .

Exemplo 1.5. Seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Prove que $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Solução: Pela definição de derivada

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} -\frac{1}{z^2 + z\Delta z} = -\frac{1}{z^2}.$$

1.5.1 Regras de Derivação

Abaixo serão enumeradas as fórmulas de derivação de funções de uma variável complexa. Elas são baseadas na definição de derivada e nas propriedades e teoremas envolvendo limite, e suas demonstrações seguem os mesmos princípios utilizados na situação em que a variável é um número real. Nos tópicos a seguir, consideremos f e g funções deriváveis em z , c uma constante complexa e n um número inteiro.

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$;
2. $\frac{d}{dz}(z) = 1$;
3. $\frac{d}{dz}(cf) = cf'$;
4. $\frac{d}{dz}(f + g) = f' + g'$;
5. $\frac{d}{dz}(fg) = f'g + fg'$;
6. $\frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $g \neq 0$;
7. $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$, com $n = \pm 1, \pm 2, \dots$;
8. $\frac{d}{dz}[f(g)] = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dz}$ (função composta na qual $f'(t)$ existe no ponto $t = g(z)$ e $g'(z)$ existe).

Exemplo 1.6. Use as regras de derivação para encontrar $f'(z)$ para a função dada:

a) $f(z) = \frac{iz^2 - 2z}{3z + 1 - i};$

b) $f(z) = (z^4 - 2iz^2 + z)^{10}.$

Solução:

a) Das fórmulas de derivação itens (6), (4), (3) e (7) obtemos:

$$f'(z) = \frac{(2iz - 2)(3z + 1 - i) - (iz^2 - 2z)3}{(3z + 1 - i)^2} = \frac{3iz^2 + (2 + 2i)z - 2 + 2i}{(3z + 1 - i)^2}.$$

b) Pelos itens (8), (7), (4) e (3) das regras de derivação temos:

$$f'(z) = 10(z^4 - 2iz^2 + z)^9(4z^3 - 4iz + 1) = (40z^3 - 40iz + 10)(z^4 - 2iz^2 + z)^9.$$

Exemplo 1.7. Mostre que $(\operatorname{sen} z)' = \cos z$ e $(\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z$.

Solução: Fazendo uso das fórmulas (1.5), segue que

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z; \\ (\operatorname{cos} z)' &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

1.5.2 Condição Necessária e Suficiente para a Existência da Derivada de uma Função

Teorema 1.5. Se a derivada f' de uma função $f = u + iv$ existe em um ponto $z = x + iy$, então as derivadas parciais de primeira ordem, em relação a x e y , de cada parte u e v , existem em z e satisfazem as chamadas *Equações de Cauchy-Riemann*, expressas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ademais,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Demonstração: Uma vez que f é analítica em z , então o quociente

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite $f'(z)$ quando $\Delta z \rightarrow 0$, independentemente do modo como Δz tende a zero.

Fazendo Δz tender a zero por valores reais Δx (Figura 1.9), temos:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Da mesma maneira, fazendo Δz tender a zero por valores imaginários $i\Delta y$, conseguimos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

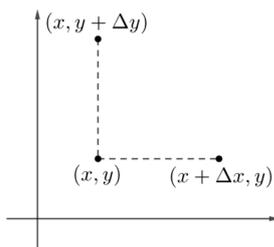


Figura 1.9: Caminhos percorridos por Δx e Δy .

Igualando as partes reais e as partes imaginárias das fórmulas (1.14) e (1.15), obtemos as chamadas Equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

■

As equações de Cauchy-Riemann apresentadas anteriormente constituem uma condição necessária, mas não suficiente, para que uma função f tenha derivada. O teorema seguinte nos fornece condições para as derivadas de u e v que garantem a existência de $f'(z)$.

Teorema 1.6. Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais primeiras *contínuas* em uma região R . Assim, uma condição necessária e suficiente para que a função $f(z) = u + iv$ seja analítica em R é que estejam verificadas as equações de Cauchy-Riemann.

Demonstração: A necessidade da condição já foi garantida pelo teorema anterior. Para demonstrar que a condição é suficiente, consideremos $z = x + iy$ um ponto qualquer de R e $\delta > 0$ um número tal que a vizinhança $V_\delta = \{x + \Delta x + i(y + \Delta y) : \Delta x^2 + \Delta y^2 < \delta^2\}$ esteja toda contida em R (Figura 1.10). Especialmente, os segmentos zz_1 e z_1z_2 , onde $z_1 = (x + \Delta x, y)$ e $z_2 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, também pertencem a R .

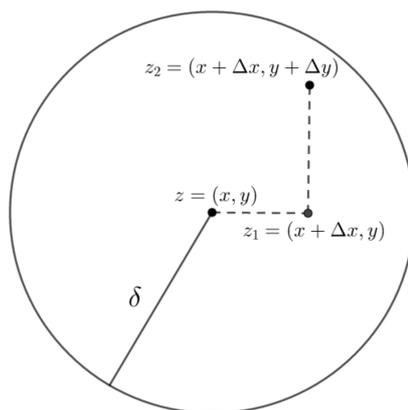


Figura 1.10: Vizinhança V_δ .

Pelo *Teorema do Valor Médio*³ temos que:

$$\begin{aligned} u_x(x + \lambda_1 \Delta x, y) \Delta x &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) \\ u_y(x + \Delta x, y + \lambda_2 \Delta y) \Delta y &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x + \Delta x, y) \end{aligned}$$

onde λ_1 e λ_2 são números convenientes do intervalo $(0, 1)$. Somando membro a membro as

³Este teorema enuncia que, se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) , então existe c pertencente a (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

duas igualdades acima obtemos:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = u_x(x + \lambda_1 \Delta x, y) \Delta x + u_y(x + \Delta x, y + \lambda_2 \Delta y) \Delta y. \quad (1.16)$$

Por hipótese u_x e u_y são contínuas, e a partir disso podemos escrever:

$$u_x(x + \lambda_1 \Delta x, y) = u_x(x, y) + \delta_1 \quad \text{e} \quad u_y(x + \Delta x, y + \lambda_2 \Delta y) = u_y(x, y) + \delta_2,$$

onde δ_1 e δ_2 tendem a zero com $\Delta x^2 + \Delta y^2 \rightarrow 0$. Substituindo as identidades acima em (1.16), conseguimos

$$\Delta u = u_x(x, y) \Delta x + u_y(x, y) \Delta y + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y. \quad (1.17)$$

De maneira análoga inferimos que:

$$\Delta v = v_x(x, y) \Delta x + v_y(x, y) \Delta y + \delta_3 \Delta x + \delta_4 \Delta y. \quad (1.18)$$

onde δ_3 e δ_4 tendem a zero com $\Delta x^2 + \Delta y^2 \rightarrow 0$.

Representando $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ e utilizando as fórmulas (1.17) e (1.18), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta z} \\ &= \frac{(u_x \Delta x + i v_y \Delta y) + i(v_x \Delta x - i u_y \Delta y)}{\Delta z} + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\delta_1 + i \delta_3) + \frac{\Delta y}{\Delta z} (\delta_2 + i \delta_4). \end{aligned}$$

Uma vez que as condições de Cauchy-Riemann são válidas, podemos então substituir v_y e $-u_y$ por u_x e v_x , respectivamente. Logo,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (u_x + i v_x) + \frac{\Delta x}{\Delta z} (\delta_1 + i \delta_3) + \frac{\Delta y}{\Delta z} (\delta_2 + i \delta_4). \quad (1.19)$$

Como $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ e $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, vem

$$\left| \frac{\Delta x}{\Delta z} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta z} \right| \leq 1.$$

Deste modo, passando o limite em (1.19) com $\Delta z \rightarrow 0$, os dois últimos termos no segundo membro tendem a zero. Concluimos que a derivada $f'(z)$ existe e é dada por $u_x + iv_x$. ■

Exemplo 1.8. A função e^z é analítica em todo o plano. Para verificarmos isto, notemos inicialmente que as derivadas parciais de $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$ são contínuas em todo o plano, e ademais, considerando a igualdade (1.3), percebemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ou seja, são satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann. Pelo Teorema 1.6, temos, então, que a função exponencial é diferenciável em todo plano e sua derivada é

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Capítulo 2

Integrais de Funções de uma Variável Complexa

Discorreremos aqui sobre integral de uma função de variável complexa. Inicialmente serão introduzidos os conceitos de arcos, contornos e caminhos, para depois enfim trabalharmos integral curvilínea e as propriedades e teoremas acerca deste tema.

2.1 Arcos e Contornos

Um *arco contínuo*, ou apenas *arco*, é um conjunto C de pontos dado parametricamente por:

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t); a \leq t \leq b\},$$

onde x e y são funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$. Designaremos por $-C$ este mesmo conjunto com orientação oposta, cuja representação paramétrica é dada por

$$z_1(t) = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a.$$

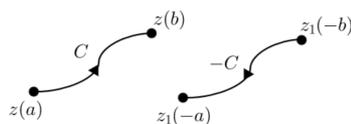


Figura 2.1: Arcos C e $-C$.

Exemplo 2.1. A função $z = r \cos(\theta) + ir \sin(\theta) = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, representa uma circunferência de raio r e centrada na origem.

Exemplo 2.2. A função $z = 1 - it$, para $0 \leq t \leq 2$, representa um arco simples, que é o segmento $[1, 1 - 2i]$, orientado de 1 para $1 - 2i$.

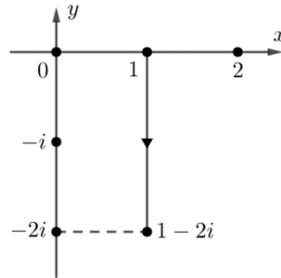


Figura 2.2: Segmento $[1, 1 - 2i]$.

Chama-se *curva fechada* qualquer arco no qual as extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidem. Já *curva fechada simples* é definida como uma curva fechada cujos únicos pontos de interseção são as extremidades, ou seja, não possui autointerseções.

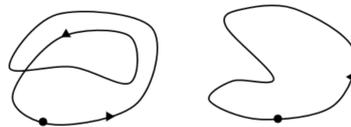


Figura 2.3: À esquerda uma curva fechada e à direita uma curva fechada simples.

Um arco no qual $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula é denominado *arco regular*. Chamaremos *contorno* ou *caminho* a todo arco contínuo constituído por um número finito de arcos regulares.

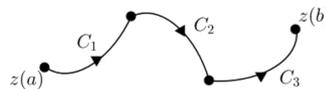


Figura 2.4: Caminho $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Uma região R é dita *simplesmente conexa* se qualquer curva fechada simples contida em R pode ser deformada continuamente até reduzir-se a um ponto, sem sair de R . Por outro lado, toda região conexa que não for simplesmente conexa é chamada de *multiplamente conexa*.

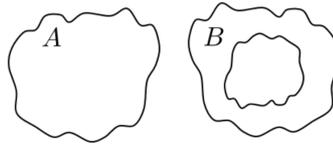


Figura 2.5: Região simplesmente conexa A e região multiplamente conexa B .

2.2 Integrais Definidas

Definição 2.1. Definimos a *integral de uma aplicação* $f(t) = u(t) + iv(t)$, contínua de variável real t em um intervalo $[a, b]$, como

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Da definição anterior, seguem-se as seguintes propriedades:

1. $\int_a^b [f(t) + g(t)]dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt;$
2. $\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt, c \in \mathbb{C};$
3. $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$

2.3 Integrais Curvilíneas

Com base no que foi estudado nas duas seções anteriores podemos agora definir a *integral curvilínea* ou *integral de contorno*.

Definição 2.2. Sejam C um contorno qualquer, f uma função contínua em C e $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, uma parametrização para C . Definimos então a *integral curvilínea de f ao longo de C* como

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Exemplo 2.3. Calcule a integral de $f(z) = z^2$ ao longo da parte superior de um semicírculo de raio r centrado na origem, orientado no sentido anti-horário.

Solução: Nomeemos C como o semicírculo apontado no problema. O caminho em questão pode ser representado parametricamente por $C = \{z = re^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Sendo assim, pela definição anterior

$$\int_C z^2 dz = \int_0^\pi (re^{i\theta})^2 (re^{i\theta})' d\theta = ir^3 \int_0^\pi e^{i3\theta} d\theta = ir^3 \left. \frac{e^{i3\theta}}{3i} \right|_0^\pi = \frac{r^3}{3} (e^{i3\pi} - 1) = -\frac{2}{3}r^3.$$

2.3.1 Propriedades da Integral

Os resultados seguintes são fruto da definição anterior, e são de fácil verificação, ficando a cargo do leitor.

1. $\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz;$
2. $\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz;$
3. $\int_{C_1 \cup \dots \cup C_r} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_r} f(z) dz;$
4. $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz;$

Exemplo 2.4. Determine a integral de $f(z) = y - x - 3x^2i$ ao longo de dois segmentos, um de $z = 0$ a $z = i$ e o outro de $z = i$ a $z = 1 + i$.

Solução: Designemos por $C = C_1 \cup C_2$ o caminho de integração em questão, no qual $C_1 = [0, i]$ e $C_2 = [i, 1 + i]$ (Figura 2.6).

Vamos calcular a integral de f ao longo de cada contorno, começando por C_1 . Uma parametrização para este caminho é $z(t) = it$, com $0 \leq t \leq 1$. Ou seja, $x = 0$ e $y = t$. Daí

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 t i dt = i \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{i}{2}.$$

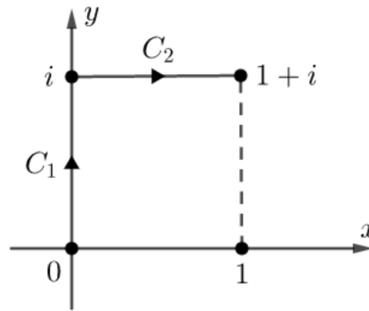


Figura 2.6: Caminho $C = C_1 \cup C_2$.

Analogamente, temos que $z = t + i$, $0 \leq t \leq 1$, é uma parametrização para C_2 . Disto, notamos que $x = t$ e $y = 1$. Logo

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 (1 - t - 3t^2i)dt = t - \frac{t^2}{2} - t^3i \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - i.$$

Concluimos então, pelo item **(3)** das propriedades de integrais curvilíneas, que

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2}(1 - i).$$

Uma importante propriedade é a desigualdade

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)||dz| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt, \quad (2.1)$$

que é consequência do item **(3)** das propriedades de integrais definidas.

Daí se $|f(z)| \leq M$, M uma constante, então

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \int_C |dz| = ML,$$

em que L é o comprimento do contorno C , ou seja,

$$L = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

Este resultado será de grande valia nas aplicações do Teorema dos Resíduos, que é o objeto central do nosso estudo.

Exemplo 2.5. Sem efetuar integração, mostre que $\left| \int_C \frac{dz}{z} \right| \leq \pi$, onde C é o semicírculo de raio 1 centrado na origem, e orientado no sentido anti-horário.

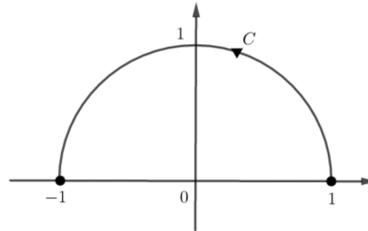


Figura 2.7: Semicírculo C .

Solução: Para todo z pertencente ao semicírculo C temos que

$$|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|z|} = 1 = M.$$

Ademais, sabemos que o comprimento de um círculo é dado pela fórmula $L = 2\pi r$, em que r é o raio, e como neste caso temos um semicírculo de raio 1 então

$$L = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Pela propriedade mencionada acima

$$\left| \int_C \frac{dz}{z} \right| \leq ML = \pi.$$

2.3.2 Teorema de Cauchy

O **Teorema de Cauchy** é um dos principais teoremas da teoria de funções de uma variável complexa, inclusive o próprio Teorema dos Resíduos, objeto principal deste trabalho, pode ser considerado uma versão dele.

O próximo teorema não será demonstrado por ser um resultado concebido dentro do cálculo de várias variáveis, e o seu valor nesta subseção está apenas no fato de ser usado na demonstração do Teorema de Cauchy.

Teorema 2.1 (de Green). Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções definidas numa região simplesmente conexa R , com derivadas primeiras contínuas. Então, para qualquer contorno fechado simples C em R ,

$$\iint_{R'} (Q_x - P_y) dx dy = \oint_C P dx + Q dy, \quad (2.2)$$

onde R' é a região interior a C .

O pequeno círculo presente no símbolo da integral em (2.2) representa a integral de uma função ao longo de um contorno fechado simples de orientação positiva.

Teorema 2.2 (de Cauchy). Se f é uma função analítica em uma região simplesmente conexa R , com derivada primeira contínua, então

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

para todo contorno fechado C contido em R .

Demonstração: Usando a notação $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, e $f = u + iv$, u e v funções reais, temos pelo Teorema de Green que:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy \\ &= \iint_{R'} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{R'} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Como f' é contínua, então as derivadas parciais de primeira ordem de u e v também o são. Pelas equações de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Daí:

$$\oint_C f(z) dz = \iint_{R'} (-v_x + v_x) dx dy + i \iint_{R'} (v_y - v_y) dx dy = 0.$$

■

O próximo teorema é importante para este trabalho por estar presente na demonstração do Teorema dos Resíduos.

Teorema 2.3. Suponha que

- i) C é um contorno fechado simples percorrido no sentido anti-horário;
- ii) $C_j (j = 0, 1, \dots, n)$ caminhos fechados simples contidos no interior de C , todos percorridos no sentido horário (Ver figura 2.8).

Se uma função f é analítica em todos esses caminhos e na região multiplamente conexa consistindo dos pontos interiores a C e exteriores a cada C_j , então

$$\int_C f(z)dz + \sum_{j=0}^n \int_{C_j} f(z)dz = 0. \quad (2.3)$$

Um tratamento completo deste teorema requer o uso de conceitos que não estão à nossa disposição. Contudo, podemos estabelecer uma justificativa simples para este resultado. Basta inserirmos uma cadeia contínua de segmentos ligando cada caminho C_j , isto é, um segmento L_0 ligando o caminho C a C_0 , outro L_1 ligando C_0 a C_1 , e assim sucessivamente até L_{n+1} conectando C_n a C (Figura 2.8). Desta forma, obtemos dois caminhos fechados C' e C'' , cada um constituído dos segmentos L_j ou $-L_j$ e de partes de C e C_j . Uma vez que f é analítica no interior e sobre C' e C'' , o teorema de Cauchy nos garante que as integrais de f sobre C' e C'' são iguais a zero, e conseqüentemente a soma das integrais de f ao longo de C' e C'' também são iguais a zero. Visto que as integrais de sentidos opostos ao longo de cada L_j cancelam-se mutuamente aos pares, por causa da quarta propriedade das integrais curvilíneas apresentada na Seção 2.3.1, então restam somente as integrais ao longo de C e C_j , e chegamos a fórmula (2.3).

2.3.3 Fórmula Integral de Cauchy

O teorema seguinte será de grande valia para as demonstrações dos teoremas envolvendo séries de potências no próximo capítulo. Algo interessante de se apontar é que o Teorema dos Resíduos, tema central de nosso estudo, pode ser entendido como uma generalização da

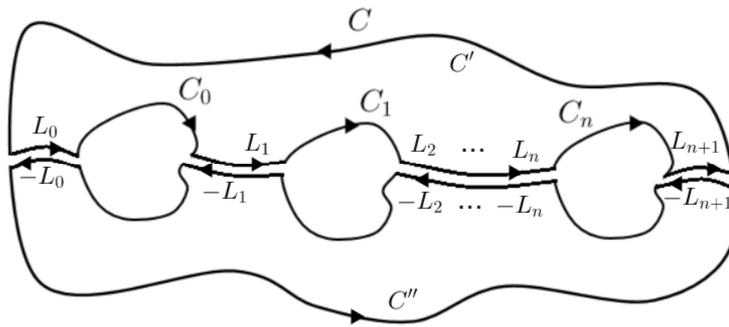


Figura 2.8: Região multiplamente conexa.

fórmula que se segue, para o caso em que a função possui várias singularidades no interior de seu caminho de integração.

Teorema 2.4. Seja f uma função analítica em uma região simplesmente conexa R . Então,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R , que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R .

Demonstração: Seja $\delta > 0$ tal que o círculo $|\lambda - z| = \delta$, representado por C_δ , não contenha pontos de C (Figura 2.9).

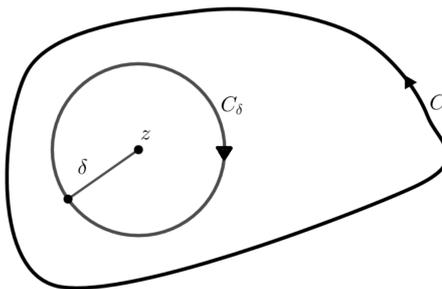


Figura 2.9: Círculo $|\lambda - z| = \delta$ e contorno C .

A partir do Teorema 2.3 podemos escrever:

$$\oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda - \oint_{C_\delta} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \oint_{C_\delta} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

Através da decomposição

$$f(\lambda) = f(z) + [f(\lambda) - f(z)]$$

obtemos:

$$\oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = f(z) \oint_{C_\delta} \frac{d\lambda}{\lambda - z} + \oint_{C_\delta} \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z} d\lambda. \quad (2.4)$$

O círculo C_δ pode ser parametrizado por $\lambda_1(\theta) = z + \delta e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma, utilizando a definição de integral curvilínea encontramos o resultado da primeira integral no segundo membro da igualdade acima, ou seja,

$$\oint_{C_\delta} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\theta}}{(z + \delta e^{i\theta}) - z} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\lambda - z| < \delta_1 \Rightarrow |f(\lambda) - f(z)| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta < \delta_1$, então

$$\left| \oint_{C_\delta} \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z} d\lambda \right| \leq \oint_{C_\delta} \frac{|f(\lambda) - f(z)|}{|\lambda - z|} |d\lambda| < \frac{\varepsilon}{\delta} (2\pi\delta) = 2\pi\varepsilon.$$

Portanto, a segunda integral sobre C_δ em (2.4) tem limite zero com $\delta \rightarrow 0$, limite este que é o próprio valor da integral. Consequentemente

$$\oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = 2\pi i f(z) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

■

Uma importante consequência da integral de Cauchy é a de que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens. Sejam z um ponto qualquer de uma região R na qual f é analítica, e C um contorno fechado simples, todo contido em R , que contém o ponto z em seu interior. Vale então pela integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Se admitirmos a derivação sob o sinal de integração e derivarmos sucessivamente a fórmula acima, obtemos:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda, \quad f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^3} d\lambda;$$

e, generalizando,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)^{n+1}} d\lambda. \quad (2.5)$$

A demonstração da fórmula acima será omitida, contudo o leitor pode encontrá-la em [1], página 103.

Capítulo 3

Séries, Resíduos e Singularidades Isoladas

Neste capítulo serão trabalhadas as séries de funções complexas, o conceito e os tipos de pontos singulares isolados e a definição de resíduos, temas estes cruciais para o entendimento do Teorema dos Resíduos.

3.1 Séries de Taylor, Maclaurin e Laurent

Definição 3.1. Uma *série de funções* é uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots$$

cujos termos f_n são, em geral, funções da uma variável complexa z , todas com um domínio comum de definição.

A soma da série é interpretada como

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z), \quad (3.1)$$

onde $S_n(z)$ é a *soma parcial ou reduzida de ordem n*:

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z).$$

Quando o limite em (3.1) existe, dizemos que a série é *convergente* e o valor deste limite determina a *soma da série*.

3.1.1 Série Geométrica

Uma *série geométrica* é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} az^{n-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots, \quad (3.2)$$

onde a é uma constante complexa.

Vamos mostrar que

$$a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-z}, \quad (3.3)$$

com $|z| < 1$. Para tanto, tomemos a soma parcial dos n primeiros termos em (3.2),

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}.$$

Multiplicando a expressão acima por z , obtemos

$$zS_n = az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n.$$

Daí,

$$\begin{aligned} S_n - zS_n &= a - az^n \Leftrightarrow S_n(1-z) = a - az^n \\ &\Leftrightarrow S_n = \frac{a - az^n}{1-z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se $|z| < 1$, então $z^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - az^n}{1 - z} = \frac{a}{1 - z}.$$

Portanto, para $|z| < 1$ a soma de uma série geométrica (3.2) é $\frac{a}{1 - z}$.

Exemplo 3.1. Por (3.3) temos que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (3.5)$$

e

$$\frac{1}{1 + z} = \frac{1}{1 - (-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

Note que, de maneira análoga a fórmula (3.4), a soma parcial dos n primeiros termos de (3.5) pode ser expressa por:

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}.$$

Substituindo $\frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} + \frac{-z^n}{1 - z}$ na igualdade anterior verificamos que

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1 - z}. \quad (3.6)$$

A fórmula (3.6) será usada na demonstração do teorema que caracteriza a série de Taylor.

3.1.2 Séries de Potências

Dentre as séries de funções, são de notória relevância as chamadas *séries de potências* do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

nas quais $f_n(z) = (z - z_0)^n$, e os coeficientes a_n e o ponto z_0 são constantes complexas.

O próximo teorema nos fornece uma relação bastante importante entre funções analíticas e séries de potências.

Teorema 3.1 (da série de Taylor). Sejam f uma função analítica em uma região R , z_0

um ponto qualquer de R , e $r_0 > 0$ tal que a vizinhança $|z - z_0| \leq r_0$ esteja toda contida em R . Então, nesta vizinhança a função f pode ser desenvolvida em série de potências de $z - z_0$. Conhecida como a *série de Taylor* da função f relativa ao ponto z_0 , esse desenvolvimento é dado univocamente por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

No caso $z_0 = 0$ a série acima é chamada de *série de Maclaurin* da função f .

Demonstração: Seja z um ponto qualquer do disco aberto $|z - z_0| = r < r_0$. Seja também λ um ponto sobre o círculo $|\lambda - z_0| = r_1$, representado por C_1 , tal que $r < r_1 < r_0$ (Figura 3.1).

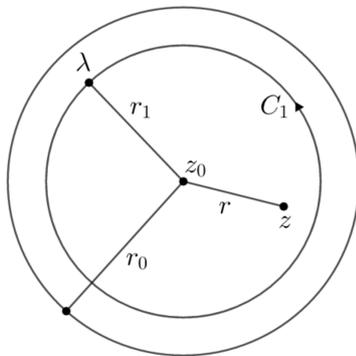


Figura 3.1: Descrição de $|z - z_0| = r < r_0$ e $|\lambda - z_0| = r_1$.

Como f é analítica no interior e sobre C_1 , então pela integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda. \quad (3.7)$$

Daí,

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{(\lambda - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\lambda - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\lambda - z_0}}.$$

Como $\left| \frac{z - z_0}{\lambda - z_0} \right| = \frac{r}{r_1} < 1$, então podemos substituir o z na fórmula (3.6) por $\frac{z - z_0}{\lambda - z_0}$, e daí

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\lambda - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{\lambda - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\lambda - z_0} \right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(\lambda - z_0)(\lambda - z_0)^{n-1}}.$$

Portanto,

$$\frac{f(\lambda)}{\lambda - z} = \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} + (z - z_0) \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^2} + \cdots + (z - z_0)^{n-1} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^n} + (z - z_0)^n \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - z_0)^n}.$$

Ao dividirmos ambos os membros da igualdade acima por $2\pi i$ e integrarmos cada termo ao longo de C_1 no sentido positivo obtemos, por (3.7) e pela fórmula (2.5) da derivada de todas as ordens, o seguinte resultado

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n, \quad (3.8)$$

onde

$$R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - z_0)^n} d\lambda.$$

Como $f(\lambda)$ é contínua, então esta é limitada por uma constante M sobre o círculo C_1 . Ademais $|z - z_0| = r$, $|\lambda - z_0| = r_1$ e $|\lambda - z| \geq r_1 - r$. Segue-se então

$$|R_n| \leq \frac{r^n}{2\pi} \frac{M 2\pi r_1}{(r_1 - r)r_1^n} = \frac{Mr_1}{r_1 - r} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n.$$

Mas $\frac{r}{r_1} < 1$ e, portanto, $|R_n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e conseqüentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Logo, quando n tende ao infinito, o limite da soma dos n primeiros termos do segundo membro de (3.8) é $f(z)$. Ou seja, $f(z)$ representa uma série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

■

Exemplo 3.2. Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de z para as seguintes funções:

a) $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, válida para todo z ;

b) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, válida para todo z ;

c) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, válida para todo z .

Solução:

a) Seja $f(z) = \text{sen } z$. Temos que $z_0 = 0$, o que implica que $f(z_0) = \text{sen}(0) = 0$. Logo pelo Teorema 3.1

$$\begin{aligned} \text{sen } z &= f(z_0) + f'(z_0)z + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}z^4 + \frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}z^5 + \dots \\ &= \text{sen}(0) + z \cos(0) - \frac{z^2 \text{sen}(0)}{2!} - \frac{z^3 \cos(0)}{3!} + \frac{z^4 \text{sen}(0)}{4!} + \frac{z^5 \cos(0)}{5!} - \dots \\ &= 0 + z - 0 - \frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} - \dots \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Generalizando, obtemos $\text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

b) Tomemos $f(z) = \cos z$. Sendo $z_0 = 0$ então $f(z_0) = \cos(0) = 1$. Sendo assim, pelo Teorema 3.1

$$\begin{aligned} \text{sen } z &= f(z_0) + f'(z_0)z + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}z^4 + \frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}z^5 + \dots \\ &= \cos(0) - z \text{sen}(0) - \frac{z^2 \cos(0)}{2!} + \frac{z^3 \text{sen}(0)}{3!} + \frac{z^4 \cos(0)}{4!} - \frac{z^5 \text{sen}(0)}{5!} - \dots \\ &= 1 - 0 - \frac{z^2}{2!} + 0 + \frac{z^4}{4!} - 0 - \dots \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

Generalizando temos $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.

c) Sendo $f(z) = e^z$ e $z_0 = 0$, então $f(z_0) = e^0 = 1$. Logo, pelo Teorema 3.1

$$\begin{aligned} e^z &= f(z_0) + f'(z_0)z + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \dots \\ &= e^0 + e^0z + \frac{e^0}{2!}z^2 + \frac{e^0}{3!}z^3 + \dots \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Portanto, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Uma função que não seja analítica em um ponto z_0 ainda pode ser expandida em séries de potências, desde que esta admita potências com expoentes negativos. Este tipo de série é conhecida como *série de Laurent* e é uma generalização da série de Taylor. O teorema seguinte a descreve.

Teorema 3.2. Seja f uma função univalente e analítica em uma região anular $G : r < |z - z_0| < R$. Então, para todo z nesta região,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.9)$$

onde os coeficientes a_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{n+1}} d\lambda, \quad (3.10)$$

sendo C um contorno fechado em G , envolvendo z_0 e percorrido no sentido positivo, isto é, no sentido anti-horário.

Demonstração: Sejam $z \in G$, e r_1 e r_2 tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Nomeemos C_1 e C_2 como sendo os círculos de centro z_0 e raios r_1 e r_2 , respectivamente, orientados no sentido positivo. Se unirmos C_1 a C_2 por um arco L , obtemos o contorno fechado $C = C_2 + L - C_1 - L$, em uma região de analiticidade da função f (Figura 3.2).

Pela integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

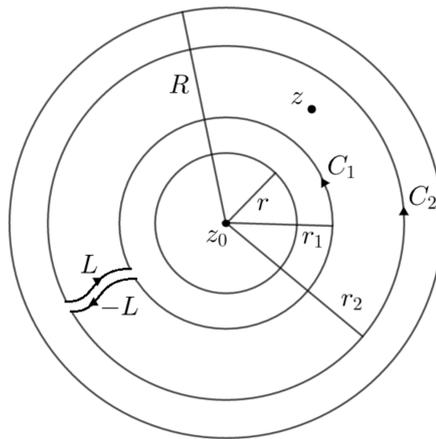


Figura 3.2: Contornos C_1 e C_2 .

Já que as integrais ao longo de L e $-L$ se cancelam mutuamente, então

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda. \quad (3.11)$$

Como f é analítica no interior e sobre C_2 , então a segunda das integrais na igualdade acima pode ser expandida em série de Taylor relativa a z_0 , isto é,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.12)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{n+1}} d\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Quanto a primeira integral em (3.11), podemos tratá-la de maneira semelhante como na

demonstração do teorema anterior, ou seja,

$$\begin{aligned}
-\frac{f(\lambda)}{\lambda - z} &= f(\lambda) \frac{1}{z - \lambda} = f(\lambda) \frac{1}{(z - z_0) - (\lambda - z_0)} \\
&= f(\lambda) \left[\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda - z_0}{z - z_0}} \right] \\
&= f(\lambda) \left[\frac{1}{z - z_0} \left(1 + \frac{\lambda - z_0}{z - z_0} + \cdots + \left(\frac{\lambda - z_0}{z - z_0} \right)^{k-1} + \frac{(\lambda - z_0)^k}{(z - \lambda)(z - z_0)^{k-1}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{z - z_0} f(\lambda) + \frac{1}{(z - z_0)^2} f(\lambda) (\lambda - z_0) + \cdots + \frac{1}{(z - z_0)^k} f(\lambda) (\lambda - z_0)^{k-1} \\
&\quad + \frac{1}{(z - z_0)^k} f(\lambda) \frac{(\lambda - z_0)^k}{z - \lambda}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + R_k \quad (3.14)$$

onde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - z_0)^{-n+1}} d\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.15)$$

e

$$R_k = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^k} \int_{C_1} f(\lambda) \frac{(\lambda - z_0)^k}{z - \lambda} d\lambda.$$

Denotemos δ como sendo a distância de z a z_0 , isto é, $|z - z_0| = \delta$. Uma vez que $|\lambda - z_0| = r_1$, então $|z - \lambda| = \delta - r_1$. Tomando M como sendo o máximo de $|f(z)|$ no contorno C_1 , temos que

$$|R_k| \leq \frac{1}{2\pi \delta^k} \frac{M r_1^k 2\pi r_1}{\delta - r_1} = \frac{M r_1}{\delta - r_1} \left(\frac{r_1}{\delta} \right)^k.$$

Contudo, $\frac{r_1}{\delta} < 1$ e, conseqüentemente, $|R_k| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Segue-se daí que $R_k \rightarrow 0$ com $k \rightarrow \infty$. Sendo assim, o limite, com $k \rightarrow \infty$, da soma dos k primeiros termos em (3.14) é $-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$, implicando que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (3.16)$$

onde os coeficientes a_{-n} são dados por (3.15).

Substituindo (3.12) e (3.16) em (3.11) temos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

que pode ser escrita como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Ademais, (3.13) e (3.15) podem ser escritas como uma integral única:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda-z_0)^{n+1}} d\lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

uma vez que, pelo Teorema 2.3, os contornos C_1 e C_2 podem ser substituídos por qualquer contorno fechado simples C , em G , com z_0 em seu interior. ■

Em (3.9) as séries na primeira e na segunda parcela são denominadas, respectivamente, *parte principal* e *parte regular*.

Exemplo 3.3. Obtenha a série de Laurent para a função $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ centrada em $z_0 = 1$ e definida na região anular $0 < |z-1| < 1$.

Solução: Notemos que

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n$$

converge para $0 < |z-1| < 1$. Portanto

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^{n-1}, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Ou seja

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \dots$$

3.2 Singularidades Isoladas

Definição 3.2. Um ponto z_0 é chamado de *ponto singular* ou *singularidade* de uma função f , se f não for analítica em z_0 .

Definição 3.3. Um ponto z_0 é *singularidade isolada*, ou *ponto singular isolado*, de uma função f quando existe uma vizinhança de z_0 no qual f é analítica exceto no ponto z_0 .

Um simples exemplo é a função $f(z) = \frac{1}{z}$ que é analítica em todo z , exceto na origem, que constitui então uma singularidade isolada de f . Outro exemplo ilustrativo é a função

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{\text{sen}(z)}$$

cujos pontos singulares isolados são os zeros da função do denominador, ou seja, $z = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

A função $f(z) = \log z$ possui ponto singular na origem, que não é isolado, pois cada vizinhança da origem contém pontos do eixo real negativo nas quais f não é analítica.

Se z_0 é uma singularidade isolada de uma função f , então existe um $r > 0$ para o qual o desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

está definido em uma vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < r$ de z_0 .

A seguir serão apresentados os tipos de pontos singulares isolados de acordo com a quantidade de termos com expoentes negativos na Série de Laurent exposta acima. As singularidades podem ser removíveis, essenciais ou do tipo pólo.

3.2.1 Singularidades Removíveis

Definição 3.4. Um ponto singular isolado z_0 é uma *singularidade removível* de uma função f quando são nulos os coeficientes a_{-n} em (3.9), isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r, \quad r > 0.$$

Notemos que f é então analítica em $|z - z_0| < r$, uma vez que esta pode ser expandida em série de potências como mostrado acima e, além disso, está definida no ponto z_0 , visto que $f(z_0) = a_0$. Desta forma, a tal singularidade é aparente e pode ser removida apenas definindo f de maneira apropriada neste ponto.

Exemplo 3.4. A função $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$ possui uma singularidade removível em $z = 0$, pois

$$\frac{\text{sen } z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Assim definimos $f(0) = 1$.

A proposição que se segue não será demonstrada pois seu resultado não é tão relevante e constitui-se apenas como ferramenta para a demonstração da Proposição 3.2. Contudo, o leitor pode encontrar sua prova em [9] na página 144.

Proposição 3.1. Seja f uma função complexa e z_0 um ponto pertencente a seu domínio. As seguintes proposições são equivalentes:

- i) z_0 é uma singularidade removível de f ;
- ii) Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$;
- iii) $|f(z)|$ é limitado em alguma bola aberta centrada em z_0 .

3.2.2 Singularidades Essenciais

Definição 3.5. Dizemos que z_0 é *singularidade essencial* de uma função f , quando a série (3.9) possui infinitos termos com coeficientes negativos de $z - z_0$.

Exemplo 3.5. Temos que o ponto $z = 0$ é singularidade essencial da função $z^3 \text{sen} \left(\frac{1}{z} \right)$, uma vez que

$$z^3 \text{sen} \left(\frac{1}{z} \right) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z} \right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z} \right)^{2n-2} = z^2 - \frac{1}{3!z^0} + \frac{1}{5!z^2} - \dots$$

3.2.3 Singularidades do Tipo Pólo

Definição 3.6. Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função f . Consideremos o caso em que aparece um número finito de termos na parte principal do desenvolvimento (3.9), isto é, existe $m > 0$ tal que $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$, $n > m$, de modo que (3.9) se reduz a

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0.$$

Desta forma, definimos o ponto z_0 como sendo *pólo de ordem m* da função f . Um pólo de ordem 1 é chamado *pólo simples*.

A seguir será apresentada uma condição necessária e suficiente para determinar se um ponto singular isolado é pólo de ordem m .

Proposição 3.2. Uma singularidade isolada z_0 de uma função f é um pólo de ordem m se, e somente se, $(z - z_0)^m f(z)$ possuir limite finito e diferente de zero quando $z \rightarrow z_0$.

Demonstração: (\Rightarrow) Sendo z_0 pólo de ordem m de f , então

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0 \quad (3.17)$$

válida numa certa vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < r$ de z_0 , para algum $r > 0$. Multiplicando cada termo de (3.17) por $(z - z_0)^m$, obtemos

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-1} (z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0.$$

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponhamos $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = L \neq 0$. Vamos denominar $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Pela Proposição 3.1, a função g possui uma singularidade removível em z_0 e, sendo assim, esta pode ser expandida em série de potências centrada em z_0 , ou seja,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

para algum $r > 0$. Além disso $L = a_0$. Desta maneira, segue-se que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{L}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z - z_0)^n.$$

Ou seja, z_0 é pólo de ordem m de f . ■

Exemplo 3.6. Determine os pólos, com suas respectivas ordens, da função $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$.

Solução: Notemos que $z_0 = 0$ e $z_1 = 2$ são pontos singulares isolados de f . Ademais,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z+1}{z^2-2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z+1}{z-2} = -\frac{1}{2};$$

$$\lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{z+1}{z^2-2z} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z+1}{z} = \frac{3}{2}.$$

Como os resultados dos limites acima são finitos e diferentes de zero, pela Proposição 3.2, $z_0 = 0$ e $z_1 = 2$ são pólos simples de f .

3.3 Resíduos

Definição 3.7. Se f é uma função analítica em uma região simplesmente conexa R e z_0 um ponto singular isolado, definimos o *resíduo* de f em z_0 como sendo o coeficiente a_{-1} do termo $\frac{1}{z - z_0}$ de sua série de Laurent com centro em z_0 . Este resíduo será representado por $Res(f, z_0)$.

Exemplo 3.7. Encontre os resíduos da função

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} dz$$

nos seus pontos singulares isolados.

Solução: Notemos que f possui singularidades nos pontos $z_0 = 0$ e $z_1 = 1$. Assim, vamos determinar $Res(f, 0)$ e $Res(f, 1)$. Temos que

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots$$

válido para $0 < |z| < 1$. Portanto $Res(f, 0) = a_{-1} = 1$. Analogamente, para o ponto $z = 1$, observamos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{-1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^{n-1} = \frac{-1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

definido para $0 < |z-1| < 1$. Logo $Res(f, 1) = a_{-1} = -1$.

É possível encontrarmos modos diferentes de determinar o resíduo de um pólo, sem, necessariamente, utilizarmos a expansão da função em série de Laurent. As próximas duas proposições fornecem formas alternativas de determinar resíduos.

Proposição 3.3. Seja z_0 pólo simples de uma função f . Nesta situação temos que

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Demonstração: Sabemos da Definição 3.6 que

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

em uma vizinhança de z_0 . Multiplicando f por $(z - z_0)$ temos

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots \quad (3.18)$$

Observemos que ao aplicarmos o limite em (3.18), com $z \rightarrow z_0$, conseguimos o valor do resíduo de f no ponto z_0 , uma vez que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} = Res(f, z_0).$$

■

Este resultado pode ser estendido para o caso em que a ordem do pólo é maior que um, através da seguinte proposição.

Proposição 3.4. Se z_0 é pólo de ordem m de uma função f , então

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (3.19)$$

Demonstração: Como z_0 é pólo de ordem m , então f pode ser escrita como Série de Laurent da seguinte forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots, \quad a_{-m} \neq 0, \quad (3.20)$$

convergente em um disco perfurado $0 < |z - z_0| < r$, para $r > 0$. Multiplicando (3.20) por $(z - z_0)^m$, temos

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{m-2} + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + a_1(z - z_0)^{m+1} + \cdots \quad (3.21)$$

Derivando $(m - 1)$ vezes em ambos os lados de (3.21), obtemos

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)! + m!a_0(z - z_0) + \cdots \quad (3.22)$$

Uma vez que todos os termos do lado direito, após o primeiro termo, possuem potências de $z - z_0$, ao aplicarmos o limite em (3.22) quando $z \rightarrow z_0$ conseguimos a fórmula almejada, pois

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = a_{-1}(m-1)! \Leftrightarrow Res(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

■

Exemplo 3.8. Use a regra (3.19) para determinar o resíduo de

$$f(z) = \frac{e^{\pi iz}}{(z - \pi)^4}$$

no seu pólo $z = \pi$. Obtenha o mesmo resultado desenvolvendo $e^{\pi iz} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)}$ em série de potências de $z - \pi$.

Solução: O primeiro passo será determinar a ordem do pólo $z = \pi$. Para isso, notemos que

$$\lim_{z \rightarrow \pi} (z - \pi)^4 \frac{e^{\pi iz}}{(z - \pi)^4} = \lim_{z \rightarrow \pi} e^{\pi iz} = e^{i\pi^2}.$$

Pela Proposição 3.2 temos que $z = \pi$ é pólo de ordem 4, e consequentemente por (3.19) concluímos que

$$\text{Res}(f, \pi) = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{d^3}{dz^3} [e^{\pi iz}] = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow \pi} (-\pi^3 i e^{i\pi z}) = -\frac{i\pi^3 e^{i\pi^2}}{6}.$$

Como ainda propõe o exemplo, desenvolveremos a função f em Série de Potências de $(z - \pi)$. Assim

$$e^{\pi iz} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)} = e^{i\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \pi^n}{n!} (z - \pi)^n. \quad (3.23)$$

Multiplicando (3.23) por $\frac{1}{(z - \pi)^4}$ temos

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{i\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \pi^n}{n!} (z - \pi)^{n-4} \\ &= e^{i\pi^2} \left[\frac{1}{(z - \pi)^4} + \frac{i\pi}{(z - \pi)^3} - \frac{\pi^2}{2(z - \pi)^2} - \frac{i\pi^3}{6(z - \pi)} + \frac{\pi^4}{24} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Concluimos então que

$$\text{Res}(f, \pi) = a_{-1} = -\frac{i\pi^3 e^{i\pi^2}}{6}.$$

Existe outro método a partir do qual podemos determinar o resíduo de uma função f no pólo z_0 , quando f é quociente de duas funções analíticas em z_0 . A seguinte proposição enuncia este método.

Proposição 3.5. Seja $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções analíticas no ponto z_0 . Se $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, então z_0 é pólo simples de f com resíduo igual a $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

Demonstração: Sendo p e q analíticas em z_0 , estas funções podem ser desenvolvidas em

séries de Taylor definidas em uma vizinhança de z_0 , isto é,

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots}{q(z_0) + q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots}. \quad (3.25)$$

Deste modo, ao multiplicarmos (3.25) por $z - z_0$, e como $q(z_0) = 0$, conseguimos o resultado

$$(z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \dots}{q'(z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \dots}. \quad (3.26)$$

Observemos então que $(z - z_0)f(z)$ tende a $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \neq 0$ quando $z \rightarrow z_0$, o que implica pela Proposição 3.2 que z_0 é pólo simples de f . Ademais, pela Proposição 3.3 temos que

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

■

Exemplo 3.9. Calcule os resíduos das seguintes funções:

a) $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1};$

b) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)},$ com $a \geq b > 0.$

Solução:

a) As singularidades de f são os pontos que satisfazem a equação $z^4 + 1 = 0$, isto é, as raízes quartas de -1 . Sabemos que as raízes n -ésimas de um número complexo $z = r(\cos \theta + i \text{sen } \theta)$ são obtidas através da fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \text{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (3.27)$$

Dessa maneira as raízes quartas de $-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$ serão:

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ z_1 &= \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ z_2 &= \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ z_3 &= \cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Reparemos que f é quociente das funções $p(z) = 1$ e $q(z) = z^4 + 1$, estas analíticas em z_0 . Observamos também que $p(z_0) = 1 \neq 0$ e $q(z_0) = 0$. Além disso, $q'(z) = 4z^3$ e $q'(z_0) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} \neq 0$. Logo pela Proposição 3.5, z_0 é pólo simples de f e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}.$$

Analogamente, para o ponto z_1 notamos que

$$p(z_1) = 1 \neq 0, \quad q(z_1) = 0 \quad \text{e} \quad q'(z_1) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

Consequentemente pela Proposição 3.5, o ponto z_1 é pólo simples de f e

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}.$$

Os resíduos de f nos pontos z_2 e z_3 são respectivamente $\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}}$ e $\operatorname{Res}(f, z_3) = \frac{1}{-2\sqrt{2} - i2\sqrt{2}}$, e o processo para determiná-los acontece de maneira análoga e fica a cargo do leitor.

- b)** A função em questão será representada por $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, com $p(z) = 1$ e $q(z) = (z^2 + a^2)(z^2 + b^2)$. Os pontos singulares isolados de f são os zeros do polinômio q , a saber $z_0 = ai$, $z_1 = bi$, $z_2 = -ai$ e $z_3 = -bi$. Notamos que

$$p(z_0) = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad q(z_0) = 0;$$

$$q'(z) = 4z^3 + 2a^2z + 2b^2z \quad \text{e} \quad q'(z_0) = -2a^3i + 2ab^2i \neq 0.$$

Assim pela Proposição 3.5, o ponto $z_0 = ai$ é pólo simples de f e

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{-2a^3i + 2ab^2i}.$$

Para $z_1 = bi$, temos que

$$p(z_1) = 1 \neq 0 \quad , \quad q'(z_1) = 0 \quad \text{e} \quad q''(z_1) = -2b^3i + 2a^2bi \neq 0.$$

Segue pela Proposição 3.5 , que $z_1 = bi$ é pólo simples e o resíduo é

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{-2b^3i + 2a^2bi}.$$

Os resíduos para z_2 e z_3 são respectivamente $\text{Res}(f, z_2) = \frac{1}{2a^3i - 2b^2ai}$ e $\text{Res}(f, z_3) = \frac{1}{2b^3i - 2a^2bi}$, e seus cálculos são realizados de forma análoga, sendo deixado a cargo do leitor.

Capítulo 4

Teorema dos Resíduos e Algumas de Suas Aplicações

Neste capítulo abordaremos o Teorema dos Resíduos, tema central de todo o trabalho, e sua aplicação no cálculo de algumas integrais reais. O conceito de resíduo visto na seção anterior é de fundamental importância para a compreensão do próximo teorema.

4.1 Teorema dos Resíduos

Teorema 4.1 (dos resíduos). Se f é analítica em uma região simplesmente conexa R , exceto em um número finito de singularidades isoladas, z_0, z_1, \dots, z_n , então

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=0}^n \text{Res}(f, z_j), \quad (4.1)$$

onde C é um contorno fechado de R , envolvendo z_0, z_1, \dots, z_n uma vez no sentido positivo.

Demonstração: Sejam $C_j (j = 0, 1, \dots, n)$ caminhos fechados simples, envolvendo uma vez no sentido positivo as singularidades $z_j (j = 0, 1, \dots, n)$, respectivamente, e totalmente contidos no interior de C . Além disso, suponhamos que dois quaisquer destes caminhos não se intersectam. Juntos, cada C_j e C formam uma região fechada multiplamente conexa na qual f é analítica (Ver Figura 4.1).

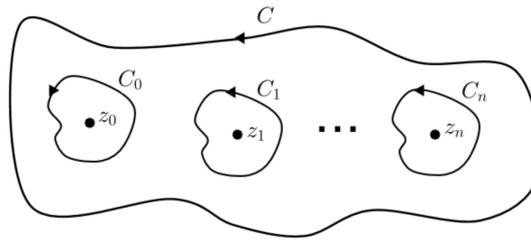


Figura 4.1: Região fechada multiplamente conexa delimitada pelos caminhos C e C_j .

Uma vez que f é analítica no interior e sobre cada C_j , exceto nos pontos z_j , então as hipóteses do Teorema 3.2 são satisfeitas, e desse modo

$$\text{Res}(f, z_j) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} f(z) dz \Rightarrow \int_{C_j} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j).$$

Por conseguinte, pelo Teorema 2.3 obtemos

$$\int_C f(z) dz - \int_{C_0} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz - \cdots - \int_{C_n} f(z) dz = 0.$$

O que é equivalente a

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_0} f(z) dz + \int_{C_1} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n} f(z) dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, z_0) + 2\pi i \text{Res}(f, z_1) + \cdots + 2\pi i \text{Res}(f, z_n) \\ &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \cdots + \text{Res}(f, z_n)] \\ &= 2\pi i \sum_{j=0}^n \text{Res}(f, z_j). \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.1. Calcule a integral da função $f(z) = \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)}$ ao longo dos seguintes círculos, todos orientados positivamente:

- a) de raio 2, centrado em $z = 2$;
- b) de raio 4, centrado na origem.

Solução:

- a) Temos que $z_0 = 1$ é singularidade isolada de f no interior do círculo $|z - 2| = 2$. Tomando $p(z) = 3z^3 + 2$ e $q(z) = (z - 1)(z^2 + 9)$, observamos o seguinte

$$p(1) = 5 \neq 0 \quad \text{e} \quad q(1) = 0;$$

$$q'(z) = 3z^2 - 2z + 9 \quad \text{e} \quad q'(1) = 10 \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 3.5, $z = 1$ é pólo simples de f e

$$Res(f, 1) = \frac{p(1)}{q'(1)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Concluimos assim, pelo Teorema dos Resíduos, que

$$\int_{|z-2|=2} f(z)dz = 2\pi i Res(f, 1) = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

- b) De forma análoga, $z_0 = 1$, $z_1 = 3i$ e $z_2 = -3i$ são pontos singulares isolados de f no interior do círculo $|z| = 4$. O resíduo para $z_0 = 1$ já foi encontrado, de modo que falta determinar tal resultado nos demais pontos. Seguindo o mesmo procedimento do item anterior, observamos que

$$p(3i) = 2 - 81i \neq 0 \quad \text{e} \quad p(-3i) = 2 + 81i \neq 0,$$

$$q(3i) = q(-3i) = 0,$$

$$q'(3i) = -18 - 6i \neq 0 \quad \text{e} \quad q'(-3i) = -18 + 6i \neq 0.$$

Assim, pela Proposição 3.5, os pontos $z_1 = 3i$ e $z_2 = -3i$ são pólos simples de f e, ademais,

$$Res(f, 3i) = \frac{p(3i)}{q'(3i)} = \frac{2 - 81i}{-18 - 6i} = \frac{5}{4} + \frac{49}{12}i,$$

$$Res(f, -3i) = \frac{p(-3i)}{q'(-3i)} = \frac{2 + 81i}{-18 + 6i} = \frac{5}{4} - \frac{49}{12}i.$$

Por fim, pelo Teorema dos Resíduos, temos que

$$\begin{aligned} \int_{|z|=4} f(z)dz &= 2\pi i [Res(f, 1) + Res(f, 3i) + Res(f, -3i)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{4} + \frac{49i}{12} \right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{49i}{12} \right) \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} \right] = 6\pi i. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2. Encontrar $\int_C \cotg(\pi z) dz$, sendo C um retângulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$, orientado no sentido positivo.

Solução: Como $f(z) = \cotg(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sen(\pi z)}$, então temos que as singularidades isoladas de f no contorno C são os zeros de $\sen(\pi z)$, a saber: $z_0 = 1$, $z_1 = 2$ e $z_2 = 3$ (Ver Figura 4.2). Representando $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, sendo $p(z) = \cos(\pi z)$ e $q(z) = \sen(\pi z)$, observamos que

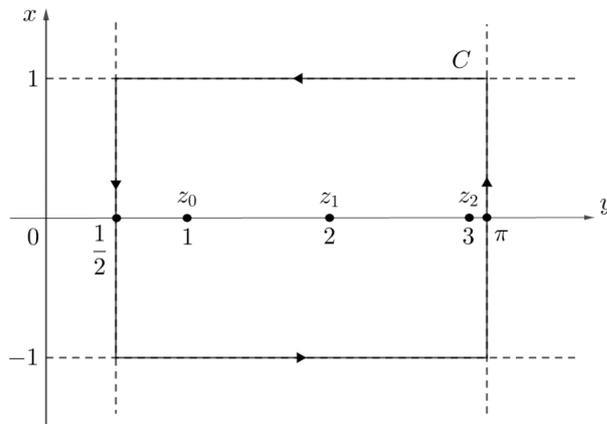


Figura 4.2: Retângulo C delimitado por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$.

$$p(1) = -1 \neq 0, \quad q(1) = 0, \quad q'(z) = \pi \cos(\pi z) \quad \text{e} \quad q'(1) = -\pi \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 3.5, temos que $Res(f, 1) = \frac{1}{\pi}$. De maneira análoga inferimos que

$Res(f, 2) = Res(f, 3) = \frac{1}{\pi}$. Concluimos, pelo Teorema dos Resíduos, que

$$\begin{aligned} \int_C \cotg(\pi z) dz &= 2\pi i [Res(f, 1) + Res(f, 2) + Res(f, 3)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] \\ &= 6i. \end{aligned}$$

4.2 Aplicações do Teorema dos Resíduos no Cálculo de Integrais Reais

Nesta última parte do trabalho serão exploradas aplicações do Teorema dos Resíduos na solução de alguns tipos de integrais reais, onde o uso de métodos do Cálculo para funções de uma variável real se mostram demasiado exaustivos ou insuficientes. Trataremos de Integrais Impróprias de Funções Racionais e Trigonométricas, e Integrais Definidas de Funções Trigonométricas.

4.2.1 Integrais Impróprias de Funções Racionais

Seja a integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (4.4)$$

na qual f é contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$ e da forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinômios. Além disso, o grau de $q(x)$ é maior que o grau de $p(x)$, no mínimo por duas unidades de diferença, e $q(x)$ possui zeros conhecidos e não reais.

A tarefa é, com o auxílio do Teorema dos Resíduos, determinar (4.4). Para isso, é sabido do Cálculo que nos casos em que f é contínua no intervalo $[0, \infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0]$,

as integrais $I_1 = \int_0^\infty f(x)dx$ e $I_2 = \int_{-\infty}^0 f(x)dx$ são definidas respectivamente pelos limites

$$L_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx \quad \text{e} \quad L_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x)dx. \quad (4.5)$$

Quando os limites acima existem dizemos que I_1 e I_2 convergem. Caso contrário, são ditas divergentes.

Como consequência das observações mencionadas acima, caso f seja contínua em $(-\infty, \infty)$, a integral (4.4) é obtida por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx = L_2 + L_1,$$

desde que L_1 e L_2 existam.

Observemos então que (4.4) será convergente se os limites em (4.5) existirem independentemente um do outro. Assim, se I_1 ou I_2 divergir, então (4.4) também diverge. Por outro lado, no caso em que previamente sabemos que a integral (4.4) é convergente, podemos avaliá-la por meio do limite

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx. \quad (4.6)$$

Porém, é importante salientar que o limite (4.6) pode existir mesmo se divergir a integral (4.4). Por exemplo, a integral $\int_{-\infty}^\infty xdx$ é divergente, uma vez que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^2}{2} = \infty$. Contudo,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R xdx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [R^2 - (-R)^2] = 0.$$

Caso o limite (4.6) exista, ele é chamado de *Valor Principal de Cauchy* e comumente determina o valor de (4.4). É representado por $VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$.

A estratégia idealizada por Cauchy para determinar (4.6) consiste em “complexificar” a função, isto é, tratar f como uma função de variável complexa. Sendo assim, consideraremos o integrando em (4.4) como sendo $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

No que se segue, seja C_R um semicírculo do semiplano $Im z > 0$, de raio $R > 0$ e centro na origem, no qual f é analítica exceto nos pontos singulares isolados localizados em

$\text{Im } z > 0$. Estes pontos são justamente os zeros z_i do polinômio $q(z)$ situados no referido semiplano. Assim sendo, devemos ter R suficientemente grande de modo que C_R abranja tais singularidades isoladas. Intitulemos C como o contorno formado pelo segmento $[-R, +R]$, unido com C_R . Ver figura a seguir:

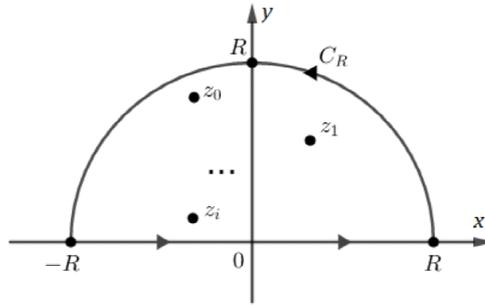


Figura 4.3: Contorno $C = [-R, +R] \cup C_R$.

Deste modo, temos pelo Teorema dos Resíduos que

$$2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i) = \int_C f(z) dz = \int_{-R}^{+R} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz. \quad (4.7)$$

Agora, por hipótese $\text{grau } q(z) - \text{grau } p(z) = m \geq 2$. Sendo assim, os polinômios $z^m p(z)$ e $q(z)$ possuem mesmo grau e, conseqüentemente, $z^m \frac{p(z)}{q(z)} = z^m f(z)$ possui limite finito e diferente de zero quando $z \rightarrow \infty$. Logo existem M e K positivos tais que

$$|z| = R > M \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{R^m}.$$

Isto é de fácil verificação, pois considerando $\lim_{z \rightarrow \infty} z^m \frac{p(z)}{q(z)} = L$, por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > M \Rightarrow \left| z^m \frac{p(z)}{q(z)} - L \right| < \varepsilon \Rightarrow |z|^m |f(z)| < \varepsilon + |L| \Rightarrow |f(z)| < \frac{\varepsilon + |L|}{|z|^m} = \frac{K}{R^m},$$

sendo $K = \varepsilon + |L|$. Em conseqüência disso

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{K}{R^m} \int_{C_R} |dz| = \frac{K}{R^m} \pi R = \frac{K\pi}{R^{m-1}}. \quad (4.8)$$

Logo, uma vez que $m > 1$, notamos que a integral ao longo de C_R em (4.7) tende a zero quando $R \rightarrow \infty$, pois aplicando tal limite em (4.8) obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{K\pi}{R^{m-1}} = 0.$$

Por fim, tomando (4.7) e passando o limite $R \rightarrow \infty$ encontramos a solução para (4.4), pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i). \quad (4.9)$$

Observação 4.1. O procedimento usado no início do problema, que consistiu em incluir o caminho de integração C_R ao intervalo $[-R, +R]$, é comumente chamado de “dobrar o caminho de integração”. Esta técnica pode ser usada também tomando C_R ao longo do semiplano inferior $\text{Im } z < 0$. Nesta situação, o caminho de $[-R, +R]$ seguido de C_R compõe um contorno fechado com orientação negativa (Figura 4.4).

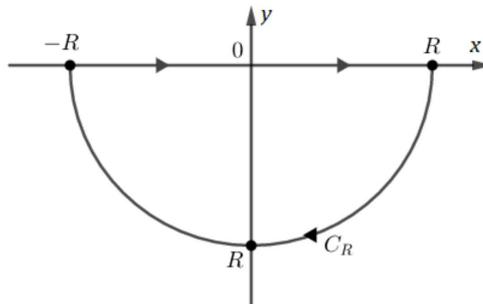


Figura 4.4: Contorno $C = [-R, +R] \cup C_R$ de orientação negativa.

Exemplo 4.3. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

Solução: Nosso objetivo é obter o resultado de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Seguindo o procedimento descrito anteriormente, trataremos a função de nosso integrando como sendo uma função complexa. Isto posto, tomemos $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ analítica em um

contorno C , constituído do intervalo $[-R, R]$ no eixo real, seguido do semicírculo C_R , localizado no semiplano $Im z > 0$, de raio suficientemente grande de forma a envolver positivamente as singularidades isoladas de f presentes neste semiplano. Pelo item (a) do Exemplo 3.9 sabemos que os pontos singulares isolados presentes no interior de C são os pólos simples $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, cujos resíduos são respectivamente $Res(f, z_0) = \frac{1}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}$ e $Res(f, z_1) = \frac{1}{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}$.

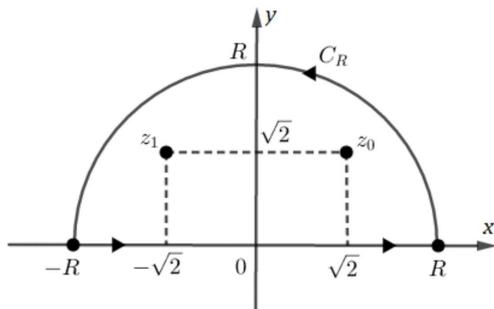


Figura 4.5: Contorno $C = [-R, +R] \cup C_R$ com os pólos z_0 e z_1 .

Logo, por (4.9) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i [Res(f, z_0) + Res(f, z_1)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)},$$

no qual $a \geq b > 0$. Considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

Solução: Notemos que o nosso intervalo de integração é $[0, \infty)$. Para procedermos com sua

resolução, observemos que $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ é uma função par, visto que

$$f(-x) = \frac{1}{((-x)^2 + a^2)((-x)^2 + b^2)} = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = f(x).$$

Deste modo, o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y e, conseqüentemente,

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Assim sendo

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

Vamos neste momento considerar o caso em que $a \neq b$. Procedendo de acordo com a sequência apresentada no início do capítulo, seja C um contorno formado pelo intervalo $[-R, R]$ seguido do semicírculo C_R orientado positivamente no semiplano $Im z > 0$. Temos que o raio R de C_R é grande o suficiente para contornar os pólos simples $z_0 = ai$ e $z_1 = bi$, cujos resíduos são, respectivamente, $Res(f, z_0) = \frac{1}{-2a^3i + 2ab^2i}$ e $Res(f, z_1) = \frac{1}{-2b^3i + 2a^2bi}$ (Ver item (b) do Exemplo 3.9).

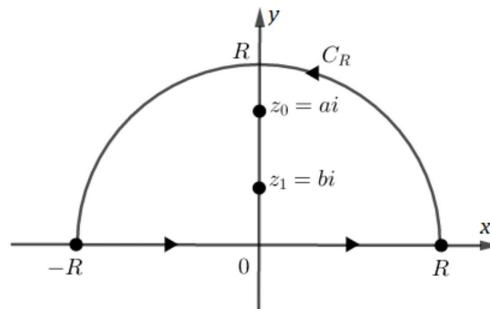


Figura 4.6: Contorno $C = [-R, +R] \cup C_R$ com os pólos ai e bi .

Portanto, pelo item (4.9), concluímos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \\
 &= \frac{1}{2} 2\pi i [Res(f, z_0) + Res(f, z_1)] \\
 &= \pi i \left[\frac{1}{-2a^3i + 2ab^2i} + \frac{1}{-2b^3i + 2a^2bi} \right] \\
 &= \pi i \left[\frac{1}{2ai(b^2 - a^2)} + \frac{1}{2bi(a^2 - b^2)} \right] \\
 &= \pi i \left[\frac{b(a^2 - b^2) + a(b^2 - a^2)}{2iab(b - a)(b + a)(a - b)(a + b)} \right] \\
 &= \pi \left[\frac{b(a - b) + a(b - a)}{2ab(b - a)(a - b)(a + b)} \right] \\
 &= \pi \left[\frac{2ab - b^2 - a^2}{2ab(2ab - b^2 - a^2)(a + b)} \right] \\
 &= \frac{\pi}{2ab(a + b)}.
 \end{aligned}$$

Para a situação em que $a = b$, a função f se reduz a $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}$, sendo ai seu único ponto singular isolado contido em C . A natureza desta singularidade é um pólo de ordem 2, já que

$$\lim_{z \rightarrow ai} (z - ai)^2 \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} = \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai)^2 \frac{1}{(z - ai)^2(z + ai)^2} = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{(z + ai)^2} = -\frac{1}{4a^2} \neq 0.$$

O resíduo de f no ponto ai pode ser determinado pela fórmula da Proposição 3.4, ou seja,

$$Res(f, ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + ai)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ai} -\frac{2}{(z + ai)^3} = \frac{1}{4a^3i}.$$

Analogamente ao caso anterior, a integral de f ao longo do intervalo $[0, \infty)$ é estabelecido

por

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai) = \frac{\pi}{4a^3} \\ &= \frac{\pi}{2a^2 2a} \\ &= \frac{\pi}{2aa(a+a)} \\ &= \frac{\pi}{2ab(a+b)}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5. Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}, \quad n \geq 2.$$

Solução: Queremos determinar

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n}.$$

Para tanto, tomemos $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ e o caminho $C = AB \cup C_R \cup CA$, como descrito na figura abaixo. Perceba que o contorno considerado é diferente do semicírculo usual que vimos até agora, contudo este fato não modifica significativamente os processos já elencados para a resolução deste tipo de integral, uma vez que o Teorema dos Resíduos considera qualquer contorno fechado simples.

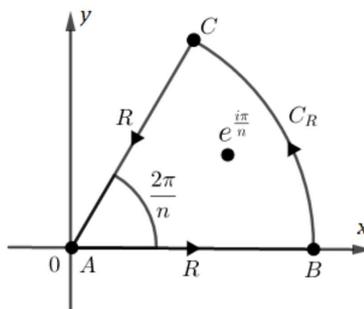


Figura 4.7: Caminho $C = AB \cup C_R \cup CA$.

A função f possui singularidades isoladas nos pontos $z_k = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ (Ver fórmula (1.4))

no capítulo anterior), das quais somente $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$ localiza-se no interior de C . Designando $p(z) = 1$ e $q(z) = 1 + z^n$, vemos que

$$p(z_0) = 1 \text{ e } q(z_0) = 0;$$

$$q'(z_0) = nz^{n-1} \text{ e } q'(z_0) = -ne^{-\frac{i\pi}{n}}.$$

Sendo assim, pela Proposição 3.5, $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$ é pólo simples e $\text{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{n}}) = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$.

Como consequência do Teorema dos Resíduos

$$\int_C \frac{dz}{1+z^n} = \int_{AB} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{CA} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i [\text{Res}(f, e^{\frac{i\pi}{n}})].$$

Ademais, $z(x) = x$, com $0 \leq x \leq R$, e $z_1(x) = xe^{\frac{i2\pi}{n}}$, com $R \leq x \leq 0$, são, respectivamente, parametrizações dos caminhos AB e CA . Deste modo

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} + \int_R^0 \frac{e^{\frac{i2\pi}{n}} dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}. \quad (4.10)$$

Vamos avaliar agora a integral sobre C_R . Usando propriedades do módulo, a desigualdade triangular e a propriedade (2.1) das integrais curvilíneas, obtemos:

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \right| \leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{1-|z|^n} = \frac{1}{1-R^n} \int_{C_R} |dz| = \frac{2\pi R}{n(1-R^n)}.$$

Ao passarmos o limite na desigualdade acima, com $R \rightarrow \infty$, vemos que $\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \right| \rightarrow 0$ e

assim também $\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^n} \rightarrow 0$.

Portanto, fazendo $R \rightarrow \infty$ em (4.10) conseguimos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} - e^{\frac{i2\pi}{n}} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} &= -\frac{2\pi i e^{\frac{i\pi}{n}}}{n} \Leftrightarrow (1 - e^{\frac{i2\pi}{n}}) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i e^{\frac{i\pi}{n}}}{n} \\
&\Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i e^{\frac{i\pi}{n}}}{n(1 - e^{\frac{i2\pi}{n}})} \\
&= \frac{\pi/n}{(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}})/2i} \\
&= \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)}.
\end{aligned}$$

4.2.2 Integrais Impróprias Envolvendo Funções Trigonômétricas

Nesta parte serão tratadas integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\alpha x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{cos}(\alpha x) dx, \quad (4.11)$$

nas quais f é uma função contínua em $(-\infty, \infty)$, e α um valor real e positivo. Estas integrais constituem-se como partes real e imaginária da integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx. \quad (4.12)$$

Isto é observado através da fórmula da exponencial $e^{i\alpha x} = \operatorname{cos} \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x$, dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{cos}(\alpha x) + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen}(\alpha x),$$

sempre que as duas integrais do lado direito da igualdade convergem.

A integral (4.12) se faz presente, por exemplo, na fórmula da Transformada de Fourier. Este tipo de transformada possui várias aplicações na engenharia e na física, como citado em [2]:

[...] as transformadas de Fourier aparecem com frequência em estudos de ondas e na extração de informações de ondas, em particular quando estão envolvidas informações de fase. A leitura de um interferômetro estelar, por exemplo, envolve uma transformada de Fourier do brilho em um disco estelar. A distribuição

de elétrons em um átomo pode ser obtida de uma transformada de Fourier da amplitude de raios X espalhados. [...] (2007, p. 705).

As integrais em (4.11) podem ser analisadas através da integral (4.12). Como na seção anterior, somos levados a dobrar o caminho de integração, considerando a integral $\int_C e^{i\alpha z} f(z) dz$, em que C é um contorno constituído novamente do intervalo $[-R, R]$ no eixo real, sucedido do contorno semicircular C_R , de raio grande o suficiente para envolver as singularidades isoladas de f localizadas no semiplano $Im z > 0$.

O Lema de Jordan, considerado a seguir, estabelece condições suficientes para mostrar que a integral $\int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$.

Lema 4.1 (de Jordan). Sejam α e R constantes reais positivas e C_R o semicírculo situado no semiplano $Im z > 0$. Suponhamos f uma função analítica em C_R , exceto em um número finito de singularidades isoladas, e que $|f(z)| \leq G(R)$, com z em C_R e $\lim_{R \rightarrow \infty} G(R) = 0$. Então

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

Demonstração: A prova é baseada na chamada desigualdade de Jordan

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (R > 0). \quad (4.13)$$

Para verificar isto, primeiro notamos, a partir dos gráficos das funções $g(\theta) = \sin \theta$ e $h(\theta) = \frac{2\theta}{\pi}$ (Figura 4.8), que $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ quando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

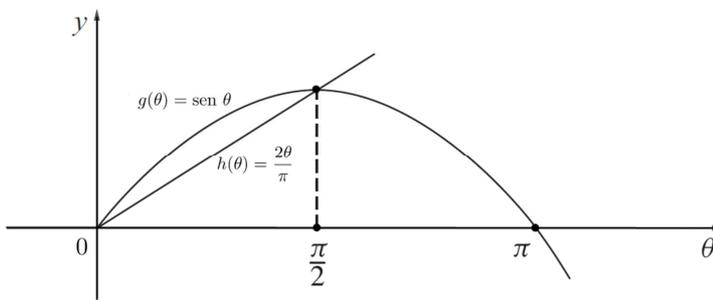


Figura 4.8: Gráficos de g e h .

Conseqüentemente, se $R > 0$,

$$e^{-R \operatorname{sen} \theta} \leq e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}, \text{ quando } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

e assim

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R} \quad (R > 0).$$

Como o gráfico de $g(\theta) = \operatorname{sen} \theta$ é simétrico em relação a linha vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, então

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta$$

e, daí,

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen} \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}.$$

Voltando agora para a prova do lema, temos que $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, é uma parametrização para o semicírculo superior C_R . Sendo assim, da definição de integral curvilínea conseguimos

$$\begin{aligned} I_R = \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz &= \int_0^{\pi} e^{i\alpha R(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} f(Re^{i\theta}) e^{i(\alpha R \cos \theta + \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Considerando a desigualdade (4.13) segue-se que

$$|I_R| \leq RG(R) \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} d\theta \leq \frac{G(R)\pi}{\alpha}.$$

Já que por hipótese $G(R) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, constatamos que $|I_R| \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$.

Fato este que implica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

■

Exemplo 4.6. Demonstre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20} dx = \pi e^{-4} \left(\frac{2 \cos 2 + \operatorname{sen} 2}{2} \right).$$

Solução: Através da Fórmula de Euler podemos expressar $x \operatorname{sen} x = \operatorname{Im} x e^{ix}$ e, por conseguinte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx. \quad (4.14)$$

O integrando $f(z) = \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20}$ tem pólo simples no ponto $z_0 = -2 + 4i$, que é sua única singularidade isolada no semiplano superior, pois

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+4i} [z - (-2 + 4i)] \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20} &= \lim_{x \rightarrow -2+4i} (z + 2 - 4i) \frac{z e^{iz}}{(z + 2 - 4i)(z + 2 + 4i)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+4i} \frac{z e^{iz}}{z + 2 + 4i} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right) e^{-4-2i} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right) e^{-4} (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2). \end{aligned}$$

Consequentemente $\operatorname{Res}(f, -2 + 4i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right) e^{-4} (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2)$. Considerando deste modo a integral de $-R$ a R , seguida da integral sobre C_R no semiplano superior, pelo Teorema dos Resíduos obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx + \int_{C_R} \frac{z e^{iz}}{z^2 + 4z + 20} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2 + 4i) \\ &= 2i\pi e^{-4} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{4} \right) (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2). \end{aligned}$$

Passando o limite com $R \rightarrow \infty$ na expressão acima, e usando o Lema de Jordan, vem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx = i\pi e^{-4} \left(1 + \frac{i}{2} \right) (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2).$$

Substituindo a igualdade anterior em (4.14) têm-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20} dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 4x + 20} dx \\
 &= \operatorname{Im} i\pi e^{-4} \left(1 + \frac{i}{2} \right) (\cos 2 - i \operatorname{sen} 2) \\
 &= \operatorname{Im} i\pi e^{-4} \left[\left(\cos 2 + \frac{\operatorname{sen} 2}{2} \right) + i \left(\frac{\cos 2}{2} - \operatorname{sen} 2 \right) \right] \\
 &= \pi e^{-4} \left(\frac{2 \cos 2 + \operatorname{sen} 2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

A princípio, até agora lidamos com funções contínuas em $(-\infty, \infty)$, isto é, que não possuem singularidades no eixo real. Suponhamos então que uma função f tenha um pólo simples em $z = c$, em que c é um número real. Neste caso, o Valor Principal de Cauchy da integral é dado por

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{c-r} + \int_{c+r}^R \right) e^{i\alpha x} f(x) dx,$$

que pode ser calculada pelo Teorema dos Resíduos dobrando o caminho de integração, como já descrito em procedimentos anteriores. No entanto, será acrescido ao caminho C o contorno semicircular C_r , centrado em $z = c$, de raio r e orientado positivamente. A figura abaixo ilustra esta situação.

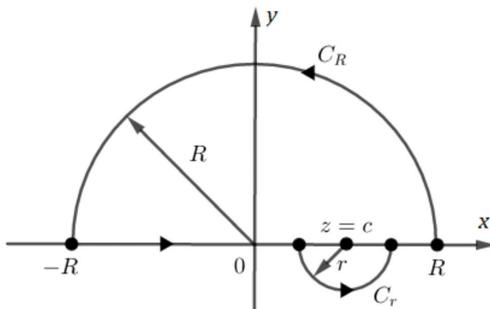


Figura 4.9: Caminho $C = [-R, c - r] \cup C_r \cup [c + r, R] \cup C_R$.

A próxima proposição discorre a respeito da integral sobre C_r .

Proposição 4.1. Suponha f uma função contínua em $(-\infty, \infty)$, exceto no pólo simples

$z = c$ no eixo real. Se C_r for o semicírculo parametrizado por $z = c + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, então

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), c).$$

Demonstração: Como $f(z)$ tem um pólo simples em $z = c$, então

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - c} + g(z),$$

em que $a_{-1} = \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), c)$ e g é analítica no ponto c . Usando a série de Laurent encontrada e a parametrização de C_r temos

$$\begin{aligned} \int_{C_r} f(z) dz &= a_{-1} \int_0^\pi \frac{ir e^{i\theta}}{r e^{i\theta}} d\theta + ir \int_0^\pi g(c + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &= a_{-1} \int_0^\pi i d\theta + ir \int_0^\pi g(c + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \\ &= \pi i a_{-1} + ir \int_0^\pi g(c + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nomeemos como I_r a segunda parcela da soma presente no lado direito da última igualdade acima. Como g é analítica em c , então esta é contínua neste ponto e limitada em uma vizinhança do mesmo, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|g(c + r e^{i\theta})| \leq M$, para $|z| \leq r$. Sendo assim,

$$\left| ir \int_0^\pi g(c + r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq r \int_0^\pi M d\theta = \pi r M.$$

Segue-se desta última desigualdade que $\lim_{r \rightarrow 0} |I_r| = 0$ e conseqüentemente $\lim_{r \rightarrow 0} I_r = 0$. Portanto, ao aplicarmos o limite em (4.15), com $r \rightarrow 0$, conseguimos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i a_{-1} = \pi i \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), c).$$

■

Exemplo 4.7. Estabeleça a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi(1 - e^{-a})}{a^2}, \quad a > 0.$$

Solução: Reescrevendo a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)} dx. \quad (4.16)$$

A função $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)}$ têm singularidades isoladas nos pontos $z_0 = ai$ e $z_1 = 0$, localizados respectivamente no plano superior e no eixo real (Figura 4.10).

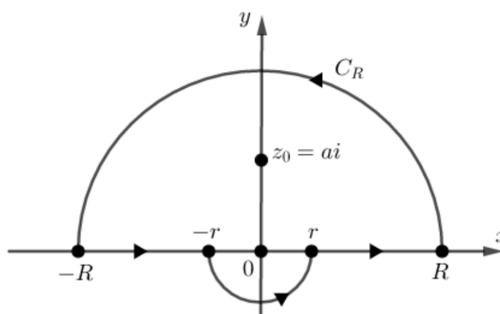


Figura 4.10: Contorno de Integração.

Ambos os pontos são pólos simples uma vez que

$$\lim_{z \rightarrow ai} (z - ai)f(z) = -\frac{e^{-a}}{2a^2} \neq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \frac{1}{a^2} \neq 0.$$

Por conseguinte

$$\operatorname{Res}(f, ai) = -\frac{e^{-a}}{2a^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{a^2}.$$

Desta maneira, pelo Teorema dos Resíduos temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{-R}^{-r} + \int_{C_r} + \int_r^R + \int_{C_R} \right) \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}(f, ai) + \operatorname{Res}(f, 0)] \\ &= 2\pi i \left[-\frac{e^{-a}}{2a^2} + \frac{1}{a^2} \right] \\ &= \frac{\pi i (2 - e^{-a})}{a^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Segundo a Proposição 4.1,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} dz = \pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{\pi i}{a^2}.$$

Portanto, aplicando o limite duplo em (4.17) quando $R \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$, e fazendo uso do Lema de Jordan, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left(\int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} dz + \frac{\pi i}{a^2} &= \frac{\pi i(2 - e^{-a})}{a^2} \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)} dx &= \frac{\pi i(2 - e^{-a})}{a^2} - \frac{\pi i}{a^2} \\ &= \frac{\pi i(1 - e^{-a})}{a^2}. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior em (4.16), temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi(1 - e^{-a})}{a^2}.$$

Exemplo 4.8. Sabendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, faça o que se pede em cada item abaixo:

a) Prove que $\int_{C_R} e^{iz^2} dz \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, onde C_R é o arco $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$;

b) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.^1$$

Solução:

a) Utilizando a definição e propriedades das integrais curvilíneas, juntamente com propriedades do módulo, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iR e^{i\theta} d\theta \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)} iR e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\theta} R d\theta. \end{aligned}$$

Ao realizarmos a mudança de variável $\phi = 2\theta$, notamos pelo gráfico da Figura 4.8 que

¹Estas integrais são chamadas de *integrais de Fresnel*.

$\text{sen } \phi \geq \frac{2\phi}{\pi}$ quando $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Como consequência disto, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \text{sen } \phi} d\phi \\ &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi} \phi} d\phi \\ &= -\frac{\pi}{4R} (e^{-R^2} - 1). \end{aligned}$$

Isto mostra que $\left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow \infty$, e assim da mesma forma $\int_{C_R} e^{iz^2} dz \rightarrow 0$.

b) Sejam a função $f(z) = e^{iz^2}$ e o contorno $C = AB \cup C_R \cup CA$ como descrito na figura abaixo.

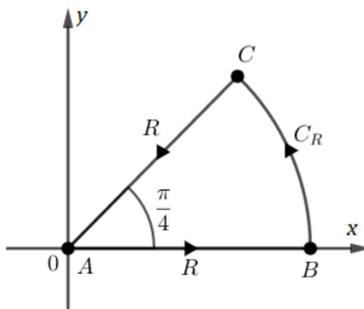


Figura 4.11: Caminho $C = AB \cup C_R \cup CA$.

Temos que $z(x) = x$ ($0 \leq x \leq R$) e $z_1(r) = re^{\frac{\pi}{4}i}$ ($R \leq r \leq 0$) são parametrizações para AB e CA , respectivamente. Daí, pelo Teorema de Cauchy

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0 &\Leftrightarrow \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_{CA} e^{iz^2} dz = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_R^0 e^{ir^2 e^{\frac{\pi}{2}i}} e^{\frac{\pi}{4}i} dr = 0. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\int_0^R (\cos(x^2) + i \text{sen}(x^2)) dx = e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^R e^{-r^2} dr - \int_{C_R} e^{iz^2} dz.$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ na expressão acima, usando a hipótese no início do problema e o resultado do item anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\cos(x^2) + i \operatorname{sen}(x^2)) dx &= e^{\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty e^{-r^2} dr \\ &= e^{\frac{\pi}{4}i} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i \frac{\sqrt{2\pi}}{4}. \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias conseguimos

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

4.2.3 Integrais Definidas de Funções Trigonômétricas

Esta última subseção tratará de integrais definidas da forma

$$\int_0^{2\pi} f(\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) d\theta, \quad (4.18)$$

em que f é uma função racional. Até agora, vimos integrais ao longo de segmentos reais que foram então complementados em contornos fechados no plano complexo. Contudo, para o caso (4.18) converteremos a integral trigonométrica real em uma integral complexa ao longo do círculo unitário $|z| = 1$ centrado na origem.

Para tal, usemos a parametrização $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, do círculo unitário em questão. Baseado nisto e nas identidades em (1.5), expostas na Subseção 1.3.1 do Capítulo 1, podemos escrever

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta.$$

Logo, a integral (4.18) assume a forma

$$\int_{|z|=1} f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz},$$

que pode ser avaliada pelo Teorema dos Resíduos.

Exemplo 4.9. Use os resultados sobre resíduos para estabelecer a seguinte fórmula de integração

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - k^2}},$$

onde $|k| < 1$.

Solução: Fazendo $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k \cos \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + k \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)} \frac{dz}{iz} \\ &= -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{\left(\frac{2z + kz^2 + k}{2} \right)} \\ &= -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{kz^2 + 2z + k}. \end{aligned}$$

O integrando $f(z) = \frac{1}{kz^2 + 2z + k}$ possui pólos simples nos pontos $z_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 - k^2}}{k}$ e $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - k^2}}{k}$.

Como $|k| < 1$, então

$$|z_1| = \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{|k|} > 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |z_0 z_1| &= \left| \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - k^2}}{k} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - k^2}}{k} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1 + \sqrt{1 - k^2} - \sqrt{1 - k^2} - (1 - k^2)}{k^2} \right| \\ &= \left| \frac{k^2}{k^2} \right| = 1. \end{aligned}$$

Segue-se daí que $|z_0| < 1$. Portanto, apenas z_0 se encontra no interior de $|z| = 1$.

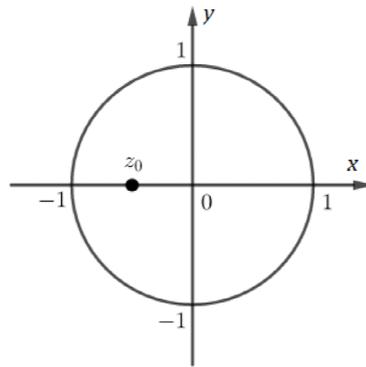


Figura 4.12: Contorno $|z| = 1$.

Ademais $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}$. Portanto, pelo Teorema dos Resíduos temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+k\cos\theta} &= -2i [2\pi i \text{Res}(f, z_0)] \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} \right] \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.10. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} = \frac{2\pi}{1-t^2}, \quad \text{para } |t| < 1.$$

O que acontece se $|t| > 1$? O que acontece se $|t| = 1$?

Solução: Consideremos o círculo $|z| = 1$. Realizando a substituição $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, obte-

mos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} &= \int_{|z|=1} \frac{d\theta}{1 - 2t \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right) + t^2} \frac{dz}{iz} \\
 &= -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(1 - tz - tz^{-1} + t^2)z} \\
 &= -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z - tz^2 - t + t^2z} \\
 &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{tz^2 - (1 + t^2)z + t}.
 \end{aligned}$$

As singularidades isoladas de $f(z) = \frac{dz}{tz^2 - (1 + t^2)z + t}$ são os pontos que satisfazem a equação $tz^2 - (1 + t^2)z + t = 0$, isto é, $z_0 = t$ e $z_1 = \frac{1}{t}$. Destes, o único localizado dentro do círculo unitário é z_0 , uma vez que, por hipótese, $|t| < 1$.

Considerando $p(z) = 1$ e $q(z) = tz^2 - (1 + t^2)z + t$, notemos que

$$p(z_0) = 1, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z) = 2tz - 1 - t^2 \quad \text{e} \quad q'(z_0) = t^2 - 1.$$

$$\text{Logo } \text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{1}{t^2 - 1}.$$

Fazendo-se uso do Teorema dos Resíduos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} &= i[2\pi i \text{Res}(f, z_0)] \\
 &= -\frac{2\pi}{t^2 - 1} \\
 &= \frac{2\pi}{1 - t^2}.
 \end{aligned}$$

Se $|t| > 1$, então z_1 será a única singularidade isolada de f no círculo unitário. De maneira

análoga ao caso anterior verificamos que $Res(f, z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{1-t^2}$. Assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} &= i[2\pi i Res(f, z_1)] \\ &= -\frac{2\pi}{1-t^2} \\ &= \frac{2\pi}{t^2-1}. \end{aligned}$$

Por sua vez, caso $|t| = 1$, então tanto z_0 quanto z_1 pertencerão ao círculo unitário, e consequentemente

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2t\cos\theta+t^2} &= i[2\pi i(Res(f, z_0) + Res(f, z_1))] \\ &= -2\pi \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{1-t^2} \right) \\ &= -2\pi \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2-1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.11. Com o cálculo de resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Solução: Realizando a substituição $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos que $\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$ e $d\theta = \frac{dz}{iz}$, e desta forma a integral em questão pode ser reescrita como

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \int_{|z|=1} \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i4^n} \int_{|z|=1} \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z} dz.$$

O integrando da última integral acima possui uma singularidade no ponto $z_0 = 0$. Utilizando a fórmula binomial podemos expandir $g(z) = \frac{(z+z^{-1})^{2n}}{z}$ como uma série de Laurent em

torno da origem, isto é,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z}(z + z^{-1})^{2n} &= \frac{1}{z} \left[\binom{2n}{0} z^{2n} + \binom{2n}{1} z^{2n-1} z^{-1} + \dots + \binom{2n}{n} z^{2n-n} z^{-n} + \dots + \binom{2n}{2n} z^{-2n} \right] \\
 &= \binom{2n}{0} z^{2n-1} + \binom{2n}{1} z^{2n-2-1} + \dots + \binom{2n}{n} z^{-1} + \dots + \binom{2n}{2n} z^{-2n-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^{2n-2k-1}. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

Ao observarmos (4.19), percebemos que $Res(g, 0) = \binom{2n}{n}$, uma vez que este é o coeficiente de $\frac{1}{z}$. Concluimos pelo Teorema dos Resíduos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta &= \frac{1}{i4^n} \int_{|z|=1} \frac{(z + z^{-1})^{2n}}{z} dz \\
 &= \frac{1}{i4^n} 2\pi i [Res(g, 0)] \\
 &= \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}.
 \end{aligned}$$

Considerações Finais

O trabalho descreveu o cálculo de alguns tipos de integrais reais nas quais o uso de técnicas tradicionais se mostra insuficiente ou demasiado árduo. Nestes desenvolvimentos foi utilizado como ferramenta principal o Teorema dos Resíduos, resultado este encontrado dentro da teoria das funções de uma variável complexa. Para além do valor matemático, algumas das integrais abordadas são de interesse da física, como as integrais de Fresnel presentes no Exemplo 4.8 na Subseção 4.2.2, importantes na teoria da difração.

Dentro do curso de Licenciatura em Matemática, é difícil observar a conexão entre os conhecimentos relativos a funções de variáveis complexas e as demais disciplinas que compõem o curso. Desta maneira, o valor deste estudo residiu no fato de evidenciar que tal ligação existe, além de mostrar formas diferentes e mais simples de encontrar o resultado de integrais consideradas complicadas. O Teorema dos Resíduos também possui uma gama de aplicações, não só dentro da matemática.

Como sugestões para pesquisas futuras estão o estudo da aplicação do Teorema dos Resíduos na resolução da inversa da Transformada de Laplace e em sistemas físicos, como por exemplo, em problemas envolvendo aerodinâmica.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo. Variáveis Complexas e Aplicações. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 271 p.
- [2] ARFKEN, George B.; WEBER, Hans J.. Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. 6. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2007. 900 p. Tradução da sexta edição.
- [3] BAK, Joseph; NEWMAN, Donald J.. Complex Analysis. 3. ed. New York: Springer, 2010.
- [4] BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel V.. Complex Variables and Applications. 8. ed. New York: Mcgraw-hill, 2009.
- [5] BROWN, James Ward. Students Solutions Manual to accompany Complex Variables and Applications. 8. ed. New York: Mcgraw-hill, 2009.
- [6] BURTON, David M.. The History of Mathematics: An Introduction. 7. ed. Nova York: Mcgraw-hill, 2011.
- [7] CHURCHILL, Ruel, V. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: Editora McGRAW-HILL do Brasil, 1975.
- [8] JESUS, Daynitti Ventura de. Aplicações do Teorema dos Resíduos. 2007. 79 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [9] SOARES, Marcio G.. Cálculo em uma variável complexa. 5. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2009.
- [10] ZILL, Dennis G.; SHANAHAN, Patrick D.. A first course in complex analysis with applications. [s. L.]: Jones And Bartlett Publishers, 2003.