



**UEPB**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VII  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

**PAULO BARBOSA DE LIMA JUNIOR**

**UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE TRACKER NO ENSINO DE FÍSICA: APLICAÇÃO  
NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES**

**PATOS, PB  
2017**

**PAULO BARBOSA DE LIMA JUNIOR**

**UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE TRACKER NO ENSINO DE FÍSICA: APLICAÇÃO  
NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de Licenciado em Física.  
Área de concentração: Educação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cesar Fonseca da Silva.

**PATOS, PB  
2017**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

L732u Lima Júnior, Paulo Barbosa de.  
Utilização do Software Tracker no Ensino de Física  
[manuscrito] : aplicação no Movimento Harmônico Simples /  
Paulo Barbosa de Lima Junior. - 2017.  
38 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -  
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas  
e Sociais Aplicadas, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Rodrigo Cesar Fonseca da Silva,  
Coordenação do Curso de Física - CCEA."

1. Tracker. 2. Vídeo-análise. 3. Ensino de Física. 4.  
Movimento Harmônico Simples. 5. Software Tracker.

21. ed. CDD 371.8

PAULO BARBOSA DE LIMA JUNIOR

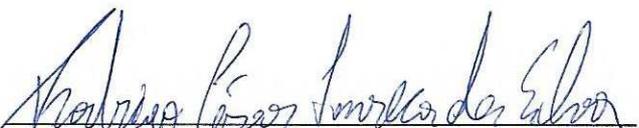
UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE TRACKER NO ENSINO DE FÍSICA: APLICAÇÃO NO  
MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Programa de Graduação em Licenciatura  
Plena em Física da Universidade Estadual da  
Paraíba, como requisito para a obtenção do  
título de licenciado em Física.

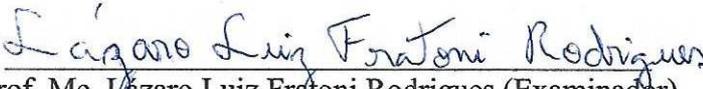
Área de concentração: Educação.

Aprovada em: 27/11/2017.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Rodrigo Cesar Fonseca da Silva (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  
Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior (Examinador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

  
Prof. Me. Lazaro Luiz Fratoni Rodrigues (Examinador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço ao meu bom e fiel Deus, por tudo o que Ele tem feito em minha vida, por ter me capacitado e me dado forças para continuar nos momentos mais difíceis e por me permitir concluir o curso.

Agradeço aos meus pais, pelo amor, carinho, paciência e seus ensinamentos, especialmente ao meu irmão Aleff, por ter me ajudado no transporte para a Universidade.

Agradeço à minha amada Queren Hapuque por todo o seu amor, carinho, admiração, paciência e apoio ao longo desta importante etapa da minha vida. Também quero agradecer por sua grande e fundamental contribuição neste trabalho.

Agradeço ao meu professor Dr. Rodrigo Fonseca por toda orientação, dedicação e ajuda que me foram dadas.

Aos colegas de curso pela amizade, companheirismo e troca de conhecimento durante a graduação. Desejo sorte a todos.

À Universidade Estadual da Paraíba por ter nos dado a oportunidade de realizar este curso.

# UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE TRACKER NO ENSINO DE FÍSICA: APLICAÇÃO NO MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Paulo Barbosa de Lima Junior\*

## RESUMO

O presente artigo aborda a utilização do software livre Tracker, que é destinado à vídeo-análise, como proposta de possibilitar uma alternativa para auxiliar as aulas de Física, dando suporte às atividades teóricas e experimentais. Essa ferramenta pode ser aplicada no ensino de Física, tanto na educação básica quanto no ensino superior, a fim de incrementar e facilitar o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem. O programa possui uma interface gráfica bastante intuitiva e de fácil manuseio para quem tem conhecimentos básicos sobre informática. Com a vídeo-análise do Tracker, é possível abordar diversos conceitos da Física por meio de filmagens feitas com os smartphones, câmeras digitais e até mesmo webcam. Neste trabalho, abordamos como o uso do software pode contribuir para uma aprendizagem significativa e mostrar que seu uso pode suprir a falta de um laboratório didático. Tratamos aqui duas atividades experimentais: uma sobre o pêndulo simples e a outra sobre o sistema massa mola, ambas relacionadas ao Movimento Harmônico Simples, que também validam o programa como passível de aplicação no tempo didático de uma aula de laboratório típica e destacam seu potencial para o desenvolvimento de competências e habilidades importantes no tratamento de dados experimentais e na descrição dos fenômenos físicos.

**Palavras-Chave:** Tracker; Vídeo-análise; Ensino de Física; Movimento Harmônico Simples;

---

\* Aluno de Graduação em Licenciatura Plena em Física na Universidade Estadual da Paraíba – Campus VII.  
E-mail: paulojrfisica@gmail.com

## 1 INTRODUÇÃO

É evidente que as disciplinas envolvendo exatas no Brasil são as que apresentam maiores dificuldades e apatia entre os alunos, uma prova disso é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), no qual, segundo o portal do INEP, em Ciências da Natureza e suas Tecnologias, a maioria dos participantes (3.234.551) alcançou notas entre 400 e 500 pontos. Apenas 632 obtiveram notas entre 800 e 900 e 3.109 tiraram zero. A média nacional foi de 482,3. Já em Matemática e suas Tecnologias, a maioria (2.430.115) alcançou notas entre 400 e 500 pontos.

Como podemos verificar, a maior dificuldade dos alunos é em Matemática e Ciências da Natureza (Química, Física e Biologia), onde as médias das notas são as mais baixas em comparação às outras áreas de conhecimento. Um dos motivos, especificamente no ensino de Física, é a falta de associação do fenômeno com o cotidiano do aluno e a linguagem científica. Por esse motivo, as atividades realizadas no estágio, durante a graduação, tiveram como foco criar um elo entre teoria e prática, por meio da experimentação, o que vem se mostrando eficaz na aprendizagem, de forma que o aluno consegue entender a disciplina por causa de uma linguagem mais acessível. O processo de formação para docência é cercado por desafios, logo, a disciplina de estágio na licenciatura é de extrema importância no que se refere à experiência do discente como pessoa e como profissional.

Seguindo essa linha de raciocínio, é objetivo desse trabalho propor uma forma de utilização do uso de tecnologias livres e acessíveis no ensino de Física. A ferramenta escolhida foi o software Tracker. Com ele, iremos analisar como o uso do programa pode contribuir positivamente para um melhor entendimento dos conteúdos nas aulas de Física e mostrar que seu uso pode suprir uma eventual falta de laboratório didático. Para isso, iremos aplicar o Tracker realizando experimentos relacionados ao Movimento Harmônico Simples. Verificaremos os dados obtidos nos experimentos feitos em laboratório e iremos comparar os resultados obtidos com a análise no software. Pretende-se mostrar, também, que o Tracker é uma plataforma de estudo de movimentos que permite uma coleta de dados com maior precisão.

Portanto, espera-se que sua utilização possibilite uma melhor compreensão do movimento oscilatório, que na maioria dos casos é abordada de maneira mais abstrata, sendo uma alternativa de ensino que difere do tradicional modelo “quadro e giz”, além de despertar nos estudantes o interesse pela pesquisa científica e incentivar a observação da natureza com olhar crítico.

## 2 UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES EDUCATIVOS NO ENSINO

Atualmente, a informática está presente de maneira irreversível na nossa sociedade. Portanto, é de suma importância refletir sobre sua aplicação na educação em geral. Existem quatro fatores que são imprescindíveis para o uso da informática na educação: o computador, o software, o professor e o aluno. Neste sentido, vários trabalhos analisam o uso de computadores no laboratório didático. Veit (2005), por exemplo, afirma que:

“Dentre as diversas aplicações das tecnologias de informação e comunicação na formação do cidadão, destacamos duas como particulares do ensino de Ciências: o computador como instrumento para a modelagem científica e como suporte ao laboratório.”

As tecnologias são importantes na educação e podem auxiliar na aplicação dos conteúdos ministrados, contribuindo para favorecer a interação, a comunicação e o trabalho cooperativo entre professores, visto que constituem um instrumento para eles desenvolverem um projeto educacional mais eficiente e mais estruturado, a fim de que compartilhem o que possuem de mais valioso: o conhecimento. Segundo Schwartz (2014, p.18): “É urgente a reinvenção do professor como um mentor, um parceiro inspirador e experiente na apropriação dos novos recursos tecnológicos em favor de práticas de aprendizagem mais criativas”. Superar esse desafio é o que irá levar as escolas e a sociedade, a uma vivência mais plena e democrática do conhecimento e da tecnologia no século XXI.

Todos os jogos, aplicativos e brincadeiras contidos em vários softwares educativos são elaborados para divertir enquanto ensinam. A ideia principal é comum a todos eles: fazer com que o aluno aprenda o conceito, o conteúdo ou a habilidade embutida no programa através de um fazer lúdico. A inserção das tecnologias na educação pode trazer, à educação brasileira, transformações pedagógicas e metodológicas no ensino. “A escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias d

a informação e da comunicação transformam espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar” (PERRENOUD apud OLIVEIRA, 2001, p. 7).

Como afirma Almeida (2005, p. 8), “o uso das Novas Tecnologias da Informação e Comunicação impõe mudanças nos métodos de trabalho dos professores, gerando modificações no funcionamento das instituições e no sistema educativo”.

### 3 SOBRE O TRACKER

O Tracker é um software livre, destinado à análise e modelagem quadro a quadro de vídeos ou vídeo-análise que permite o estudo de diversos tipos de movimento a partir de filmes ou imagens animadas, visando à sua utilização para explicar Física. Foi projetado pelo professor Douglas Brown do Cabrillo College, Califórnia, e desenvolvido pela OSP (Open Source Physics). A OSP é uma comunidade de âmbito mundial que contribui com a oferta de recursos gratuitos para o ensino de Física e de modelagem computacional. Esta é uma ferramenta que, se manipulada de forma adequada, poderá levar as experiências laboratoriais a um nível mais elevado.

O programa Tracker pode ser baixado gratuitamente da internet diretamente na página do Cabrillo College ou da página do grupo de pesquisa na Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Para facilitar o uso do software, equipes de vários países traduziram-no para sua língua nativa. O Brasil foi um dos pioneiros nessa tarefa, devido à importância, à facilidade e à necessidade do uso do software em ambiente escolar brasileiro. Neste sentido, entendemos que a versão em português do Brasil é um passo significativo para a difusão do uso do Tracker em nosso país (OLIVEIRA, 2009).

Em resumo, o Tracker pode cumprir várias funções no processo de ensino aprendizagem, permitindo que os alunos acompanhem a evolução de grandezas físicas em tempo real, existindo a possibilidade de não estarem fixados a roteiros rigorosamente limitados e estruturados, permitindo a coleta de dados e a construção de gráficos a partir de dados observados (BEZERRA JR, 2012). Além disso, o programa permite a manipulação dos dados e a construção dos gráficos a partir de tais observações, o que é fundamental para a construção do conhecimento físico a partir de atividades experimentais (ALVES FILHO, 2004) fazendo assim que os atores sejam agentes ativos desse processo.

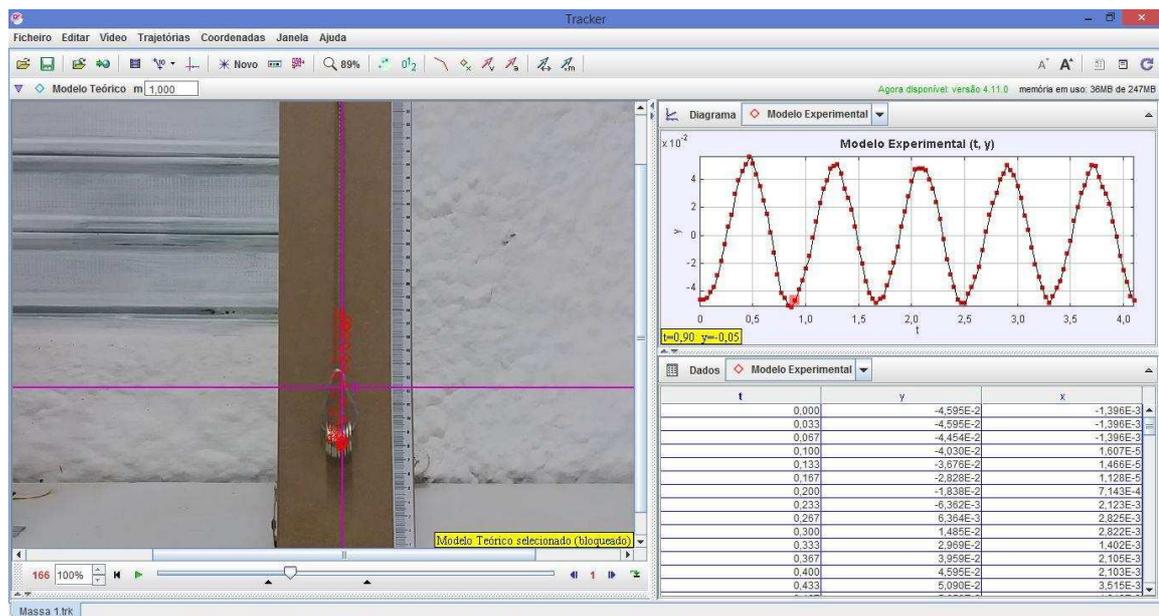
Para um melhor desempenho do programa algumas medidas são cruciais. Primeiramente, no momento da gravação é ideal que o vídeo seja gravado em um lugar com boa iluminação para que os materiais utilizados possam ser visualizados facilmente. Esse processo de filmagem mostrou-se vital, pois condições como qualidade da câmera, iluminação e tempo de filme influenciam diretamente na eficácia das informações.

Na realização de um experimento no laboratório sobre mecânica, por exemplo, para medir a posição em função do tempo de um móvel, é requerida uma série de aparatos, tais como sensores, interfaces e diversos circuitos eletrônicos. Em geral, são equipamentos que nem todas as escolas possuem. Uma solução simples e rápida para esse tipo de problema é o uso de

softwares livres que podem simular com bastante precisão esses experimentos e é aí onde entra o Tracker.

Um procedimento mediado pelo uso do Tracker consiste na organização do experimento e na filmagem do movimento de interesse. Em seguida, transfere-se o arquivo de vídeo para o programa e faz-se a marcação dos pontos quadro a quadro. Todos os procedimentos necessários são explicados e exemplificados nos manuais do programa (TRACKER BRASIL, 2017). Na figura 1, é apresentada uma tela típica do Tracker. Refere-se ao experimento da seção 4.2.5 sobre o sistema massa-mola. Na parte esquerda da tela, aparece um recorte da filmagem realizada e onde se faz as marcações (triângulos sobrepostos em vermelho) representando o movimento quadro a quadro do objeto, que foi solto após a aplicação de uma força na vertical fazendo assim que o sistema oscilasse. À direita, observa-se um gráfico da posição vertical ( $y$ ) em relação ao tempo ( $t$ ) e, também, uma tabela (abaixo) com os valores das posições vertical ( $y$ ), horizontal ( $x$ ) e tempo. Estas tabelas de dados podem ser analisadas com os recursos presentes no Tracker para realização de ajustes de curvas e obtenção das respectivas equações. As tabelas também podem ser copiadas para serem manipuladas por meio de programas específicos destinados ao tratamento de dados experimentais, como, por exemplo, o SciDAVis (SCIDAVIS, 2011), ou o editor de planilhas do BrOffice (BROFFICE, 2011), também integrantes da comunidade do software livre. Note-se que os comandos do programa estão em Português.

**Figura 1** - Tela principal do Tracker



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2017

## 4 MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

O movimento é um dos fenômenos mais fundamentais na natureza, sua classificação é bastante ampla e abrange desde os limites do mundo macroscópico ao microscópico. Além disso, a ideia de movimento é bastante relativa, pois depende do referencial que adotarmos. Ao afirmarmos que certo objeto está se movendo é porque sua posição varia com relação a um ponto fixo.

Quando analisamos um movimento cuja posição varia apenas nas proximidades de uma região tomada como ponto inicial (referencial), estamos tratando de uma oscilação. Assim, uma partícula que se movimenta para frente e para trás ao redor de um ponto dado está em um movimento oscilatório. Periódico significa que se repete com intervalos regulares. Como afirma Halliday (2009, p.88), “todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de periódico”. Assim, uma partícula que se movimenta de modo que, em intervalos de tempos iguais, o movimento se repete identicamente, está em um movimento periódico.

Uma partícula que se movimenta para frente e para trás, ao redor de um ponto fixo, e para a qual o movimento se repete identicamente em intervalos de tempo iguais, está em um movimento periódico oscilatório. O movimento harmônico simples (MHS) é um tipo particular de movimento periódico oscilatório em que a partícula se move, num dado referencial, sobre uma reta, de modo que a intensidade da força que tende a levá-la ao ponto fixo nesse mesmo referencial cresce na mesma proporção em que aumenta o seu afastamento deste mencionado ponto fixo.

Portanto, assim como podemos descrever matematicamente a queda livre de um corpo ou a rotação dos ponteiros de um relógio, podemos fazer o mesmo com o movimento periódico oscilatório. Um pêndulo, um corpo preso a uma mola, a corda de um violão e até mesmo o movimento da Terra em torno do Sol, são exemplos simples de movimentos periódicos no nosso cotidiano. Como as equações desses movimentos são expressas a partir das funções seno e cosseno, ele também é chamado movimento harmônico.

### 4.1 Contexto Histórico

No final do século XVI, o físico e astrônomo italiano Galileu Galilei, estava observando as oscilações de um lustre da Catedral de Pisa quando teve a ideia de fazer medidas do tempo de oscilação. Como naquela época ainda não haviam inventado o relógio nem o cronômetro, Galileu fez a contagem do tempo de oscilação comparando-o com a contagem das

batidas de seu próprio pulso. Fazendo isso ele verificou que mesmo quando as oscilações ficavam cada vez menores o tempo delas era sempre o mesmo. Em sua casa, ele repetiu o experimento utilizando um pêndulo e novamente o resultado que tinha obtido com a oscilação do lustre foi confirmado, e verificou ainda que o tempo das oscilações dependia do comprimento do fio.

Após essas observações, Galilei percebeu que o pêndulo poderia ser um instrumento importante para medir o tempo. Com isso, ele desenvolveu o primeiro relógio de pêndulo a fim de medir o tempo das pulsações dos seus pacientes. Porém, essa invenção foi creditada e patenteada por um jovem astrônomo e matemático holandês, Christian Huygens, que projetou um relógio de pêndulo em 1657. Huygens percebeu melhor que Galileu que o pêndulo, quando atravessa um arco circular, completa as oscilações de menor intensidade mais depressa do que as de intensidade maiores. Concluiu, assim, que qualquer variação na intensidade do movimento do pêndulo faria um relógio adiantar ou atrasar. Entretanto, manter uma intensidade constante de oscilação para oscilação seria impossível, por causa do atrito. Huygens então projetou uma suspensão que permite à ponta do pêndulo movimentar-se formando um arco ciclóide. Pode-se provar que assim a oscilação passa a se completar sempre no mesmo período de tempo, de forma que independa da intensidade.

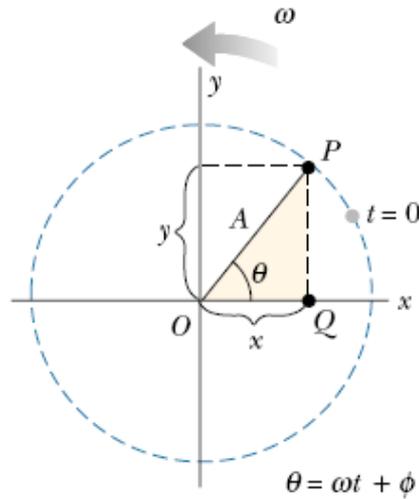
## **4.2 Desenvolvimento teórico do M.H.S.**

### **4.2.1 Cinemática do M.H.S.**

Um grande problema para o professor de Física do ensino médio é tratar sobre os conceitos em que se necessita de uma elaboração matemática mais complexa. Sabemos que os alunos do ensino médio não dispõem de ferramentas matemáticas como derivadas, integrais, com isso, o desafio do professor é buscar meios que possam facilitar o ensino do conteúdo. No caso do M.H.S., uma alternativa para fugir do uso de equações diferenciais é definir a cinemática do M.H.S. partindo da projeção ortogonal do movimento circular uniforme.

Com isso, iremos esquematizar, na figura 2, um dispositivo para o nosso estudo da cinemática do M.H.S. Consideremos uma circunferência de raio  $A$ , centro  $O$  em um plano vertical girando em torno do seu eixo com velocidade angular  $\omega$  constante.

**Figura 2** - Circunferência de raio  $A$ , centro  $O$  girando em torno do eixo com velocidade angular  $\omega$ .



Fonte: MEDEIROS, S. K., 2008

Como podemos observar na figura acima, enquanto o ponto P descreve um movimento circular uniforme (M.C.U), o ponto Q descreve um movimento de vai e vem entre os extremos do eixo x na circunferência. Com base nesse dispositivo podemos definir:

- **Elongação ( $x$ )**, número real que indica a posição do ponto oscilante; corresponde à abscissa do ponto Q no eixo x;
- **Amplitude ( $A$ )**, a maior elongação; corresponde ao raio ( $R$ ) do M.C.U.;
- **Ângulo de fase ( $\theta$ )**, posição angular no M.C.U.;
- **Velocidade angular ( $\omega$ )**, variação da posição angular por unidade de tempo;
- **Frequência ( $f$ )**, número de oscilações por unidade de tempo;
- **Período ( $T$ )**, o intervalo de tempo de uma oscilação completa.

#### 4.2.2 Função horária do M.H.S.

A função horária do movimento harmônico simples é a equação que nos permite encontrar o valor da elongação  $x$  em qualquer instante de tempo  $t$ . Observando o triângulo  $OPQ$  da figura 2, temos que:

$$\cos \theta = \frac{x}{A} \quad (1)$$

Isolando o  $x$ , temos então que  $x = A \cos \theta$ , onde  $\theta = \omega t + \varphi$ , substituindo em  $x$  obtemos a expressão para a elongação:

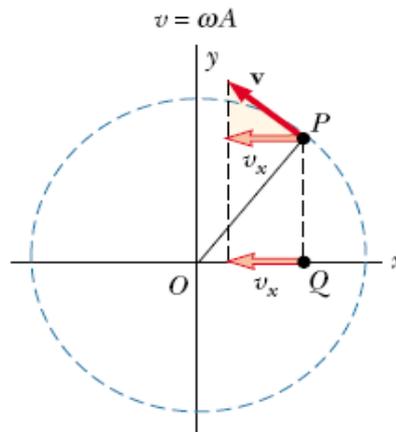
$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Antes de seguirmos adiante, é importante frisar aqui que, após a obtenção da expressão para a elongação no MHS, as equações para a velocidade e aceleração no ensino superior podem ser encontradas facilmente utilizando-se a derivada primeira e segunda, respectivamente. Conforme é possível verificar no “ANEXO A” deste trabalho (MEDEIROS, S. K., 2008, p.1).

#### 4.2.3 Velocidade e aceleração no M.H.S.

Para encontrarmos as equações que descrevem a velocidade e aceleração, analisamos as seguintes figuras:

**Figura 3** - Representação da decomposição dos vetores da velocidade.



Fonte: MEDEIROS, S. K., 2008

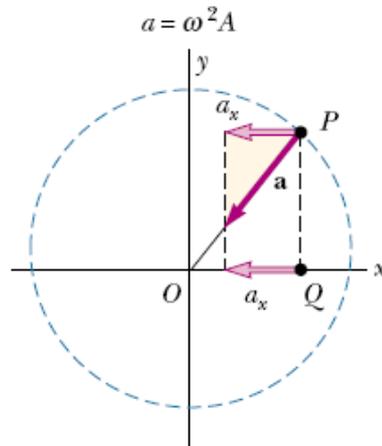
Pela figura 3, observa-se:

$$\sin \theta = \frac{-v}{\omega A} \quad (3)$$

Seguindo o raciocínio anterior, isolando  $v$ , obtemos a expressão para a velocidade:

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

**Figura 4** – Representação da decomposição dos vetores da aceleração.



Fonte: MEDEIROS, S. K., 2008

Do mesmo modo que encontramos a velocidade, para a aceleração, segue-se:

$$\cos \theta = \frac{-a}{\omega^2 A} \quad (5)$$

A partir da equação acima, encontramos:

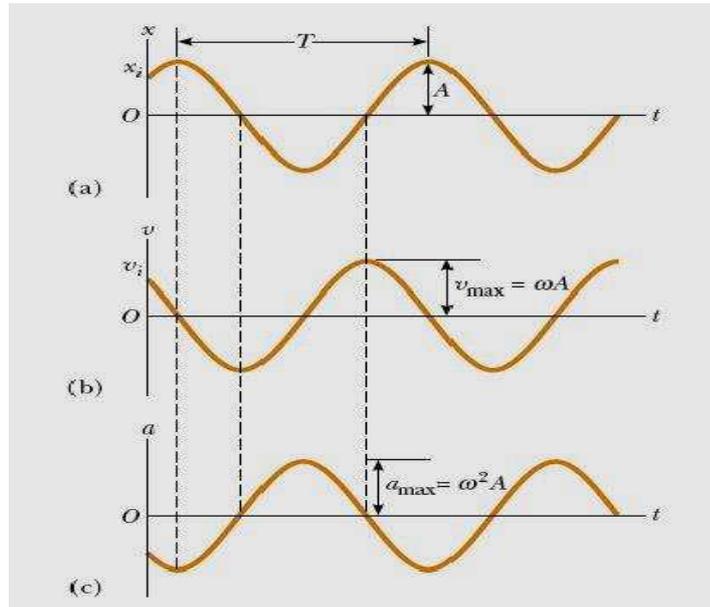
$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

Ainda podemos reescrever  $a$  da seguinte forma:

$$a = -\omega^2 x \quad (7)$$

A equação (7) mostra uma propriedade fundamental das oscilações harmônicas. A aceleração escalar é proporcional à elongação, porém com sentido oposto. A figura 5 corresponde aos diagramas horários, respectivamente da elongação ( $x$ ), da velocidade ( $v$ ) e da aceleração ( $a$ ).

**Figura 5** - (a) Diagrama da posição; (b) Diagrama da velocidade; (c) Diagrama da aceleração.



Fonte: MEDEIROS, S. K., 2008

#### 4.2.4 Pêndulo Simples

Desprezadas a resistência do ar e as demais forças dissipativas, um fio inextensível com uma massa presa a ele é um exemplo de pêndulo simples. Quando afastamos a massa da posição de repouso e a soltamos, o pêndulo realiza oscilações e as forças importantes que atuam sobre a partícula são a força peso,  $P$ , exercida pela Terra, e a tensão  $T'$ , exercida pelo fio. Por conveniência, podemos substituir a força peso pelas duas componentes ortogonais,  $P_1$ , paralela à direção definida pelo fio, e  $P_2$ , perpendicular a essa direção. Em módulo, temos:

$$P_1 = mg \cos \theta \text{ e } P_2 = mg \sin \theta$$

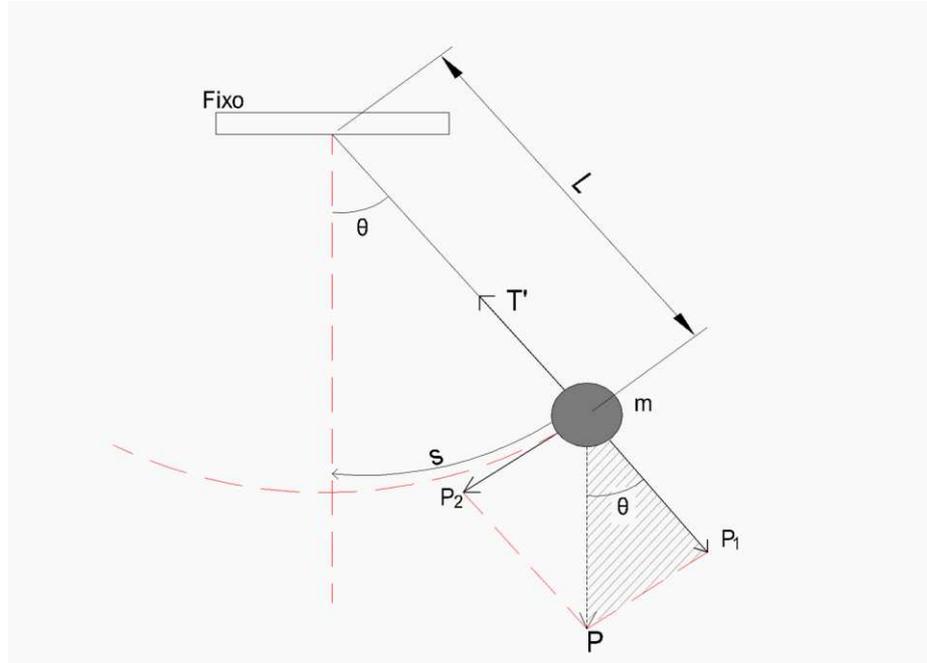
Sendo assim, podemos dizer que as forças que atuam sobre a partícula que forma o pêndulo simples são  $P_1$ ,  $P_2$  e  $T'$ .

Como a partícula descreve um arco de circunferência  $s$ , a resultante das forças ao longo da direção definida pelo fio atua como força centrípeta e, por isso, deve ter o mesmo sentido que a tensão  $T'$ .

Por outro lado, na direção perpendicular àquela definida pelo fio, isto é, ao longo da trajetória da partícula, atua apenas a força  $P_2$ . Poderíamos afirmar também que ao longo desta direção atua também a força de arraste, exercida pelo ar. Contudo, como o módulo dessa força é muito menor do que o módulo da força  $P_2$ , ela pode ser desprezada.

Desta forma:

**Figura 6** - Representação dos diagramas de forças em um pêndulo simples.



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2017

Para pequenas oscilações, ou seja, para um ângulo com valor máximo de  $15^\circ$ , temos que  $\sin \theta$  é aproximadamente  $\theta$  em radianos. Podemos escrever que:

$$\sin \theta \approx \theta \Rightarrow \sin \theta \approx \frac{x}{L}$$

Observando o triângulo destacado na figura 6, segue-se:

$$\sin \theta = \frac{P_2}{P} \quad (8)$$

Assim,  $P_2 = P \sin \theta$ , como  $P = mg$ , então:

$$P_2 = mg \frac{x}{L} \quad (9)$$

Como  $P_2$  é a força resultante, pela 2ª lei de Newton, temos:

$$P_2 = ma \quad (10)$$

Substituindo a equação (9) em (10), obtemos:

$$mg \frac{x}{L} = ma \quad (11)$$

Logo a aceleração do pêndulo simples é:

$$a = -g \frac{x}{L} \quad (12)$$

Verificamos que, acompanhando o sentido de  $P_2$ , a aceleração escalar é na direção contrária à elongação  $x$ . Por isso aparece o sinal negativo.

Comparando a equação (7) com a (12), podemos afirmar que:

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad (13)$$

Também sabemos, pelo Movimento Circular Uniforme, que a velocidade angular é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13), temos:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{L} \quad (15)$$

Enfim, isolando  $T$  encontramos o período do pêndulo simples que é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (16)$$

Nas condições analisadas, verificamos que o pêndulo simples depende exclusivamente da gravidade local e do comprimento do fio e não depende nem da massa oscilante e nem da amplitude, desde que o ângulo  $\theta < 15^\circ$ .

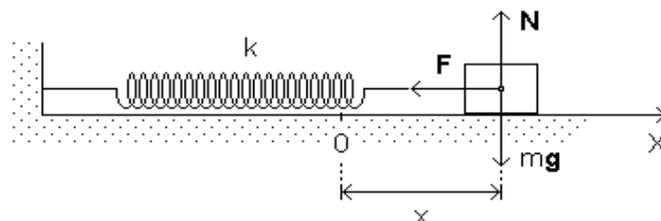
Da equação (16) do pêndulo simples, podemos calcular o valor da gravidade. Segue-se que:

$$g = L \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (17)$$

#### 4.2.5 Sistema massa-mola

O sistema massa-mola é constituído por um corpo preso a uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k$  que obedece à lei de Hooke. Abaixo, temos um exemplo:

**Figura 7** - Representação dos diagramas das forças no sistema massa-mola.



Como podemos observar pela figura 7, as forças que agem no corpo são a força peso, a força normal e a força elástica. A força peso está em equilíbrio com a força normal, restando, assim, a força elástica como força resultante do sistema. É importante lembrar que, se a elongação da mola se dá para a direita, a força elástica age para a esquerda e vice-versa. Percebe-se, então, que a força elástica busca sempre levar o corpo de volta à posição de equilíbrio, logo, devido a esse fato, ela recebe o nome de força restauradora.

A lei de Hooke nos diz que a força elástica é dada por  $\vec{F} = k\vec{x}$ . Como esse movimento é unidimensional e retilíneo, podemos considerar os vetores algebricamente. De acordo com a segunda lei de Newton, temos que:

$$\begin{cases} F = kx \\ F = ma \end{cases} \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x \quad (18)$$

Uma observação importante é que esse movimento obedece à propriedade fundamental das oscilações harmônicas, pois a aceleração é proporcional à elongação  $x$ , porém, com o sentido oposto. Substituindo o valor de  $a$  da equação (18) com a equação (7) da cinemática do MHS, obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{cases} a = -\omega^2 x \\ a = -\frac{k}{m}x \end{cases} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (19)$$

A partir da expressão acima, podemos obter o período do sistema massa-mola:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (20)$$

Definida a expressão para o período no sistema massa-mola, podemos ver que o período depende somente da massa oscilante e da constante elástica  $k$ . Assim, o período não depende da amplitude e nem da gravidade local, mesmo que a oscilação ocorra na vertical ou num plano inclinado.

Da expressão (20) do período, podemos escrever a equação que nos dá o valor da constante elástica  $k$ , para isso, basta apenas elevar ambos os lados da igualdade ao quadrado e isolar o  $k$ , assim temos:

$$k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (21)$$

### 4.3 Procedimento experimental

Para verificar a análise e avaliação sobre o Tracker, foram desenvolvidos e filmados dois experimentos relacionados ao movimento harmônico simples que podem ser facilmente reproduzidos em sala de aula. O primeiro foi o pêndulo simples e o segundo o sistema massa-mola.

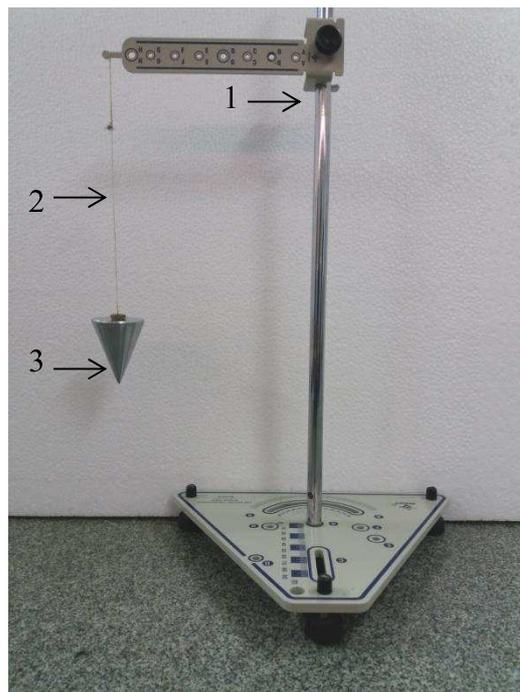
Para a realização do experimento do pêndulo simples utilizou-se os seguintes materiais:

- Suporte de metal;
- Pêndulo de fio fino;
- Fita métrica;
- Cronômetro;
- Câmera filmadora.

O objetivo do experimento é determinar o período de oscilação de um pêndulo simples e verificar sua dependência do comprimento do fio, bem como estimar o valor da gravidade  $g$  local e comparar os dados com os valores obtidos pelo Tracker.

Inicialmente, montou-se o suporte metálico onde foi fixado o pêndulo (como mostra a figura 8).

**Figura 8** - Montagem do experimento. 1: Suporte metálico; 2: Fio; 3: Corpo massivo.



Com o sistema pronto, mede-se o comprimento total do pêndulo e estima-se a distância no plano vertical do centro de repouso do pêndulo, a fim de garantir que o ângulo inicial não seja maior que  $15^\circ$ . Com o cronômetro, deve-se medir o período de dez oscilações. Repete-se o procedimento para os outros dois comprimentos de fio. Os valores do comprimento do fio e os períodos estão dispostos na Tabela 1 na seção dos Resultados.

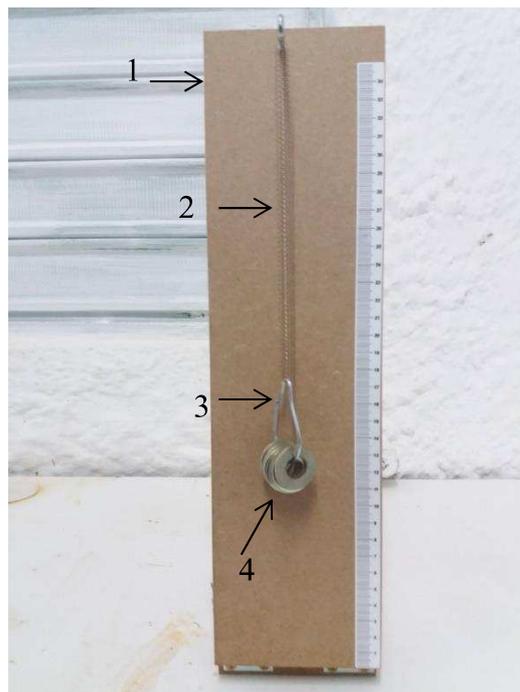
Para o experimento do sistema massa-mola foram utilizados os seguintes materiais:

- Suporte de madeira;
- Mola com constante elástica de  $3,20 \text{ N/m}$ ;
- Cronômetro;
- 09 arruelas com massa de  $5,78\text{g}$  (cada);
- Câmera filmadora.

O objetivo do experimento é determinar a constante elástica da mola comparando os resultados obtidos através dos dados experimentais com os resultados obtidos pela análise do Tracker, substituindo na equação (21) os respectivos valores dos períodos encontrados.

Para realizar o experimento, primeiramente, montou-se o equipamento de forma que a mola estivesse na vertical. Havia também um pequeno gancho para fixar os pesos à extremidade inferior da mola (como ilustra a figura 9).

**Figura 9** - Montagem do experimento. 1: Suporte de madeira; 2: Mola; 3: Gancho; 4: Arruelas.



Após a montagem, um peso foi acoplado ao gancho. Então, o peso composto pelas arruelas era puxado para baixo e solto, para que o sistema oscilasse verticalmente. Aproximadamente no mesmo instante em que o peso era solto, o cronômetro era ativado. Como o tempo de uma oscilação é pequeno, contavam-se dez oscilações e o cronômetro era desativado, sendo o intervalo de tempo exibido no cronômetro anotado. Repetiu-se isto para os demais pesos e os valores obtidos para cada peso foram dispostos na Tabela. Os valores correspondentes ao período na Tabela 3 já foram divididos por dez, sendo assim, contabilizada apenas uma oscilação.

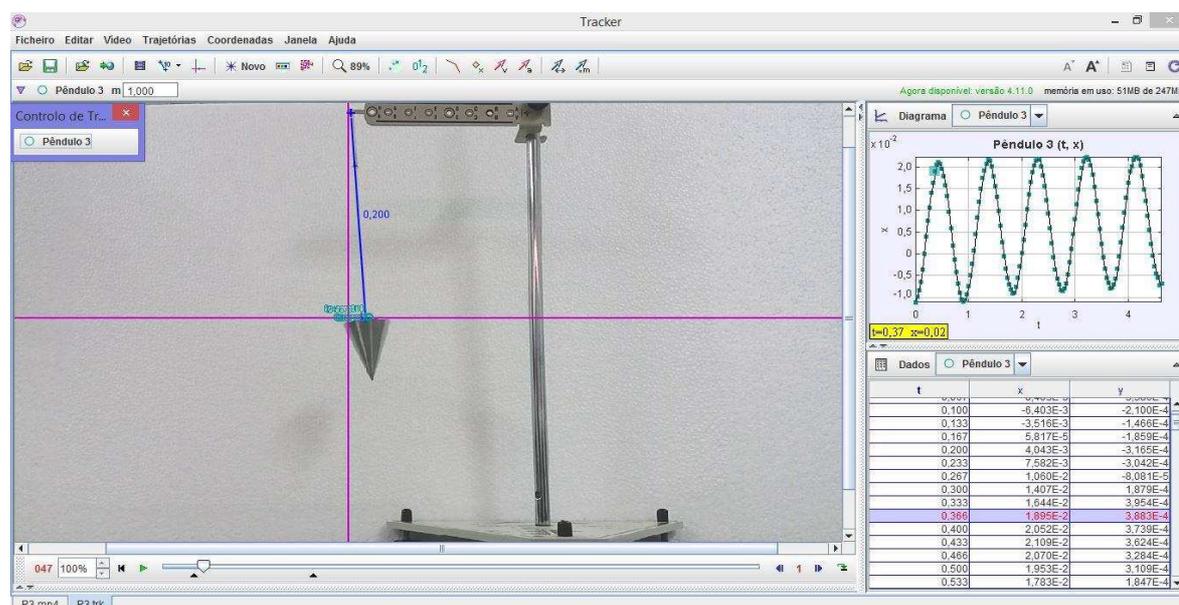
#### ***4.3.1 Procedimento experimental no Tracker***

Na realização dos experimentos, utilizou-se uma câmera filmadora (smartphone) para capturar todos os movimentos a serem inseridos no Tracker. todos os resultados estão dispostos na seção Resultados. É importante tomar alguns cuidados na filmagem desse processo, pois podem garantir ou comprometer a precisão dos dados.

Para a gravação de vídeo é importante escolher um local bem iluminado de preferência com luz natural, pois, segundo Yamamoto (2002, p. 162), a frequência de abertura do obturador da câmera, que capta em média trinta quadros por segundo e a frequência das lâmpadas fluorescentes, que é de sessenta hertz produzem o fenômeno de batimento de ondas que gerará pequenos borrões na tela que dificultam a captura dos pontos. Outro aspecto a ser considerado é que o objeto deverá contrastar com o plano de fundo para uma melhor visualização. A câmera deve estar posicionada de frente ao local de gravação do vídeo, de preferência paralela ao objeto a ser filmado.

No local onde ocorrerá o experimento, deverá ser colocado um instrumento de medida, como uma régua, por exemplo, para informar ao Tracker uma referência numérica de escala para o processamento de dados ou até mesmo fazer a medição prévia de algum ponto presente no vídeo para ser informado acrescido no software. Na aplicação aos experimentos tratados aqui, foram feitos das duas maneiras. No sistema massa-mola foi inserida no suporte de madeira uma régua, já no pêndulo simples era conhecido o comprimento do fio, logo, foi acrescentada essa informação na interface do programa, os dois procedimentos podem ser observados na Figura 1 da seção 3 e na Figura 10:

**Figura 10** – Tracker em processo de obtenção de dados



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2017

Podemos observar, na figura acima, o Tracker em processo de tratamento de dados já com o bastão de calibração (em azul, a medida já está em metros), eixo de coordenadas (em rosa, demarcando as coordenadas  $x$  e  $y$ ), pontos marcados quadro a quadro (em ciano, na parte central da figura) delimitação do vídeo (triângulos verticais pretos na parte de baixo, à direita da tecla play, de cor verde). À direita, é possível observar o gráfico formado (parte superior) e a tabela correspondente (parte inferior). Com o vídeo pronto, importa-se o vídeo para o programa, por meio do caminho Arquivo – Importar. O próximo passo é delimitar em qual quadro o movimento a ser analisado se inicia, por meio da opção Ajustes de Corte de Vídeo, ou na parte inferior da janela principal, abaixo da barra de rolagem do vídeo.

O terceiro passo é inserir um eixo de coordenadas cartesianas, que funciona como orientação espacial para o programa. A seguir, utilizando o comando do bastão de calibração, deve-se marcar a régua, informando sua medida quantitativa em metros ou centímetros, fica a critério do usuário. No fim, devem-se inserir quantos “pontos de massa” (que representam os objetos filmados a cada quadro) forem necessários para o experimento.

Para começar a analisar o vídeo, existem duas opções: marcação dos pontos quadro a quadro, manualmente, ou por meio do autoTracker.

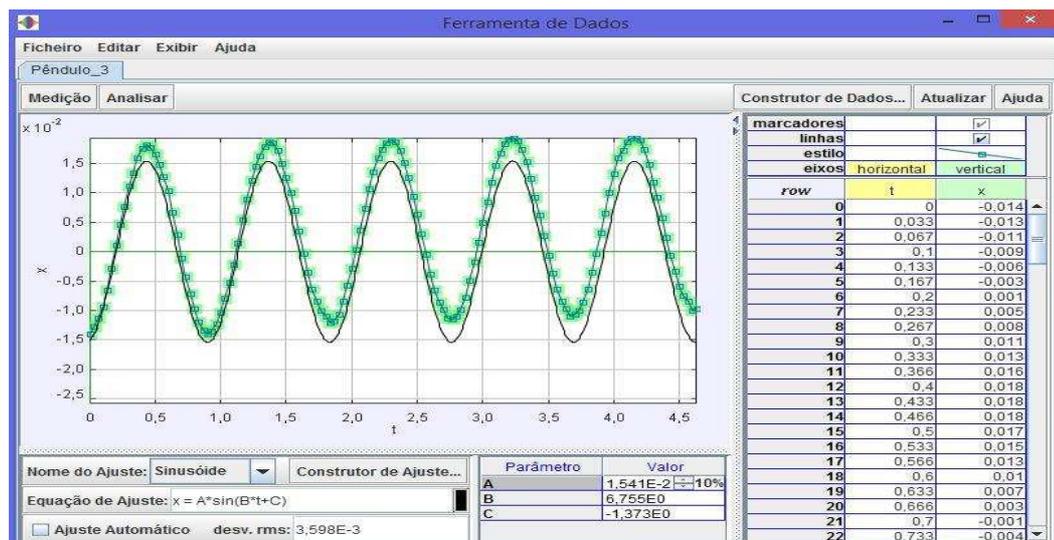
Pressionando a tecla Shift, o cursor do mouse modifica-se, assumindo a forma de um quadrado com uma marcação de seu centro, assemelhando-se à forma de uma mira. Mantendo essa tecla pressionada, escolhe-se um ponto no objeto de estudo tomando cuidado para marcar sempre esse mesmo ponto na medida em que for avançando os quadros. Este é o processo que

mais demanda tempo e atenção por parte do usuário, visto que é um ponto crucial no processo, no qual se pode diminuir a precisão na captura dos dados, caso não seja feito da maneira correta.

Pressionando Ctrl + Shift, é selecionada a opção do autoTracker, que faz as marcações automaticamente. Entretanto, essa opção nem sempre aponta resultados corretamente, devido ao fato de que o ponto deve estar bem definido na imagem de modo que não esteja sujeito ao fenômeno de batimento.

Do lado direito da tela, simultaneamente, são apresentados um gráfico no Visualizador de Gráfico e uma tabela no Visualizador de Tabelas (figura 10 à direita). Finalmente, após esses passos temos a análise do movimento. Clicando duas vezes consecutivas no gráfico gerado, pode-se observar a janela que permite o ajuste das curvas do gráfico gerado e as equações que descrevem o movimento, como mostra a figura 11:

**Figura 11** – Janela de ajuste de curva



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2017

Analisando a figura 11, temos a parte inferior onde se encontra a equação de ajuste. Os parâmetros A, B e C permitem o ajuste manual da curva. Abaixo da equação de ajuste, podemos observar a opção de ajuste automático. Como o Tracker trabalha com modelos reais de experimento, então, o programa não reconhece sistemas ideais, ou seja, não despreza o atrito e as demais forças dissipativas. Contudo, o software permite a criação de um modelo cinemático da partícula que funciona como um modelo ideal, desprezando as forças dissipativas e o ajuste de curva serve para representar esse modelo ideal, eliminando assim o problema com o amortecimento nos experimentos tratados neste trabalho.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, serão apresentados os resultados obtidos a partir da realização dos experimentos e a análise no Tracker.

### 5.1 Pêndulo Simples

A partir dos dados coletados, conhecendo os comprimentos dos fios do pêndulo em cada etapa do procedimento experimental, acharam-se os valores para o período de cada pêndulo e com os dados obtidos experimentalmente, foi possível inferir um valor para a aceleração da gravidade para cada comprimento do pêndulo diferente, a partir da equação (17):

**Tabela 1** - Valores de  $L$ ,  $T$  e  $g$  correspondente ao experimento e o Tracker

	Experimento				Tracker		
	1	2	3		1	2	3
$L$ (m)	0,295	0,255	0,20	$L$ (m)	0,295	0,255	0,20
$T$ (s)	1,10	1,02	0,91	$T$ (s)	1,099	1,033	0,90
$g$ (m/s <sup>2</sup> )	9,617	9,66	9,526	$g$ (m/s <sup>2</sup> )	9,637	9,48	9,73

Fonte: Elaborado pelo autor, 2017

Adotando  $g_1$  como a média da gravidade para os valores experimentais e  $g_2$  como a média da gravidade para os valores obtidos no Tracker, temos:

$$g_1 = 9,601 \text{ m/s}^2 \text{ e } g_2 = 9,615 \text{ m/s}^2$$

Fazendo uma comparação com o valor de  $g$  que é encontrado nos livros de física como  $9,8 \text{ m/s}^2$ , podemos observar que a média dos resultados encontrados nos dois métodos experimentais teve uma diferença de 2,03% para  $g_1$  e 1,94% para  $g_2$ , o que está dentro do esperado. Isso garante que os dois métodos experimentais podem ser utilizados.

### 5.2 Sistema massa-mola

No sistema massa mola, foram utilizadas três massas diferentes para calcular os períodos correspondentes e o valor da constante elástica. Para variar o valor da massa, utilizou-se 9, 6 e 3 arruelas, respectivamente. Os valores das massas e os períodos encontrados estão dispostos na Tabela 2.

**Tabela 2** - Valores da massa e período do sistema massa mola

Experimental			Tracker		
Massa (g)	Período (s)		Massa (g)	Período (s)	
	52,02	0,803	52,02	0,800	
	34,68	0,653	34,68	0,665	
	17,34	0,459	17,34	0,467	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2017

Depois de realizadas as experiências com o sistema massa-mola, pôde-se observar que, utilizando a vídeo-análise do Tracker, os valores para os períodos foram bem próximos, o que viabiliza a utilização do software.

A Tabela 3 nos mostra o valor médio de  $k$  a partir dos cálculos feitos com os valores da Tabela 2.

**Tabela 3** - Valor médio da constante elástica  $k$  utilizando a equação (21)

Experimental			Tracker		
Massa (g)	$k$ (N/m)		Massa (g)	$k$ (N/m)	
	52,02	3,190	52,02	3,208	
	34,68	3,210	34,68	3,09	
	17,34	3,256	17,34	3,14	
<b>Média</b>	3,218		<b>Média</b>	3,146	

Fonte: Elaborado pelo autor, 2017

Para a obtenção dos valores da constante elástica para cada massa, foi utilizada a equação (21), onde substituímos o valor do período e a massa correspondente. Podemos observar que, ao subtrairmos os valores médios de  $k$  da tabela 4 com o valor nominal de  $k$ , que é  $3,20 \text{ N/m}$ , encontramos uma diferença de apenas  $0,018 \text{ N/m}$ , o que representa  $0,56\%$  para o modelo experimental e uma diferença de  $0,056 \text{ N/m}$  que representa  $1,68\%$  para o modelo realizado no Tracker. Isso garante que ambos os métodos foram bem precisos, com a ressalva que, no uso do Tracker, não necessitamos de um cronômetro para marcar os períodos das oscilações, pois o próprio software nos mostra os valores. Como é sabido que o valor nominal fornecido pela fábrica da constante da mola utilizada no experimento é  $3,20 \text{ N/m}$ , podemos usar a equação (20) para calcular os valores esperados teoricamente do período.

Abaixo, segue-se a tabela com os resultados dos períodos encontrados a partir do valor da constante elástica fornecida e que chamamos de valor teórico:

**Tabela 4** - Valores de T segundo a teoria

<b>Modelo Teórico, <math>k = 3,20</math> (N/m)</b>	
<b>Massa (g)</b>	<b>Período (s)</b>
52,02	0,795
34,68	0,628
17,34	0,458

**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2017

Analisando os dados da Tabela 4, podemos observar que os valores do período encontrado nos dois métodos experimentais se aproximam do modelo teórico.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi apresentado o software livre Tracker como ferramenta auxiliar nas aulas de Física e foram discutidas algumas das várias possibilidades da sua utilização no processo de vídeo-análise para o estudo dos movimentos. Realizamos e discutimos experimentos correspondentes a um tópico bastante abordado no ensino da Física e que é de difícil visualização e abstração: o Movimento Harmônico Simples.

Os resultados obtidos na análise do experimento mostram a importância do programa como passível de aplicação em sala de aula. Os recursos que o software apresenta também podem ser utilizados em atividades experimentais que abrangem desde a educação básica ao ensino superior e até mesmo em atividades voltadas à formação do docente. Isso se deve ao fato de que o Tracker adiciona, ao mesmo tempo, qualidade e praticidade nas aulas de Física, pois não são necessários aparatos experimentais caros e complexos que, geralmente, são de difícil acesso. Basta apenas o uso de uma boa câmera para capturar o movimento e um computador para processamento dos dados e obtenção dos gráficos.

Enfim, observou-se que, com o uso do software, obtivemos resultados semelhantes aos realizados em laboratório, confirmando, assim, que o Tracker pode suprir uma eventual falta de laboratório para a realização de experimentos na área da mecânica. A forma de coletar e analisar os dados permite abordar desde os mais simples experimentos até os mais complexos, podendo o Tracker ser utilizado em atividades com alunos em diferentes níveis de escolaridade, desde o nono ano do ensino fundamental até o nível superior. Então, como proposta para trabalhos futuros, sugere-se que se investigue a aplicação do programa no ensino superior em outros tipos de movimento relacionados às oscilações. Por exemplo: oscilações forçadas, oscilações amortecidas, pêndulo físico e pêndulo de torção, com o objetivo de facilitar a compreensão desses conteúdos que são apresentados de forma mais abstrata durante a graduação.

## USE OF TRACKER SOFTWARE IN PHYSICS EDUCATION: APPLICATION ON SIMPLE HARMONIC MOTION

### **ABSTRACT**

This article approaches the usage of the free Tracker software, which aims to video analysis, as a proposal to provide a way to assist the Physics classes, supporting theoretical and experimental activities. This tool can be used in physics teaching, from basic education to higher education, in order to increase and facilitate the teaching-learning process development. The program has a very intuitive and easy to handle graphical interface, for those with basic computer skills. With Tracker's video analysis, it is possible to approach various concepts of physics through filming made by smartphones, digital cameras and even webcam. In this work, we will discuss how the use of this software can contribute to a effective learning and show that its use can overcome the lack of a didactic laboratory. We will discuss here two experimental activities, one about the simple pendulum and another on the spring mass system, both related to simple harmonic motion, which also validate the program as applicable in the didactic time of a typical laboratory class and highlight its potential for development of important skills and abilities in the treatment of experimental data and in the description of physical phenomena.

**Keywords:** Tracker; Video analysis; Physics Teaching; Simple Harmonic Motion.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando José de; VALENTE, José Armando. Visão Analítica da Informática na Educação no Brasil: A Questão da Formação do Professor. Disponível em: <<https://www.revistas.ufg.br/feef/article/view/11/10>>. Acesso em agosto de 2017.

ALMEIDA, Frederico Borges de. "Movimento Harmônico Simples"; *Brasil Escola*. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/fisica/movimento-harmonico-simples.htm>>. Acesso de setembro de 2017.

ALVES FILHO, J. P. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* v. 21, n. especial, p. 44-58, 2004.

BARBETA, Vagner B.; YAMAMOTO, Issao. Desenvolvimento e utilização de um programa de análise de imagens para o estudo de tópicos de Mecânica Clássica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 24, n. 2, p. 158-167, 2002.

BROFFICE. Disponível em: <<http://broffice.org/>>. Acesso em outubro 2017.

BEZERRA JR, Arandi G.; DE OLIVEIRA, Leonardo P.; LENZ, Jorge A.; SAAVEDRA FILHO, Nestor. Videoanálise com o software livre *Tracker* no laboratório didático de Física: movimento parabólico e segunda lei de Newton. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 29, p. 469-490, 2012.

GEF-UFSM - Grupo de Ensino de Física da Universidade de Santa Maria. "Movimento Circular Uniforme, Movimento Harmônico Simples e Ondas"; Coral UFSM. Disponível em <<http://http://coral.ufsm.br/gef/arquivos/osciond.pdf>>. Acesso de setembro de 2017.

HALLIDAY, RESNICK, WALKER. *Fundamentos de Física*. Vol. 2. 8 ed. Editora LTC, 2009.

INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Legislação e Documentos. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=44111>>. Acesso em julho 2017.

MEDEIROS, S. K. "Movimento periódico"; UFERSA. Disponível em <<http://http://http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/162/pdf-MovPeriodico.pdf>>. Acesso de setembro de 2017.

OLIVEIRA, Celina Couto. *Ambientes informatizados de aprendizagem: Produção e avaliação de software educativo*. Campinas, SP: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Leonardo. P.; ALESSI, Alesandro; SANTANA, Arthur. N.. A Física pela Perspectiva de uma WebCam. 2009. 110 f. Monografia (conclusão de graduação) - Engenharia de Computação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

Página do Tracker no Cabrillo College. Disponível em <<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/webstart/>>. Acesso em julho de 2017.

SCHWARTZ, Gilson. Brinco, logo aprendo: educação, videogames e moralidades pós modernas. São Paulo: Paulus, 2014.

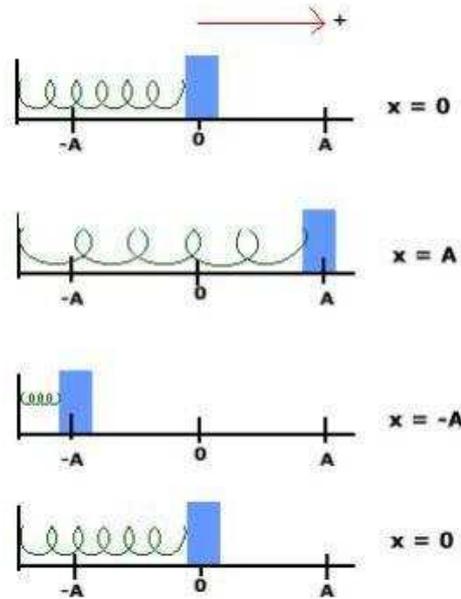
SCIDAVIS. Disponível em: <<http://scidavis.sourceforge.net/>>. Acesso em outubro de 2017.

TRACKER BRASIL, Grupo do Tracker da UTFPR. Disponível em <<http://trackerbrasil.ct.utfpr.edu.br/>>. Acesso em agosto de 2017.

VEIT, Eliane A. Por que e como introduzir a aquisição automática de dados no laboratório didático de Física?. Física na Escola, v. 6, 2005.

### ANEXO A – Demonstração da cinemática do M.H.S por Equações Diferenciais

Para iniciarmos nossa análise, consideremos o caso mais simples: um sistema que possui apenas 1 (um) grau de liberdade (descrito apenas por uma coordenada), que é o sistema massa-mola:



Seja  $x_0 = 0$ , a posição de equilíbrio do sistema. Quando a massa  $m$  é deslocada da sua origem (estendendo a mola) até a posição  $x = A$ , uma força restauradora tende a levar a massa a posição original, sendo esta força uma função somente da deformação causada na mola.

$$\vec{F} = \vec{F}(x) \quad (22)$$

Assumindo que  $\vec{F}(x)$  possui derivadas contínuas de todas as ordens, podemos expandi-las em uma série de Taylor:

$$F(x) = F_0 + x \left( \frac{dF}{dx} \right)_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left( \frac{d^2F}{dx^2} \right)_0 + \frac{1}{3!} x^3 \left( \frac{d^3F}{dx^3} \right)_0 + \dots \quad (23)$$

Na equação,  $F_0$  é o valor de  $F(x)$  na origem ( $x = 0$ ), então  $F_0 = 0$ . Se considerarmos deslocamentos muito pequenos, podemos negligenciar todos os termos de potências mais elevadas que  $x$ . Então:

$$F(x) = x \left( \frac{dF}{dx} \right)_0 \quad (24)$$

Seja  $\frac{dF}{dx} = -k$ , a constante elástica, e o sinal negativo é devido à força ser do tipo restauradora, teremos:

$$\vec{F} = -kx \quad (25)$$

A força restauradora é uma força linear. O sistema descrito pela equação acima obedece a Lei de Hooke. O sistema massa-mola é um modelo de aplicação do oscilador harmônico simples, pois o seu movimento em torno da posição de equilíbrio executa um Movimento Harmônico Simples (isso, desprezando o atrito). A equação de movimento desse sistema, segundo as Leis de Newton é:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (26)$$

Ou seja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (28)$$

Sendo  $\omega^2 = k/m$ . A equação acima é uma equação diferencial (toda equação que envolve funções e suas derivadas), ordinária (as funções dependem de uma variável independente) de 2ª ordem (mais alta ordem), linear e homogênea, onde se define  $\omega$  como a frequência angular, que é função da massa e da constante elástica.

$$\omega = 2\pi f \quad (29)$$

Qualquer equação diferencial como esta possui as seguintes propriedades:

- a) Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções, então:  $x_1(t) + x_2(t)$  também será solução;
- b) Se  $x(t)$  é solução, então:  $ax(t)$ , onde  $a$  é uma constante, também será solução.

Combinando tais propriedades, podemos dizer que:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \quad (30)$$

É solução, onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Como  $x$  é função do tempo, devemos encontrar uma função que, sua derivada segunda seja proporcional à própria função. Uma função exponencial é uma deste tipo:  $e^{\lambda t}$ . Substituindo na equação diferencial (7):

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (31)$$

$$(\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0 \quad (32)$$

$$\lambda^2 = -\omega^2 \quad (33)$$

$$\lambda = \pm i\omega \quad (34)$$

Logo, a solução geral da equação diferencial será:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (35)$$

Lembrando que:  $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \operatorname{sen} \omega t$ , teremos:

$$x(t) = C_1 i \operatorname{sen} \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 i \cos \omega t - C_2 i \operatorname{sen} \omega t \quad (36)$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (C_1 - C_2) i \operatorname{sen} \omega t \quad (37)$$

Fazendo:

$$C_1 + C_2 = A \operatorname{sen} \alpha \quad (38)$$

$$C_1 - C_2 = A \cos \alpha \quad (39)$$

Teremos:

$$x(t) = A \operatorname{sen} \alpha \cos \omega t + i A \cos \alpha \operatorname{sen} \omega t \quad (40)$$

As soluções possíveis para o sistema massa-mola e conseqüentemente o oscilador harmônico simples são:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (41)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (42)$$

Onde  $A$  é a amplitude de oscilação e  $\alpha, \varphi$  são constantes de fase ou ângulos de fase que diferem o movimento em  $\pi/2$ , indicam em que o ponto do ciclo o movimento se encontrava para  $t = 0$ . A grandeza  $(\omega t + \varphi)$  varia com o tempo e é chamada de fase do movimento.

Para  $t = 0$  e para  $x = x_0$ , obtemos:

$$x(0) = x_0 = A \cos \varphi \quad (43)$$

Para  $\varphi = 0$ , então  $x_0 = A \cos 0 = A$ , e a partícula começa no seu deslocamento positivo máximo. Para  $\varphi = \pi$ , então  $x_0 = A \cos \pi = -A$ , e a partícula começa no seu deslocamento negativo máximo. Para  $\varphi = \pi/2$ , então  $x_0 = A \cos \pi/2 = 0$ , e a partícula está inicialmente na origem. Das soluções possíveis, podemos encontrar a velocidade e aceleração do movimento harmônico simples (MHS):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\omega t + \varphi)] = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \quad (44)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [A \cos(\omega t + \varphi)] = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (45)$$

A velocidade  $v$  oscila entre os valores  $v_{\text{máx}} = +\omega A$  e  $-v_{\text{máx}} = -\omega A$ . A aceleração  $a$  oscila entre os valores  $a_{\text{máx}} = +\omega^2 A$  e  $-a_{\text{máx}} = \pm A$ . Analisando o resultado para a aceleração, obtemos:

$$a = -\omega^2 x = -\frac{k}{m} x \quad (46)$$

As constantes  $A$  e  $\varphi$  são arbitrárias, de modo que a função  $x(t)$  pode se ajustar a um grande número de movimentos harmônicos simples com a escolha adequada de valores para elas. Isso, aliás, é uma característica da equação diferencial: sua solução representa uma família de funções que a satisfazem. No caso do movimento harmônico simples, as constantes  $A$  e  $\varphi$ , descrevem um grupo de movimentos com características comuns, mas que diferenciam uns dos outros. Assim, ao fixarmos os valores dessas constantes, escolhemos uma solução determinada dentre as outras também possíveis.

Vejamos agora quais são os significados físicos de  $\omega$ ,  $A$  e  $\varphi$ . Começando com  $\omega$ , seja a equação de movimento do oscilador e aumentemos o tempo de um fator  $2\pi/\omega$ . Temos:

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] \quad (25)$$

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \cos(\omega t + 2\pi + \varphi) \quad (26)$$

$$x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (27)$$

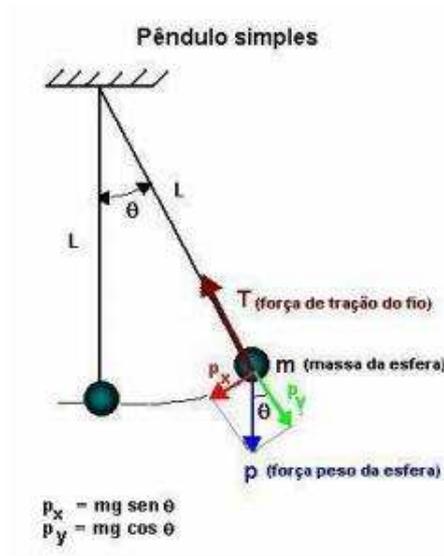
Portanto, a posição do oscilador volta a ser a mesma depois de um intervalo de tempo  $2\pi/\omega$ . Portanto, o período do movimento ( $T$ ) é:

$$\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (28)$$

Note que o período de oscilação cresce com a massa (ou a inércia) da partícula e decresce com a constante da mola. Isto é, quando maior a inércia, mais lentamente o oscilador se move; quando maior a constante de mola (a restauração da deformação), mais rápido o oscilador se move.

O pêndulo simples é constituído por uma partícula de massa  $m$  suspensa por uma corda inextensível de comprimento  $L$  e de massa desprezível. Quando solta de uma posição que faz um ângulo  $\theta$  com a vertical, sob ação da força da gravidade, a partícula oscila sob ação da força da gravidade no plano vertical, descrevendo um arco de círculo em torno da posição de equilíbrio que é a vertical.

A figura abaixo nos mostra o pêndulo e as forças que atuam nele.



A diferença entre a tensão na corda e a componente do peso da partícula na direção radial produz a força centrípeta necessária para que a partícula tenha movimento circular no plano vertical. A componente tangencial do peso da partícula obriga o pêndulo a sempre voltar para a posição de equilíbrio e faz o papel da força restauradora. Se medirmos o deslocamento angular  $\theta$ , relativo à posição de equilíbrio, no sentido trigonométrico, a força restauradora terá sempre sentido oposto ao do aumento do ângulo  $\theta$ ; assim, podemos escrever para ela:

$$F = -mg \sin \theta \quad (2947)$$

Como a força restauradora não é proporcional ao ângulo  $\theta$ , o movimento do pêndulo não é um movimento harmônico simples. Com efeito, a equação do movimento do pêndulo é:

$$m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0 \quad (30)$$

Esta equação diferencial não é linear e requer métodos especiais para ser resolvida. Entretanto, se o ângulo  $\theta$  for pequeno, podemos escrever que  $\sin \theta \cong \theta$  (em radianos!). Dessa forma, o pêndulo descreverá oscilações harmônicas descritas pela equação diferencial:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (31)$$

Ou:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad (32)$$

Cuja solução é:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (33)$$

Sabemos que,  $\omega^2 = g/L$  e uma vez que o valor da frequência angular é  $\omega = 2\pi/T$ , então período do pêndulo é:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (34)$$