UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – ANTONIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

EMERSON PAES DE BRITO

CIRCUITO RLC: UMA ABORDAGEM DE CIRCUITOS DE BAIXA FREQUÊNCIA

PATOS
2018

EMERSON PAES DE BRITO

CIRCUITO RLC: UMA ABORDAGEM DE CIRCUITOS DE BAIXA FREQUÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Física.
Área de concentração: Física teórica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira.

PATOS
2018

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

B862c Brito, Emerson Paes de.
Circuito RLC [manuscrito] : uma abordagem de circuitos de baixa frequência / Emerson Paes de Brito. - 2018.
56 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira , Coordenação do Curso de Ciências Exatas - CCEA."

1. Circuito RLC. 2. Corrente alternada. 3. Baixa frequência. I. Título

21. ed. CDD 621.381 32

Elaborada por Kênia O. de Araújo - CRB - 15/649 BC/UEPB

EMERSON PAES DE BRITO

CIRCUITO RLC: UMA ABORDAGEM DE CIRCUITOS DE BAIXA FREQUÊNCIA

Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Física.
Área de concentração: Física teórica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira.

Aprovado em 16 de agosto de 2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Rodrigo César Fonseca da Silva (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Júnior (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A minha filha e esposa, pela dedicação, companheirismo e amizade, aos meus pais, irmãos e amigos, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador de todas as coisas visíveis e invisíveis e fonte da nossa inspiração para esse trabalho.

Ao professor Marcelo Viera, coordenador do curso de Licenciatura Plena em Física, por seu empenho.

AosamigosJerffeson Ramon Guimarães Lopes, Nailton Dutra dos Santos e Robson Amauri Guedes dos Santos pelas leituras sugeridas ao longo desse trabalho e pela dedicação.

A minha esposa Eliedna Ferreira e minha filha, pela compreensão por minha ausência nos dias de empenho neste trabalho.

A minha mãe pelos conselhos e orientações nos momentos pessoais de dificuldades que tive ao longo da graduação.

Aos professores do Curso de Licenciatura Plena em Física da UEPB, em especial, Everton Cavalcante, Marcelo Vieira, Pedro Carlos e Rodrigo Fonseca, que contribuíram ao longo de 60 meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

"Nada é tão maravilhoso que não possa existir, se admitido pelas Leis da Natureza."

Michael Faraday

RESUMO

Este trabalho traz uma discussão acerca do comportamento do circuito RLC, ou seja, um tipo especial de circuito que contém três elementos em série ou em paralelo, são eles um resistor R, um indutor L e um capacitor C, fazendo uma abordagem sobre seu funcionamento em baixas freqüências em aparelhos de rádio, televisores, entre outros. Para isso, mostramos alguns caminhos matemáticos que possibilitam esclarecer como se comporta algumas grandezas, tais como a reatância e a impedância, onde a reatância é o impedimento que ocorre naturalmente a variação de corrente elétrica e tensão no indutor ou capacitor de um sistema elétrico, a impedância é uma espécie de resistência disfarçada no circuito RLC, onde seu valor é determinado através dos valores da resistência, indutor e capacitor. Para a realização deste trabalho foi feita uma pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico, na qual foram feitos estudos sobre o comportamento de alguns tipos de associações de circuitos elétricos, tais como, o resistivo, capacitivo e indutivo, desenvolvendo, portanto, as equações que permitem determinar a carga e corrente que percorre tais sistemas. Com esse trabalho percebi a necessidade de conhecer o circuito RLC para sua aplicação em instrumentos eletrônicos, bem como, estudar sistemas mecânicos e oscilantes físicos e utilizar essa mecânica matemática para os circuitos elétricos que possibilitam valorizar o conhecimento sobre as ferramentas do eletromagnetismo na nossa contemporânea sociedade. Assim, encontrar a carga, corrente, reatância e impedância, são grandezas fundamentais que nos fazem compreender a natureza do circuito RLC, também, a potência, fator de qualidade e ressonância.

Palavras-Chave: circuito RLC, corrente alternada, baixa frequência.

ABSTRACT

This work presents a discussion about the behavior of the RLC circuit, that is, a special type of circuit that contains three elements in series or in parallel, they are a resistor R, an inductor L and a capacitor C, making an approach on its operation in low frequencies, for this, I showed some mathematical ways that make it possible to clarify how some greatness behaves, such as reactance and impedance, where the reactance is the impediment that occurs naturally the variation of electric current and voltage in the inductor or capacitor of a electrical system, the impedance is a kind of resistance disguised in the RLC circuit, where its value is determined through the values of resistance, inductor and capacitor. For the accomplishment of this work a qualitative research of bibliographical character was made, in which studies were done on the behavior of some types of associations of electric circuits, such as, the resistive, capacitive and inductive, developing, therefore, the equations that allow to determine the load and current flowing through such systems. With this work I realized the need to know the RLC circuit for its application in electronic instruments, as well as to study mechanical and oscillating physical systems and to use this mathematical mechanics for the electrical circuits that allow to value the knowledge about the tools of Electromagnetism in our contemporary society. Thus, finding the load, current, reactance and impedance, are fundamental quantities that make us understand the nature of the RLC circuit, also, power, quality factor and resonance.

Keywords: RLC circuit, alternating current, low frequency.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação de um resistor em circuitos elétricos.. 17
Figura 2 - Circuito com gerador elétrico.. 19
Figura 3 - Representação de um Indutor.. 20
Figura 4 - Representação de um capacitor.. 21
Figura 5 - Representação do circuito RL.. 22
Figura 6 - Corrente estabelecida no Indutor.. 24
Figura 7 - Representação de um circuito RC.. 26
Figura 8 - Gráfico do carregamento do capacitor.. 29
Figura 9 - Comportamento da corrente no carregamento.. 30
Figura 10- Descarga do capacitor.. 31
Figura 11 - Carga e descarga do capacitor.. 31
Figura 12 - Ciclos dos carregamentos e dos descarregamentos...................................... 34
Figura 13 - Circuito de corrente contínua com capacitor e indutor................................. 34
Figura 14 - Comportamento da carga e corrente em função do tempo............................ 38
Figura 15 - RLC em série com corrente contínua.. 38
Figura 16 - Carga dissipando no tempo... 40
Figura 17 - Resistor em uma fonte alternada... 41
Figura 18 - Tensão e corrente caminhando juntas... 42
Figura 19 - Ondas associadas da tensão e corrente.. 42
Figura 20 - Capacitor em uma fonte alternada... 43
Figura 21 - Tensão e corrente caminhando juntas... 44
Figura 22 - Ondas associadas da tensão e corrente.. 44
Figura 23 - Indutor em uma fonte alternada... 45
Figura 24 - Tensão e corrente caminhando juntas... 46
Figura 25 - Ondas associadas da tensão e corrente.. 46
Figura 26 - Circuito RLC em uma fonte alternada.. 47
Figura 27 - Soma das projeções dos fasores.. 48
Figura 28 - Comportamento da amplitude de pico da corrente em função da frequência angular natural... 50
Figura 29- Comportamento da fase em função da frequência... 50

LISTA DE SIGLAS OU ABREVIATURAS

f.e.m	Força Eletromotriz
LC	Indutor, Capacitor
RL	Resistor, Indutor
RC	Resistor, Capacitor
RLC	Resistor, Indutor e Capacitor
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
C.A	Corrente Alternada
C.C	Corrente Continua
ddp	Diferença de Potencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária

LISTA DE SÍMBOLOS

ω	Frequência angular
wo	Frequência natural
π	Pi
$\mathcal{E}$	Força eletromotriz
Δ	Variação
φ	Fase da onda
φ_B	Fluxo magnético
W	Watt
A	Ampere
V	Energia
V	Volt
q	Carga
Ω	Unidade de medida da resistência
R	Resistor
C	Capacitor
L	Indutor
U	Energia
i	Corrente
r	Resistência interna da fonte
m	Massa
x	Posição
v	Velocidade
k	Constante da mola
t	Tempo
Z	Impedância
P	Potência
<P>	Potência média
X_C	Reatância capacitiva
X_L	Reatância indutiva

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO..13

2 CIRCUITOS ELÉTRICOS 15

2.1 Componentes de um circuito 16
2.1.1 Resistores..16
2.1.2 Gerador elétrico 18
2.1.3 Indutor..19
2.1.4 Capacitor...21

2.2 Circuito RL..22

2.3 Circuito RC..26

3 OSCILADOR ELÉTRICO E AS LEIS DE KIRCHHOFF.......................................33

3.1. Circuito LC..33

3.2 Circuito RLC em série...38

3.3 Circuitos RLC com corrente alternada. 40
3.3.1 Circuitos com resistor e fonte alternada (resistivo) 41
3.3.2 Circuitos com capacitor e fonte alternada (capacitivo) 43
3.3.3 Circuitos com indutor e fonte alternada (indutivo)................................45

3.4 Oscilações forçadas: teorema de fasores. 47

3.5 Potência no circuito C.A...52

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 55

REFERÊNCIAS..56

1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos a eletricidade se tornou a principal fonte de luz, calor e força utilizada no mundo moderno. Até mesmo atividades simples como assistir TV, ouvir música no rádio ou navegar na internet só é possíveis graças a energia elétrica que chega até nossas casas. Fábricas, supermercados, shoppings entre uma infinidade de outros lugares necessitam enormemente dela para o seu perfeito funcionamento. Segundo Rodriges:

> "Há cerca de 300 anos, a eletricidade era vista como um poder mágico, capaz de matar, reviver os mortos e modificar as leis da natureza. Atualmente ela é a alma do mundo moderno, alimentando nossas vidas, essencial em todos os aspectos do avanço tecnológico".
>
> (RODRIGES, 2017)

Obtida a partir de muitos outros tipos de energia, a eletricidade é transportada e chega aos consumidores no mundo inteiro por meio de uma extensa rede de condutores e outros sistemas elétricos mais complexos, no entanto, o funcionamento de inúmeros equipamentos presentes em nosso cotidiano necessita de dispositivos por onde a corrente possa se movimentar e realizar trabalho, tais dispositivos são denominados de circuitos elétricos.

Os circuitos elétricos são dispositivos compostos por um conjunto de elementos responsáveis por oferecer um caminho conveniente para que a corrente elétrica desempenhe suas atividades de forma precisa e preestabelecida. Há diversos tipos de circuitos, e a principal diferença entre eles se baseia nos elementos que os compõem.

Nessa perspectiva, o objetivo deste trabalho é apresentar o circuito RLC, um tipo especial de circuito que contém três elementos em série ou em paralelo, são eles um resistor R, um indutor L e um capacitor C com as características primordiais desses componentes, esclarecendo o seu funcionamento em baixas frequências e mostrar os caminhos matemáticos que podem esclarecer o comportamento da reatância e impedância do circuito.

No delinear, o corpo do trabalho mostra que o circuito RLC se comporta como um oscilador, pois a união do resistor, capacitor e indutor gera uma carga oscilante, podendo ser analisado através das Leis de Kirchhoff. A partir disso é possível analisar alguns pontos importantes que emergem dessa implicação, tais como: frequência de ressonância, fator de qualidade e potência média.

O entendimento dos circuitos RLC como um oscilador elétrico mostra a importância do papel de uma base sólida em Física para a identificação de circuitos de baixa frequência em nosso cotidiano, ou seja, é procurando remontar estes conhecimentos que podemos entendê-los e aplicá-los em nossos estudos, levando em consideração todos os meios pelos quais obtivemos quaisquer resultados, analisando-os e comparando-os, como também a função e a consequência do funcionamento do Resistor, Capacitor e Indutor.

No eletromagnetismo, o circuito elétrico tem um destaque, pois suas aplicações são de grande contribuição para o desenvolvimento da tecnologia, assim, compreendê-los em seu funcionamento é indispensável.

Para uma melhor compreensão deste trabalho, dividimos a pesquisa em quatro capítulos. Assim, na primeira parte, referente à introdução, descreverei o conceito de circuito RLC bem como o objetivo de estudo desse tipo de circuito. No segundo capítulo é apresentado os circuitos elétricos em si, destacando os dispositivos que os compõem bem como as possibilidades de calcular a corrente, carga e potência.

Na segunda parte do trabalho, a referente ao terceiro capítulo, são apresentados os circuitos oscilantes, o material principal desta pesquisa, pois são neles que constatamos particularidades importantes para um pormenor do conhecimento sobre o funcionamento de um circuito elétrico de baixa frequência.

Nesse momento é necessário possuir certo conhecimento matemático mais apurado e algumas regras trigonométricas dentro do cálculo, pois a corrente e a carga nos dispositivos que armazenam energia elétrica resultam em funções periódicas que dependem de um trato refinado da Matemática. Utiliza-se o sistema massa mola como instrumento, pois as características de um sistema físico oscilante podem ser aplicadas nos sistemas oscilantes elétricos.

No quarto capítulo, teremos nossas considerações acerca da pesquisa envolvida neste trabalho.

2 CIRCUITOS ELÉTRICOS

"Se a presença de eletricidade pode se tornar visível em qualquer lugar do circuito, não vejo razão para que a inteligência não possa ser transmitida instantaneamente pela eletricidade".

(Samuel Morse)

Diversos aparelhos necessitam de eletricidade para seu funcionamento. Além disso, sabemos também que todos eles são constituídos de estruturas denominadas de circuitos elétricos, responsáveis por permitir a passagem e manipulação da corrente elétrica em seu interior. A função do circuito elétrico é utilizar energia elétrica para realizar trabalho, convertendo energia elétrica em outros tipos de energia, quer seja em motores elétricos, lâmpadas fluorescentes ou incandescentes, alto-falantes e/ou liquidificadores, ferros de passar roupa, televisores, etc.

A utilização de energia elétrica em um circuito se faz através de uma corrente elétrica, a mesma é operada baseada nas ideias desenvolvidas pelas leis de Ohm. Por sua vez, a obtenção da eletricidade pode ser estudada desde o fenômeno descoberto pelo físico dinamarquês Hans Christian Oersted, onde observou que correntes elétricas produzem campos magnéticos, até a equação do físico inglês Michael Faraday, conhecida como lei de Faraday-Lenz.

A diferença de potencial ocorre entre duas cargas, onde uma carga Q que possui um campo E, tendo na presença desse campo uma carga q, situada a uma distância da carga Q, se movimenta em um sentido contrário ao do campo E, assim, definimos a ddp, ou seja, diferença de potencial que pode ser denominada tensão elétrica e representada pelas letras U ou V, a unidade de medida é o volt. Markus (2001).

Um circuito elétrico deve possuir alguns dispositivos conectados entre si e ligados a uma fonte elétrica alternada ou contínua. Portanto,tomemos um circuito constituído de um resistor, indutor e capacitor, conhecido por circuito RLC, seus componentes podem ser ligados em série ou em paralelo. Em série mantemos a corrente e dividimos a diferença de potencial (ddp), em paralelo conservamos a ddp e repartimos a corrente. Dessa forma,

> Na associação Série de resistores, a tensão da fonte de alimentação se subdivide entre os resistores, formando um divisor de tensão. Porém, na associação Paralela de resistores, vimos que a corrente fornecida pela fonte geradora se subdivide entre os resistores, formando um divisor de correntes. (MARKUS, 2001, pg. 56 e 57).

Contudo, utiliza-se um conceito primordial para o esclarecimento dos circuitos, as leis de Kirchhof, que são divididas em duas, a lei dos Nós e a lei das Malhas, assim, nas leis dos nós, "a soma das correntes que chega a um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó. Markus (2001 pg. 137).

Um Nó no circuito é a conexão de três ou mais ramos. A lei das Malhas diz que "a soma das tensões que elevam o potencial do circuito é igual à soma das tensões que causam a queda de potencial." Markus (2001, pg. 137).

2.1 COMPONENTES DE UM CIRCUITO

Um circuito elétrico consiste na interligação criteriosa de um conjunto de componentes através dos quais circulam cargas elétricas. Os circuitos visam a realização de um objetivo pré-determinado, para tanto o seu funcionamento necessita de um conjunto de dispositivos e/ou elementos que são responsáveis por exercer as diversas funções em um circuitos. Circuitos para fins diferentes apresentam elementos também diferentes, no entanto, vejamos um pouco sobre os componentes mais essenciais de um circuito elétrico comum.

2.1.1 RESISTORES

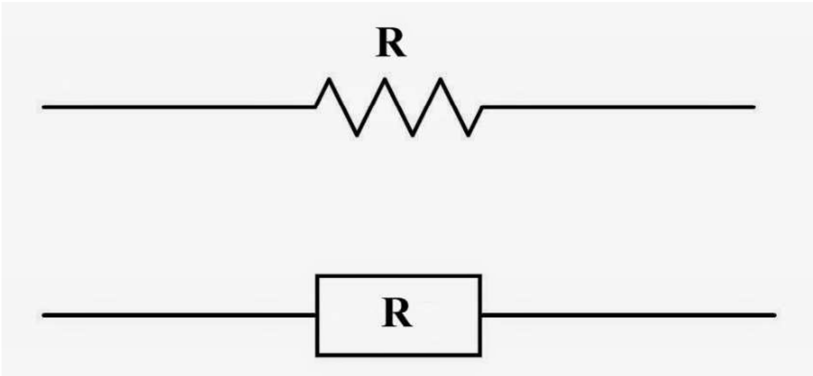
Os resistores são componentes de circuitos elétricos, que possuem como principal função, limitar os valores da corrente elétrica de acordo com as necessidades de determinados aparelhos. Outra função bem conveniente dos resistores é a possibilidade de alterar a ddp em determinada parte do circuito através da redução da corrente elétrica. Basicamente o resistor resiste à passagem da corrente elétrica através de um condutor, por isso, a maior parte deles é feita com carvão em pasta, componente que é isolante elétrico.

Os resistores dificultam a passagem de corrente elétrica, eles são utilizados na maioria das vezes em sistemas de geração de calor, utilizando-se para isso do efeito Joule. Denominados de resistências elétricas, podem ser encontrados em aparelhos como chuveiros, televisores, computadores, aquecedores, ferro de passar roupa, rádios, lâmpadas incandescentes, dentre outros.

Na Física, os resistores são identificados através do símbolo R, e por ser uma grandeza mensurável, no Sistema Internacional de Unidades (SI) são medidos em Ohm (Ω), ou seja, Volts (V) / Ampére (A).

Graficamente, podemos identificar um resistor por meio de uma linha em ziguezague, tal como mostrado na figura 1 adiante.

Figura 1 – Representação de um resistor em circuitos elétricos.



Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/fisica/transformacao-energia.html

A resistência de um resistor é a grandeza que determina a sua capacidade de resistir à passagem da corrente elétrica. Ela pode ser definida como a razão entre a ddp à qual está submetido o resistor e a corrente elétrica que o atravessa. Desta forma, a resistência é dada por:

$$R = \frac{U}{i} \tag{2.1}$$

Onde *R*representa resistência oferecida pelo resistor; *U* é a diferença de potencial à qual o resistor está submetido e *i* representa a corrente elétrica que atravessa o resistor.

A equação (2.1) ainda pode ser reescrita em termos de U, obtendo-se assim a seguinte expressão Markus (2001):

$$U = R.i \tag{2.2}$$

A equação acima é conhecida pela primeira lei de Ohm, em homenagem ao Físico alemão Georg Simon Ohm que teve grandes contribuições nos estudos da resistência elétrica. Se analisarmos a equação (2.2) é possível perceber que se a resistência mantém-se constante com a alteração da corrente que percorre o circuito. Os resistores de resistência constante são denominados de resistores ôhmicos.

O aquecimento por um resistor é capaz de produzir uma potência dissipada, fruto do efeito Joule que converte energia elétrica em energia térmica provocada pela colisão dos elétrons livres com os átomos. Considerando um resistor de resistência elétrica R ligado a uma fonte de tensão U e percorrido por uma corrente elétrica de intensidade i.

Sabe-se que a potência de um dispositivo elétrico é proporcional a tensão e a corrente que o atravessa.

$$P = U.i \tag{2.3}$$

Podemos substituir a equação (2.2) na (2.3) e obter o seguinte resultado

$$P = R.i^2 \tag{2.4}$$

A equação (2.4) representa a potência dissipada por um resistor ôhmico.
Onde:

P ≡ é a potência, que é dada em watt (W)
i ≡ é a corrente elétrica, que é dada em ampère (A)
U ≡ é a tensão, que é dada em volt (V)
R ≡ é a resistência, que é dada em ohm (Ω)

A potência é forma de medir o trabalho realizado por um dispositivo dado um intervalo de tempo, também, a energia térmica transformada por unidade de tempo é chamada potência dissipada.

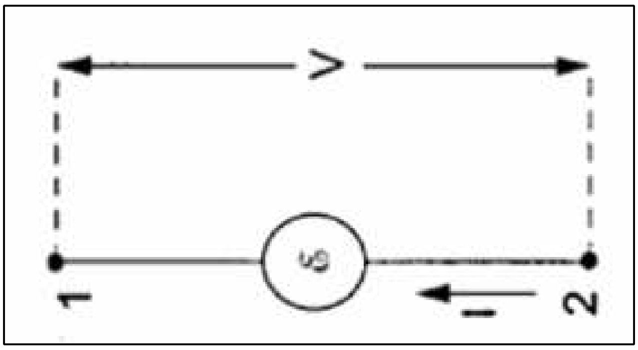
2.1.2 GERADOR ELÉTRICO

Um gerador, como assim é chamado pela maioria das literaturas, não gera energia elétrica, mas seguindo o princípio de conservação da energia, ele funciona como um conversor, portanto, pode-se transformar uma determinada energia em outra, exemplo: a pilha fornece energia ao circuito devido a reações de oxirredução ocorridas em seu interior, ou seja, converte energia química em energia elétrica.

Dispositivos que fornecem tensão a um circuito é chamado de fonte de tensão, assim, podemos definir corrente elétrica como o movimento de cargas em um condutor, fornecidas por uma fonte de tensão.

Na Física, quando o gerador está desligado a diferença de potencial entre seus terminais é denominada força eletromotriz (*fem*) e representada pela letra grega ε. Um gerador é um elemento ativo de um circuito, que fornece energia. Segundo Moysés (1997), a corrente atravessa o gerador no sentido inverso da queda de potenciacomo representado na figura 2 a seguir:

Figura 2: Circuito com gerador Elétrico



Fonte:Nussengveig, H. Moysés (1997, p.191)

Para terminar a ddp nos terminais do gerador é preciso que consideremos a resistência interna da fonte de tensão, esta ddp é função da corrente, a resistência interna pode ser calculada pela lei de ohm através do produto $\boldsymbol{r.i}$, logo, a equação do gerador fica:

$$V = \boldsymbol{\varepsilon} - r\,i \tag{2.5}$$

Portanto V é igual a *fem* se não houver corrente, ou seja, o circuito está desligado.

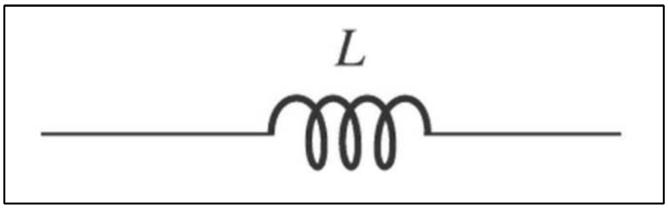
2.1.3 INDUTOR

É um dispositivo que armazena energia na forma de campo magnético, confinado em seu volume, fora do indutor este campo é nulo. Este componente é dotado de indutância, termo físico para designar a quantidade de energia armazenada em forma de campo magnético na presença de uma determinada corrente elétrica, que pode ser ou não variável no tempo. Assim, o indutor desempenha diversos papéis no circuito elétrico além de armazenar energia.

Se considerarmos o atraso na corrente atravessada imediatamente no indutor, podemos classificá-lo como um filtro que permite a passagem de baixas frequências, filtro passa baixa, rejeitando assim, altas frequências, atenuando a corrente. Se a corrente é continua, um indutor ideal não oferece resistência à passagem da corrente, isso só ocorrerá no ligamento e desligamento do circuito, o contrário acontece quando a corrente é alternada, pois o indutor com seu campo magnético oposto a passagem da corrente abomina a variação de mudança dela.

A indutância é representada pela letra L, e é indicado pelo seguinte símbolo:

Figura 3 – Representação de um indutor.



Fonte: https://athoselectronics.com/componentes-eletronicos-guia/

A indutância é a capacidade do indutor em armazenar energia magnética por meio do fluxo φ_B(fluxo magnético) criado pela corrente, assim:

$$L = \frac{\varphi}{i_L} \tag{2.6}$$

Quando uma corrente passa pela bobina (indutor) gera um fluxo magnético e faz surgir uma corrente induzida contraria à corrente gerada da fonte, esse fenômeno é calculado pela lei de Lenz, após o indutor carregar seu máximo fluxo magnético a corrente induzida desaparece e o indutor é visto pela fonte como um dispositivo de mínima resistência, ou seja, a resistência normal do condutor.

Assim, o indutor é uma espécie de amortecedor da corrente, ele atenua a corrente, até que ela consegue passar, por isso é considerado um filtro.

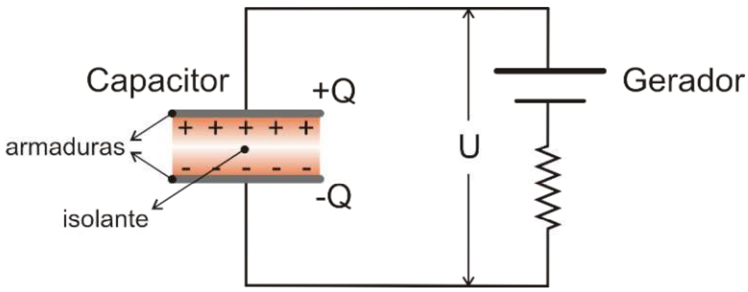
O indutor é um exemplo de dispositivo reativo, ou seja, junto com o capacitor eles diferem do resistor que é um dispositivo resistivo, os dispositivos reativos variam seus valores ôhmicos na medida em que a velocidade da variação da corrente são neles aplicada, ao contrário, o resistivo, não varia. Essas reações às variações definem a reatância capacitivaX_Ce reatância indutiva X_L·.Markus (2001).

2.1.4 CAPACITOR

É um componente do circuito, ligado a uma fonte por um condutor, que carrega suas placas. Uma placa é carregada com carga positiva e a outra com negativa separada por um dielétrico. Quando o capacitor é submetido aos polos de um gerador, os elétrons de uma placa são atraídos para o polo positivo, assim, ela carrega a placa positivamente, ao mesmo tempo os elétrons do polo negativo são atraídos para a outra placa, carregando-a negativamente.

Haverá um intervalo de tempo para que o potencial do polo positivo do gerador se iguale com a placa positiva e a placa negativa com o polo negativo, quando se estabelece essa igualdade, diz que o capacitor está carregado com carga Q. Assim, o capacitor é um dispositivo com capacidade de armazenar carga. A figura adiante mostra a representação de um capacitor num circuito.

Figura 4 – Representação de um capacitor



Fonte: https://athoselectronics.com/capacitor/

Podemos medir a propriedade que estes dispositivos têm de armazenar energia elétrica sob a forma de um campo eletrostático, chamada de capacitância C, sendo a relação entre a carga Q do capacitor e a ddp a qual está submetido:

$$C = \frac{Q}{V} \tag{2.7}$$

Observa-se que para uma ddp fixa a capacitância aumentará na razão que a carga Q armazenada no capacitor for um tanto maior. No sistema internacional, a unidade de medida para capacitância é o Faraday. Comprovadamente, sabemos que 1 F é uma capacitância grande. Podem se associar em série, paralela ou mista.

Para que consigamos carregar um capacitor, é necessário carregar uma das placas com carga positiva e a outra com carga negativa. O processo trata-se de uma transferência de cargas de uma placa para a outra. Essa transferência pode ser feita através da ligação de dois cabos nos terminais de uma bateria.

Para calcular a energia, vamos considerar que a carga total Q foi transferida em pequenas cargas infinitesimais dq. Dessa forma, cada vez que uma carga dq passa de uma placa a outra, ganha uma energia potencial elétrica sendo dada por:

$$dU = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \tag{2.8}$$

Para determinarmos a energia total armazenada no capacitor basta integrar (2,8) com os limites de integração de 0 à Q. como se segue:

$$U_C = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

Finalmente,

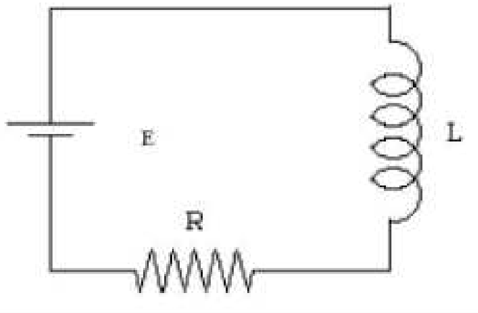
$$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{2.9}$$

A carga não será transferida para as placas de forma instantânea. Quando ligarmos um capacitor a uma fem, a carga aumentará de forma gradual até uma carga final.

2.2 CIRCUITO RL

Inicialmente para análise, encontra-se o circuito RL, constituído por um resistor e um indutor, acompanhado por uma fonte de tensão de corrente contínua. Contudo será feito uma análise do comportamento da corrente desse circuito e da energia acumulada no indutor na forma de campo magnético.

Figura 5 - Representação do circuito RL.



Fonte:http://www.uprh.edu/rbaretti/9304mar2014.JPG

Para um tempo igual a zero a corrente é zero, porém, para uma corrente variando no tempo, qual será o seu valor? Para responder essa questão, percorrendo a malha e utilizando a lei das Malhas de Kirchhorff, encontramos:

$$\varepsilon - Ri - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{2.10}$$

Dividindo os dois lados por L, para organizar a equação em uma Equação Diferencial de Segunda Ordem com coeficientes constantes e homogenia:

$$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{\varepsilon}{L} \tag{2.11}$$

Vamos adotar a seguinte forma para simplificar o tratamento:

$$\frac{\varepsilon}{R} - i = x \qquad \text{estabelecendo } dx = di$$

Então:

$$x = \frac{\varepsilon}{R} - i$$

Podemos então reescrever a equação (2.11):

$$Rx + L\frac{dx}{dt} = 0 \tag{2.12}$$

Dividindo por L e separando os termos, temos:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{R}{L}\mathrm{dt}$$

Tomando a Integral:

$$\int_{x_0}^{x} dx = - \frac{R}{L}\int_0^t dt$$

Aonde esse limite de integração vai de zero até o tempo necessário para carregar o indutor.

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Assim, utilizou-se a regra do logaritmo natural para limpar a equação.

$$\mathrm{x} = x_0\, e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

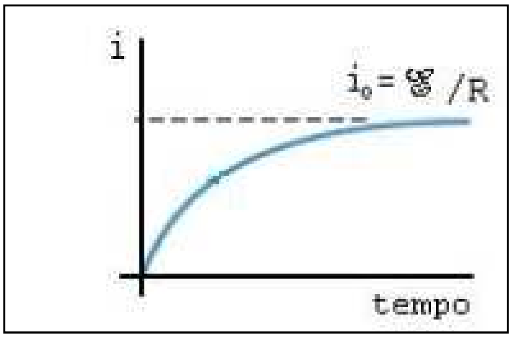
Então, sabendo que x= $\frac{\varepsilon}{R}$ – i e t=0, temos$x_0 = \frac{\varepsilon}{R}$

$$\frac{\varepsilon}{R} - \mathrm{i} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\mathrm{i} = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \qquad (2.13)$$

Podemos definir que em t = ∞, o circuito é $\frac{\varepsilon}{R}$. O termo $e^{-\frac{R\,t}{L}}$ surge como uma constante de tempo indutiva, a corrente que se estabelece no circuito, logo após o seu ligamento na fonte, não é instantâneo.

Figura 6 - Corrente estabelecida no indutor.



Fonte: http://www.ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CircuitoRL/Image11.gif

Utilizando a equação (2.2), a ddp nos terminais do resistor:

$$u_r = \mathcal{E}\,(1- e^{-\frac{R\,t}{L}}) \qquad (2.14)$$

A ddp nos terminais do indutor pode ser definida, com a lei de Faraday, como sendo:

$u_L = \mathrm{L}\frac{di}{dt}$

$$u_L = \mathrm{L}.\frac{\mathcal{E}}{R}\frac{R}{L}e^{-\frac{R\,t}{L}}$$

$$u_L = \mathcal{E}\,e^{-\frac{R\,t}{L}} \qquad (2.15)$$

Podemos calcular a energia armazenada no campo magnético fazendo um procedimento simples. Utilizando a eq.(2.10) e multiplicando os dois lados por i (corrente), obtemos:

$$\mathcal{E}\mathrm{i} = \mathrm{R}i^2 + \mathrm{L}i\frac{di}{dt} \qquad (2.16)$$

O termo $\mathcal{E}$i é a potência da fonte, sabemos que Ri^2 é a potência dissipada pelo circuito, o que nos leva a aceitar que L$i\frac{di}{dt}$, é a energia magnética armazenada no volume do indutor, ou seja, podemos definir $\frac{du_B}{dt}$, a taxa de variação da energia magnética armazenada, como:

$$\frac{du_B}{dt} = \mathrm{L}i\frac{di}{dt}$$

$$du_B = \text{Lidi}$$

Tomando a integral:

$$u_B = \int_0^i Lidi$$

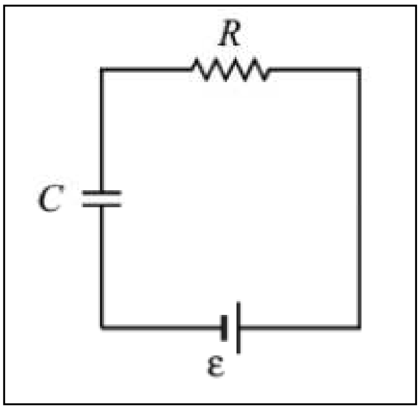
$$u_B = \frac{1}{2}\text{L}i^2 \qquad (2.17)$$

Onde u_B é a energia armazenada no campo magnético do indutor.

2.3 CIRCUITO RC

Um circuito resistor-capacitor, o ainda, circuito RC, consiste de um caminho eletrônico fechado que é constituído apenas por dois elementos básicos, além da f.e.m, que são o capacitor e o resistor. É possível visualizarmos esse circuito com base na figura 7 adiante.

Figura 7- Representação de um circuito RC



Fonte:https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d5/Circuito_RC.png

Neste tipo de circuito temos uma corrente não estacionária, isto é, uma corrente que é dependente do tempo. Com base nisso, vamos desenvolver o circuito para encontrar a carga do capacitor em função do tempo durante o seu carregamento bem como a sua respectiva corrente elétrica.

Considerando um capacitor descarregado, é sabido que sua carga num instante inicial $q(t_0)$ corresponde a $q(0) = 0$. Então a ideia é determinarmos quanto vale $q(t)$ num instante posterior. Para isso devemos percorrer a malha obedecendo ao princípio de Kirchoff. Dessa forma temos que no circuito:

$$\mathcal{E} - \mathrm{Ri} - \frac{q}{c} = 0 \tag{2.18}$$

Sabendo que a corrente elétrica i corresponde a variação da carga em função do tempo, e, portanto, sendo dada por:

$$\mathrm{i} = \frac{dq}{dt} \tag{2.19}$$

Logo, se substituirmos a equação (2.19) em (2.18) a expressão das malhas passa a ser a seguinte:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \tag{2.20}$$

Agora se dividindo a equação eq.(2.20) por R, obtemos:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \tag{2.21}$$

A equação (2.21) é a equação do circuito RC. Observe que esta equação não é do tipo algébrica, pois, agora ela envolve relações de derivadas, tendo, portanto, como soluções uma função. Por isso ela é considerada uma equação diferencial de primeira ordem não homogênea. Citolino (2015).

Reescrevendo (2.21) temos que:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon}{RC} - \frac{q}{RC}$$

Ainda podemos reescrever como

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q - C\mathcal{E}}{RC} \tag{2.22}$$

Neste caso, temos uma pequena dificuldade em resolver a equação, pois temos um termo derivado em relação ao tempo enquanto que o outro termo aparece em sua forma normal. Para solucionar isto separamos os termos dq/dt e q/c. Assim, teremos como resolver aplicando a função logarítmica, como se segue:

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = \frac{-1}{RC}\, dt \tag{2.23}$$

Com as variáveis separadas podemos tomar a integral na eq.(2.23)

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = \frac{-1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln[q - C\varepsilon]_0^q = -\frac{t}{RC}{}_0^t$$

$$\ln(q - C\varepsilon) - \ln(0 - C\varepsilon) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} = -\frac{t}{RC}$$

Perceba que o membro direito da equação acima corresponde à exponencial do argumento situado no membro esquerdo. Desse modo:

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

Explicitando o q da equação finalmente chegamos à:

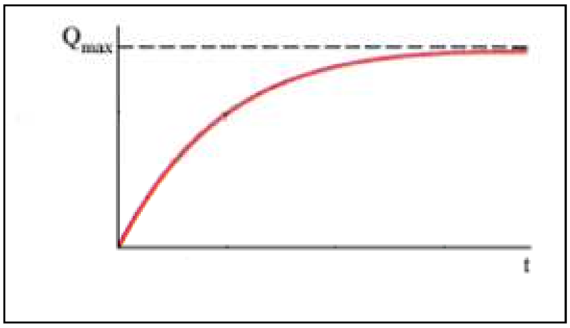
$$q(t) = C\mathcal{E}\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{2.24}$$

Observe que essa exponencial depende da capacidade do capacitor, da força eletromotriz e do tempo característico, sendo que este último é dependente da resistência e da capacidade do respectivo capacitor. Através desta expressão, é possível determinar a frequência de ressonância do circuito, fator muito aplicável em circuitos eletrônicos, principalmente em receptores de rádio, de televisores, entre outros.

A carga possui o caráter exponencial, logo temos que para $t = 0$ a carga também é zero e para o tempo indo ao infinito o gráfico da função terá caráter assintótico, ou seja, o capacitor está carregado, passado algum tempo. O expoente $-\frac{t}{RC}$ é chamado de tempo capacitivo, ele define o tempo com que o capacitor irá carregar.

Podemos observar tal comportamento no gráfico da carga em função do tempo:

Figura8- Gráfico do carregamento do capacitor



Fonte:http://ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CircuitoRC/fig-3-11-6.gif

Nos antigos receptores de rádio o sintonizador da frequência manipula a variação da capacidade de um capacitor variável, de modo que possa mudar a frequência para que esta entre em ressonância com a frequência desejada, capturando o sinal enviado pela respectiva emissora.

Dada a expressão da carga elétrica, podemos encontrar a equação da corrente que surge no circuito através da equação (2.19) como se segue:

$$\frac{d}{dt}[C\mathcal{E}\,(\,1 - \,e^{-\frac{t}{RC}}\,)]$$

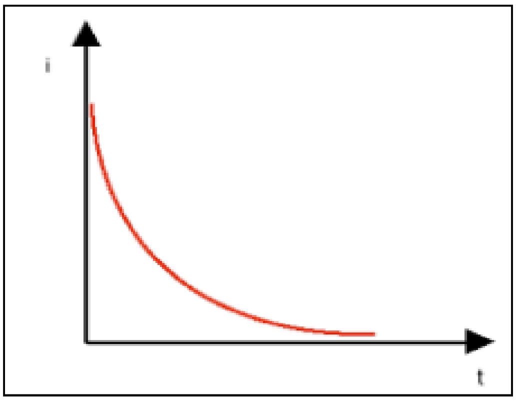
$$\mathrm{i} = C\mathcal{E}\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Por fim obtemos a expressão final da corrente que é dada por:

$$\text{i(t)} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (2.26)$$

Para $t = 0$ temos $i = \frac{\varepsilon}{R}$, mostrando que o circuito nesse momento possui somente a resistência, contrariamente, para t tendendo ao infinito a corrente vai para zero, ou seja, o capacitor carrega e a corrente cessa. Veja o comportamento dessa função no gráfico da figura 9 adiante.

Figura 9 - comportamento da corrente no carregamento.



Fonte:https://www.mobility-br.com/LeonardoVinci/Capacitores/images/pastedGraphic5.png

Procedendo analogamente para o descarregamento do capacitor, temos que considerar $q(0) = Q$, ou seja, toda a carga da fonte está contida no capacitor e que ele irá descarregar através da resistência. Logo, pela equação (2.20):

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \qquad (2.27)$$

Igualando tudo que é carga de um lado e tudo que é tempo do outro, temos:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrando a equação anterior de Q à q:

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

O membro esquerdo da equação é claramente uma função logarítmica, portanto podemos reescrevê-la como:

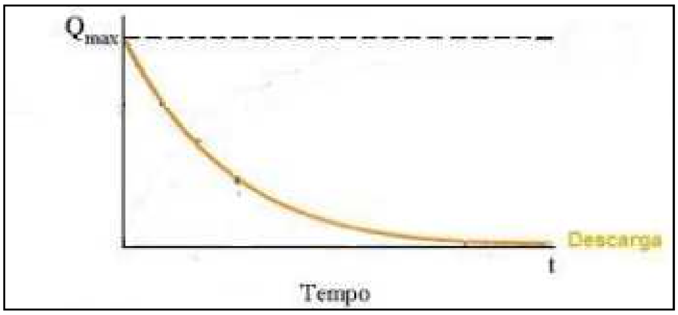
$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Por fim, podemos convenientemente explicitar a variável q em função do tempo. Sendo dada por:

$$q(t) = Qe^{-\frac{t}{RC}} \tag{2.28}$$

Observe que o resultado concorda com as condições de contorno, donde para $t(0)$ temos a carga $q = Q$ e para o tempo indo ao infinito obtemos a carga $q = 0$ (O capacitor estar descarregado). Veja o comportamento no gráfico.

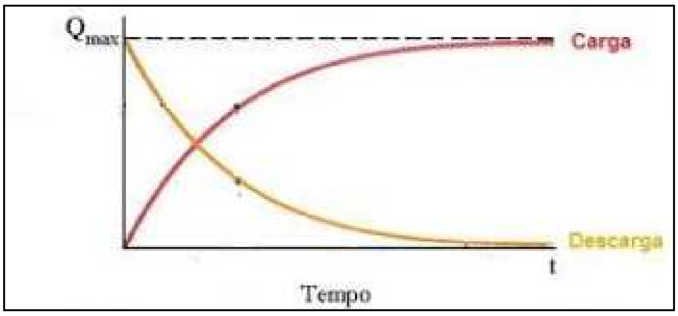
Figura 10 - Descarga do capacitor.



Fonte:https://i1.wp.com/www.sabereletrica.com.br/wp-content/uploads/2015/03/carga-no-capacitor.jpg?ssl=1

A figura 11 a seguir mostra ainda a sobreposição dos dois gráficos anteriores, onde é possível observar como a carga se comporta em função do tempo para um capacitor sendo carregado e posteriormente descarregado.

Figura 11 - Carga e Descarga do capacitor.



Fonte:https://i1.wp.com/www.sabereletrica.com.br/wp-content/uploads/2015/03/carga-no-capacitor.jpg?ssl=1

Do mesmo modo que na situação de carregamento do capacitor, vamos encontrar uma expressão para a corrente que também leve em consideração o descarregamento do capacitor em um circuito RC. Para isso vamos partir da equação da corrente (2.19), logo:

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}\right]$$

$$\boldsymbol{i} = -\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{RC}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}}$$

Sendo assim, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}_0\boldsymbol{e}^{\frac{-\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{RC}}} \qquad (2.29)$$

Onde na (2.29) a constante $\boldsymbol{i}_0$ equivale a $\boldsymbol{Q}/_{\boldsymbol{RC}}$.

Observe que pela equação (2.29) ainda é possível perceber que a derivada da carga em função do tempo (a corrente) possui sinal negativo. Isto significa que a grandeza em questão está diminuindo com o passar do tempo, ou seja, nossa equação de corrente é plausível e concorda com a situação de descarregamento do capacitor.

3 OSCILADOR ELÉTRICO E AS LEIS DE KIRCHHOFF

Alguns circuitos funcionam como osciladores elétricos, que pode ser constituídos por várias associações de resistores, capacitores e indutores, assim, podemos definir a corrente ou a diferença de potencial em cada elemento aplicando-se, para isso as leis de Kirchhoff.

A primeira lei de Kirchhoff é costumeiramente conhecida como Lei dos Nós, e pode ser enunciada considerando que a soma das correntes que entram em um nó são a mesma que saem do mesmo. Então, segundo Moysés (1997), um nó não pode ser considerado uma fonte nem um sorvedouro (conservação da carga elétrica) e não ocorre acumulo de cargas.

A Segunda Lei, chamada de lei das malhas, afirma que a soma de todas as quedas de tensão ao longo da malha de um circuito é nula. Assim, utilizamos a Lei das Malhas para descrever os circuitos RC e RL.

Veremos um circuito formado por um indutor (L) e um capacitor (C), neste caso, estas grandezas não variam exponencialmente com o tempo, mas, como veremos adiante, variamsenoidalmente, constituído de um período T e uma frequência w_0, ou seja, é um oscilador elétrico, uma vez que as oscilações de carga e corrente resultam em oscilações do campo elétrico do capacitor e do campo magnético próprio do indutor. Este circuito não possui resistência e encontra-se com carga Q máxima no capacitor, a corrente i que atravessa o indutor é nula.

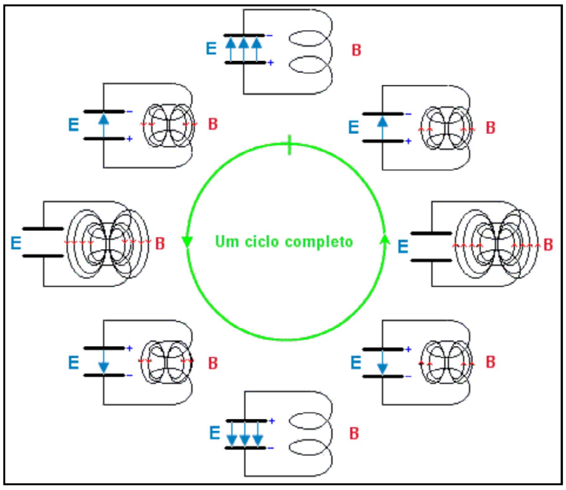
3.1. CIRCUITO LC

Supondo que estamos num circuito ideal, sem resistência e com carga Q máxima no capacitor, onde a corrente i é nula ao atravessar o indutor, o circuito começa a oscilar, pois a carga do capacitor com energia elétrica armazenada começa a carregar o indutor que armazena energia na forma de campo magnético.

Passado algum tempo o capacitor descarrega e a corrente começa a carregá-lo novamente com polaridade invertida, assim, o capacitor carrega novamente e o processo volta ao início, como não há resistência para dissipar a energia, o circuito ideal fica oscilando.

Podemos observar os oito estágios em um único ciclo de oscilação de um circuito LC sem resistência. Supomos que inicialmente a carga q do capacitor tem o seu valor máximo Q e a corrente i que atravessa o indutor é nula. A situação está ilustrada na figura 12 a seguir.

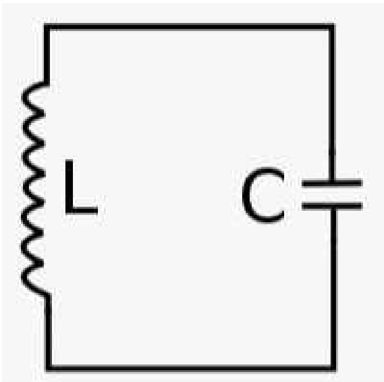
Figura 12 - Ciclo dos carregamentos e dos descarregamentos.



Fonte: http://www.feiradeciencias.com.br/sala27/27_13.asp

Um circuito LC está representado na figura 13 a seguir. Como já foi dito antes, um circuito deste tipo se comporta como um oscilador, então do ponto de vista formal podemos fazer uma analogia eletromecânica com um oscilador harmônico simples, do tipo massa mola.

Figura 13– Circuito de corrente contínua com capacitor e indutor.



Fonte: http://www.ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CircuitoLC/Image18.gif

Por analogia, as energias associadas ao capacitor e indutor são respectivamente dadas por:

$$u_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \tag{3.1}$$

(Energia de um capacitor)

$$u_L = \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.2}$$

(Energia de um indutor)

Como o sistema é fechado e ideal, temos que a energia total (U_T) no circuito é uma constante. Como existem apenas dois elementos no circuito, podemos afirmar que a energia total, deve ser uma soma das energias elétrica (u_C) e magnética (u_L), produzidas no capacitor e no indutor respectivamente. Assim temos que a energia total $U_T = u_C + u_L = Constante.$

$$U_T = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.3}$$

Como não há resistência no circuito, podemos derivar ambos os lados da equação acima em função do tempo e iguala-la à zero. Assim temos que:

$$\frac{d}{dt}(U_T) = +\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = 0 \tag{3.4}$$

Usando a relação de corrente da equação (2.19), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{q^2}{2C}\right] = 0$$

Separando as derivadas da expressão acima, obteremos:

$$\frac{L}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(q^2) = 0$$

Multiplicando ambos os membros por $^2/_L$, teremos então:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{LC}\frac{d}{dt}(q.q) = 0$$

Aplicando a regra da cadeia na primeira parte e a regra do produto na segunda parte,

$$2\frac{dq}{dt}.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q.\frac{dq}{dt} + q.\frac{dq}{dt} = 0$$

$$2i.\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}\overbrace{qi + qi}^{2qi} = 0$$

Dividindo ambos os membros por $2i$, chegamos ao resultado final.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (3.5)$$

Observe que a equação acima é uma EDO de segunda ordem, incompleta e homogênea. Existem vários métodos de resolvê-la. Se analisarmos a equação diferencial acima notamos que a derivada segunda de q(t) é a própria função q(t). Isto sugere que uma possível solução para esta equação seja uma função oscilante tal como seno, cosseno ou combinações delas.

Se fizermos as seguintes correspondências:

$x \to q$, $v \to i$, m$\to L$, k$\to \frac{1}{C}$

Sendo,

x, a posição;

v, a velocidade do sistema;

m, a massa;

eK, umaconstante.

Percebemos que a equação (3.5) corresponde, portanto a uma equação de um oscilador harmônico simples. Dessa forma podemos explicitar a solução, onde a carga em função do tempo $q(t)$ é dada da seguinte forma:

$$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi) \qquad (3.6)$$

Onde Q, ω e φ são constantes a serem determinadas através das condições de contorno. Sendo Q a amplitude de oscilação da carga. Inicialmente, vamos considerar que para o instante $t = 0$ a carga no capacitor é máxima, isto é $q(t = 0) = q_0 = Q$ e a fase de oscilação $\varphi = 0$.

Para verificarmos a veracidade da equação (3.6), podemos derivar $q(t)$ e substituir na equação (3.5), como se segue:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}[Q\cos(\omega t + \varphi)]$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2} = -Q\omega^2\cos(\omega t + \varphi)}$$

E, portanto temos:

$$\boldsymbol{-Q\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \frac{Q}{LC}\cos(\omega t + \varphi) = 0}$$

Claramente a partir da equação acima, podemos determinar $\boldsymbol{\omega}$, para isso podemos dividir toda a equação por $\boldsymbol{LQ\cos(\omega t + \varphi)}$, o que implica em:

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \tag{3.7}$$

Observe que $\boldsymbol{\omega}$ representa a frequência angular de oscilação do circuito LC. Percebemos que a mesma depende apenas da indutância e capacitância do circuito. Já que a carga do circuito é variável no tempo, então a corrente elétrica também deve ser.

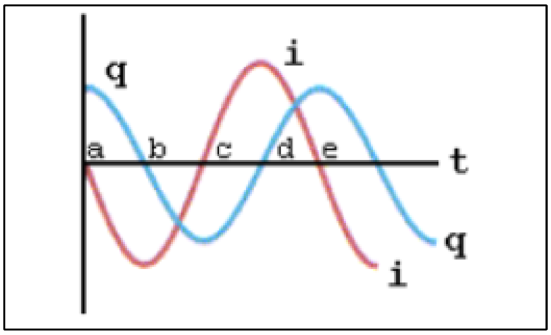
Para determinarmos a corrente, basta derivar a equação referente a carga elétrica (3.6). Como se segue:

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{d}{dt}[Q\cos(\omega t + \varphi)]}$$

$$\boldsymbol{i(t) = -Q\omega\sin(\omega t + \varphi)} \tag{3.8}$$

Adiante segue um gráfico que representa como a carga e a corrente elétrica variam no tempo.

Figura 14 – Comportamento da carga e corrente em função do tempo



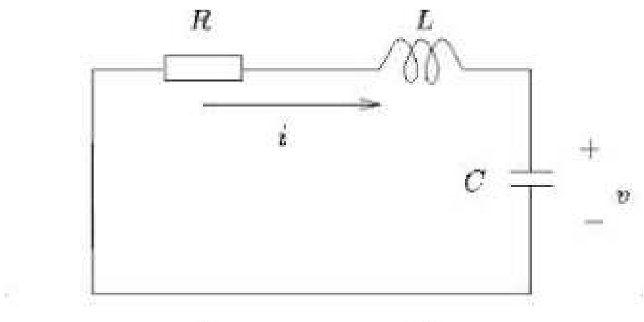
Fonte: http://www.ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CircuitoLC/CircuitoLC.html

Vale enfatizar ainda que apesar de a energia total do sistema se manterconstante e portanto não variável no tempo, as energias que as compõem, elétricas e magnéticas, não são estacionárias.

3.2 CIRCUITO RLC EM SÉRIE

O circuito RLC finaliza a ideia, vê-se que diferente do RC, RL e LC, pares de dispositivos, agora temos os três ligados em série de uma só vez. A resistência atua no circuito como um dissipador da carga oscilante existente anteriormente no circuito LC, assim, com um resistor nesse circuito, a energia total u do sistema não é mais constante, ou seja, diminui com o tempo na medida em que é transformada em energia térmica no resistor,portanto, decrescerá na razão em que se dissipa em energia térmica.

Figura 15– RLC em série com corrente contínua.



Fonte:http://www.dt.fee.unicamp.br/~www/ea612/img766.gif

Aplicando a lei de Kirchhoff, e resolvendo de forma análoga ao circuito LCMarkus (2001), temos;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}i^2 + \frac{1q}{2C}\right) = -\,\mathrm{R}i^2$$

$$\mathrm{Li}\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}\mathrm{q} = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}\,\mathrm{q} = 0 \qquad (3.9)$$

Vamos propor a solução da E.D.O.;

$$\mathrm{q} = \mathrm{A}\,e^{\alpha t},\ \frac{dq}{dt} = \alpha \mathrm{A}\,e^{\alpha t},\ \frac{d^2q}{dt^2} = \alpha^2 \mathrm{A}\,e^{\alpha t}$$

Reescrevendo a Equação Diferencial de Segunda Ordem Linear e Homogênea com coeficientes constantes:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \qquad (3.10)$$

Onde a solução da equação tem raízes:

$$\alpha_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

A carga do circuito RLC, quando realizamos o processo semelhante ao LC, pode ser definida como:

$$\mathrm{q(t)} = \mathrm{Q\,max.}\,e^{\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{L}}\mathrm{t}}\cos\left(\mathrm{w't} + \varphi\right) \qquad (3.11)$$

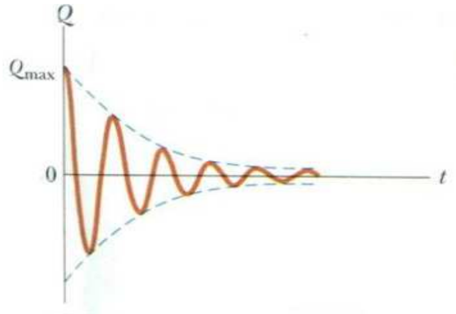
Onde $w' = \sqrt{wo^2}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2$, assim $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC}$:

w' é a frequência da fonte e wo a frequência natural.

$$w' = w_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Para um amortecimento fraco e realizando o processo igualmente ao LC, vemos que$(\frac{R}{2L})<\frac{1}{LC}$ é o que define o amortecimento, ou seja, a resistência que converte energia elétrica em energia térmica dissipa a carga do circuito num amortecimento fraco. Logo, o valor da resistência R é quem define o tempo desse amortecimento na dissipação da energia. Agora as oscilações são amortecidas, pois a amplitude de q(t) decai exponencialmente com o tempo.

Figura 16 –Carga dissipando no tempo.



Fonte:https://1.bp.blogspot.com/-s85Cu_Le-SE/VuCnTNXodMI/AAAAAAAAADU/ebEYNgjBc8E/s1600/figura%2B1.jpg

3.3 CIRCUITOS RLC COM CORRENTE ALTERNADA.

Pode-se associar a esses circuitos uma fonte alternada. Essa fem vai alimentar o circuito e compensar a energia térmica dissipada no resistor.

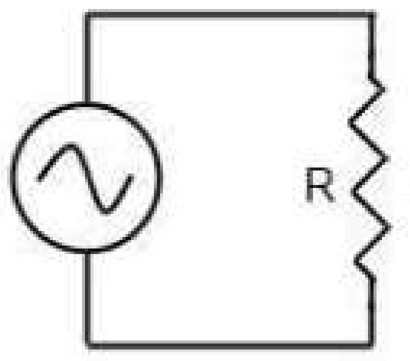
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{ sen } (wt) \qquad (3.12)$$

Onde Ɛ é a fem, w é a frequência da fonte. Quando a fem é ligada no circuito ocorrem às oscilações forçadas, isso porque, qualquer que seja a frequência natural w_o, estas oscilações da corrente e tensão ocorre sempre na frequência w da fonte externa, ou seja, elas entram em ressonância.

Para analisar a corrente associada a um circuito com fonte alternada, veremos cada dispositivo, separadamente, ligados a fem de corrente alternada.

3.3.1 CIRCUITOS COM RESISTOR E FONTE ALTERNADA (RESISTIVO)

Figura 17 – Resistor em uma fonte alternada



Fonte:https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR-DJx21p1gXXu8XRVyL2ZuXtqYzgoLI2kEVKbtloyuIronLxR5

Vamos propor uma corrente do tipo:

$$i(t) = I \text{ sen } (wt + \varphi) \tag{3.13}$$

Definiremos o valor de φ e i.A ddp nos terminais do resistor é a mesma da fonte, logo:

$$V_r = \mathcal{E}$$

Onde a energia da resistência é igual a fem

$$V_r = \mathcal{E}_m \text{sen } (wt)$$

$$V_m = V_r \text{ sen } (wt) \tag{3.14}$$

Sabe-se que:

$$i_r = \frac{V_r}{R}$$

$$i_r = V_r \text{sen } (wt) \tag{3.15}$$

$V_r$sen(wt) é uma grandeza de amplitude, assim:

$$i_r \;=\; I_r \text{ sen (wt)} \tag{3.16}$$

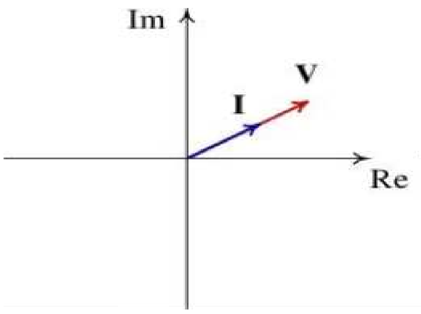
Portanto, podemos definir φ=0 para satisfazer i_r = sen (wt).

Sendo $I_r = \frac{V_r}{R}$, temos:

$$V_r \;=\; I_r \text{ R} \tag{3.17}$$

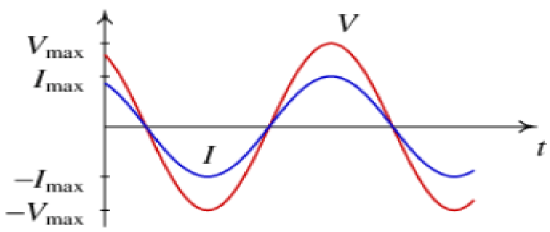
Onde a eq. 3.17 é a tensão da corrente, um tipo de lei de Ohm. Vimos que φ é a defasagem entre a tensão e a corrente. Se φ=0, não haverá defasagem. Para observar isso, podemos utilizar um fasor, uma espécie de vetor girante que pode ser utilizado para qualquer grandeza pretendida.

Figura 18 – tensão e corrente caminhando juntas.



Fonte:https://def.fe.up.pt/eletricidade/img/fasores_resistencia_640.png

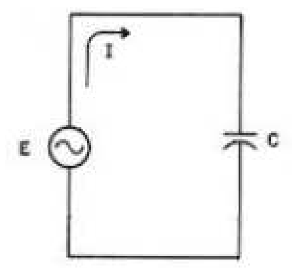
Figura 19 – Ondas associadas da tensão e corrente.



Fonte:https://def.fe.up.pt/eletricidade/img/fasores_resistencia_640.png

3.3.2 CIRCUITOS COM CAPACITOR E FONTE ALTERNADA (CAPACITIVO)

Figura 20– Capacitor em uma fonte alternada.



Fonte:http://www.sapiensman.com/electrotecnia/imagenes/circuito16.gif

A energia da fonte alternada é a energia do capacitor.

$$V_c = \mathcal{E}$$

$$V_c = \mathcal{E}_m \text{ sen } (wt)$$

$$V_m = V_c \text{ sen } (wt)$$

$$q_c = CV_c$$

$$q_c = CV_c\text{sen } (wt) \qquad (3.18)$$

Sendo $i_c = \frac{dq_c}{dt}$, então:

$$i_c = \frac{dCV_c sen(wt)}{dt}$$

$$i_c = wCV_c\cos (wt) \qquad (3.19)$$

Pode-se definir $X_c = \frac{1}{wC}$, a reatância capacitiva, logo:

$$i_c = \frac{V_c \cos(wt)}{X_c} \tag{3.20}$$

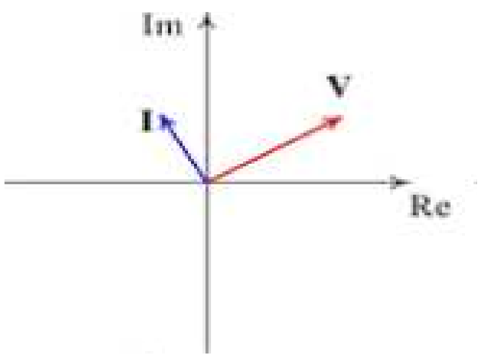
Utilizando a regra trigonométrica da soma do seno e cosseno e, propondo uma corrente como eq.(3.13), temos:

$$i_c = \frac{V_c}{X_c} \text{sen}\,(\text{wt} + \frac{\pi}{2}) \tag{3.21}$$

Contudo, φ = - $\frac{\pi}{2}$ e $V_c = I_c X_c$, ou seja, X_c atua no circuito como uma resistênciacapacitiva,opostaapassagem da corrente, tornando esta equação uma espécie de lei Ohm.

No diagrama de fasores, a corrente está adiantada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão:

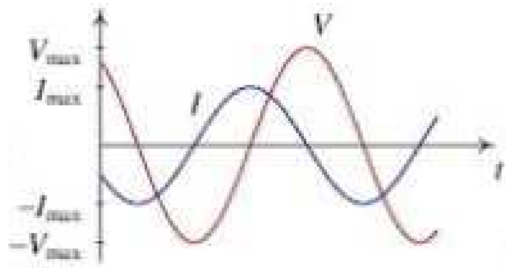
Figura 21 – Tensão e corrente caminhando juntas.



Fonte: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS57OtVFnhOhmGUvMDYuAGpPCEjYnZ4oDrgkJPfW_buuco1tnz4

No gráfico, a tensão está atrasada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à corrente:

Figura 22 – Ondas associadas da tensão e corrente.



Fonte:https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS57OtVFnhOhmGUvMDYuAGpPCEjYnZ4oDrgkJPfW_buuco1tnz4

3.3.3 CIRCUITOS COM INDUTOR E FONTE ALTERNADA (INDUTIVO)

Figura 23 – Indutor em uma fonte alternada.

Fonte: http://macao.communications.museum/images/exhibits/2_4_4_3_por.png

Utilizando a energia a equação da energia de um indutor, temos:

$$V_L \;=\; \mathcal{E}_m \text{sen (wt)} \qquad (3.22)$$

$$V_L = V_L \text{sen (wt)}$$

Sendo $V_L = \mathrm{L}\frac{di}{dt}$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} \text{ sen (wt), então:}$$

$$i_L = \frac{V_L}{L} \int sen(wt)dt$$

$$i_L = -\frac{V_L}{wL}\cos(wt) \qquad (3.23)$$

Usando novamente a regra da soma trigonométrica, definimos a corrente no indutor:

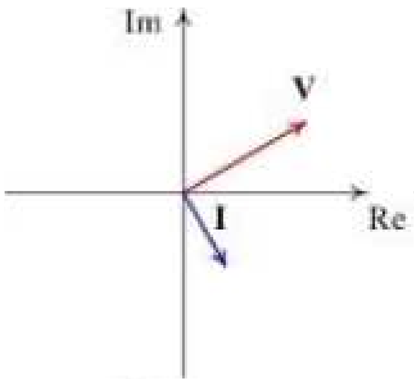
$$i_L = \frac{V_L}{wL}\,\text{sen}\left(wt - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.24)$$

Portanto, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e V_L = I wL

$$V_L = I\,X_L \qquad (3.25)$$

Onde X_L é a reatância indutiva. Contudo, I_L está atrasada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão.

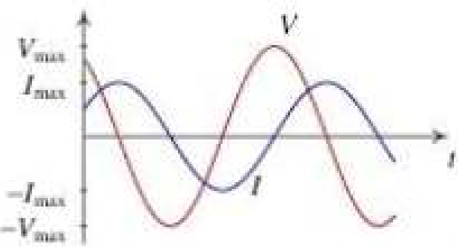
Figura 24 – Tensão e corrente caminhando juntas.



Fonte:https://def.fe.up.pt/eletricidade/img/fasores_indutor_640.png

A tensão que está adiantada de $\frac{\pi}{2}$ em relação à corrente:

Figura 25 – Ondas associadas da tensão e corrente.



Fonte:https://def.fe.up.pt/eletricidade/img/fasores_indutor_640.png

3.4 OSCILAÇÕES FORÇADAS: TEOREMA DE FASORES.

Quando associamos um resistor, um capacitor e um indutor a uma fonte de energia alternada aparecem às somas dos três fasores descritos anteriormente, ou seja, a corrente ficadependente dos três dispositivos. A sua amplitude vai depender da ressonância das frequências da fonte e da frequência natural que aparecem na malha.

Resolvendo a eq.(3.9)que é a equação diferencial parcial de segunda ordemehomogêneacom coeficientes constantes do circuito RLC, chegamos a eq. (3.11) da carga desse circuito para o amortecimento fraco:

$$q(t) = Q\ max.\ e^{\frac{R}{2L}t}\cos(w't + \varphi) \tag{3.26}$$

Define-se que w' (frequência da fonte) é quem determina o tipo de amortecimento.

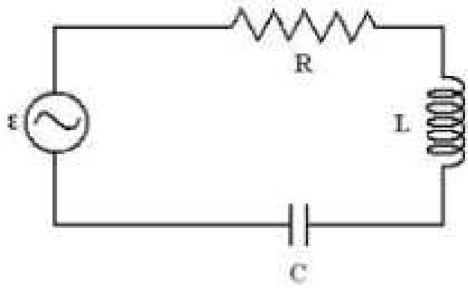
$$w' = \sqrt{\frac{1}{LC}} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \quad \text{eq.(8.1)} \tag{3.27}$$

$$w' = \sqrt{wo^2} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \tag{3.28}$$

Onde para $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ temos o amortecimento fraco, o tipo que nos interessa, também através desses descriminantes definimos o crítico e o forte.Markus(2001)

Passado algum tempo a carga vai para zero, uma forma de evitar essa dissipação da energia é manter ele alimentado por uma fonte alterna que vai suprindo a necessidade do circuito.

Figura 26 – Circuito RLC em uma fonte alternada.



Fonte: http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2010/01/corrente-alternada3.jpg

Introduzindo uma fonte alternada $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m$sen (wt) que cria uma corrente:

$$i\,(t) = I\ \mathrm{sen}\,(\omega t - \varphi) \tag{3.29}$$

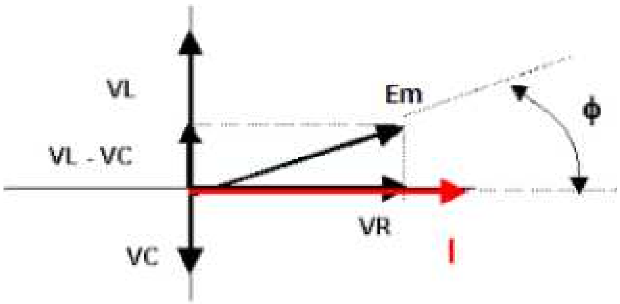
Onde o circuito responde na mesma frequência da fonte propulsora. O importante é definir quem é I e φ. A corrente tem satisfazer as condições de R, L e C, pois temos uma única corrente.

Usando a Lei da Malhas:

$$\mathcal{E} = V_R + V_L + V_C \tag{3.30}$$

Podemos resolver esse sistema fazendo uso de um teorema de soma vetorial, a projeção das somas é a soma das projeções, portando o fasor $\mathcal{E}_m$ é a soma das projeções dos fasores V_R, V_L e V_C. Para projetar esses fasores no diagrama vamos considerar $X_L > X_C$, ou seja, $w_L > \frac{1}{w_c}$o que deixa claro um V_L>V_C.

Figura 27 – Soma das projeções dos fasores.



Fonte:http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAABaY0AC-2.jpg

Resolvendo a regra do paralelogramo:

$$\varepsilon_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_c)^2 \quad (3.31)$$

Utilizando a relação das amplitudes dos circuitos parciais, temos:

$$\varepsilon_m^2 = (\mathrm{IR})^2 + (\mathrm{I}X_L - \mathrm{I}X_C)$$

$$\varepsilon_m^2 = I^2[R^2 + (w_L - \frac{1}{wc})^2] \quad (3.32)$$

Assim definimos a amplitude da corrente:

$$\mathrm{I} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2+(w_L-\frac{1}{wc})^2}} \quad (3.33)$$

Onde $\sqrt{R^2 + (w_L - \frac{1}{wc})^2}$ chamamos de impedância, uma espécie de impedimento a passagem da corrente, ou seja, uma resistência disfarçada. Representa-se a impedância pela letra Z.

Z = Z (w) é função da frequência

Reescrevendo a eq. 3.33 temos:

$$\mathrm{I} = \frac{\varepsilon_m}{Z}$$

A defasagem φ está relacionada à razão entre a parte imaginária e a parte real da impedância complexa Z (apostila). Utilizando a regra trigonométrica da Tangente no diagrama fasorial, sabe-se que:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

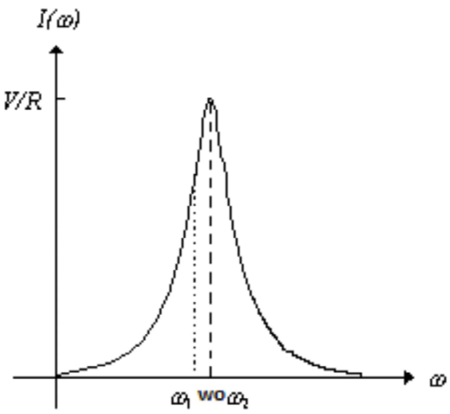
$$\text{tg}\varphi = \frac{(wL - \frac{1}{wC})}{R} \quad (3.34)$$

Quando a frequência da fonte é tal que a reatância capacitiva é igual a reatância indutiva ou igual a wo, o valor de Z é mínimo e igual a R. Assim, a corrente entra em ressonância e tem o seu valor máximo, o valor da impedância:

$$Z = R$$

Nota-se que φ é nulo, pois as reatâncias são iguais e a eq. 3.34 é igual a zero. Enfim, a frequência para que esse fenômeno ocorra é a frequência natural wo, pois a impedância do circuito torna-se puramente resistiva e como já visto o circuito que só possui resistência, a defasagem da corrente não ocorre em relação à tensão. Nota-se que o pico da corrente é máximo quando φ = 0 e wo = w.

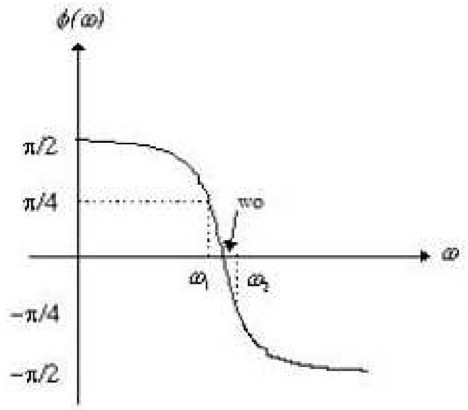
Figura 28 - Comportamento da amplitude de pico da corrente em função da frequência angular natural.



Fonte: http://www.ufrgs.br/eng04030/Aulas/teoria/cap_12/imgs/ft120070.gif

Para φ = 0 temos wo, logo:

Figura 29 – Comportamento da fase em função da frequência



Fonte:http://www.ufrgs.br/eng04030/Aulas/teoria/cap_12/imgs/ft120070.gif

Um outroparâmetro importante é o fator de qualidade, Q, ele define o circuito ressonante e pode ser obtido através da razão entre a energia armazenada no circuito e a energia perdida por ciclo:

(3.35)

Quanto maior Q, menor a perda fracionária de energia por ciclo Moysés (1997). A energia armazenada no circuito se encontra no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor, portanto, quando a carga se anula toda energia está no campo magnético do indutor e quando a corrente se acaba toda a carga está no campo elétrico do capacitor. Assim, o numerador da eq. (3.38) Moysés (1997) é:

$$V = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\frac{q^2}{C} \tag{3.36}$$

A energia dissipada por ciclo é o produto da potencia média dissipada, pelo período de oscilação.

$$\Delta V = PT$$

$$\Delta V = \frac{2\pi P}{wo}$$

$$\Delta V = \frac{2\pi}{wo}\frac{Ri^2}{2} \tag{3.37}$$

Portanto, se aplicarmos a eq. 3.36 e a eq. 3.37 na eq. 3.35, temos:

$$Q = \frac{woL}{R} \tag{3.38}$$

Sabe-se que wo = 1/ $\sqrt{LC}$, então, o fator de qualidade está, intimamente, ligado aos valores de RLC.

3.5 POTÊNCIA NO CIRCUITO C.A.

A Potência Elétrica é uma grandeza Física que medimos ao dividir a quantidade de energia elétrica despendida pelo intervalo de tempo, assim, a Potência é utilizada como uma forma de medir a eficácia do trabalho realizado por um aparelho dado um intervalo de tempo.

$$P = \frac{\mathcal{E}}{\Delta t}$$

Num circuito elétrico, a Potência pode também ser definida como sendo a quantidade de carga elétrica Q que uma fonte de tensão V pode fornecer ao circuito num intervalo de tempo Δt. Mas Q/Δt corresponde a corrente elétrica i fornecida pela fonte Markus (2001). Portanto a definimos:

$$P = \mathcal{E}.\ I \tag{3.39}$$

Substituindo na eq. 3.12 temos:

$$P = \mathcal{E}_m \text{ sen } (wt).\ i \tag{3.40}$$

Substituindo na eq. 3.29 a potência fica:

$$P = \mathcal{E}_m \text{ sen } (wt).\ I \text{ sen } (wt - \varphi) \tag{3.41}$$

Resolvendo:

$$P = \mathcal{E}_m I \text{ sen}^2 (wt) \cos \varphi - \mathcal{E}_m I \text{ sen } (wt) \cos (wt) \text{ sen}\varphi \tag{3.42}$$

Temos, portanto, funções periódicas e sabemos que o período é 2**π**. Em uma função periódica o que acontecer em um período acontecerá nos demais.

$$\langle P\rangle = \mathcal{E}_m I \cos\varphi < \text{sen}^2\ (wt)> \qquad (3.43)$$

Para um período 2**π**:

$$\langle P\rangle = \mathcal{E}_m I\ \text{sen}\ (wt)\cos\ (wt)\ \text{sen}\varphi$$

Temos que a integral de 0 a 2**π** de sen (wt) cos (wt)é 0. Assim, nos resta calcular, facilmente, o valor da Potência Média na eq. (3.43)

Para tanto, utilizaremos o teorema do valor médio:

$$\langle f\rangle = \frac{\int_a^b f\ (x)dx}{b-a} \qquad (3.44)$$

Em que f : [a, b].

Aplicando a eq. 3.43 em um período, seja ele, sen^2 ou$\cos^2$, chamaremoswt de θ, logo:

$$\langle f\rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\ dx}{2\pi} \qquad (3.45)$$

Vamos chamar:

$$A= \int cos^2\,\theta\ d\theta$$
$$B= \int sen^2\,\theta\ d\theta$$

Utilizando as regras trigonométricas na integral sabemos que:

$$A + B = \theta$$

$$A - B = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta$$

Logo:

$$2A = \theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$A = \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}$$

Se A tem esse valor, consequentemente, o valor de B é o mesmo:

$$B = \frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}$$

Assim, a integral é resolvida da seguinte forma:

$$<cos^2\theta> = \frac{\left.\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

O $sen^2\theta$ também vale $\frac{1}{2}$, então o valor da Potência Média na eq. 3.43 corresponde:

$$<P> = \frac{1}{2}\mathcal{E}_m I \cos\varphi \qquad (3.46)$$

Onde o cos φ é o fator de potência. A máxima transferência ocorre quando cos φ = 0 ou cos φ = 1. Pois, imaginemos um φ = 0, agora estamos na condição de ressonância, porque w = wo, é nesse momento que o circuito se estabelece na sua máxima transferência de potencia, ou seja, a frequência natural oscila na mesma frequência da fonte, elas caminham juntas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho reúne operações matemáticas que evidenciam o caráter oscilador elétrico do circuito RLC, discriminando a impedância e as reatâncias que o compõem, o fator de qualidade e como ocorre a frequência especial para que haja ressonância. O circuito ressonante é comumente utilizado como filtros de diversas aplicações e seus dispositivos sejam no armazenamento de energia, seja na transformação em energia térmica, podem ser alterados para aumentar ou intensificar a impedância do circuito, assim, torná-lo mais indutivo, capacitivo ou resistivo para atingir uma ressonância, no pico de impedância máximo. Na utilização como filtro, pode-se uma banda de frequência passar e rejeitar outras.

Assim, pode-se fazer uma análise da impedância, o circuito com apenas uma resistência R, a impedância é R e a fase é 0°. Um circuito com apenas um capacitor C, a impedância é X_C e a fase é -90°. Para um circuito com apenas um indutor L, a impedância é X_Le a fase+90°. Quando associamos em série um resistor a um indutor e um capacitor, a impedância é Z e a fase é negativa, se X_C >X_Le positiva se $X_C < X_L$. Portanto se o circuito for mais indutivo que capacitivo a fase é positiva, contrariamente, a fase é negativa.

Analogamente, pode-se fazer uma análise das tensões, o circuito puramente resistivo, $X_L = X_C$, então $V_L = V_C$, logo a fase é 0°. Um circuito capacitivo $V_C > V_L$, a fase é -90°. Para um circuito indutivo $V_C< V_L$, a fase é +90°.

O circuito RLC é diverso, os elementos podem se apresentar em Série ou Paralelo, quando constituído de forma Mista, ou seja, em série e paralelo ao mesmo tempo, é utilizado de formas bastante especifica, como podemos variar os fatores resistência, indutância e capacitância, fica interessante a sua aplicação.

Contudo, o andamento desse trabalho demonstra as diversas formas que podemos encontrar um circuito e suas respectivas equações. Entender a importância dos circuitos é valorar o conhecimento sobre Eletromagnetismo, compreensão esta, importante para o desenvolvimento da nossa contemporânea sociedade. Os circuitos podem constituir uma infinita gama de filtros, que emitem sinais e rejeitam frequências indesejadas, importante para o funcionamento de diversos aparelhos. O fator de qualidade é influenciável pela resistência, assim, este trabalho mostra que a máxima impedância ocorre em uma frequência especial, chamada de frequência de ressonância.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de Circuitos em Corrente Alternada**. São Paulo: Érica, 1989.

ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de Circuitos em Corrente Contínua**. São Paulo: Érica, 1987. ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

AZEVEDO, Eduardo Ribeiro; NUNES, Luiz Antônio de Oliveira**. Lei da Indução de Faraday**. Disponível em: http://www.lla.if.sc.usp.br/ensino/Fisica3/11-Leideinducaodefaraday.pdf. Acesso em: 01 jul. 2018.

BALTAZAR, Jamil de Almeida. Definição de fator de potência. Disponível em: http://www.eletrica.info/definição-de-fator-de-potencia . Acesso em: 28 de Junho de 2018.

BOYLESTAD, R. L. **Introdução a Análise de Circuitos**. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2004.

EDMINISTER, J. A. **Circuitos Elétricos – Teoria e 391 Problemas Resultados**. Mac. Graw Hill, 1989.

BOYLESTAD, Robert L. Introdução à Análise de Circuitos. São Paulo. Pearson Hall.10 ed. 2004.

CIRCUITO RLC. Disponível em: http://www.ensinoadistancia.pro.br/EaD/Eletromagnetismo/CircuitoRLC/CircuitoRLC.html. Acesso em: 07 de Julho de 2018.

CITOLINO, Lucas V.L. **Circuitos elétricos equivalentes: Aplicações tecnológicas e aplicações para o ensino de Física**. Presidente Prudente – São Paulo. 2015.

ENGENHARIA. **A história da eletricidade.** Por Rodrigues, Evandro. 2017. Disponível em: http://engenharias.net.br/historia-da-eletricidade/. Acesso em 09 de Julho de 2018.

FAP 212, Departamento de Física Aplicada, USP, 2006. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=149940. Acesso em 09 de Julho de 2018.

FILHO, M. T. S. **Fundamentos de Eletricidade**. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

GRIFFTHS, David. J. **Eletrodinâmica**. 3° edição, São Paulo: Pearson.

GUSSOW, M. **Eletricidade Básica**. 2. ed. Atualizada e Amplificada. São Paulo: Bookman, 2008.

GUSSOW, M. **Eletricidade Básica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1997.

JOHNSON, D. E. et al. **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.

GUSSOW, Milton**. Eletricidade Básica.** São Paulo. Pearson Makron Books. 2ed, 1997.

H. Moysés Nussenzveig**, Curso de Física Básica 3**: Eletromagnetismo, Editora Edgard Blücher, 1997.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl.**Fundamentos de física.** 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, c2009 vol 3;

HAYT JR., W. H. **Eletromagnetismo**, 6ª Edição, LTC, 2003.

JUNIOR, Erasto. L.S. **Bancada didática para estudo de fator de potência**. Medianeira. 2012.

LIMA, A. W. J. **Eletricidade e Eletrônica Básica**. 3. ed. Revisada. Rio de Janeiro: Alta Books, 2009.

MARKUS, Otávio. **Circuitos elétricos corrente contínua e corrente alternada.** Editora Érica. 2001.

O'MALLEY, John R. **Analise de circuitos**. Rio de Janeiro, RJ: McGraw-Hill, 1983.

ORSINI, L.Q; CONSONNI, D. "**Curso de Circuitos Elétricos**", Vol. 2 , 2ª Edição. São Paulo-SP, Brasil: Ed. Blucher, 2004, 437 p.

SAY, M. G. **Eletricidade Geral -** Fundamentos. Hemus, 2004. U. S. NAVY, BUREAL OF NAVAL PERSONNEL, TRAINING PUBLICATIONS DIVISIONS. **CursoCompleto de EletricidadeBásica**. Curitiba: Hemus, 2002.

SEARS, Francis Weston; ZEMANSKY, Mark Waldo; YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. 12.ed. São Paulo, SP: Pearson Addison Wesley, c2008-2009 vol 3.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, **Física para Cientistas e Engenheiros -** Vol. 3, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.