



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ALLYSON MEDEIROS GABRIEL

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

**PATOS - PB
DEZEMBRO/2017**

ALLYSON MEDEIROS GABRIEL

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Monografia de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus
Silva Oliveira

PATOS - PB
DEZEMBRO/2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

G118d Gabriel, Allyson Medeiros.
A desigualdade isoperimétrica [manuscrito] : / Allyson Medeiros Gabriel. - 2017.
49 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.

"Orientação : Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Desigualdade Isoperimétrica. 2. Geometria Diferencial.
3. Curvas Planas.

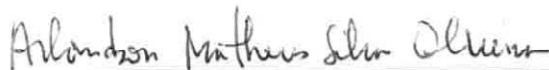
21. ed. CDD 516.36

Allyson Medeiros Gabriel

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

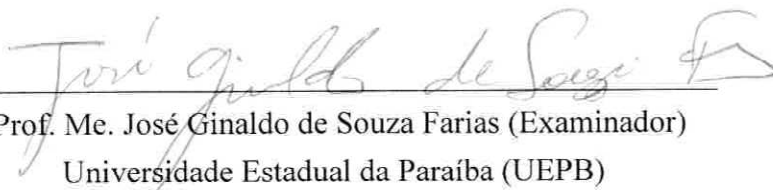
Aprovado em 13 de dezembro de 2017



Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Wellington Candeia de Araújo (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

*Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.*

Eneida - Virgílio

AGRADECIMENTOS

A meu pai, minha mãe, minha irmã e toda minha família, por nunca desistirem de mim.

A Gabi e toda a sua família que me cederam a Casinha, onde foi desenvolvida a maior parte deste trabalho.

Ao amigo, professor e orientador Arlandson Matheus pela sua dedicação em todos os momentos.

Aos professores Wellington Candeia e Ginaldo Farias que se dispuseram a ler este trabalho e a julgar como bem lhes convir.

A todos os meus amigos que não aguentavam mais me ouvir dizer que estou pra terminar o curso: Rondinelly, Zé Márcio, Thiago, Edinéia, Delzymar, Mário (*in memoriam*), Sauron, Henrique, Jonas, Kiko, Deborah Lugo, Rafa, João e Socorro.

Ao Grupinho Top: Janayna e Yamille, por me acompanharem o ano inteiro ouvindo minhas reclamações.

Aos amigos de fora, mas sempre presentes: Gabriel, Eduardo, Deborah, Marco, Juliana, Felipe, Paulo Brabo, Cecilia, Dora, Alexandre, Flávia e Caetano.

Aos amigos de sempre: Saulo, Vinicius, Romário, Dchirmeine, Aninha, Hozana, Arthur, Roland, Lamark e Jaciane.

Às Soncicléias: Aurino, Ariano, Isaul, Camila, Erick, Anderson, Slim, Débora Malacar, Rafaela, Raffaella, Mariana, Raiff, Gernan, Carpegiany, Guilherme, Vitória, Mickaelly, Aline e Sara.

Aos professores Antonio Sales e Vilmar Vaz Silva.

À minha turma de graduação: Sabrina, Geovane, Jair, Livia, Rodrigo, Eduardo e Lays.

RESUMO

Nesta monografia revisaremos alguns conceitos sobre área, comprimento e curvas planas com o propósito de exibir duas demonstrações para a Desigualdade Isoperimétrica, com base nos artigos de P. Lax [12] e de C. Moreira e N. Saldanha [16]. A primeira é uma demonstração analítica; a segunda é uma demonstração geométrica. Trataremos também a questão da existência de solução para o Problema Isoperimétrico seguindo as ideias de M. Spivak [17]. Por fim, exibiremos uma relação entre a curvatura nos vértices de um polígono e a Desigualdade Isoperimétrica, demonstrando um caso particular para a desigualdade de Ros.

Palavras-chave: Desigualdade Isoperimétrica. Geometria Diferencial. Curvas Planas.

ABSTRACT

In this monography we will review some concepts about area, length and plane curves with the purpose of presenting two demonstrations of the Isoperimetric Inequality, based on the articles of P. Lax [12] and C. Moreira and N. Saldanha [16]. The first one is an analytical demonstration; the second is a geometric demonstration. We will also treat the question of existence of a solution for the Isoperimetric Problem following the ideas of M. Spivak [17]. Finally, we will present a relation between the curvature at the vertex of a polygon and the Isoperimetric Inequality, proving a particular case of the Ros' inequality.

Keywords: Isoperimetric Inequality. Differential Geometry. Plane Curves.

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	O Problema Isoperimétrico	9
2.1	Nota Histórica	9
2.2	Áreas e Comprimentos	12
2.3	Curvas no Plano	15
2.4	O Teorema de Green	20
3	A Desigualdade Isoperimétrica	22
3.1	Um Curto Caminho para a Maior Área	22
3.2	Demonstração Geométrica de C. Moreira e N. Saldanha	25
3.2.1	Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos	25
3.2.2	Demonstração da Desigualdade Isoperimétrica	36
3.3	Existência de Solução para o PI	38
4	Curvatura para Polígonos	40
4.1	A Integral do Raio de Curvatura	40
4.2	Curvatura para Polígonos	41
4.3	Uma Versão Discreta da Desigualdade de Ros	42
5	Considerações Finais	45
	Referências Bibliográficas	47

1 INTRODUÇÃO

Nesta monografia, faremos uma breve explanação acerca do Problema Isoperimétrico (PI), conhecido pelo menos desde a Antiguidade, constituindo um tema recorrente em Geometria, mas que sempre se apresenta como novo. A ideia simples que serve de motivação para o problema talvez seja o que fascine tanto os matemáticos desde muito tempo; mesmo aqueles que não possuem conhecimento algum sobre matemática formal compreendem seu enunciado e a solução parece ser intuitiva.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira: *Dentre todas as curvas com um dado perímetro, qual encerra a maior área?* A solução do PI no plano também é conhecida desde a Antiguidade: o círculo. Apesar disso, formulações do PI no plano e demonstrações rigorosas de sua solução só apareceram muito tempo depois, no século XIX, inicialmente com o trabalho de Steiner e depois com o Cálculo das Variações de Euler e de Weierstrass, como se lê na excelente sùmula de V. Blåsjö [4]. Para contentamento dos analistas, esse problema também pode ser expresso através de uma desigualdade, conhecida como Desigualdade Isoperimétrica (DI).

O texto organiza-se como segue. O Capítulo 2 é devotado a uma breve exposição histórica do problema isoperimétrico e a uma discussão sobre as noções de comprimento e área em Geometria Euclidiana e em Geometria Diferencial. No Capítulo 3, apresentaremos duas provas para a DI, a primeira (analítica) devida a P. Lax [12] e a segunda (geométrica) de autoria de C. Moreira e N. Saldanha [16]. Falaremos ainda sobre a existência de solução para o PI no plano. Por fim, no Capítulo 4, exibiremos uma relação entre a curvatura nos vértices de um polígono e a Desigualdade Isoperimétrica, demonstrando um caso particular da desigualdade de Ros.

2 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

2.1 NOTA HISTÓRICA

A história começa com a lenda de Dido (ver [4]), narrada na *Eneida* de Virgílio (séc. I a.E.C.), que conta a história das migrações fenícias para o Ocidente Mediterrânico, mas que ficou especialmente conhecida devido ao romance entre a rainha Dido e Eneias, um troiano salvo pelos gregos na Guerra de Troia que viajou errante pelo Mediterrâneo até chegar na península itálica. A lenda diz que Dido, filha do rei de Tiro (cidade fenícia), quando teve o marido assassinado pelo irmão, se juntou a nobres e partidários e fugiu levando consigo suas riquezas.

Quando chegou ao norte da África, ela negociou a compra de terras com o rei Jarbas, que lhe propôs o seguinte desafio: as terras que seriam destinadas ao seu povo seriam o quanto ela conseguisse cercar utilizando apenas o couro de um único boi. Feito o desafio, Dido mandou cortar a sua sacola (que era de couro) em tiras muito finas formando um cordão com que ela cercaria, utilizando a praia como parte do perímetro, uma região semicircular disposta de maneira perpendicular à orla marinha, em cujos arredores depois se formou a cidade de Cartago, da qual ela se tornou a primeira rainha.

Virgílio narra que, após um naufrágio, Eneias chegou a Cartago, onde se apaixonou pela rainha Dido, mas Júpiter enviou uma mensagem a Eneias para lhe lembrar que seu destino era encontrar o Lácio e fundar a nova cidade que substituiria Troia e que governaria as demais cidades do mundo, e ele se tornaria o ancestral de todos os romanos. Eneias então tentou fugir de Cartago sem que Dido percebesse. Sentindo-se enganada e abandonada, Dido se suicidou enquanto os navios troianos partiam e Eneias ainda via de longe a fumaça da pira na qual ela se atirou.

É através dessa lenda que nasce o Problema Isoperimétrico (PI). O Problema de Dido

consiste em limitar, numa região do plano limitada por uma curva que separe o plano em duas componentes (por exemplo, uma reta), a maior área com um dado perímetro. No caso de esta curva ser uma reta, a solução é dada por um semicírculo.

Uma formulação simples para o problema isoperimétrico pode ser dada como:

Teorema 2.1 (Problema Isoperimétrico) *Dentre todas as figuras com um perímetro dado L , a que cerca a maior área A é o círculo.*

Para contentamento dos analistas, este teorema pode ser enunciado com uma desigualdade, denominada Desigualdade Isoperimétrica (DI), entre o comprimento de uma figura geométrica plana e a área por ela englobada, que pode ser formulada como:

Teorema 2.2 (Desigualdade Isoperimétrica) $L^2 - 4\pi A \geq 0$, com igualdade apenas para o círculo.

Uma primeira demonstração para um caso particular do PI foi dada pelo matemático e astrônomo grego Zenodoro, que viveu provavelmente no século II a.E.C e cuja obra foi perdida. Sabe-se de alguns de seus resultados através de Theon de Alexandria (335-405 d.E.C.) que em seu comentário ao *Almagesto* de Ptolomeu, cita a obra *Sobre figuras isométricas* (ver [13]) do matemático grego. Como Zenodoro seguiu de perto o estilo de Euclides e Arquimedes, podemos supor que ele viveu não muito tempo depois de Arquimedes, a quem ele atribui proposições como a de que *a área de um círculo é metade da área do retângulo cujas medidas são o perímetro do círculo e seu raio*. As proposições atribuídas a Zenodoro aparecem na obra de um outro comentador da matemática grega, Pappus de Alexandria (290-350 d.E.C.), que contribuiu significativamente com o trabalho de Zenodoro¹.

Dentre as proposições mais importantes demonstradas por Zenodoro e Pappus, encontram-se as seguintes²:

Proposição 2.1 *De todos os polígonos regulares de mesmo perímetro, aquele que tem maior área é o que tem mais ângulos.*

Proposição 2.2 *O círculo é maior do que qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

¹Aqui, os filósofos neoplatônicos Pappus e Theon aparecem como *comentadores* da obra dos matemáticos gregos clássicos.

²Aqui escolhemos manter os termos da formulação original das proposições. Na Proposição 3.1 Zenodoro se refere à quantidade de ângulos ao invés de lados. Na Proposição 3.2, uma figura é “maior” que outra quando esta a excede em área.

Proposição 2.3 *De todos os polígonos com mesmo número de lados e mesmo perímetro, o que é equilátero e equiângulo possui maior área.*

O tratado de Zenodoro não continha apenas proposições sobre figuras planas. Ele também provou que de todas as figuras sólidas com mesma área superficial, a esfera tem o maior volume. Mas as três proposições destacadas anteriormente constituem o que se chama de caso particular do PI para polígonos regulares. Abordagens similares prevaleceram até o século XVIII, Galileu, por exemplo, abordou o problema de maneira muito parecida com os gregos. Matemáticos árabes também deram suas contribuições, mas com uma inventividade sempre circunscrita à matemática euclidiana.

Também é inegável a importância dos trabalhos de Steiner (1796-1863), que apresentou várias demonstrações da propriedade isoperimétrica para a circunferência e para as bolas em espaços euclidianos de dimensão superior, usando, entre outros métodos, o que hoje denominamos a simetrização de Steiner. Tal como Zenodoro, contudo, Steiner e os seus antecessores ignoraram o problema da existência de uma solução para o PI.

Apesar de os gregos na Antiguidade Clássica já terem conhecimento de que o círculo era a solução do problema isoperimétrico (Aristóteles no século III a.E.C. já anunciava que a solução era o círculo, embora na época não fosse necessário apresentar uma prova *formal*³). Em 1870 foi apresentada uma demonstração completa e rigorosa – sem a obstrução da esterilidade euclidiana – por K. Weierstrass (1815-1897), através do Cálculo das Variações, área que teve origem com os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli durante os estudos para resolver o problema da *Braquistócrona* e cujos métodos foram quase todos complementados e estendidos por Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813).

Na tentativa de resolver o Problema Isoperimétrico, Euler deduziu o *método dos multiplicadores de Lagrange* (que foi designado por *método do problema isoperimétrico* até o final do século XVIII), que consiste na versão discreta da teoria do Cálculo das Variações e que possibilita fornecer uma prova do teorema isoperimétrico para polígonos.

Weierstrass observou que muitas questões similares não tinham solução e forneceu uma prova completa da existência de uma solução para o PI. A prova de Weierstrass era um

³A noção de formalidade ou rigor não foi sempre a mesma ao longo da história. Mais detalhes sobre isso podem ser vistos no livro da Tatiana Roque, *História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*.

tanto difícil, tendo em vista que ela era um corolário da teoria desenvolvida no Cálculo das Variações. Esta teoria trata de problemas envolvendo a maximização e a minimização de certas integrais e o PI é um exemplo típico dos problemas que por ela são tratados.

Outras demonstrações geométricas foram dadas, por exemplo, por Carathéodory em 1909. Mais tarde, Minkowski (1864-1909) deduziu e utilizou o Teorema de Brunn-Minkowski para demonstrar a DI, enquanto Blaschke (1885-1962) complementou o método de simetria de Steiner. Uma abordagem do PI através de séries de Fourier também foi apresentada por Hurwitz em 1902. Para os curiosos, uma demonstração mais direta da DI foi dada por E. Schmidt em 1939 e pode ser vista no livro do Manfredo [6].

O estudo do PI ainda é alvo da atenção de muitos matemáticos. Muitas generalizações da Desigualdade Isoperimétrica nos mais variados contextos são estudadas, inclusive em espaços de dimensão superior a dois. Mais recentemente, têm sido desenvolvidas desigualdades isoperimétricas no contexto das superfícies e das variedades riemannianas.

2.2 ÁREAS E COMPRIMENTOS

A origem da palavra *geometria*, segundo o historiador Heródoto (séc. V a.E.C), está ligada a um problema que os egípcios enfrentaram na Antiguidade, pois os impostos pagos aos proprietários de terras eram diretamente proporcionais à área de cada lote. Devido às cheias do rio Nilo, parte das terras dos agricultores desapareciam e os cobradores de impostos do faraó tinham de recalcular cada área para que a cobrança fosse ajustada. Assim, o cálculo de comprimentos e áreas é um assunto milenar, sendo estas, juntamente com a noção de volume, as primeiras noções geométricas a despertarem o interesse do homem.

No entanto, essa noção intuitiva do que significa *área* foi se reformulando e se tornando mais exata ao longo da história. Primeiramente, a noção de medida de um segmento tem um papel fundamental na construção desses conceitos. Utilizaremos aqui algumas definições e conceitos que podem ser melhor esclarecidas em [14].

A noção mais elementar de comprimento de um segmento AB , aqui representado por \overline{AB} , é desenvolvida a partir do conceito de *comensurabilidade*. A medida \overline{AB} de um segmento AB é um número racional quando for comensurável com uma unidade de comprimento u , previamente fixada, isto é, quando o segmento AB não for comensurável com essa

unidade (isto é, não possuem um submúltiplo comum), sua medida \overline{AB} será um número irracional.

Para falar sobre a noção de área, faremos uso de algumas definições. Uma *região triangular* é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de *fronteira* da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem a sua fronteira é chamado de *interior* da região triangular.

Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum. Um ponto é *interior* a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O interior da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A fronteira da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

O matemático grego Eudóxio (séc IV a.E.C) havia desenvolvido, juntamente com uma teoria das razões entre grandezas, um método precursor do cálculo integral, chamado o Método da Exaustão, que permitia provar, por exemplo, a fórmula da área para o quadrado, o retângulo, o círculo, assim como o volume da esfera. Uma explanação mais detalhada sobre esse processo também pode ser vista em [14].

Em geral, pode-se associar a cada polígono P um número real não-negativo, chamado *área de P* , com as seguintes propriedades:

- (i) Polígonos congruentes tem áreas iguais.
- (ii) Se P é um quadrado com lado unitário, então a de área $P = 1$.
- (iii) Se P pode ser decomposto como reunião de n polígonos P_1, \dots, P_n tais que dois quaisquer deles tem em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i .

Vale aqui observar que a área de um triângulo, por exemplo, pode ser obtida usando essas propriedades e que ela equivale à metade da área de um retângulo de mesma base e mesma altura. Essa demonstração pode ser vista no excelente texto do João Lucas [2]. Entretanto, ainda não demos uma definição mais geral do que seria a área de uma figura

plana. Em particular, não sabemos como obter a área de um círculo ou de uma elipse, por exemplo. Vejamos agora como se define a área de uma figura plana F qualquer.

A área de F será um número real não negativo, indicado por S_F . Ele ficará bem determinado quanto mais se conhecer seus valores aproximados, por falta ou por excesso. Os valores de S_F aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F . Os valores de S_F aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contêm F . Por conseguinte, o número S_F deve satisfazer às desigualdades

$$S_P \leq S_F \leq S_{P'}.$$

Por simplicidade, limitaremos nossa atenção aos polígonos retangulares. Pelas definições dadas anteriormente, podemos definir um *polígono retangular* como a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos tem em comum no máximo um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.

Ainda por simplicidade, consideraremos os polígonos retangulares contidos na figura F cuja área desejamos calcular, ou seja, consideraremos apenas valores aproximados por falta para o número real S_F .

Assim, definimos a *área* da figura F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F . Isto significa que, para todo polígono retangular P contido em F tem-se

$$S_P \leq S_F.$$

Além disso, dado qualquer número $b < S_F$, existe um polígono retangular P , contido em F , tal que

$$b < S_P \leq S_F.$$

Isto significa que, nessa definição, a área de uma figura F qualquer é dada através de uma *soma*, seja ela finita ou não. No caso de ela não ser finita, temos uma série, que aproxima cada vez mais o valor da área da figura F . É através dessa noção *discreta* de área que se encontrou a área do círculo.

Apesar de esses conceitos terem sido satisfatórios durante muito tempo, a formalização deles no nível que necessitamos aqui só se deu com o surgimento do Cálculo. No contexto da Geometria Diferencial, área na qual o PI assume um papel importante, podemos apresentar

algumas definições mais rigorosas do ponto de vista do que se precisa para uma demonstração mais completa da Desigualdade Isoperimétrica. Começamos com a definição de um objeto cuja ideia tangenciamos até agora, mas ainda não falado explicitamente, as *curvas*.

2.3 CURVAS NO PLANO

Nesta seção, apresentaremos alguns dos pré-requisitos para uma demonstração mais analítica da DI. Não exporemos todos os detalhes, mas tentaremos resumir aqui tudo que é utilizado efetivamente na demonstração dada e caso o leitor queira se aprofundar no estudo das curvas planas, indicaremos as referências no final.

Intuitivamente, pensamos numa curva no plano como uma linha, ou seja, um subconjunto do plano que tem dimensão igual a 1, como por exemplo, o gráfico de funções reais de uma variável real ou figuras que possam ser feitas a partir de um único traço, sem tirar o lápis do papel. Mais precisamente, uma curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou ainda, a trajetória descrita por uma partícula no plano.

Nem sempre conseguimos descrever uma curva no plano como o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação $F(x, y) = 0$, como é o caso na Geometria Analítica. Por exemplo, a circunferência fica muito bem definida no plano se fizermos $x^2 + y^2 - 1 = 0$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mesmo servindo para as funções mais comuns, esse tipo de descrição não engloba a ideia mais geral do que consideramos aqui como sendo uma curva.

No contexto da Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas definidas por equações, vamos utilizar a ideia de que uma curva descreve a trajetória contínua do movimento de uma partícula sobre o plano. Se considerarmos que um ponto $\alpha(t)$ representa a posição que uma partícula assume no plano quando o tempo t varia em um intervalo $[a, b]$, podemos considerar o conjunto $C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$. Partindo disso, vamos definir formalmente o que é uma curva contínua parametrizada.

Definição 2.1 *Uma curva contínua no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação contínua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

O conjunto imagem C da aplicação α , dado por

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\},$$

é chamado de *traço* de α . Também podemos dizer que α é uma *parametrização* de C , onde t é o parâmetro da curva α . Em muitas situações, quando não houver prejuízo no entendimento, iremos denominar o traço da curva também como a própria curva.

Se α está definida num intervalo $I = [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que α é uma curva *fechada*. Uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *simples*, se a aplicação α for injetiva. Quando temos $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que α possui um *ponto duplo* em t_1 e t_2 .

Uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *fechada e simples*, se $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para todo $t \neq s \in [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$, isto é, se o único ponto duplo de α ocorre nos seus pontos inicial e final. Quando α é uma curva fechada e simples, ela é denominada uma *curva de Jordan*.

Exemplo 2.1 O círculo de raio R e centro na origem O , $S_R(O)$, é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto $(0,0)$ é constante e igual a R , isto é,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R.$$

O círculo $S_R(O)$ é o traço da curva contínua α , definida por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. O parâmetro t representa o ângulo que $\alpha(t)$ faz com o eixo Ox . Mais geralmente, o círculo de centro (a, b) e raio R , $S_R((a, b))$, é o traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t).$$

Observe que, quando t percorre a reta real, $\alpha(t)$ move-se sobre $S_R((a, b))$ no sentido anti-horário um número infinito de vezes. Se restringirmos o domínio de α a um intervalo de comprimento 2π então $\alpha(t)$ percorrerá $S_R((a, b))$ uma única vez. A curva $\alpha|_{[0, 2\pi]}$ é uma curva de Jordan. A curva $\beta : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\beta(t) = (\cos 2t, \sin 2t),$$

é uma outra parametrização de $S_R(O)$. Tal curva também percorre $S_R(O)$ no sentido anti-horário, porém com o dobro da velocidade escalar de α .

Definição 2.2 Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é de classe C^k quando possui uma parametrização de classe C^k , isto é, uma parametrização cujas funções coordenadas tem derivadas contínuas até a ordem $k \in \mathbb{Z}$.

Quando se estuda localmente uma curva no plano, isto é, fixado um t_0 , quando estamos interessados em saber como se comporta $\alpha(t)$ para valores de t próximos de t_0 , o ideal seria que pudéssemos dispor de uma reta que fosse uma boa aproximação para esta curva numa

vizinhança de um ponto sobre a curva. No entanto, somente com a definição de curvas contínuas isso nem sempre é possível. Se escrevemos α como

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

então α é uma aplicação suave, se e somente se, cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ , isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de I . Assim, podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 2.3 *Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação suave*

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente (ou vetor velocidade) de α em $t_0 \in I$ é dado por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

A velocidade escalar de α em $t_0 \in I$ é dada pela norma do vetor velocidade $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Quando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, tal vetor aponta na direção tangente à curva α em t_0 .

Definição 2.4 *Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$, ou equivalentemente, se $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$.*

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, e seja $h : J \rightarrow I$ uma função de classe C^∞ . Podemos então considerar uma nova curva $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

A curva β é, portanto, uma curva parametrizada de classe C^∞ , regular e que tem o mesmo traço de α . Dizemos que a curva β é uma reparametrização de α .

Definição 2.5 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. A função $L_\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds, \quad t_0 \in I, \quad (2.1)$$

é denominada comprimento de arco. Como $\|\alpha'(t)\|$ é uma função contínua, a função L_α é de classe C^1 e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\|. \quad (2.2)$$

Observe que, se α for regular em I , então a função L_α é de fato de classe C^∞ .

Definição 2.6 Dizemos que uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se o parâmetro t é, a menos de constante, igual a $L_\alpha(t)$, isto é

$$L_\alpha(t) = t + c.$$

O próximo resultado é de extrema importância no estudo das curvas planas.

Proposição 2.4 Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixemos $t_0 \in I$. Consideremos a função $L_\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa $L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds$. Se $t_0 \leq t$ então, por hipótese,

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = t - t_0.$$

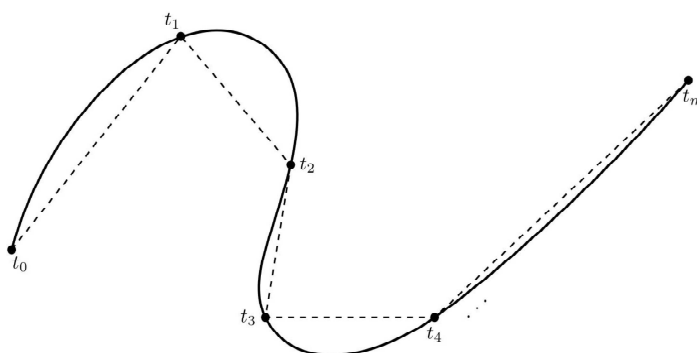
Caso $t \leq t_0$, então $-L_\alpha(t) = \int_t^{t_0} \|\alpha'(s)\| ds = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in I$, $L_\alpha(t) = t - t_0$, donde, $L'_\alpha(t) = 1 = \|\alpha'(t)\|$, isto é, o vetor velocidade tem comprimento constante igual a 1. Reciprocamente, se $\|\alpha'(t)\| = 1$, então $L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(s)\| ds = t - t_0$, isto é, t é o comprimento de arco de α medido a partir de algum ponto. ■

Observação 2.1 O significado disso é que o deslocamento sobre a curva é constante, ou seja, o comprimento da curva terá o mesmo comprimento que o intervalo considerado para o parâmetro.

Dada uma subdivisão $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ do intervalo $[a, b]$, denotamos por $(\alpha, \{t_i\})$ a linha poligonal obtida ligando os pontos $\alpha(t_{i-1})$ e $\alpha(t_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. O

comprimento de $(\alpha, \{t_i\})$ é $L(\alpha, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$. A curva α é dita *retificável* quando for finito o supremo dos comprimentos de todas as linhas poligonais obtidas de subdivisões de $[a, b]$. Neste caso, tal supremo é dito o *comprimento* de α e será denotado por $L(\alpha)$.

Figura 2.1: Linha poligonal



Fonte: próprio autor

A definição de curva retificável significa que podemos aproximar C por uma poligonal P tal que P aproxima C tão bem como quisermos.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco t . Como o vetor tangente $\alpha'(t)$ é unitário, a norma $\|\alpha''(t)\|$ da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em t . Portanto, $\|\alpha''(t)\|$ dá uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de t , da tangente em t . Isso sugere a seguinte definição.

Definição 2.7 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $t \in I$. O número $\|\alpha''(t)\| = k(t)$ chama-se curvatura de α em t . Definimos também o raio de curvatura $\rho(t)$ de α em t como $\rho(t) = 1/k(t)$.*

Decidimos omitir algumas definições a respeito do cálculo da curvatura, mas caso o leitor tenha interesse indicamos o excelente livro do Hilário Alencar e do Walcy Santos, *Geometria Diferencial das Curvas Planas [1]*.

Observação 2.2 Convém estabelecer uma última convenção. Dada uma curva α parametrizada pelo comprimento de arco $t \in [a, b]$, podemos considerar a curva β definida em $[-b, -a]$ por $\beta(-t) = \alpha(t)$, que possui o mesmo traço que a primeira, percorrido porém em sentido contrário. Diremos que estas duas curvas diferem por uma mudança de orientação.

2.4 O TEOREMA DE GREEN

Apresentaremos agora uma noção mais geral de área, ou seja, uma versão contínua para o conceito apresentado anteriormente. Começemos com o seguinte resultado.

Teorema 2.3 (Teorema de Jordan) *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua e de Jordan (isto é, $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para todo $t \neq s \in [a, b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$). Então o complementar do traço de α , \mathbb{C}^α , é a união de dois conjuntos conexos, não-vazios e com a fronteira de cada um igual ao traço de α .*

O teorema de Jordan (para demonstração ver [1]) garante então que o traço C de α divide o plano em duas componentes conexas, uma limitada, D_c o interior de C , e uma ilimitada, E_c o exterior de C . Isso significa que $\mathbb{R}^2 \setminus C = D_c \cup E_c$ com D_c e E_c abertos conexos disjuntos. A área do interior D , da curva C , é, por definição, a área da região D_c :

$$A(D) = \iint_{D_c} dx dy. \quad (2.3)$$

Um resultado importante do Cálculo, que fornece uma relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva de Jordan C e uma integral dupla sobre uma região do plano D delimitada por C , é o Teorema de Green. Ao enunciarmos o Teorema de Green, usamos a convenção de que a orientação positiva de uma curva de Jordan C refere-se ao sentido anti-horário de C , percorrido uma só vez. Assim, a região D fica sempre à esquerda de quem percorre a curva no sentido do parâmetro t crescente.

Teorema 2.4 (Teorema de Green) *Seja C uma curva plana de Jordan, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região interior a C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\int \int_C P dx + Q dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Se C possui uma parametrização diferenciável, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $t \in [a, b]$, $A(D)$ pode ser expressa em termos dessa parametrização. Com efeito, do Teorema de Green, decorrem as seguintes igualdades:

$$A(D) = - \int_a^b y x' dt = \int_a^b x y' dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x y' - y x') dt, \quad (2.4)$$

que se provam facilmente.

Exemplo 2.2 Seja C um círculo representado pela curva parametrizada por comprimento de arco $\alpha(s) = (R \cos s, R \sin s), s \in [0, 2\pi]$. Utilizando o Teorema de Green iremos calcular a área da região D do plano por ele determinada, obtemos

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^{2\pi} xy' dt \Rightarrow \\ &= \int_0^{2\pi} R \cos t R \cos t dt \Rightarrow \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \Rightarrow \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) dt \Rightarrow \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2t)) dt \Rightarrow \\ &= \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2, \end{aligned}$$

como era de se esperar.

3 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Neste capítulo iremos apresentaremos duas demonstrações da DI, uma demonstração analítica e uma geométrica. A primeira, talvez a demonstração mais curta que se conhece desse resultado, foi publicada pelo matemático americano Peter D. Lax em 1995 sob o título *A Short Path to the Shortest Path* [12]. A segunda demonstração de 1993 é devida aos matemáticos cariocas C. Moreira e N. Saldanha [16].

3.1 UM CURTO CAMINHO PARA A MAIOR ÁREA

Para esta demonstração, precisaremos do seguinte lema que é uma consequência do Teorema de Green.

Lema 3.1 *Seja C uma curva plana simples fechada orientada positivamente e parametrizada por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [a, b]$. A área do interior, D , da curva C é igual a*

$$A(D) = \int_a^b x(s)y'(s)ds = - \int_a^b y(s)x'(s)ds. \quad (3.1)$$

Também precisaremos da seguinte desigualdade.

Lema 3.2 *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, vale a seguinte desigualdade*

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad (3.2)$$

com a igualdade apenas quando $a = b$.

Demonstração. Considere a desigualdade básica $(a - b)^2 \geq 0$, partindo dela obtemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2ab &\leq a^2 + b^2 \\ \Rightarrow ab &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned}$$

Quando $a = b$ vale a igualdade, como pode ser facilmente verificado. Reciprocamente, se ocorre a igualdade em (3.2), então todas as desigualdades acima são igualdades, donde $(a - b)^2 = 0$, isto é, $a = b$. ■

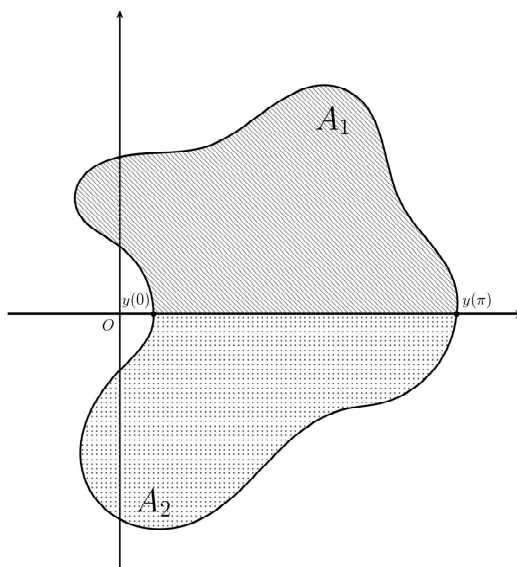
Teorema 3.1 (Desigualdade Isoperimétrica) *Uma curva plana fechada de comprimento 2π cerca uma área menor do que ou igual a π . A igualdade se verifica apenas para o círculo.*

Demonstração. Sejam $x(s), y(s)$ a representação paramétrica da curva e s o comprimento de arco, $0 \leq s \leq 2\pi$. Suponha que tenhamos posicionado a curva de tal modo que os pontos $x(0), y(0)$ e $x(\pi), y(\pi)$ estejam sobre o eixo Ox , isto é:

$$y(0) = 0 = y(\pi).$$

A Figura 3.1 representa a ideia desse posicionamento estratégico dos eixos coordenados sobre a curva:

Figura 3.1: Área limitada pela curva



A área limitada pela curva é dada pela fórmula:

$$A = \int_0^{2\pi} yx' ds. \quad (3.3)$$

Escrevendo essa integral como a soma $A_1 + A_2$ de uma integral que vai de 0 a π e outra que vai de π a 2π , mostraremos que cada uma delas é menor do que ou igual a $\pi/2$. Aplicando a

desigualdade (3.2) para $a = y$ e $b = x'$, obtemos

$$A_1 = \int_0^\pi yx' ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (y^2 + x'^2) ds. \quad (3.4)$$

Como s é o comprimento de arco, $x'^2 + y'^2 = 1$, ou seja, $x'^2 = 1 - y'^2$. Daí, podemos reescrever (3.4) como

$$A_1 \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (y^2 + 1 - y'^2) ds. \quad (3.5)$$

Uma vez que $y = 0$ quando $s = 0$ e $s = \pi$, afirmamos que existe uma função $u(s)$, derivável em $(0, \pi)$ e limitada em $[0, \pi]$, tal que podemos fatorar y como

$$y(s) = u(s) \sin s.$$

Com efeito, definindo $u(s) = y(s)/\sin s$ para $s \in (0, \pi)$, vemos que u é derivável em $(0, \pi)$. Além disso, como s é o comprimento de arco, vemos também que a função $u(s) = y(s)/\sin s$ é limitada perto tanto de $s = 0$ quanto de $s = \pi$, o mesmo ocorrendo com $u'(s)$. Derivando no aberto $(0, \pi)$, obtemos

$$y' = u' \sin s + u \cos s. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5), chegamos a

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{1}{2} \int_0^\pi [(u \sin s)^2 + 1 - (u' \sin s + u \cos s)^2] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [u^2 \sin^2 s - u'^2 \sin^2 s - 2uu' \sin s \cos s - u^2 \cos^2 s + 1] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [u^2 (\sin^2 s - \cos^2 s) - \underbrace{2uu' \sin s \cos s}_{(u^2 \sin s \cos s)'} - u'^2 \sin^2 s + 1] ds. \end{aligned}$$

Note que o produto $2uu'$ é a derivada de u^2 . Utilizando as propriedades da integral e integrando o termo destacado na última integral acima por partes, obtemos

$$\int_0^\pi 2uu' \sin s \cos s ds = \overbrace{(\sin s \cos s u^2)}^0 \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u^2 (\cos^2 s - \sin^2 s) ds = \int_0^\pi u^2 (\sin^2 s - \cos^2 s) ds,$$

ficando com a desigualdade

$$A_1 \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - u^2 \sin^2 s) ds, \quad (3.7)$$

que é obviamente $\leq \pi/2$. A igualdade vale somente quando $u' \equiv 0$ em $(0, \pi)$ (já que $\sin s$ não se anula neste intervalo aberto). Logo, $u \equiv k$ (constante) em $(0, \pi)$. Estendemos u ao

intervalo $[0, \pi]$ de maneira natural pondo $u \equiv k$ neste intervalo compacto, o que faz $y(s) = k \sin s$. Como a igualdade em (3.4) ocorre apenas se $y = x' = \sqrt{1 - y'^2}$, resolvendo essa equação diferencial, obtemos $y(s) = \pm \sin s$, $x(s) = \mp \cos s + k$, que é a equação paramétrica de um semi-círculo. ■

Observação 3.1 A integral em (3.7) deve ser entendida como uma integral imprópria. Os valores assumidos pelas funções envolvidas nos extremos do intervalo $[0, \pi]$ não afetam a existência e o valor desta integral.

3.2 DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA DE C. MOREIRA E N. SALDANHA

Nesta seção, apresentaremos uma demonstração mais elementar, porém não menos trabalhosa, e bastante criativa que utiliza apenas conhecimentos de geometria clássica. Começaremos demonstrando alguns fatos a respeito de áreas de figuras planas, depois demonstraremos um resultado análogo à DI para polígonos e por fim demonstraremos a DI. Seguiremos o roteiro do artigo escrito por C. Moreira e N. Saldanha [16].

3.2.1 Desigualdade Isoperimétrica para Polígonos

Vamos começar com alguns resultados de geometria clássica.

Afirmção 3.1 *Dentre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, aquele de maior área é o isósceles. Além disso, dados dois triângulos ABC e ABC' com mesmo perímetro e*

$$|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|,$$

a área de ABC é maior que a área de ABC' .

Demonstração. Esta afirmação é consequência da fórmula de Heron para a área do triângulo: a área de um triângulo de lados a, b e c é dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (3.8)$$

onde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ é o semi-perímetro do triângulo. (Um ótimo roteiro para a demonstração da fórmula de Heron pode ser encontrado no artigo do Mário Dalcin [10] e também no livro do Roger L. Cooke [7]).

De fato, considere dois triângulos ABC e ABC' de mesmo perímetro e base AB comum, com ABC isósceles. Denote por $a = \overline{BC} = \overline{AC}$, $b = \overline{AB}$, $c = \overline{AC'}$ e $d = \overline{BC'}$ os lados dos triângulos ABC e ABC' . Suponha, sem perda de generalidade, que $c > d$, então, podemos concluir que $c > a$ e $a > d$. Dessas três relações podemos tirar que

$$(c-d)^2 > 0 \Rightarrow -(c-d)^2 < 0 \Rightarrow b^2 - (c-d)^2 < b^2 \Rightarrow b^2 - c^2 - d^2 + 2cd < b^2.$$

Agora, somando e subtraindo bc e bd do lado esquerdo na última desigualdade e separando o termo $2cd$, obtemos

$$\begin{aligned} b^2 + bc - bd + bd + cd - d^2 - bc - c^2 + cd &< b^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (b+d-c)(b+c-d) &< b^2; \end{aligned}$$

dividindo os dois lados por 4, temos

$$\begin{aligned} \frac{(b+d-c)}{2} \cdot \frac{(b+c-d)}{2} &< \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (p-c)(p-d) &< (p-a)(p-a), \end{aligned}$$

pois $(p-a) = (a+b+c)/2 - a = b/2$. Dessa relação, segue-se que

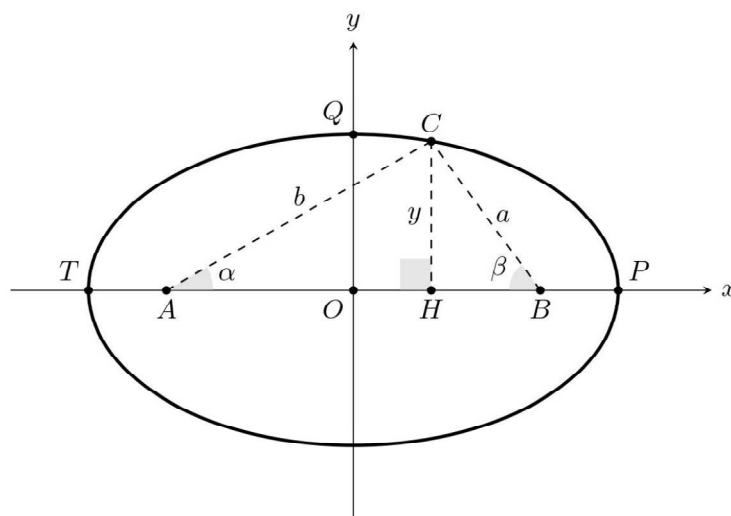
$$\begin{aligned} p(p-b)(p-c)(p-d) &< p(p-b)(p-a)(p-a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{p(p-b)(p-c)(p-d)} &< \sqrt{p(p-b)(p-a)(p-a)}, \end{aligned}$$

isto é, a área do triângulo ABC' é menor que a área do triângulo isósceles ABC .

Para a segunda parte dessa afirmação, consideremos, no triângulo ABC , os pontos A e B como sendo os focos de uma elipse. Já que a base AB é fixa e o perímetro é constante, então a soma dos lados AC e BC também é constante; logo, podemos afirmar que o ponto C recai sobre essa elipse, de modo a obtermos sempre triângulos de mesmo perímetro. Denote por $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ os lados do triângulo ABC , e sejam $u = \overline{OP}$ e $v = \overline{OQ}$ os semi-eixo maior e semi-eixo menor da elipse, respectivamente. Devido à simetria, podemos considerar os pontos C apenas o primeiro quadrante da elipse, como ilustra a Figura 3.2.

Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ e } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Figura 3.2: Triângulo de base fixa AB 

Subtraindo a primeira equação da segunda e isolando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} 2(b^2 - a^2) &= 2bc \cos \alpha - 2ac \cos \beta \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 - a^2 &= bc \cos \alpha - ac \cos \beta \\ \Rightarrow b - a &= \frac{c}{a+b} (b \cos \alpha - a \cos \beta) \\ \Rightarrow b - a &= \frac{c}{a+b} (\overline{AH} - \overline{HB}), \end{aligned}$$

e por simetria, temos

$$b - a = \frac{c}{a+b} 2 \overline{OH} = \frac{2c}{b+a} x.$$

Uma vez que $\frac{2c}{a+b}$ é constante, isso significa que $(b - a)$ é proporcional a $x = \overline{OH}$. Além disso, a área do triângulo ABC é diretamente proporcional à sua altura y . Expressando o ponto $C = (x, y)$, no arco de elipse PQ , em termos do parâmetro $\theta \in (0, \pi/2)$, obtemos

$$x(\theta) = u \cos \theta$$

$$y(\theta) = v \sin \theta,$$

e, daí,

$$x'(\theta) = -u \sin \theta < 0, \forall \theta \in (0, \pi/2)$$

$$y'(\theta) = v \cos \theta > 0, \forall \theta \in (0, \pi/2).$$

Portanto, quanto menor o valor de x maior será o valor de y e menor será a diferença entre os lados, o que nos leva a uma área maior. ■

Afirmção 3.2 *Dentre todos os quadriláteros com lados dados, aquele de maior área é o inscrito. Mais ainda, se considerarmos dois quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ com lados correspondentes iguais, se $|\widehat{A} + \widehat{C} - \pi| < |\widehat{A}' + \widehat{C}' - \pi|$ então a área de $ABCD$ é maior que a de $A'B'C'D'$.*

Demonstração. Estas afirmações seguem da fórmula de Bretschneider: a área S de um quadrilátero de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$ e ângulos \widehat{A} , \widehat{B} , \widehat{C} e \widehat{D} é dada por:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\widehat{A} + \widehat{C}))}, \quad (3.9)$$

onde $p = (a + b + c + d)/2$. Esta fórmula pode ser obtida elevando ao quadrado o valor de S dado por $S = \frac{1}{2}ad \sin \widehat{A} + \frac{1}{2}bc \sin \widehat{C}$ (este valor é obtido somando as áreas de DAB e BCD) usando a identidade $a^2 + d^2 - 2ad \cos \widehat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{C}$ – os dois lados desta igualdade dão o quadrado da diagonal BD pela lei dos cossenos. (Uma demonstração da fórmula de Bretschneider, que generaliza a fórmula de Heron, pode ser vista em [8].)

De fato, num quadrilátero inscrito, a soma dos ângulos opostos \widehat{A} e \widehat{C} é igual a π , ou seja, se $\widehat{A} + \widehat{C} \neq \pi$ então o quadrilátero não é inscrito. Mas, pela fórmula da área acima, a única maneira de termos a área máxima é se $\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = -1$, isto é, $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$. Portanto, para que a área seja máxima, o quadrilátero tem que ser inscrito.

Como $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são quadriláteros e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é constante igual a 2π , temos $0 < \widehat{A} + \widehat{C} < 2\pi$ e $0 < \widehat{A}' + \widehat{C}' < 2\pi$, logo

$$\begin{aligned} 0 - \pi &< \widehat{A} + \widehat{C} - \pi < 2\pi - \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow -\pi &< \widehat{A} + \widehat{C} - \pi < \pi \\ \Rightarrow 0 &\leq |\widehat{A} + \widehat{C} - \pi| < \pi. \end{aligned}$$

Analogamente, $0 \leq |\widehat{A}' + \widehat{C}' - \pi| < \pi$. Assim,

$$0 \leq |\widehat{A} + \widehat{C} - \pi| < |\widehat{A}' + \widehat{C}' - \pi| < \pi.$$

Isso significa que $\widehat{A} + \widehat{C}$ está mais próximo de π do que $\widehat{A}' + \widehat{C}'$. Como a função cosseno é par e é decrescente no intervalo $[0, \pi)$, temos que

$$\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) < \cos(\widehat{A}' + \widehat{C}'),$$

e quando esses valores são substituídos na fórmula (3.9), obtemos:

$$S_{ABCD} > S_{A'B'C'D'}.$$

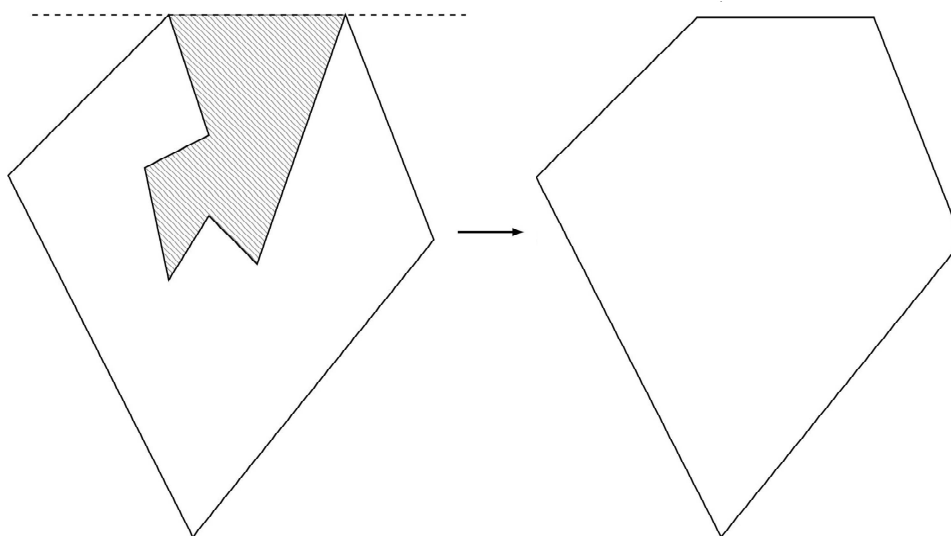
■

Observação 3.2 Nesta demonstração, utilizamos o fato de que a função cosseno é par e tem um eixo de simetria em $k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Afirmção 3.3 Dado um polígono não convexo, construímos outro polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior.

Demonstração. Para isto, queremos obter dois vértices não consecutivos tais que a reta determinada por eles tem o polígono inteiramente contido em um dos semi-planos por ela determinados. Obteremos o novo polígono substituindo a parte interior da poligonal ligando estes dois pontos pelo segmento que os liga, como mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3: Fecho convexo



Para obter estes vértices, considere no plano cartesiano o vértice de maior coordenada x , chamemo-lo de P_0 . A reta vertical que passa por este ponto tem todo o polígono de um lado. Vamos girar esta reta no sentido anti-horário ao redor deste vértice até encontrarmos o primeiro outro vértice; esta reta ainda tem todo o polígono de um lado. Se a interseção desta reta com o polígono não for um dos lados, o vértice inicial e o outro que estiver em cima da reta (ou, caso exista mais de um, o mais distante do vértice inicial) serão os dois vértices que

buscamos. Caso contrário, precisamos continuar nossa busca; obtivemos um lado P_0P_1 de *convexidade* do polígono, isto é, um lado tal que o polígono está inteiramente contido em um dos semi-planos determinados por sua reta suporte. Prosseguimos girando esta reta suporte no sentido anti-horário ao redor de P_1 até encontrarmos um novo vértice. Novamente temos os dois casos acima e se tivermos um novo lado de convexidade continuamos o processo. Este processo ou deve parar (com o sucesso) ou deve resultar em que voltemos até P_0 . Mas neste caso todos os lados seriam de convexidade e o polígono seria convexo, contradizendo a hipótese. ■

Se repetirmos o processo descrito na Afirmação 3.3 um número suficiente de vezes chegaremos a um polígono convexo chamado o *fecho convexo*. Nossa construção garante que o conjunto dos vértices do fecho convexo é um subconjunto do conjunto de vértices do polígono original. Mais ainda, o fecho convexo tem número de lados menor, perímetro menor e área maior que o polígono inicial.

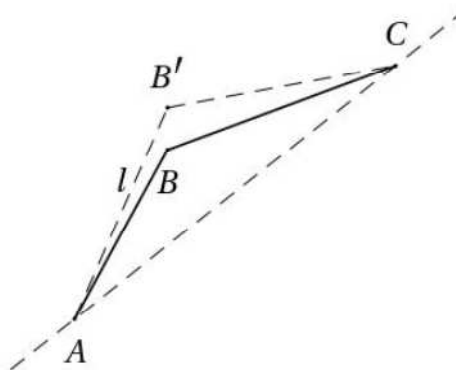
Afirmação 3.4 *Dado qualquer polígono não regular, existe um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual, e área maior.*

Demonstração. Demonstraremos isto por indução sobre o número de lados. Vamos descrever um processo para, a partir de um polígono qualquer, obter primeiramente um equilátero e depois um regular com o mesmo número de lados que o inicial, sempre aumentando a área a cada passo. Adotaremos este processo enquanto o polígono for convexo e se em algum momento o polígono não for convexo a Afirmação 3.3 nos fornece um polígono com número de lados menor, área maior e perímetro menor, o que conclui a demonstração por hipótese de indução.

Vamos tornar o polígono equilátero fazendo com que a medida de cada um de seus lados seja a média l das medidas de todos os lados do polígono. Suponha que tenhamos dois lados vizinhos AB e BC , um maior e outro menor que l . Podemos, pela Afirmação 3.1, encontrar um ponto B' para substituir B , mantendo o perímetro fixo e aumentando a área, tornando $\overline{AB'} = l$. Como ilustrado na Figura 3.4

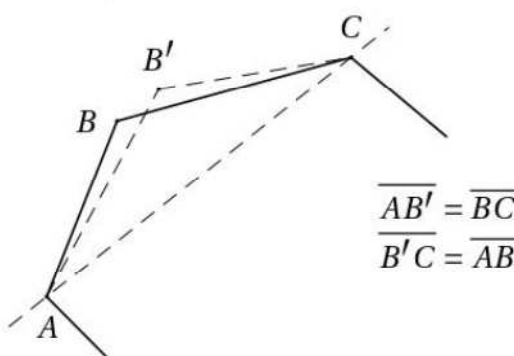
Caso não existam dois tais lados vizinhos, mas o polígono não seja equilátero, permutaremos os lados de tal forma a chegar a esta situação. De fato, dados dois lados vizinhos AB e BC podemos substituir B por B' de tal forma que $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{B'C} = \overline{AB}$. Escolhendo B'

Figura 3.4: Em virtude da Afirmação 3.1, cada novo polígono tem área maior que o anterior



do mesmo lado que B em relação à reta AC , a área e o perímetro ficam inalterados, pois os triângulos ABC e $AB'C$ são congruentes. Após uma sequência finita apropriada de tais permutações, chegaremos na situação descrita acima. Assim, aumentaremos o número de lados iguais a l até que o polígono se torne equilátero, sempre aumentando a área. O procedimento descrito acima pode ser ilustrado como segue.

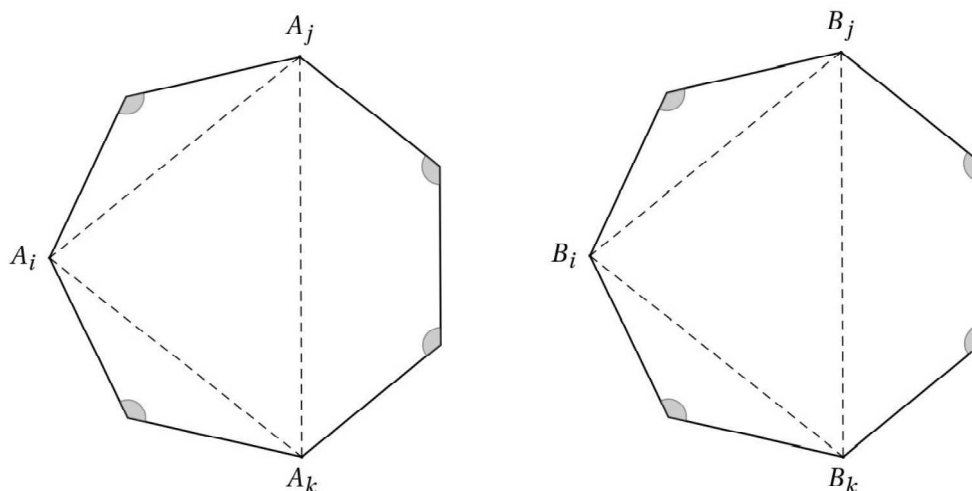
Figura 3.5: Permutando dois lados consecutivos



Fazendo este processo um número finito de vezes chegamos à situação desejada, pois não podemos ter todos os lados menores ou maiores que l simultaneamente.

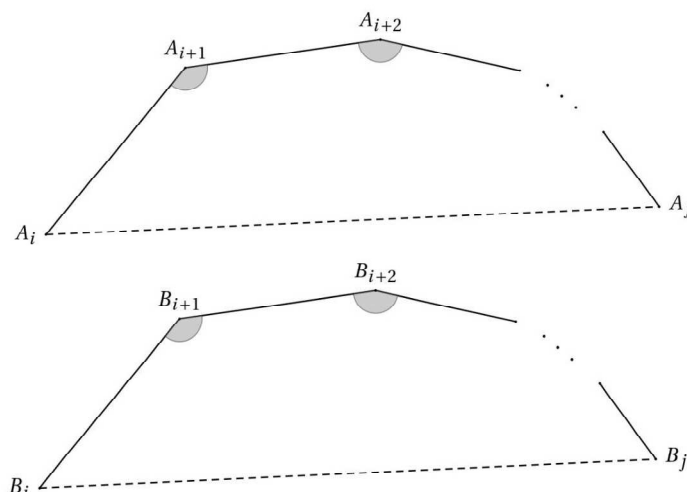
Vamos agora escrever um processo análogo para tornar o polígono equiângulo e portanto regular, sempre aumentando a área. Vamos chamar os vértices cujos ângulos internos são iguais ao ângulo interno para o polígono regular de *bons* (marcados em cinza na Figura 3.6) e os demais de *maus*. Observe que não podemos ter menos de quatro ângulos maus. De fato, suponha um polígono $A_1A_2 \dots A_n$ com únicos vértices possivelmente maus A_i, A_j e A_k . Seja $B_1B_2 \dots B_n$ um polígono regular de mesmo lado l .

Figura 3.6: Os ângulos marcados são os ângulos *bons*



Os polígonos $A_i A_{i+1} \dots A_j$ e $B_i B_{i+1} \dots B_j$ são congruentes, pois possuem lados e ângulos internos iguais (veja a Figura 3.7), também $A_j A_{j+1} \dots A_k$ é congruente a $B_j B_{j+1} \dots B_k$ e $A_k A_{k+1} \dots A_i$ é congruente a $B_k B_{k+1} \dots B_i$; além disso, os triângulos $A_i A_j A_k$ e $B_i B_j B_k$ são congruentes. Tudo isso implica que $A_1 A_2 \dots A_n$ é regular.

Figura 3.7: Os polígonos $A_i A_{i+1} \dots A_j$ e $B_i B_{i+1} \dots B_j$ são congruentes



Em um polígono equilátero, mas não regular, considere o conjunto dos vértices maus. Podemos tomar neste conjunto dois vértices maus A e B , A com ângulo muito grande e B com ângulo muito pequeno, consecutivos no conjunto dos vértices maus. Considere agora o quadrilátero $ABCD$, onde C é consecutivo a B no conjunto dos vértices maus, assim como A é consecutivo a D no mesmo conjunto.

Queremos deformar este quadrilátero no sentido de diminuir os ângulos \widehat{A} e \widehat{C} e aumentar os ângulos \widehat{B} e \widehat{D} até \widehat{A} ou \widehat{B} tornar-se bom. Ao deformar o quadrilátero, deformaremos simultaneamente o polígono mantendo rígidos os *arcos* entre dois vértices consecutivos do quadrilátero. Resta verificar que este processo aumenta a área do quadrilátero e, portanto, do polígono: para isso, usando a Afirmação 3.2, basta verificar que enquanto \widehat{A} for grande e \widehat{B} for pequeno $\widehat{A} + \widehat{C}$ será maior que π .

Na Figura 3.8, o círculo indicado tem raio igual ao círculo circunscrito ao polígono regular de lado l . Sejam C' e D' as interseções de CD com o círculo. Temos:

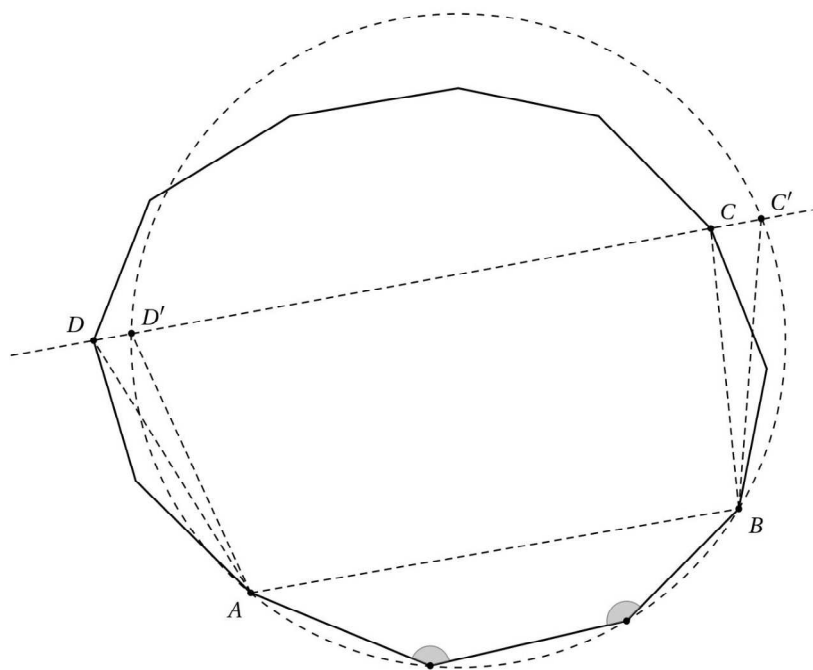
$$\widehat{BAD} > \widehat{BAD'} \text{ e } \widehat{BCD} > \widehat{BC'D},$$

donde,

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} > \widehat{BAD'} + \widehat{BC'D} = \pi,$$

pois C' e D' são vértices de um quadrilátero inscrito; logo, $\widehat{A} + \widehat{C} > \pi$.

Figura 3.8: O quadrilátero $ABC'D'$ é inscrito



Isso mostra que sempre podemos aumentar o número de vértices bons até chegarmos ao polígono regular e conclui a demonstração da Afirmação 3.4. ■

Observação 3.3 Observe que diminuindo os valores de \hat{A} e \hat{C} aumenta-se o valor de \hat{B} . O fato de \hat{A} ser grande e \hat{B} ser pequeno, nesse sentido, significa que eles não podem ser vértices num quadrilátero circunscrito. Então, fazendo $\hat{A} + \hat{C}$ se aproximar de π (por falta) também fará com que a área do quadrilátero aumente. Esse movimento tornará \hat{B} um ângulo bom.

Caso haja mais de três ângulos maus, formamos um novo quadrilátero e repetimos o processo; caso contrário, teremos chegado à situação desejada, que é o polígono regular.

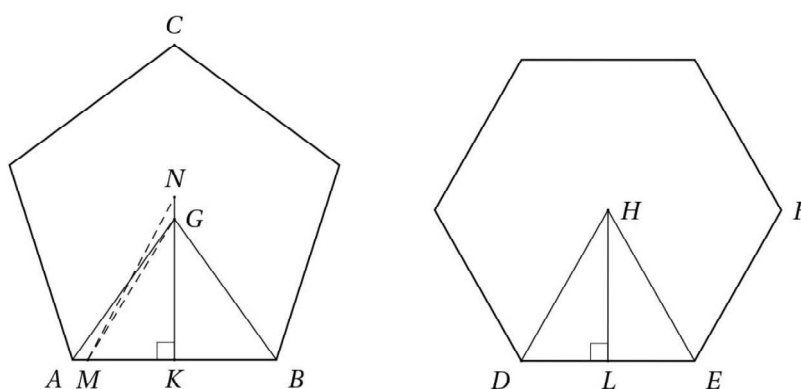
Afirmção 3.5 *Se $n < m$, a área de um polígono regular de n lados é menor do que a área de um polígono regular de m lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Essa afirmação é equivalente às Proposições 3.1 e 3.2 atribuídas a Zenodoro. Apesar de no artigo [16] ser feita uma demonstração por indução sobre o número m de lados, optamos por fazer uma demonstração desses fatos no espírito grego, utilizando a teoria das razões de Eudócio e que pode ser consultada em [13] e [7].

Proposição 3.1 (Zenodoro) *De todos os polígonos regulares de mesmo perímetro, aquele que tem maior área é o que tem mais ângulos¹.*

Demonstração. Sejam ABC e DEF polígonos equiláteros e equiângulos de mesmo perímetro, com DEF tendo mais ângulos que ABC . Sejam G e H os centros dos círculos circunscritos aos polígonos, e GK e HL as perpendiculares de G e H até os lados AB e DE tais que K e L bissectem estes lados.

Figura 3.9: Polígonos de mesmo perímetro



Como os perímetros são iguais, $AB > DE$ e $AK > DL$. Faça KM igual a DL e considere GM . Como AB é a mesma fração do perímetro que o ângulo \hat{AGB} é dos quatro ângulos

¹Aqui a notação $A : B :: C : D$ se lê: A está para B assim como C está para D .

retos, e também DE é a mesma fração do mesmo perímetro que o ângulo $D\hat{H}E$ é dos quatro ângulos retos, segue que

$$AB : DE :: A\hat{G}B : D\hat{H}E,$$

ou seja,

$$AK : MK :: A\hat{G}K : D\hat{H}L,$$

mas

$$AK : MK > A\hat{G}K : M\hat{G}K.$$

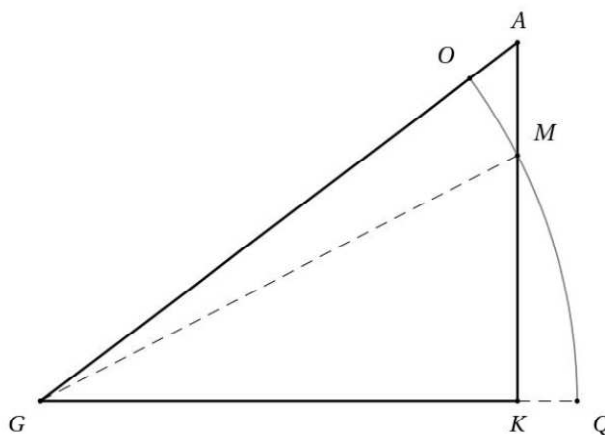
Esta última desigualdade na verdade é um lema que provaremos mais adiante².

Assim sendo, $M\hat{G}K > D\hat{H}L$ e, conseqüentemente, $G\hat{M}K < H\hat{D}L$. Faça o ângulo $N\hat{M}K$ igual ao ângulo $H\hat{D}L$, tal que MN intercepte KG no ponto N . Os triângulos NMK e HDL agora são congruentes, e $NK = HL$, de modo que $GK < HL$.

Mas a área do polígono ABC é metade do retângulo determinado por GK e de mesmo perímetro, enquanto a área do polígono DEF é metade do retângulo determinado por HL e de mesmo perímetro. Portanto, a área do polígono DEF é a maior, como queríamos demonstrar.

Para provar que $AK : MK > A\hat{G}K : M\hat{G}K$ considere o arco QMO com centro em G .

Figura 3.10: Lema de Euclides



Como a razão $\triangle AGM : \text{setor } OGM > \triangle MGK : \text{setor } MGQ$ (o triângulo AGM é maior

²A prova deste lema foi dada por Euclides em seu *Optica*, mas Theon não cita Euclides em seu comentário a Zenodoro. O próprio Theon deu uma prova, deduzindo que Zenodoro também o tinha feito.

do que o setor OGM), segue-se, intercambiando os meios, que

$$\triangle AGM : \triangle MGK > \text{setor} OGM : \text{setor} MGQ.$$

Mas, $\triangle AGM : \triangle MGK :: AM : MK$, já que os dois triângulos tem a mesma altura GK medida a partir da base AMK . E ainda,

$$\text{setor} OGM : \text{setor} MGQ :: \widehat{AGM} : \widehat{MGK}.$$

Assim sendo,

$$AM : MK :: \widehat{AGM} : \widehat{MGK}$$

. Segue-se que $AK : MK > \widehat{AGK} : \widehat{MGK}$. ■

Observação 3.4 Esse lema demonstrado por último é equivalente a dizer que

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} > \frac{\alpha}{\beta}, \text{ onde } \beta < \alpha < \pi/2.$$

Proposição 3.2 (Zenodoro) *O círculo é maior do que qualquer polígono regular de mesmo perímetro.*

Demonstração. Dados um círculo de raio OA e um polígono a ele inscrito, circunscreva um polígono similar a este ao redor do círculo. Sejam OE a apótema do polígono inscrito e OK a apótema do polígono circunscrito ao círculo. Como o polígono OK é “convexo por fora” (i.é., existem regiões do polígono que estão fora do círculo), podemos supor, então, que seu perímetro é maior do que o da circunferência (pela Proposição 3.1).

Isto significa que o polígono circunscrito é maior que o original. Mas então, por similaridade, $OK > OE$. Como o círculo é igual à metade do retângulo cujos lados são sua circunferência e seu raio (fato provado por Arquimedes), enquanto o polígono regular é metade do retângulo cujos lados são seu perímetro e sua apótema, segue-se que o círculo tem maior área. ■

3.2.2 Demonstração da Desigualdade Isoperimétrica

Teorema 3.2 (Desigualdade Isoperimétrica) *Toda curva fechada de comprimento l engloba uma área menor do que ou igual a $l^2/4\pi$. Além disso, a cota superior só é alcançada pelo círculo de raio $l/2\pi$.*

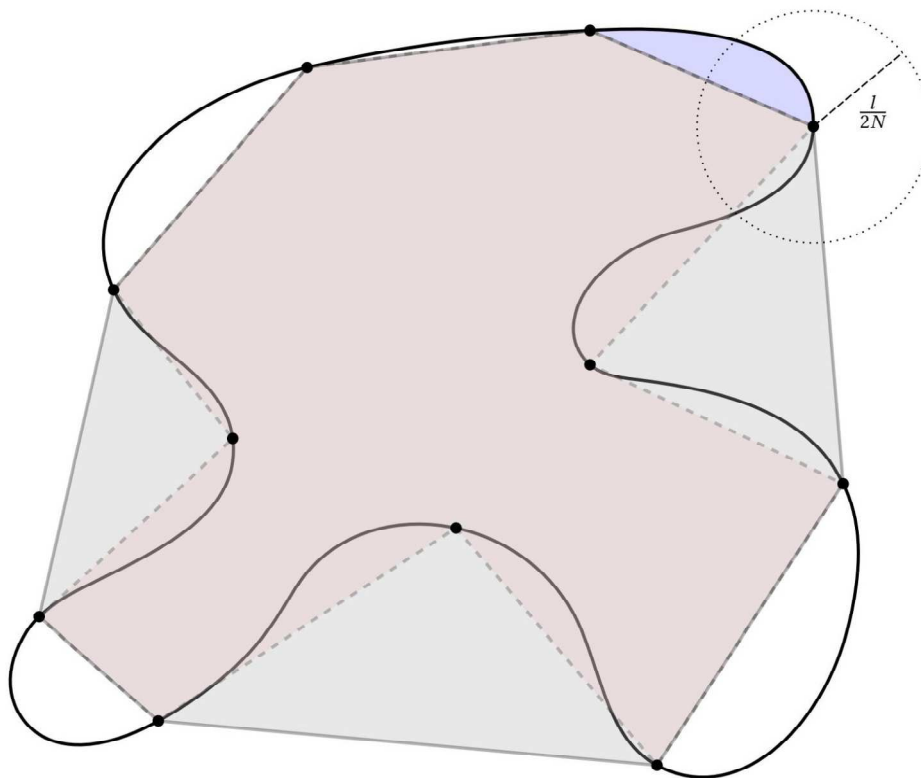
Demonstração. Suponha que temos uma curva de comprimento l englobando uma área A . Vamos escolher um número inteiro positivo N e tomar N pontos ao longo da curva, igualmente espaçados em termos do comprimento do arco de curva entre eles. Vamos ligar estes pontos por linhas retas para obter um polígono de N lados e perímetro menor que l . Tomemos o fecho convexo deste polígono: seu perímetro é menor que l , donde, pelas afirmações anteriores, sua área B é menor que $l^2/4\pi$.

Consideremos o conjunto dos pontos que ou estão dentro deste fecho convexo ou, estando fora dele, distam menos de $l/2N$ de algum dos N pontos tomados sobre a curva: a curva original está totalmente contida na região formada pela reunião deste fecho convexo e dos discos de centro em cada um dos N pontos e de raio $l/2N$, pois qualquer ponto da curva dista menos de $l/2N$ de algum destes N pontos (Figura 3.11). Por outro lado, a área desta região será menor do que ou igual a $B + N\pi(l/2N)^2$. Assim,

$$A \leq B + N\pi \left(\frac{l}{2N} \right)^2 \leq \frac{l^2}{4\pi} + \frac{\pi l^2}{4N}$$

e, como esta estimativa vale para qualquer N , então $A \leq l^2/4\pi$.

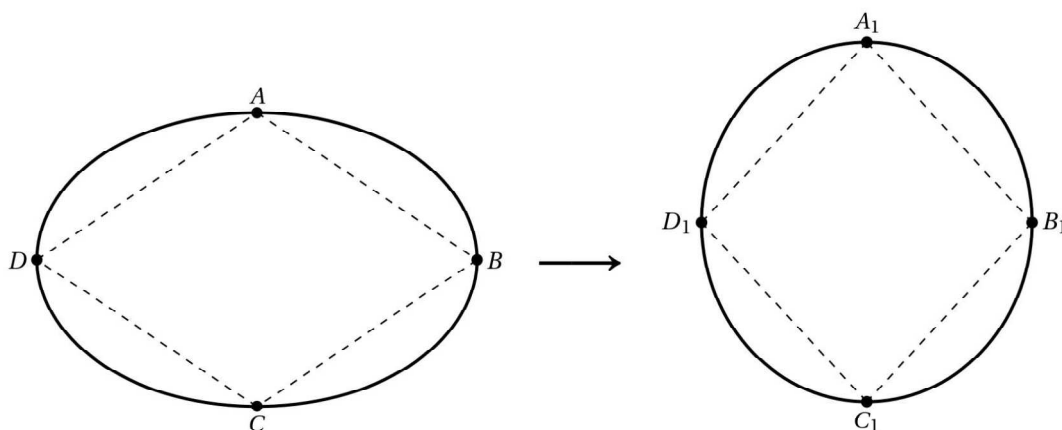
Figura 3.11: A curva está contida na união do fecho convexo com os círculos de raio $l/2N$



Finalmente, consideremos uma curva de comprimento l englobando a área $l^2/4\pi$, vamos provar que ela é um círculo. Primeiro, observemos que ela é convexa (este resultado é conhecido como o lema da convexidade). De fato, para uma curva não convexa sempre existe um segmento de reta ligando dois pontos da curva e contido inteiramente em seu interior. Este segmento divide a parte do plano fora da curva em duas regiões, uma limitada e a outra não. Tomando a porção da curva que toca a região ilimitada mais o segmento de reta, temos uma nova curva fechada de perímetro menor e área maior, contradizendo a primeira parte da demonstração.

Para uma curva convexa distinta do círculo, tome quatro pontos não co-circulares. Se deformarmos o quadrilátero com estes quatro vértices mantendo rígidos os arcos de curva entre dois pontos até o quadrilátero tornar-se inscrito, aumentaremos a área sem mudar o perímetro, o que é um absurdo!

Figura 3.12: É impossível aumentar a área do quadrilátero $ABCD$ mantendo fixo o perímetro.



■

3.3 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO PARA O PI

Chegamos até aqui sem termos levantado a seguinte questão: *Existe solução para o PI?* Nós, como todos aqueles que lidaram com o PI até o século XIX, trabalhamos sob o pressuposto de que existe uma solução e, neste caso, garantimos que esta solução é o círculo. Pode não ser o caso! Existem problemas similares que não possuem solução, como, por exemplo, o problema de Kakeya [3]. Para nosso alívio, contudo, podemos garantir também

que há, de fato, uma solução para o PI. Façamos um breve comentário a respeito disso seguindo M. Spivak [17] (veja também [5]).

Sejam D um disco de raio L_0 (em que L_0 é um número real fixado) em \mathbb{R}^2 e $\mathcal{C}(D)$ o conjunto de todos os subconjuntos fechados e não vazios contidos em D . A distância de $x \in D$ a $C \in \mathcal{C}(D)$ é definida por

$$d(x, C) := \min\{d(x, y) : y \in C\},$$

em que d é a métrica euclidiana no plano. Para $\epsilon > 0$, definimos a ϵ -vizinhança $V_\epsilon(C)$ de C como

$$V_\epsilon(C) := \{x \in D : d(x, C) < \epsilon\}.$$

A métrica de Hausdorff ρ em $\mathcal{C}(X)$ é definida como segue:

$$\rho(C_1, C_2) := \inf\{\epsilon > 0 : C_1 \subset V_\epsilon(C_2) \text{ e } C_2 \subset V_\epsilon(C_1)\}, \quad C_1, C_2 \in \mathcal{C}(D).$$

Munido desta métrica, $\mathcal{C}(D)$ é um espaço métrico compacto. O conjunto $\text{Conv}(D) \subset \mathcal{C}(D)$ de todos os subconjuntos não vazios fechados e convexos de D é fechado em $\mathcal{C}(D)$. Logo, $\text{Conv}(D)$ também é um espaço métrico compacto. Além disso, as funções

$$A : \mathcal{C}(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(C) = \text{área de } C,$$

e

$$L : \text{Conv}(D) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(C) = \text{comprimento da fronteira de } C,$$

são contínuas. Então $L^{-1}(L_0) \subset \text{Conv}(D)$ é um subconjunto não vazio (pois $D \in L^{-1}(L_0)$) e fechado do espaço compacto $\text{Conv}(D)$. Logo, $L^{-1}(L_0)$ é compacto, e a função A atinge máximo em $L^{-1}(L_0)$. Aqui culminam nossos esforços para resolver o PI.

4 CURVATURA PARA POLÍGONOS

Neste capítulo, utilizaremos a noção de curvatura nos vértices de um polígono e a Desigualdade Isoperimétrica para demonstrar uma desigualdade envolvendo o comprimento dos lados de um polígono e os raios de curvatura em seus vértices. Como consequência deste desigualdade, obtemos uma versão discreta da Desigualdade de Ros,

$$A \leq \frac{1}{2} \int_C \rho(s) ds, \quad (4.1)$$

onde ρ é o raio de curvatura. Esta demonstração pode ser encontrada no artigo do Cufí, Reventós e Rodríguez [9].

4.1 A INTEGRAL DO RAIOS DE CURVATURA

O ponto de partida para este capítulo é a seguinte desigualdade.

Proposição 4.1 *Se C é uma curva plana fechada convexa de classe C^2 de comprimento L , então*

$$\frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{1}{2} \int_C \rho(s) ds, \quad (4.2)$$

onde $\rho(s)$ é o raio de curvatura de C , e ds significa medida do comprimento de arco em C . A igualdade vale se, e somente se, C é um círculo.

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e lembrando que $k(s) = 1/\rho(s)$, obtemos

$$\begin{aligned} L = \int_C 1 ds &= \int_C k^{1/2} \cdot k^{-1/2} ds \leq \left(\int_C k ds \right)^{1/2} \left(\int_C k^{-1} ds \right)^{1/2} \\ &= (2\pi)^{1/2} \left(\int_C \rho(s) ds \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde,

$$L^2 \leq 2\pi \int_C \rho(s) ds.$$

Dividindo os dois lados por 4π , temos

$$\frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{1}{2} \int_C \rho(s) ds,$$

A igualdade vale se, e somente se, $k(s) = \lambda k^{-1}(s)$, para alguma constante λ . De fato, se vale a igualdade, então também vale no termo intermediário em (4.3) e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, a igualdade vale se, e somente se, $k(s) = \lambda k^{-1}(s)$, donde, $k(s)$ é constante, ou seja, C é um círculo. Reciprocamente, se $k(s) = \lambda k^{-1}(s)$, então substituindo em (4.3) obtemos a igualdade, o que conclui a demonstração. ■

Observação 4.1 Para demonstrar a Proposição 4.1 utilizamos o seguinte resultado:

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada, regular e de classe C^2 . Então sua curvatura total $CT(\alpha)$ é dada por

$$CT(\alpha) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(s) \|\alpha'(s)\| ds = R_\alpha,$$

onde R_α é o índice de rotação de α .

No nosso caso, como a curva está parametrizada por comprimento de arco, então $\|\alpha'(s)\| = 1$; e como se trata de uma curva de Jordan, o índice de rotação é igual a 1. Não definiremos índice de rotação de uma curva, pois tal definição está fora do escopo deste trabalho. Para mais detalhes, o leitor pode consultar [1].

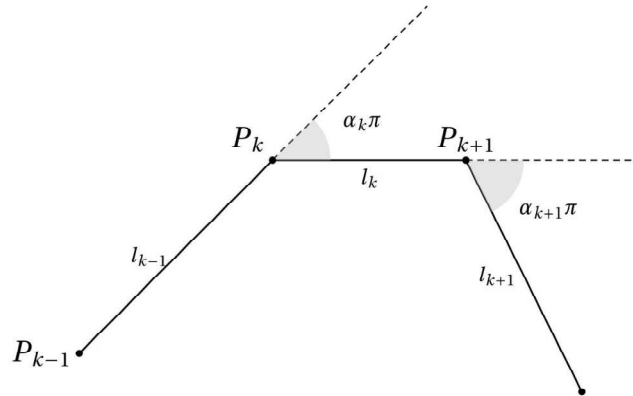
Agora, consideremos a desigualdade (4.2) para o caso onde a curva C é um polígono. Para isto, introduziremos a noção de raio de curvatura nos vértices de um polígono, que é uma boa aproximação para o raio de curvatura de uma curva suave.

4.2 CURVATURA PARA POLÍGONOS

Dado um polígono convexo plano de vértices P_1, P_2, \dots, P_n , denotamos por $l_k = |\overrightarrow{P_k P_{k+1}}|$ o comprimento de seus lados e por $\alpha_k \pi$ a medida de seus ângulos externos (Figura 4.1). É claro que temos $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2$, com $0 < \alpha_k < 1$ e

$$|\overrightarrow{P_{k-1} P_k} \cdot \overrightarrow{P_k P_{k+1}}| = l_{k-1} \cdot l_k \cdot \cos(\alpha_k \pi).$$

Figura 4.1: Ângulos externos ao polígono P_1, P_2, \dots, P_n



Definição 4.1 Dado um polígono plano convexo de vértices P_1, P_2, \dots, P_n , e lados de comprimento l_1, l_2, \dots, l_n , definimos o raio de curvatura no vértice P_k como

$$\rho_k = \frac{l_{k-1} + l_k}{2\alpha_k \pi}.$$

Em particular, a curvatura no vértice P_k é dada por

$$\kappa_k = \frac{1}{\rho_k} = \frac{2\alpha_k \pi}{l_{k-1} + l_k},$$

uma expressão que essencialmente se harmoniza com a definição clássica de curvatura como a razão entre o ângulo e o comprimento. Note também que $l_0 = l_n$.

4.3 UMA VERSÃO DISCRETA DA DESIGUALDADE DE ROS

Agora daremos uma versão discreta para a desigualdade (4.2). Para isso, precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.1 Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ e $f: (\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_1^2}{x_1} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n}.$$

Se $x_1 + \dots + x_n = 2$, então

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

Demonstração. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n x_i^{1/2} \frac{a_i}{x_i^{1/2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} \right)^{1/2}.$$

Mas,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{x_i} = f(x_1, \dots, x_n),$$

e portanto,

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

■

Definição 4.2 Um polígono convexo é chamado umbílico se o raio de curvatura em seus vértices é constante.

É claro que todos os polígonos regulares são umbílicos. Note que o raio de curvatura de um polígono umbílico deve ser igual a $L/2\pi$, onde L é o comprimento do polígono. Este fato é facilmente demonstrado, basta adicionar as igualdades

$$l_{k-1} + l_k = 2\alpha_k \pi \rho, \text{ para } k = 1, \dots, n,$$

onde ρ é o raio de curvatura constante.

Teorema 4.1 Seja L o comprimento de um polígono convexo de lados l_k e raios de curvatura ρ_k . Então

$$\frac{L^2}{4\pi} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l_k \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2}. \quad (4.4)$$

A igualdade vale se, e somente se, o polígono é umbílico.

Demonstração. Pela definição de ρ_k , o segundo termo desta desigualdade é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l_k \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2} &= \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^n l_k \left(\frac{l_{k-1} + l_k}{\alpha_k} + \frac{l_k + l_{k+1}}{\alpha_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_{k+1}^n \frac{(l_k + l_{k+1})^2}{\alpha_{k+1}}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2$, podemos aplicar o Lema 4.1 e obter

$$\frac{1}{8\pi} \sum_{k+1}^n \frac{(l_k + l_{k+1})^2}{\alpha_{k+1}} \geq \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{2} (2L)^2,$$

donde,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l_k \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2} \geq \frac{L^2}{4\pi}$$

e a desigualdade do teorema está provada.

Pela demonstração do Lema 4.1, a igualdade é obtida quando

$$\alpha_{k+1} = \frac{2(l_k + l_{k+1})}{\sum_{i=1}^n l_i + l_{i+1}} = \frac{l_k + l_{k+1}}{L} = \frac{2\alpha_{k+1}\pi\rho_k}{L},$$

donde,

$$\rho_k = \frac{L}{2\pi}, \quad k = 1, \dots, n,$$

e o polígono é umbílico. ■

Chegamos agora na versão discreta correspondente à Desigualdade de Ros.

Corolário 4.2 *Se A é a área de um polígono convexo com lados l_k e raios de curvatura ρ_k , então temos*

$$A \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n l_k \frac{\rho_k + \rho_{k+1}}{2}.$$

Demonstração. A prova é uma consequência direta do Teorema 4.1 e da Desigualdade Isoperimétrica. ■

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da Desigualdade Isoperimétrica possibilitou a revisão de diversos conceitos da Geometria Plana, do Cálculo e da Geometria Diferencial. Associado a isso, também houve um estudo do Problema Isoperimétrico ao longo da história, como foi tratado pelos gregos e até que ponto o problema foi estudado com as concepções geométricas de suas épocas. Embora neste trabalho tenhamos lidado apenas com a DI no plano, a introdução do conceito de curvatura nos inspira a partir para um horizonte mais amplo, onde a DI se reconfigura no contexto das superfícies e variedades riemannianas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. XXIV Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 4. ed. SBM, Rio de Janeiro, 1999.
- [3] BESICOVITCH, A.S. *The Kakeya Problem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 70, No. 7, p. 697-706, 1963.
- [4] BLÅSJÖ, Viktor. *The Isoperimetric Problem*. The American Mathematical Monthly, No. 112, p. 526–566, 2005.
- [5] BRUCKNER, Andrew M.; BRUCKNER, Judith B.; THOMSON, Brian S. *Real Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [6] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6. ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [7] COOKE, Roger L. *The History of Mathematics: A Brief Course*. 3rd. ed. John Wiley & Sons, New York, 2013.
- [8] COOLIDGE, J. L. *A Historically Interesting Formula for the Area of a Quadrilateral*. The American Mathematical Monthly, Vol. 46, No. 6, p. 345–347, 1939.
- [9] CUFÍ, Juliá; REVENTÓS, Agustí; RODRÍGUEZ, Carlos J. *Curvature for Polygons*. The American Mathematical Monthly, Vol. 122, No. 4, p. 332–337, 2015.
- [10] DALCIN, Mário. *A Demonstração feita por Heron*. Revista do Professor de Matemática, No. 36.
- [11] KLASER, Patrícia Kruse; TELICHEVESKY Miriam. *O Problema Isoperimétrico*. IV Colóquio de Matemática da Região Sul. FURG, Rio Grande do Sul, 2016.

- [12] LAX, Peter D. *A Short Path to the Shortest Path*. The American Mathematical Monthly, No. 102, p. 158–159, 1995.
- [13] HEATH, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*. Clarendon, Oxford, 1921.
- [14] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.
- [15] MERCURI, Francesco; PEDROSA, Renato. *Uma Introdução às Desigualdades Isoperimétricas*. XIX Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [16] MOREIRA, C. G. T. de A.; SALDANHA, Nicolau Corção. *A desigualdade isoperimétrica*. Revista Matemática Universitária, No. 15, p. 13–19, 1993.
- [17] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. 4, 3rd ed. Publish or Perish, Houston, 1999.
- [18] TAPP, K. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Springer, New York, 2016.