UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAIR DAMASCENA DE ARAÚJO SANTOS

EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO DE GREEN VIA TEOREMA DE HAHN-BANACH

Patos - PB
2017

JAIR DAMASCENA DE ARAÚJO SANTOS

EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO DE GREEN VIA TEOREMA DE HAHN-BANACH

Monografia de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Patos - PB
2017

S237e Santos, Jair Damascena de Araujo.
Existência de Função de Green via Teorema de Hahn-Banach [manuscrito] : / Jair Damascena de Araujo Santos. - 2017.
32 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2017.
"Orientação : Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Função de Green. 2. Teorema de Hahn-Banach. 3. Problema de Dirichlet.

21. ed. CDD 515.35

Jair Damascena de Araújo Santos

EXISTÊNCIA DE FUNÇÃO DE GREEN VIA TEOREMA DE HAHN-BANACH

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena emMatemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em 07 de dezembro de 2017

Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

À minha mãe, minha família e meus amigos.

AGRADECIMENTOS

À Deus por toda minha vida.

À minha mãe Irene, ao meu pai João, aos meus irmãos Jailson e Jailton, e à toda minha família e amigos por todo o apoio.

À minha namorada Lívia pelo apoio e companheirismo.

Aos professores do Curso de Matemática da UEPB do Campus de Patos, em especial, Arlandson Matheus, Vilmar Vaz, Francisco Sibério, Rhodolffo Lima, Alcides Olinto e Elias Neto que contribuíram ao longo da graduação, por meio das disciplinas.

Ao professor e orientador Arlandson Matheus pela sua dedicação à orientação.

Ao professor Francisco Sibério pelo convite para participar de um PIBIC sob sua orientação que resultou na intenção de realizar este trabalho em Análise Matemática.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando foi necessário.

Aos colegas de classe pelos cinco anos de curso trabalhando juntos.

RESUMO

Nesta monografia, apresentamos uma prova da existência de função de Green para domínios limitados do plano euclidiano utilizando o teorema de Hahn-Banach para extensão de funcionais lineares. A função de Green é uma poderosa ferramenta para resolver o Problema de Dirichlet, que é um tipo de problema de fronteira e consiste em encontrar uma função u que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em } D \\ u = f \quad \text{em } \partial D, \end{cases}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado do plano e ∂D é a fronteira de D. Suporemos que ∂D é de classe C^1. Nosso trabalho baseia-se no artigo de P. Lax [7].

Palavras-chave: Função de Green. Teorema de Hahn-Banach. Problema de Dirichlet.

ABSTRACT

In this monograph we present a proof of the existence of Green's function for bounded domains of the Euclidean plane using the Theorem of Hahn-Banach for extension of linear functionals. The Green's function is a powerful tool to solve the Dirichlet problem, that is a type of boundary problem, and consists in finding a function u that satisfies

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } D \\ u = f \quad \text{on } \partial D, \end{cases}$$

where $D \subset \mathbb{R}^2$ is a bounded domain of the plane, and ∂D is the boundary of D. We assumed that ∂D is of class C^1. Our work is based on P. Lax's paper [7].

Keywords: Green's Function. Hahn-Banach Theorem. Dirichlet Problem.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é provar a existência de função de Green no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$. Para isso, vamos precisar de alguns resultados da Análise Funcional. No Capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos básicos de Análise Funcional com o intuito de fornecermos as bases para enunciar e demonstrar o Teorema de Hahn-banach, resultado mais importante do capítulo inicial e que é de fundamental importância para alcançarmos o propósito desta monografia.

No Capítulo 2, abordaremos a equação de Laplace no plano, uma das mais importantes equações diferenciais parciais. A seguir, apresentaremos algumas propriedades da equação de Laplace e definiremos a chamada solução fundamental da equação de Laplace no plano. Por fim, introduziremos a definição de função de Green, que é uma ferramenta extremamente útil para solucionar o problema de Dirichlet.

Finalmente, no Capítulo 3, apresentaremos uma prova da existência de função de Green para o problema de Dirichlet definido sobre um domínio limitado do plano. A prova que aqui ofereceremos é devida a P. Lax [7].

Capítulo 1

Alguns Conceitos de Análise Funcional

Neste capítulo inicial, abordaremos alguns conceitos básicos de Análise Funcional. O resultado mais importante deste capítulo é teorema de Hahn-Banach para extensão de funcionais lineares. Este capítulo baseia-se em [5]. O leitor pode consultar também [3] ou [6].

Definição 1.1. Definimos *espaço vetorial* como uma estrutura algébrica formada por um conjunto não-vazio X, cujos elementos são chamados de *vetores*, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$\begin{array}{rccc} + : & X\times X & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K}\times X & \longrightarrow & X \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha x \end{array}$$

chamadas, respectivamente, de *adição de vetores* e de *multiplicação de um vetor por um escalar*, que satisfazem as seguintes propriedades:

A1) $x + y = y + x, \quad \forall\, x, y \in X;$
A2) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall\, x, y, z \in X;$
A3) $\exists\, 0 \in X,$ tal que $x + 0 = x, \quad \forall\, x \in X;$
A4) $\forall\, x \in X,\ \exists\, -x \in X,$ tal que $x + (-x) = 0;$
M1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X;$
M2) $1x = x, \quad \forall\, x \in X$ (onde 1 é a unidade do corpo $\mathbb{K}$);
D1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x, y \in X;$
D2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X.$

Um *subespaço* de um espaço vetorial X é um subconjunto não-vazio Y de X tal que para todos $y_1, y_2 \in Y$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ temos $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Portanto

Y é ele próprio um espaço vetorial, as duas operações algébricas sendo as induzidas a partir das operações de X.

Vamos denotar um espaço vetorial pela letra que denota o conjunto dos vetores, neste caso por X.

Uma *combinação linear* de vetores $x_1, \ldots, x_m$ de um espaço vetorial X é uma expressão da forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m,$$

onde os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ são escalares quaisquer.

Para todo $M \subset X$ não-vazio, o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de M é chamado a *expansão* de M, denotado por

$$\operatorname{span} M.$$

Este é um subespaço Y de X, e dizemos que Y é *gerado* por M.

Definição 1.2. Independência e dependência lineares de um dado conjunto M de vetores $x_1, \ldots, x_r$ ($r \geqslant 1$) em um espaço vetorial X são definidas por meio da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0, \tag{1.1}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ são escalares. Claramente, a equação (1.1) vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$. Se esta é a única r-nupla de escalares para a qual (1.1) vale, o conjunto M é dito *linearmente independente*. M é dito *linearmente dependente* se M não for linearmente independente, isto é, se (1.1) também vale para alguma r-nupla de escalares não todos nulos.

Um subconjunto arbitrário M de X é dito *linearmente independente* se todo subconjunto finito não-vazio de M é linearmente independente. M é dito *linearmente dependente* se M não for linearmente independente.

Uma motivação para essa terminologia vem do fato de que se $M = \{x_1, \ldots, x_r\}$ é linearmente dependente, no mínimo um vetor de M pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores. Por exemplo, se (1.1) vale com $\alpha_r \neq 0$, então M é linearmente dependente e podemos resolver (1.1) para x_r obtendo

$$x_r = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{r-1} x_{r-1} \quad (\beta_j = -\alpha_j/\alpha_r).$$

Definição 1.3. Um espaço vetorial X é dito de *dimensão finita* se existe um inteiro positivo n tal que X contém um conjunto linearmente independente com n vetores, enquanto qualquer conjunto com $n+1$ ou mais vetores de X é linearmente dependente. n é chamado a *dimensão* de X, denotado por $n = \dim X$. Por definição, $X = \{0\}$ é de dimensão finita e $\dim X = 0$. Se X não é de dimensão finita, então ele é de *dimensão infinita*.

Em Análise Funcional, os únicos espaços vetorias estudados são os espaços vetoriais reais (quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) e complexos (quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de dimensão infinita.

Exemplo 1.1. O espaço $\mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial real formado pelo conjunto de todas as n-uplas de números reais, denotadas por $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, etc., com as duas operações algébricas definidas da forma usual

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exemplo 1.2. O espaço $\mathbb{C}^n$ é definido de modo similar ao espaço $\mathbb{R}^n$. Ele é formado pelo conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números complexos $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, etc., e é um espaço vetorial complexo com as operações algébricas definidas de modo análogo às do Exemplo 1.1, agora com $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.3. Seja $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $x : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Ele se torna um espaço vetorial quando se definem a soma $x + y$ de duas funções e o produto αx da função x pelo escalar α da maneira usual:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\alpha x)(t) = \alpha x(t).$$

Exemplo 1.4. Seja $C[a, b]$ o conjunto de todas as funções reais $x, y, \ldots$ de uma variável real independente t que são definidas e contínuas num dado intervalo fechado $J = [a, b]$. Esse conjunto torna-se um espaço vetorial real com as operações algébricas definidas da maneira usual:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

De fato, $x + y$ e αx são funções reais contínuas definidas em $[a, b]$, se x e y o forem e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.5. Seja $p \geqslant 1$ um número real fixo. Por definição, cada elemento do espaço l^p é uma sequência $x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ de números tais que a série $|\xi_1|^p + |\xi_2|^p + \cdots$ converge, isto é,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < +\infty \quad (p \geqslant 1 \text{ fixo}). \tag{1.2}$$

Se tomarmos somente sequências reais satisfazendo (1.2), obteremos o espaço real $l^p(\mathbb{R})$, e se tomarmos sequências complexas satisfazendo (1.2), obteremos o espaço complexo $l^p(\mathbb{C})$.

l^p é de fato um espaço vetorial. Por exemplo, no caso $p = 2$, temos o *espaço de sequências de Hilbert* l^2. Definindo as operações algébricas de soma e multiplicação por escalar da forma usual para sequências, isto é,

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots) + (\eta_1, \eta_2, \ldots) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots)$$

$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots),$$

temos que $x = (\xi_j) \in l^2$ e $y = (\eta_j) \in l^2$ implicam $x + y \in l^2$, como se vê pela *desigualdade de Minkowski* para séries

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{1/p}; \tag{1.3}$$

e também $\alpha x \in l^2$. O leitor pode encontrar detalhes em [5].

Definição 1.4. Uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

é chamada de uma *norma* sobre o espaço vetorial X se satisfaz as seguintes propriedades:

N1) $\|x\| \geqslant 0, \quad \forall\, x \in X$;
N2) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall\, x \in X$;
N4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X$ (Desigualdade triangular).

Quando X é um espaço vetorial munido de uma norma, dizemos que X é um *espaço vetorial normado*.

Definição 1.5. Uma *sequência* (x_n) em um espaço vetorial normado X é dita *convergente* se existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dizemos, então, que x é o *limite* da sequência (x_n), ou que (x_n) *converge* para x, e denotamos este fato por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim x_n = x$, ou simplesmente $x_n \to x$.

Uma sequência é chamada de *divergente* quando não é convergente. Dizemos, então, que ela *diverge*.

Observação. $x - y = x + (-y)$.

Lema 1.1. *O limite de uma sequência convergente em um espaço vetorial normado X é único.*

Demonstração. De fato, se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, por (N4)

$$0 \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \to 0 + 0,$$

donde $x = y$ por (N2). $\square$

Definição 1.6. Uma sequência (x_n) em um espaço vetorial normado X é chamada de *sequência de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \ \Rightarrow \ \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Definição 1.7. Um *espaço de Banach* é um espaço vetorial normado X que é *completo*, isto é, um espaço tal que toda sequência de Cauchy em X converge para algum elemento de X.

Exemplo 1.6. Os espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ dos Exemplos 1.1 e 1.2 com a norma definida por

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$$

são espaços de Banach. De fato, vamos considerar primeiro $\mathbb{R}^n$. Seja (x_m) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, onde vamos denotar $x_m = (\xi_1^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)})$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2\right)^{1/2} < \varepsilon \quad (m, r > N). \tag{1.4}$$

Daí, elevando ambos os lados de (1.4) ao quadrado, temos, para quaisquer $m, r > N$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)})^2 < \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}| < \varepsilon.$$

Isso mostra que para cada j fixado ($1 \leqslant j \leqslant n$), a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Sabemos que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge. Assim, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses n limites, definimos $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Claramente, $x \in \mathbb{R}^n$. Segue-se de (1.4), fazendo $r \to \infty$, que

$$\|x_m - x\| \leqslant \varepsilon \quad (m > N).$$

Isso mostra que x é o limite de (x_m) e prova a completude de $\mathbb{R}^n$. Usando uma demonstração análoga a esta e tendo em vista que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ também converge, verifica-se a completude de $\mathbb{C}^n$.

Exemplo 1.7. O espaço l^p do Exemplo 1.5 é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p}. \tag{1.5}$$

De fato, seja (x_n) qualquer sequência de Cauchy no espaço l^p, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots)$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Segue-se que, para todo $j = 1, 2, ...$, temos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (m, n > N). \tag{1.7}$$

De (1.7) vemos que $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números. Ela converge já que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são completos (toda sequência de Cauchy neles converge). Então $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses limites, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$. Mostraremos que $x \in l^p$ e $x_m \to x$.

De (1.6) temos, para quaisquer $m, n > N$

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}|^p < \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos, para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leqslant \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Façamos agora $k \to \infty$. Então, para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(m)} - \xi_j|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{1.8}$$

Isso mostra que $x_m - x = (\xi_j^{(m)} - \xi_j) \in l^p$. Como $x_m \in l^p$, segue por meio da desigualdade de Minkowski (1.3) no Exemplo 1.5 que

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^p.$$

Além disso, a série em (1.8) representa $\|x_m - x\|^p$, de modo que (1.8) implica que $x_m \to x$. Isso prova a completude de l^p, onde $1 \leqslant p < +\infty$.

Exemplo 1.8. Vamos denotar por l^∞ o conjunto de todas as sequências limitadas de números complexos, ou seja, cada elemento de l^∞ é uma sequência complexa

$$x = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$$

tal que para todo $j = 1, 2, \ldots$ temos

$$|\xi_j| \leqslant c_x$$

onde c_x é um número real que depende de x, mas não depende de j. l^∞ com as operações algébricas usuais para sequências é um espaço vetorial já que a soma de sequências limitadas e o produto de uma constante por uma sequência limitada são sequências limitadas. l^∞ com a norma definida por

$$\|x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j|$$

é um espaço de Banach. Para verificarmos isso, tomemos uma sequência de Cauchy qualquer (x_m) no espaço l^∞, onde $x_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots)$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um N tal que para quaisquer $m, n > N$,

$$\|x_m - x_n\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon.$$

A fortiori, para todo j fixado,

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(n)}| < \varepsilon \quad (m, n > N). \tag{1.9}$$

Portanto, para todo j fixado, a sequência $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \ldots)$ é uma sequência de Cauchy de números. Como $\mathbb{C}$ é completo, $\xi_j^{(m)} \to \xi_j$ quando $m \to \infty$. Usando esses infinitos limites $\xi_1, \xi_2, \ldots$, definimos $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ e mostraremos que $x \in l^\infty$ e $x_m \to x$. De (1.9), fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$|\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqslant \varepsilon \quad (m > N). \tag{1.10}$$

Como $x_m = (\xi_j^{(m)}) \in l^\infty$, existe um número real k_m tal que $|\xi_j^{(m)}| \leqslant k_m$ para todo j. Portanto, pela desigualdade triangular

$$|\xi_j^{(m)}| \leqslant |\xi_j - \xi_j^{(m)}| + |\xi_j^{(m)}| \leqslant \varepsilon + k_m \quad (m > N).$$

Essa desigualdade vale para todo j, e o lado direito não envolve j. Portanto, (ξ_j) é uma sequência limitada de números. Isso implica que $x = (\xi_j) \in l^\infty$. Além disso, de (1.10), obtemos

$$\|x_m - x\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j^{(m)} - \xi_j| \leqslant \varepsilon \quad (m > N).$$

Isso mostra que $x_m \to x$. Fica, portanto, estabelecida a completude de l^∞.

Exemplo 1.9. O espaço $C[a, b]$ do Exemplo 1.4 é um espaço de Banach com a norma dada por

$$\|x\| = \max_{t \in J} |x(t)| \tag{1.11}$$

onde $J = [a, b]$. De fato, seja (x_m) uma sequência de Cauchy qualquer em $C[a, b]$. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para quaisquer $m, n > N$ temos

$$\|x_m - x_n\| = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Desse modo, para qualquer $t = t_0 \in J$ fixo,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon \quad (m, n > N).$$

Isso mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sequência converge, isto é, $x_m(t_0) \to x(t_0)$ quando $m \to \infty$. Dessa forma, podemos associar a cada $t \in J$ um único número real $x(t)$. Isso define (ponto a ponto) uma função x sobre J. Mostraremos que $x \in C[a, b]$ e que $x_m \to x$.

De (1.12) com $n \to \infty$ temos

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \quad (m > N).$$

Portanto, para todo $t \in J$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \quad (m > N).$$

Isso mostra que $(x_m(t))$ converge para $x(t)$ uniformemente em J. Já que as x_m's são contínuas em J e a convergência é uniforme, a função limite x é contínua sobre J, como é sabido do Cálculo. Portanto $x \in C[a, b]$ e também $x_m \to x$. Isso prova que $C[a, b]$ é completo.

Definição 1.8. Seja X um espaço vetorial definido sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & D(f) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

é chamada de *funcional linear* se satisfaz

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x),$$

quaisquer que sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in D(f)$, onde $D(f) \subset X$ é o domínio de f.

Observação. Em $f(x + y) = f(x) + f(y)$, a soma que aparece no lado esquerdo da igualdade é a soma definida sobre o espaço vetorial X, enquanto a soma no lado direito é a soma definida sobre o corpo $\mathbb{K}$. Um comentário análogo vale também para $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Definição 1.9. Seja X um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear, onde $D(f) \subset X$. Dizemos que f é *contínuo no ponto* $x_0 \in D(f)$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dizemos que f é *contínuo* se f for contínuo em todo ponto de $D(f)$.

Definição 1.10. Seja X um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear, onde $D(f) \subset X$. Dizemos que f é *limitado* se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| \leqslant c\|x\|, \tag{1.13}$$

para todo $x \in D(f)$.

Se em (1.13) considerarmos $x \neq 0$, então podemos fazer

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant c. \tag{1.14}$$

Se considerarmos

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}, \tag{1.15}$$

então $\|f\|$ satisfaz (1.14) e também (1.13). Assim $\|f\|$ é o menor $c \in \mathbb{R}$ para o qual vale (1.13).

O número $\|f\|$ é chamado de *norma* do funcional linear f. Se $D(f) = \{0\}$, definimos $\|f\| = 0$.

Lema 1.2. *Seja f um funcional linear limitado como na Definição 1.10. Então:*

(i) Uma fórmula alternativa para a norma de f é

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\| = 1}} |f(x)|. \tag{1.16}$$

(ii) A norma definida por (1.15) *satisfaz (N1) a (N4) na Definição 1.4.*

Demonstração. (i) Escrevendo $\|x\| = a$ e tomando $y = (1/a)x$, onde $x \neq 0$, temos $\|y\| = \|x\|/a = 1$. Como f é linear, (1.15) torna-se

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\| \neq 0}} \frac{1}{a}|f(x)| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\| \neq 0}} \left| f\left(\frac{1}{a}x\right)\right| = \sup_{\substack{y \in D(f) \\ \|y\| = 1}} |f(y)|.$$

(ii) (N1) é óbvio. Também é evidente $\|0\| = 0$. Agora, note que, por definição, $\|f\| = 0$ implica $f(x) = 0$, $\forall\, x \in D(f)$, donde $f \equiv 0$. Logo (N2) vale. Além disso, podemos obter (N3) de

$$\sup_{\|x\|=1} |\alpha f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha||f(x)| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

onde $x \in D(f)$. Finalmente, (N4) segue de

$$\sup_{\|x\|=1} |(f_1 + f_2)(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f_1(x)| + \sup_{\|x\|=1} |f_2(x)|$$

onde $x \in D(f)$.

□

Teorema 1.1. *Um funcional linear f com domínio $D(f)$ contido em um espaço vetorial normado X é contínuo se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Para $f = 0$ a afirmação é trivial. Seja $f \neq 0$. Então $\|f\| \neq 0$. Suponhamos que f seja limitada e consideremos qualquer $x_0 \in D(f)$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então, como f é linear, para todo $x \in D(f)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{onde} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|},$$

obtemos

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leqslant \|f\|\|x - x_0\| < \|f\|\delta = \varepsilon.$$

Já que $x_0 \in D(f)$ foi tomado arbitrariamente, isso mostra que f é contínuo.

Por outro lado, vamos supor que f é contínuo em um $x_0 \in D(f)$ arbitrário. Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f),\ \|x - x_0\| \leqslant \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.17}$$

Agora, tomemos algum $y \neq 0$ em $D(f)$ e façamos

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y. \quad \text{Então} \quad x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Portanto $\|x - x_0\| = \delta$, de modo que podemos usar (1.17). Como f é linear, temos

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| = \left| f\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right)\right| = \frac{\delta}{\|y\|} |f(y)|$$

e (1.17) implica

$$\frac{\delta}{\|y\|} |f(y)| \leqslant \varepsilon. \quad \text{Assim} \quad |f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|.$$

Isso pode ser escrito como $|f(y)| \leqslant c\|y\|$, onde $c = \varepsilon/\delta$, e mostra que f é limitado.

□

Exemplo 1.10. A norma $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre um espaço normado X é um funcional sobre X que não é linear.

Exemplo 1.11. O produto escalar com um fator mantido fixo define um funcional $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por meio de

$$f_a(x) = x \cdot a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

onde $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ é fixo.

A aplicação f_a é um funcional linear limitado. Como a linearidade é evidente, provemos a limitação. Temos

$$|f_a(x)| = |x \cdot a| \leqslant \|x\|\|a\|,$$

de modo que $\|f_a\| \leqslant \|a\|$ segue-se de (1.16) se tomarmos o supremo sobre todo x de norma um. Por outro lado, tomando $x = a$ e usando (1.13) com $c = \|f_a\|$, obtemos

$$\|f_a\| \geqslant \frac{|f_a(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Portanto a norma de f_a é $\|f_a\| = \|a\|$.

Exemplo 1.12. A integral definida é um número, se calculada para uma função, como fazemos no Cálculo a maior parte do tempo. No entanto, a situação muda completamente se considerarmos essa integral para todas as funções em um determinado espaço de funções. Então a integral torna-se um funcional sobre tal espaço, que denotaremos por f. Consideremos o espaço $C[a,b]$ (veja o Exemplo 1.4). Então f é definido por

$$f(x) = \int_a^b x(t)\ \mathrm{d}t \quad x \in C[a,b].$$

Como o funcional f é claramente linear, vamos provar que f é limitado e que a sua norma é $\|f\| = b - a$.

De fato, escrevendo $J = [a,b]$ e relembrando a norma sobre $C[a,b]$ (confira (1.11)), obtemos

$$|f(x)| = \left|\int_a^b x(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\max_{t\in J}|x(t)| = (b-a)\|x\|.$$

Tomando o supremo sobre todo x de norma um, obtemos $\|f\| \leqslant b - a$. Para termos $\|f\| \geqslant b - a$, escolhemos a função $x = x_0 \equiv 1$, (note que $\|x_0\| = 1$) e usamos (1.13) com $c = \|f\|$:

$$\|f\| \geqslant \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b\ \mathrm{d}t = b - a.$$

Exemplo 1.13. Outro funcional praticamente importante sobre $C[a,b]$ é obtido se escolhermos um $t_0 \in J = [a,b]$ fixo e definirmos

$$f_1(x) = x(t_0) \quad x \in C[a,b].$$

f_1 é linear. Além disso, f_1 é limitado e tem norma $\|f_1\| = 1$. De fato, temos

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leqslant \|x\|,$$

e isso implica $\|f_1\| \leqslant 1$ por (1.15). Por outro lado, para $x_0 \equiv 1$ temos $\|x_0\| = 1$ e obtemos de (1.13) com $c = \|f\|$

$$\|f_1\| \geqslant |f_1(x_0)| = 1.$$

Exemplo 1.14. Podemos obter um funcional linear f sobre o espaço de Hilbert l^2 (confira o Exemplo 1.5) escolhendo um $a = (\alpha_j) \in l^2$ fixo e definindo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \alpha_j$$

onde $x = (\xi_j) \in l^2$. Essa série converge absolutamente e f é limitado, já que a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \alpha_j| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|^2}$$

nos dá (somatório sobre j de 1 a ∞)

$$|f(x)| = \left|\sum \xi_j \alpha_j\right| \leqslant \sum |\xi_j \alpha_j| \leqslant \sqrt{\sum |\xi_j|^2} \sqrt{\sum |\alpha_j|^2} = \|x\| \|a\|.$$

O conjunto de todos os funcionais lineares sobre um espaço vetorial X pode ele próprio se tornar um espaço vetorial (veja Exemplo 1.3). Esse espaço é denotado por X^* e é chamado o *espaço dual algébrico* de X. Suas operações algébricas de espaço vetorial são definidas de uma maneira natural como a seguir. A soma $f_1 + f_2$ de dois funcionais f_1 e f_2 é o funcional s cujo valor em todo $x \in X$ é

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

o produto αf de um escalar α e um funcional f é o funcional p cujo valor em $x \in X$ é

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Seja A um conjunto não-vazio e f uma função definida em $B \subset A$, com B não-vazio. Uma *extensão* de f ao conjunto A é uma função g definida em A tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in B$. Dizemos também que f é a *restrição* de g ao conjunto $B \subset A$.

Um *funcional sublinear* sobre um espaço vetorial X é uma aplicação $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que é *subaditiva*, isto é,

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall\, x, y \in X, \tag{1.18}$$

e *homogênea positiva*, isto é,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall\, \alpha \geqslant 0 \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\, x \in X. \tag{1.19}$$

Uma norma sobre o espaço X, por exemplo, é um funcional sublinear.

Definição 1.11. Um *conjunto parcialmente ordenado* é um conjunto M sobre o qual está definida uma *ordem parcial*, isto é, uma relação binária, denotada por $\leqslant$, que satisfaz

P1) $a \leqslant a$ para todo $a \in M$. (Reflexividade)
P2) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, então $a = b$. (Anti-simetria)
P3) Se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então $a \leqslant c$. (Transitividade)

"Parcialmente" enfatiza que M pode conter elementos a e b para os quais nem $a \leqslant b$ nem $b \leqslant a$ se verifica. Então a e b são chamados *elementos incomparáveis.* Por outro lado, dois elementos a e b são chamados "elementos comparáveis"se eles satisfazem $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (ou ambos).

Um *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia* é um conjunto parcialmente ordenado tal que quaisquer dois elementos do conjunto são comparáveis. Em outras palavras, uma cadeia é um conjunto parcialmente ordenado que não contém elementos incomparáveis.

Uma *cota superior* de um subconjunto W de um conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $u \in M$ tal que

$$x \leqslant u \quad \forall\, x \in W.$$

Dependendo de M e W e da relação de ordem, tal u pode ou não existir. Um *elemento maximal* de M é um $m \in M$ tal que

$$m \leqslant x \;\Rightarrow\; m = x.$$

Novamente, M pode ou não ter elementos maximais. Note ainda que um elemento maximal não precisa ser uma cota superior.

Exemplo 1.15. O conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais com a sua relação de ordem usual é um conjunto totalmente ordenado. $\mathbb{R}$ não tem elementos maximais.

Exemplo 1.16. Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes (conjunto de todos os subconjuntos) de um dado conjunto X e seja $A \leqslant B$ significando que $A \subset B$, isto é, A é subconjunto de B. Então $\mathcal{P}(X)$ é parcialmente ordenado. O único elemento maximal de $\mathcal{P}(X)$ é X.

Exemplo 1.17. O conjunto $\mathbb{R}^n$ de todas as n-uplas de números reais é parcialmente ordenado pela relação de ordem $x \leqslant y$ definida por $\xi_j \leqslant \eta_j$ para todo $j = 1, ..., n$, onde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\xi_j \leqslant \eta_j$ é a relação de ordem usual de $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.18. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais (inteiros positivos) com a relação de ordem $m \leqslant n$ significando que m divide n é um conjunto parcialmente ordenado.

Lema 1.3 (Lema de Zorn). *Seja $M \neq \varnothing$ um conjunto parcialmente ordenado. Suponha que toda cadeia $C \subset M$ tenha um limite superior. Então M tem no mínimo um elemento máximo.*

Demonstração. Veja [4]. □

Vamos agora enunciar e demonstrar agora o *Teorema de Hahn-Banach* para o caso dos espaços vetoriais reais. Este é um teorema de extensão de funcionais lineares.

Teorema 1.2 (Teorema de Hahn-Banach). *Seja X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear sobre X. Além disso, seja f um funcional linear que está definido sobre um subespaço Z de X e que satisfaz*

$$f(x) \leqslant p(x), \quad \forall\ x \in Z. \tag{1.20}$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z para X satisfazendo

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \quad \forall\ x \in X, \tag{1.21}$$

isto é, $\tilde{f}$ é um funcional linear sobre X, que satisfaz (1.21) *sobre X e $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.*

Demonstração. Provaremos o seguinte:

(a) O conjunto E de todas as extensões lineares g de f satisfazendo $g(x) \leqslant p(x)$ sobre seus domínios $D(g)$ pode ser parcialmente ordenado e o lema de Zorn garante a existência de um elemento máximo $\tilde{f}$ de E.

(b) $\tilde{f}$ está definido no espaço X inteiro.

(c) Uma relação auxiliar que foi usada em (b).

Começamos com a parte

(a) Seja E o conjunto de todas as extensões lineares g de f que satisfazem a condição

$$g(x) \leqslant p(x), \quad \forall\, x \in D(g).$$

Claramente, $E \neq \varnothing$ já que $f \in E$. Sobre E podemos definir uma ordem parcial onde

$$g \leqslant h \quad \text{significa que} \quad h \text{ é uma extensão de } g,$$

isto é, por definição, $D(g) \subset D(h)$ e $h(x) = g(x)$ para todo $x \in D(g)$.

Para qualquer cadeia $C \subset E$, definimos agora $\hat{g}$ por

$$\hat{g}(x) = g(x) \quad \text{se } x \in D(g) \quad (g \in C).$$

$\hat{g}$ é um funcional linear com domínio

$$D(\hat{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g),$$

que é um espaço vetorial já que C é uma cadeia. A definição de $\hat{g}$ não é ambígua. De fato, para um $x \in D(g_1) \cap D(g_2)$ com $g_1, g_2 \in C$ temos $g_1(x) = g_2(x)$ pois C é uma cadeia, de modo que $g_1 \leqslant g_2$ ou $g_2 \leqslant g_1$. Claramente, $g \leqslant \hat{g}$ para todo $g \in C$. Portanto $\hat{g}$ é uma cota superior para C. Já que $C \subset E$ é arbitrária, o Lema de Zorn garante que E tem um elemento maximal $\tilde{f}$. Pela definição de E, $\tilde{f}$ é uma extensão linear de f que satisfaz

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \quad x \in D(\tilde{f}). \tag{1.22}$$

(b) Mostraremos agora que $D(\tilde{f}) = X$. Suponhamos que isso é falso. Então podemos escolher $y_1 \in X \backslash D(\tilde{f})$ e considerar o subespaço Y_1 de X gerado por $D(\tilde{f})$ e y_1. Note que $y_1 \neq 0$ já que $0 \in D(\tilde{f})$. Qualquer $x \in Y_1$ pode ser escrito como

$$x = y + \alpha y_1, \quad y \in D(\tilde{f}).$$

Essa representação é única. De fato, $y + \alpha y_1 = \tilde{y} + \beta y_1$ com $\tilde{y} \in D(\tilde{f})$ implica $y - \tilde{y} = (\beta - \alpha) y_1$, onde $y - \tilde{y} \in D(\tilde{f})$ enquanto que $y_1 \notin D(\tilde{f})$, de modo que a única solução é $y - \tilde{y} = 0$ e $\beta - \alpha = 0$. Isso significa unicidade.

Podemos definir um funcional g_1 sobre Y_1 como segue

$$g_1(y + \alpha y_1) = \tilde{f}(y) + \alpha c, \tag{1.23}$$

onde c é uma constante real a ser escolhida convenientemente. Não é difícil ver que g_1 é linear. Além disso, para $\alpha = 0$ temos $g_1(y) = \tilde{f}(y)$. Portanto g_1 é uma *extensão própria* de $\tilde{f}$, isto é, uma extensão tal que $D(\tilde{f})$ é um subconjunto próprio de $D(g_1)$. Consequentemente, se pudermos provar que $g_1 \in E$ mostrando que

$$g_1(x) \leqslant p(x) \quad \forall\, x \in D(g_1), \tag{1.24}$$

isso contradirá a maximalidade de $\tilde{f}$, de modo que $D(\tilde{f}) = X$.

(c) Devemos finalmente mostrar que g_1, com uma constante c adequado em (1.23), satisfaz (1.24).

Consideremos y e z em $D(\tilde{f})$. De (1.22) e (1.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(y) - \tilde{f}(z) \;=\; \tilde{f}(y - z) &\leqslant p(y - z) \\
&= p(y + y_1 - y_1 - z) \\
&\leqslant p(y + y_1) + p(-y_1 - z).
\end{aligned}$$

Daí, temos

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant p(y + y_1) - \tilde{f}(y), \tag{1.25}$$

onde y_1 é fixo. Como y não aparece à esquerda e z não aparece à direita, a desigualdade continua a valer se tomarmos o supremo sobre $z \in D(\tilde{f})$ à esquerda (chamemo-lo de m_0) e o ínfimo sobre $y \in D(\tilde{f})$ à direita (chamemo-lo de m_1). Então $m_0 \leqslant m_1$. Para um c com $m_0 \leqslant c \leqslant m_1$, segue-se de (1.25) que

$$-p(-y_1 - z) - \tilde{f}(z) \leqslant c \quad \forall\, z \in D(\tilde{f}) \tag{1.26}$$

$$c \leqslant p(y + y_1) - \tilde{f}(y) \quad \forall\, y \in D(\tilde{f}). \tag{1.27}$$

Vamos provar (1.24) primeiro para α negativo em (1.23) e depois para α positivo. Para $\alpha < 0$ vamos usar (1.26) com z substituído por $\alpha^{-1}y$, isto é,

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right) \leqslant c.$$

Multiplicando por $-\alpha > 0$, obtemos

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) + \tilde{f}(y) \leqslant -\alpha c.$$

Daí e de (1.23), usando $y + \alpha y_1 = x$ (veja acima), obtemos a desigualdade desejada

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha}y\right) = p(\alpha y_1 + y) = p(x).$$

Para $\alpha = 0$ temos $x \in D(\tilde{f})$ e nada a provar. Para $\alpha > 0$ usemos (1.27) com y substituído por $\alpha^{-1}y$ para conseguirmos

$$c \leqslant p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}\left(\frac{1}{\alpha}y\right).$$

Multiplicando por $\alpha > 0$, temos

$$\alpha c \leqslant \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + y_1\right) - \tilde{f}(y) = p(x) - \tilde{f}(y).$$

Daí e de (1.23),

$$g_1(x) = \tilde{f}(y) + \alpha c \leqslant p(x).$$

□

Teorema 1.3 (Teorema de Hahn-Banach generalizado)**.** *Sejam X um espaço vetorial real e p um funcional de valores reais sobre X que é subaditivo, isto é, satisfaz* (1.18)*, e para todo escalar α satisfaz*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{1.28}$$

Além disso, seja f um funcional linear que está definido sobre um subespaço Z de X e que satisfaz

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad \text{para todo } x \in Z. \tag{1.29}$$

Então f tem uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z para X satisfazendo

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{1.30}$$

Demonstração. Temos que (1.29) implica que $f(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in Z$. Portanto, pelo Teorema 1.2, existe uma extensão linear $\tilde{f}$ de Z para X tal que

$$\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{1.31}$$

Daqui e de (1.28), obtemos

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leqslant p(-x) = |-1| p(x) = p(x),$$

isto é, $\tilde{f}(x) \geqslant -p(x)$. Juntamente com (1.31) isto prova (1.30). □

Teorema 1.4 (Teorema de Hahn-Banach para espaços normados)**.** *Seja f um funcional linear limitado sobre um subespaço Z de um espaço normado X. Então existe um funcional linear limitado $\tilde{f}$ sobre X que é uma extensão de f para X e que tem a mesma norma,*

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z, \tag{1.32}$$

onde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

(e $\|f\|_Z = 0$ no caso trivial $Z = \{0\}$).

Demonstração. Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$, e a extensão é $\tilde{f} = 0$. Seja $Z \neq \{0\}$. Queremos usar o Teorema 1.3. Para tanto, devemos primeiro descobrir um p apropriado. Para todo $x \in Z$, temos

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_Z \|x\|.$$

que é da forma (1.29), onde

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|. \tag{1.33}$$

Vemos que p está definido para todo X. Além disso, p satisfaz (1.18) sobre X já que pela desigualdade triangular,

$$p(x + y) = \|f\|_Z \|x + y\| \leqslant \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = p(x) + p(y).$$

p também satisfaz (1.28) sobre X, pois

$$p(\alpha x) = \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x).$$

Portanto, podemos aplicar agora o Teorema 1.3 e concluir que existe um funcional linear $\tilde{f}$ sobre X que é uma extensão de f e que satisfaz

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) = \|f\|_Z \|x\| \qquad x \in X.$$

Tomando o supremo sobre todo $x \in X$ de norma 1, obtemos a desigualdade

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leqslant \|f\|_Z.$$

Uma vez que sob uma extensão a norma não pode diminuir, temos também $\|\tilde{f}\|_X \geqslant \|f\|_Z$. Assim, obtemos (1.32) e o teorema está provado. $\square$

Capítulo 2

Função de Green no Plano

Este capítulo baseia-se em [8]; veja também [2].

Uma *equação diferencial parcial* (EDP) em duas dimensões é uma identidade que relaciona as *variáveis independentes* x e y, uma *variável dependente* $u = u(x, y)$, que é uma função desconhecida das variáveis independentes x e y, e as derivadas parciais de u. Podemos escrever uma EDP como

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

onde F é uma função dada das variáveis x, y, u, u_x, u_y; e $u_x = \partial u/\partial x$ e assim por diante. Essa é a EDP de *primeira ordem* geral em duas variáveis independentes. A *ordem* de uma EDP é dada pela maior ordem das derivadas parciais que nela aparecem. A EDP de *segunda ordem* geral em duas variáveis independentes é

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Dizemos que uma EDP é *linear* se pudermos escrevê-la na forma $\mathcal{L}u = g$, onde $\mathcal{L}$ é um *operador linear* e g é uma função qualquer das duas variáveis independentes. Esse operador linear é uma aplicação $\mathcal{L} : X \longrightarrow X$ que satisfaz $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v$ e $\mathcal{L}(\alpha u) = \alpha\mathcal{L}u$, onde X é o espaço (vetorial) das funções de classe C^2 em um dado domínio D. Se $g = 0$, dizemos que a EDP é linear *homogênea*, e se $g \neq 0$ dizemos que a equação é linear *não-homogênea*.

Exemplo 2.1. Alguns exemplos de EDPs são

(a) $u_x + u_y = 0$;

(b) $u_x + yu_y = 0$;

(c) $u_x + uu_y = 0$;

(d) $u_{xx} + u_{yy} = 0$;

(e) $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$;

(f) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$;

(g) $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$;

(h) $u_x + yu_y + y - 5 = 0$

(i) $u_{xy} = 3x + 2y$

Cada uma das EDPs acima tem duas variáveis independentes, escritas como x e y ou x e t (na Física, geralmente, se escreve x e t). As EDPs de (a) a (c) tem ordem um; (d) e (e) têm ordem dois; (f) tem ordem três; e (g) tem ordem quatro. As equações (c), (e), e (f), diferentemente das outras, não são lineares e as EDPs de (h) e (i) não são homogêneas.

Das equações listadas acima, cinco são lineares e homogêneas. Por outro lado, a equação (e), por exemplo, não é linear, pois apesar de $(u + v)_{xx} = u_{xx} + v_{xx}$ e $(u + v)_{tt} = u_{tt} + v_{tt}$ satisfazerem a propriedade $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v$, com o termo cúbico não se verifica isso:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \neq u^3 + v^3.$$

A vantagem da linearidade para uma equação $\mathcal{L}u = 0$ está no fato de que se u e v são soluções, então $u + v$ também é. Além disso, se $g \neq 0$ e u é uma solução de $\mathcal{L}u = g$, então $u + v$ é também uma solução desta equação não-homogênea, onde v é uma solução de $\mathcal{L}u = 0$.

O *operador de Laplace* Δ definido por

$$\Delta u = \text{div grad } u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy},$$

é um operador linear.

Definição 2.1. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto. Uma função u de classe C^2 em D que satisfaz a *equação de Laplace*

$$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.1}$$

é chamada de *função harmônica*.

Observação. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto se para todo $x \in A$ existir uma bola com centro em x que está contida em A. Dizemos também que se f é uma função definida em um conjunto A e que f e todas as suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k são contínuas em um subconjunto B de A, então f é de classe C^k em B.

A equação de Laplace é uma EDP linear de segunda ordem.

Na reta, temos simplesmente $u_{xx} = 0$, de modo que as únicas funções harmônicas em uma dimensão são $u(x) = A + Bx$, com A, B constantes.

Teorema 2.1 (Princípio do máximo)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (conjunto aberto conexo) limitado e u uma função harmônica em D contínua em $\overline{D} = D \cup \partial D$. Então u assume seus valores máximo e mínimo em ∂D, mas não em D (a menos que u seja constante), isto é, existem $\mathbf{x}_M, \mathbf{x}_m \in \partial D$ tais que*

$$u(\mathbf{x}_m) \leqslant u(\mathbf{x}) \leqslant u(\mathbf{x}_M)$$

para todo $\mathbf{x} \in D$, onde $\mathbf{x} = (x, y)$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Tome $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \varepsilon|\mathbf{x}|^2$. Então

$$\Delta v = \Delta u + \varepsilon\Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\varepsilon > 0 \quad \text{em } D.$$

Mas $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \leqslant 0$ em um ponto de máximo interior a D, pelo teste da segunda derivada. Assim sendo, $v(\mathbf{x})$ não tem ponto de máximo interior a D.

Agora $v(\mathbf{x})$, sendo uma função contínua, $v(\mathbf{x})$ atinge um máximo em algum lugar no fecho $\overline{D} = D \cup \partial D$. Digamos que o máximo de $v(\mathbf{x})$ é atingido em $\mathbf{x}_0 \in \partial D$. Então, para todo $\mathbf{x} \in D$,

$$u(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + \varepsilon|\mathbf{x}_0|^2 \leqslant \max_{\partial D} u + \varepsilon l^2,$$

onde l é a maior distância de ∂D à origem. Como isso é verdadeiro para qualquer $\varepsilon > 0$, temos

$$u(\mathbf{x}) \leqslant \max_{\partial D} u \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D.$$

Esse máximo é atingido em algum ponto $\mathbf{x}_M \in \partial D$. Assim $u(\mathbf{x}) \leqslant u(\mathbf{x}_M)$ para todo $\mathbf{x} \in \overline{D}$, que é a conclusão desejada.

A existência de um ponto de mínimo $\mathbf{x}_m$ é demonstrada de modo análogo. $\square$

Observação. Por simplicidade da notação, vamos denotar a norma dos elementos de $\mathbb{R}^2$ com barras simples, isto é, $\|\mathbf{x}\|$ será indicado por $|\mathbf{x}|$, onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 2.2 (Unicidade de solução para o problema de Dirichlet)**.** *Existe uma única função u satisfazendo o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em } D \\ u = f \quad \text{em } \partial D. \end{cases} \tag{2.2}$$

Demonstração. Seja v uma função que satisfaz (2.2). Tomemos $w = u - v$. Então $\Delta w = 0$ em D e $w = 0$ em ∂D. Pelo Teorema 2.1,

$$0 = w(\mathbf{x}_m) \leqslant w(\mathbf{x}) \leqslant w(\mathbf{x}_M) = 0 \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in D.$$

Assim, o máximo e o mínimo de $w(\mathbf{x})$ são zero. Isso significa que $w = 0$ e $u = v$. □

Em uma dimensão, onde D é um intervalo $a < x < b$, a fronteira de D consiste apenas dos pontos a, b, de modo que o problema de Dirichlet toma a forma simples

$$u(a) = c \qquad \text{e} \qquad u(b) = k,$$

onde c, k são constantes.

Teorema 2.3. *A equação de Laplace é invariante sob movimentos de translação e rotação.*

Demonstração. De fato, uma translação no plano é uma transformação

$$x' = x + a \qquad y' = y + b.$$

Invariância em translações significa simplesmente que $u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$.

Uma rotação no plano através do ângulo α é dada por

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y' &= -x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x'}\cos\alpha - u_{y'}\operatorname{sen}\alpha \\ u_y &= u_{x'}\operatorname{sen}\alpha + u_{y'}\cos\alpha \\ u_{xx} &= (u_{x'}\cos\alpha - u_{y'}\operatorname{sen}\alpha)_{x'}\cos\alpha - (u_{x'}\cos\alpha - u_{y'}\operatorname{sen}\alpha)_{y'}\operatorname{sen}\alpha \\ u_{yy} &= (u_{x'}\operatorname{sen}\alpha + u_{y'}\cos\alpha)_{x'}\operatorname{sen}\alpha + (u_{x'}\operatorname{sen}\alpha + u_{y'}\cos\alpha)_{y'}\cos\alpha. \end{aligned}$$

Adicionando, temos

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= (u_{x'x'} + u_{y'y'})(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + u_{x'y'}\cdot(0) \\ &= u_{x'x'} + u_{y'y'}. \end{aligned}$$

Isso prova a invariância do operador de Laplace. □

Uma boa estratégia para investigar qualquer equação diferencial parcial é primeiro identificar algumas soluções explícitas e então, desde que a EDP seja linear, reunir soluções mais complicadas às especificadas anteriormente. Além disso, ao procurar soluções explícitas muitas vezes é aconselhável restringir a atenção a classes de funções com certas propriedades de simetria. Um vez que a equação de Laplace é invariante sob rotações, parece aconselhável procurar primeiro soluções radiais, isto é, funções de $|\mathbf{x}|$, onde $\mathbf{x} = (x, y)$.

Tentemos, portanto, encontrar uma solução da equação de Laplace (2.1) em $D = \mathbb{R}^2$ com a forma

$$u(\mathbf{x}) = v(r),$$

onde $r = |\mathbf{x}| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e v deve ser selecionada (se possível) de modo que $\Delta u = 0$ continue valendo. Primeiro note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x = \frac{x}{r}\\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2y = \frac{y}{r}\end{aligned}$$

com $\mathbf{x} \neq 0$. Temos então

$$u_x = v'(r)\frac{x}{r}, \qquad u_y = v'(r)\frac{y}{r}$$
$$u_{xx} = v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right), \qquad u_{yy} = v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)$$

e assim

$$\Delta u = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r).$$

Portanto $\Delta u = 0$ se, e somente se

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 0.$$

Se $v' \neq 0$, deduzimos

$$(\log(v'))' = \frac{v''}{v'} = -\frac{1}{r},$$

e portanto $v'(r) = a/r$ para alguma constante a. Consequentemente se $r > 0$, temos

$$v(r) = b\log r + c$$

onde b e c são constantes.

Definição 2.2. A função

$$\Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|$$

definida para $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq 0$, é chamada a *solução fundamental* da equação de Laplace no plano. (Note que esta é a função $v(r)$ acima com a escolha particular $b = 1/2\pi$ e $c = 0$. Esta escolha para estas constantes se deve à fórmula de representação no Lema 2.1).

Definição 2.3. A *função de Green* $G(\mathbf{x})$ para o operador $-\Delta$ e o domínio D no ponto $\mathbf{x}_0 \in D$ é uma função definida para $\mathbf{x} \in \overline{D} \backslash \{y\}$ tal que:

(i) $G(\mathbf{x})$ possui derivadas segundas contínuas e $\Delta G = 0$ em D, exceto no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

(ii) $G(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in \partial D$.

(iii) A função $G(\mathbf{x}) - (\log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)/2\pi$ é finita em $\mathbf{x}_0$, tem derivadas segundas contínuas em todo ponto do domínio e é harmônica em $\mathbf{x}_0$.

A notação usual para a função de Green é $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$.

A seguir, vamos introduzir as identidades de Green.

Partindo da regra do produto para derivadas temos

$$(vu_x)_x = v_x u_x + vu_{xx}$$
$$(vu_y)_y = v_y u_y + vu_{yy}.$$

Somando ambas as igualdades, obtemos a identidade

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Integrando ambos os lados da identidade acima, encontramos

$$\iint_D \nabla \cdot (v \nabla u) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \iint_D \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \iint_D v \Delta u \, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.3}$$

Agora, aplicamos o *Teorema da Divergência* do Cálculo

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}s$$

(onde $\mathbf{F}$ é uma função vetorial qualquer, D é uma região plana limitada, e $\mathbf{n}$ é a unidade externa normal a ∂D em um ponto) no lado esquerdo da igualdade (2.3) para obtermos a *primeira identidade de Green*

$$\int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}s = \iint_D \nabla v \cdot \nabla u \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \iint_D v \Delta u \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{2.4}$$

onde $\partial u/\partial \mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\nabla u$ é a derivada direcional na direção normal para fora da região D em um ponto de ∂D e ds indica o comprimento do arco da curva delimitadora (a fronteira de D). Essa identidade é válida para qualquer região plana D e qualquer par de funções u e v.

Aplicando (2.4) ao par u e v, e depois ao par v e u, vemos que a primeira parcela no lado direito de (2.4) não se altera. Assim sendo, subtraimos ambas as igualdades para obtermos a *segunda identidade de Green*

$$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathrm{d}s. \tag{2.5}$$

Assim como (2.4), essa identidade vale para qualquer par de funções u e v.

Lema 2.1. *Se $\Delta u = 0$ em D, então*

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \left[u(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| \right] \mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

Demonstração. De fato, seja D_ε a região $D\backslash B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ (bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio ε) (a razão disso é que a função $(\log|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)/2\pi$ é infinita em $\mathbf{x}_0$). Por simplicidade, seja $\mathbf{x}_0$ a origem. Então $v(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) = \log r$, onde $r = |\mathbf{x}|$. Escrevendo (2.5) com essa escolha de v, temos, já que $\Delta u = 0 = \Delta v$ em D_ε,

$$\int_{\partial D_\varepsilon} \left[u\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\log r) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cdot(\log r) \right] \mathrm{d}s = 0.$$

Mas ∂D_ε consiste de duas partes: a fronteira original ∂D e a circunferência $\{r = \varepsilon\}$. Assim,

$$\int_{\partial D} \left[u\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\log r) - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\cdot(\log r) \right] \mathrm{d}s = \int_{r=\varepsilon} \left[u\cdot\frac{\partial}{\partial r}(\log r) - \frac{\partial u}{\partial r}\cdot(\log r) \right] \mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Essa identidade é válida para qualquer $\varepsilon > 0$ pequeno. Nossa fórmula de representação (2.6) seguir-se-á ao mostrarmos que o lado direito de (2.7) tende para $2\pi u(\mathbf{0})$ quando $\varepsilon \to 0$.

Na circunferência $\{r = \varepsilon\}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}(\log r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon},$$

de modo que o lado direito de (2.7) é igual a

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{r=\varepsilon} u\ \mathrm{d}s - (\log\varepsilon)\int_{r=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r}\ \mathrm{d}s = 2\pi\overline{u} - 2\pi\varepsilon(\log\varepsilon)\overline{\frac{\partial u}{\partial r}}, \tag{2.8}$$

onde

$$\overline{u} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{r=\varepsilon} u \, \mathrm{d}s \quad \text{e} \quad \overline{\frac{\partial u}{\partial r}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int\limits_{r=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r}\, \mathrm{d}s$$

denotam os valores médios de $u(\mathbf{x})$ e de $\partial u/\partial r$, respectivamente, na circunferência $|\mathbf{x}| = r = \varepsilon$. Quando $\varepsilon \to 0$, a expressão (2.8) se aproxima de

$$2\pi u(\mathbf{0}) - 2\pi \cdot 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{0}) = 2\pi u(\mathbf{0})$$

já que u é contínua e $\partial u/\partial r$ é limitada. Assim (2.7) se torna (2.6), e isso completa a prova. □

Observação. Em (2.7), usamos o fato de que na circunferência $\{r = \varepsilon\}$, $\mathbf{n}$ aponta para fora da região englobada, de modo que $\mathbf{n} = -\mathbf{x}/\epsilon$.

Teorema 2.4. *Se $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ é a função de Green, então a solução do problema de Dirichlet é dada pela fórmula*

$$u(\mathbf{x}_0) = \int\limits_{\partial D} u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} \, \mathrm{d}s. \tag{2.9}$$

Demonstração. Vamos voltar à fórmula de representação (2.6):

$$u(\mathbf{x}_0) = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \right) \mathrm{d}s, \tag{2.10}$$

onde $v(\mathbf{x}) = (\log|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)/2\pi$. Agora vamos escrever $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = v(\mathbf{x}) + H(\mathbf{x})$. Então $H(\mathbf{x})$ é uma função harmônica em todo o domínio D [por (iii) e (i) na Definição 2.3]. Aplicamos a segunda identidade de Green (2.5) ao par de funções harmônicas $u(\mathbf{x})$ e $H(\mathbf{x})$:

$$0 = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} H \right) \mathrm{d}s. \tag{2.11}$$

Adicionando (2.10) e (2.11), temos

$$u(\mathbf{x}_0) = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} G \right) \mathrm{d}s.$$

Mas na (ii) em Definição 2.3, G se anula em ∂D, de modo que o último termo desaparece e obtemos a fórmula (2.9). □

Capítulo 3

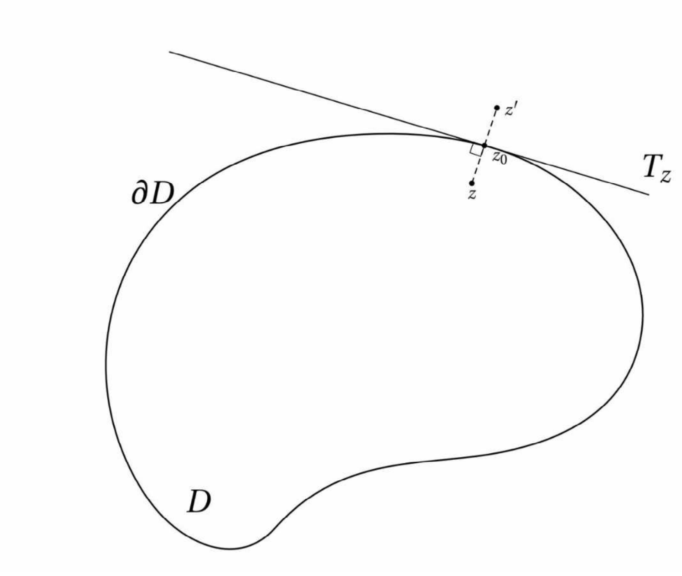
Existência de Função de Green no Plano

Este capítulo final será dedicado à prova da existência de funcão de Green para domínios limitados do plano. A prova que apresentaremos aqui é devida a P. Lax [7]. Seguiremos essencialmente [3].

Precisaremos da seguinte proposição, cuja a prova será omitida aqui (veja [1]).

Proposição 3.1. *Para qualquer $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ próximo de ∂D, denote por T_z a reta tangente a ∂D no ponto de ∂D mais próximo a z. Denote por z' a reflexão de z com respeito a T_z. Então*

$$\max_{x \in \partial D} \frac{|z - x|}{|z' - x|} \to 1 \qquad \text{se } z \to z_0, z_0 \in \partial D.$$



Teorema 3.1. *Se ∂D é de classe C^1 (isto é, ∂D é formada por um número finito de curvas continuamente deriváveis), então a função de Green existe.*

Demonstração. Denote por X o espaço de Banach de todas as funções contínuas em ∂D com a norma do máximo, isto é, $\|f\| = \max_{x\in\partial D} |f(x)|$ (a prova de que X é espaço de Banach é análoga à do Exemplo 1.9) e denote por X' o subespaço vetorial constituído dessas funções f para as quais o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } D \\ u = f & \text{em } \partial D. \end{cases} \tag{3.1}$$

tem uma solução. Por exemplo, se f é constante, então $f \in X'$. Para qualquer $y \in D$, considere o funcional linear L_y em X' definido por $L_y(f) = u(y)$, onde u é a solução de (3.1). Do Teorema 2.1 (Princípio do máximo), segue-se que L_y é limitado e que a sua norma é 1.

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.2), L_y pode ser extendido a um funcional linear limitado sobre X, tendo norma 1. Denotaremos tal extensão novamente por L_y. Para cada $z \notin \partial D$ considere o elemento f_z de X dado por

$$f_z(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x-z| \qquad (x \in \partial D),$$

e defina $k_y(z) = L_y(f_z)$. Afirmamos que $k_y(z)$ é uma função harmônica. Para provarmos isso seja $z' = (z_1 + \delta, z_2)$. Então

$$\frac{k_y(z') - k_y(z)}{\delta} = L_y\left(\frac{f_{z'} - f_z}{\delta}\right).$$

Quando $\delta \to 0$, $(f_{z'} - f_z)/\delta \to \partial f_z/\partial z_1$, onde $\partial f_z/\partial z_1$ é o elemento $\partial(\log|x - z|/2\pi)/\partial z_1$ de X. Já que L_y é um funcional contínuo em X (pelo Teorema 1.1), temos que

$$\frac{\partial k_y(z)}{\partial z_1} \qquad \text{existe e é igual a} \qquad L_y\left(\frac{\partial f_z}{\partial z_1}\right).$$

Da mesma forma, mostra-se que $k_y(z)$ tem derivadas de qualquer ordem e que estas são iguais à aplicação de L_y à derivada correspondente de f_z. Em particular, $\Delta k_y(z) = L_y(\Delta f_z)$. Como, no entanto, Δf_z é a função $(1/2\pi)\sum_{j=1}^{2} \partial^2(\log|x - z|)/\partial z_j^2 = 0$, concluímos que $k_y(z)$ é harmônica fora de ∂D.

Já que $(\log|x-z|)/2\pi$ é harmônica em $x \in D$ quando $z \notin \overline{D}$, temos

$$k_y(z) = L_y(f_z) = \frac{1}{2\pi}\log|y-z| \qquad \text{se } z \notin \overline{D}. \tag{3.2}$$

Agora tome um ponto z em D e perto de ∂D. Denote por z' sua reflexão com respeito a T_z (veja Proposição 3.1). Então

$$\|f_z - f_{z'}\| = \frac{1}{2\pi}\max_{x\in\partial D}\log\frac{|z-x|}{|z'-x|} \to 0 \qquad \text{se } z \to z_0, z_0 \in \partial D.$$

Segue-se que $L_y(f_z - f_{z'}) \to 0$, isto é,

$$k_y(z) - k_y(z') \to 0 \qquad \text{se } z \to z_0.$$

Mas, por (3.2), $\lim k_y(z')$ existe e é igual a $(\log|y - z_0|)/2\pi$. Portanto $k_y(z)$ $(z \in D)$ pode ser extendida a uma função contínua $\hat{k}_y(z)$ em $\overline{D}$, e $\hat{k}_y(z) = (\log|y-z|)/2\pi$ se $z \in \partial D$. A função $(\log|x-y|)/2\pi - \hat{k}_y(x)$ satisfaz as condições (i)-(iii) na definição de função de Green (Definição 2.3). $\square$

Conclusão

Este trabalho apresentou um exemplo de aplicação dos resultados da Análise Funcional às Equações Diferenciais Parciais. Começamos o trabalho revisando algumas noções da Análise Funcional, como, por exemplo, espaços de Banach, funcionais lineares contínuos ou limitados e o Teorema de Hahn-Banach. Apresentamos vários exemplos no capítulo inicial com o objetivo de ilustrarmos os conceitos mais importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Apesar de não nos aprofundarmos nas Equações Diferenciais Parciais, procuramos abordar conceitos mínimos para o entendimento necessário da função de Green, tais como a equação de Laplace, função harmônica e solução fundamental, bem como as identidades de Green.

Referências Bibliográficas

[1] Martin Davis. *A First Course in Functional Analysis*. Dover, 2013.

[2] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 1998.

[3] Avner Friedman. *Foundations of Modern Analysis*. Dover, New York, 1982.

[4] Paul Halmos. *Naive Set Theory*. Springer-Verlag, New York, 1974.

[5] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis and Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[6] Peter D. Lax. *Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 2002

[7] Peter D. Lax. *On the Existence of Green's Function*. Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 526-531.

[8] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations, An Introduction*. Wiley, 1992.

[9] Robert G. Bartle. *The Elements of Real Analysis, Second Edition*. John Wiley & Sons, 1976.

[10] E.C. Zachmanoglou and D.W. Thoe. *Introduction to Partial Differential Equations*. Dover, 1986.