



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Maria de Fátima Pereira

Cálculo aproximado do valor de π através de métodos de simulação

Campina Grande - PB

Dezembro de 2017

Maria de Fátima Pereira

Cálculo aproximado do valor de π através de métodos de simulação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Orientador: Gustavo Henrique Esteves

Campina Grande - PB

Dezembro de 2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

P436c Pereira, Maria de Fátima.
Cálculo aproximado do valor de [Pi] através de métodos de simulação [manuscrito] : / Maria de Fatima Pereira. - 2017.
42 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação : Prof. Dr. Gustavo Henrique Esteves, Departamento de Estatística - CCT."

1. Métodos de simulação. 2. Círculo inscrito. 3. Agulha de Buffon. 4. Métodos estatísticos.

21. ed. CDD 519.5

Maria de Fátima Pereira

Cálculo aproximado do valor de π através de métodos de simulação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Trabalho aprovado em 07 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA



Gustavo Henrique Esteves
Universidade Estadual da Paraíba



Ricardo Alves de Olinda
Universidade Estadual da Paraíba



Tiago Almeida de Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba

Dedico a todos que de alguma forma contribuíram para realização desse trabalho e a todos aqueles que não acreditaram que eu conseguiria chegar até aqui.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus pela graça desta realização.

Ao Professor Dr. Gustavo Henrique Esteves, meu orientador, que me proporcionou enriquecedores e crescentes desafios aliados com o seu profundo conhecimento sobre o tema desenvolvido, seu apoio e sua costumeira dedicação na orientação que permitiram a conclusão deste trabalho.

Agradeço também a todos os meus Professores, Mestres e Doutores, que de uma forma ou de outra me orientaram e assessoraram nas pesquisas, análises, enfim em todo o desenvolvimento para que este trabalho fosse conduzido e concluído de maneira clara e objetiva.

A Universidade Estadual da Paraíba.

Agradeço aos colegas do curso de Estatística, Ângela, Carlos, Filipe, Shirley, Vitória, Nayara e Sônia, que me apoiaram e me ajudaram durante os estudos.

A toda a equipe da Creche Municipal Passinha Agra, especialmente a diretora Rejane do Nascimento Raposo, pela paciência e por compreender minhas ausências em horário de trabalho para dedicar-me aos estudos durante o curso.

Finalmente, um agradecimento especial ao meu esposo pela paciência e para todo o resto da minha família, minha querida mãe e meus queridos irmãos e primos, pela confiança e atenção em mim depositada.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.”
(Martin Luther King)

Resumo

Os métodos de simulação são ferramentas utilizadas para a tomada de decisão na solução de problemas de naturezas variadas, especialmente úteis em situações que envolvam análise de riscos para predizer o resultado de uma decisão face a incerteza. Existem vários métodos de simulação e, neste trabalho será abordado o método de Monte Carlo para o problema da Agulha de Buffon e para o problema do Círculo inscrito com intuito do cálculo aproximado do valor de π . Todo o trabalho computacional foi desenvolvido com base no *software* R, que é um ambiente de programação estatística de acesso gratuito, e que facilita o uso de ferramentas de simulação. O problema da Aaulha de Buffon permite obter aproximações para o valor de π através da realização de experiências computacionais, na linha dos métodos de simulação de Monte Carlo e esta por sua vez possibilita análises computacionais através da geração de valores de variáveis sujeitas a incerteza e consequentemente uma distribuição de probabilidades associada, tendo como principal vantagem a simplificação de problemas de grande complexidade e a facilidade de se fazer modificações e ajustes quando necessário. Um dos principais fatores que motivaram este trabalho foi a apresentação dessa ferramenta gratuita para simular uma aproximação para π através desses dois Pprblemas. Tendo como objetivo principal calcular tal aproximação, através de simulação computacional, de forma a possibilitar comparações entre os dois problemas abordados, buscando identificar aquele que retorne as menores taxas de erro na aproximação. Com base nos resultados obtidos através de simulação pôde-se concluir que o Pprolema do círculo inscrito é mais rápido e preciso em comparação com o problema da Aagula de Buffon e, portanto, mais aceitável para este trabalho.

Palavras-chave: Simulação; Círculo Inscrito; Agulha de Buffon.

Abstract

Simulation methods are tools used for decision-making in the solution of problems from varied areas, it is especially useful in situations involving risk analysis to predict the decision outcome in the presence of uncertainty. There are several simulation methods and in this work it was used the Monte Carlo and Buffon's needle methods to calculate an approximation of the π value. All the computational work was developed based on the R software, which is a free license statistical programming environment, which facilitates the use of simulation tools. The Buffon's needle problem allows to obtain approximations to the value of π through the execution of computational experiments, in a similar way to the Monte Carlo simulation methods, which in turn enables computational analysis through the generation of values from variables subject to uncertainty and consequently an associated probability distribution, having as main advantage the simplification of problems of great complexity and to facilitate to do some modifications and adjustments when necessary. One of the main factors that motivated this work was the presentation of this free tool to simulate an approximation for π through these two methods. The main objective of this study was to calculate the approximation by means of computational simulation, in order to allow comparisons between the two approaches, and to identify that one which returns the lowest error rates in the approximation. Based on the results obtained through simulation it was possible to conclude that the Monte Carlo method is faster and more accurate compared to the Buffon's needle method and therefore more acceptable for this work.

Key-words: Simulation. Monte Carlo. Buffon's needle.

Lista de ilustrações

Figura 1	–	Representação da área sombreada para a função $(1/2) \sin(\theta)$	20
Figura 2	–	Representação esquemática das agulhas soltas “em uma superfície”. . .	25
Figura 3	–	Representação dos pontos simulados no quadrado	26
Figura 4	–	Representação gráfica comparando a aproximação de π pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.	27
Figura 5	–	Representação gráfica comparando o tempo gasto na execução do cálculo de π pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.	28
Figura 6	–	Representação gráfica comparando o erro pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.	30

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	Marco Histórico	12
2.1.1	Agulha de Buffon	12
2.1.2	Método de Monte Carlo	12
2.1.3	Simulação	13
2.2	Métodos Estatísticos	14
2.2.1	O problema da Agulha de Buffon	14
2.2.2	Simulação - ideias e definições	15
2.2.3	Modelagem de Sistemas por Simulação	16
2.2.4	O método Monte Carlo	17
2.2.5	Geradores de números aleatórios	18
2.2.6	Números Pseudoaleatórios	18
2.2.7	Estimação do valor de π pelo Problema da Agulha de Buffon via Simulação Computacional	19
2.2.8	Estimação do valor de π pelo Problema do Círculo Inscrito via simulação Computacional	22
3	APLICAÇÃO	24
3.1	Estimação de π através do Problema da Agulha de Buffon	24
3.2	Estimação de π através do Problema do Círculo Inscrito	26
4	CONCLUSÃO	31
	Referências	33
	APÊNDICE A – ROTINA UTILIZADA NA ANÁLISE	35

1 Introdução

Os métodos de simulação são ferramentas utilizadas para a tomada de decisão na solução de problemas de várias naturezas, especialmente úteis em situações que envolvem análise de riscos para prever o resultado de uma decisão face à incerteza. A aplicação da simulação em problemas gerenciais requer primeiramente a modelagem em termos matemáticos do sistema que se pretende investigar, tornando conhecidas as variáveis e os relacionamentos relevantes do problema, permitindo simular as respostas do sistema a diferentes escolhas (políticas) da tomada de decisão.

Existem vários métodos de simulação. Neste trabalho, são abordados especificamente o método de Monte Carlo que é uma técnica de simulação de sistemas probabilísticos, muito utilizada em áreas como gestão de projetos, economia, física, química, medicina, estatística, entre outras, para o Problema da Agulha de Buffon e o problema do Círculo Inscrito. Desenvolveu-se um caso prático utilizando simulação de Monte Carlo, para o cálculo aproximado do valor de π , com base no ambiente do software R, que é um recurso de auxílio a simulação de acesso gratuito.

Os principais fatores que motivaram este trabalho tratam diretamente da apresentação de uma ferramenta gratuita para simular uma estimativa para π que representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro e é a mais antiga constante matemática que se conhece e também é um número irracional, com infinitas casas decimais e não periódico, contextualizando, assim, de forma objetiva e direta sobre o que realmente é o Problema do Círculo Inscrito e o Problema da Agulha de Buffon e quais seus fundamentos estatísticos.

O objetivo principal deste trabalho foi calcular uma estimativa para π de forma que se aproxime o mais perto possível do valor real, através dos Problemas da Agulha de Buffon e do Círculo Inscrito utilizando uma circunferência de raio igual a um circunscrita em um quadrado de lado dois e fazer comparações com os dois problemas via simulação computacional. O trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 é reservado para a introdução; o Capítulo 2 trata da fundamentação teórica, onde é abordado um pouco da história dos métodos utilizados, e que apresenta os principais métodos estatísticos empregados além de tratar um pouco sobre simulação; já o Capítulo 3 apresenta a aplicação onde estão desenvolvidos os métodos propostos no Capítulo 2 além de apresentar os resultados das simulações realizadas; por fim, o Capítulo 4 expõe as conclusões sobre o trabalho, onde são feitas as considerações finais sobre os métodos apresentados nos capítulos anteriores.

Ao fazer as simulações com os dois problemas acima citados, pôde-se perceber que o Problema do Círculo Inscrito é mais fácil e, principalmente, mais preciso para calcular o valor de π . Usando esse problema ganha-se em precisão, tempo e o erro calculado é bem menor, sem contar que, o ponto fundamental do método de Monte Carlo é a geração de números pseudoaleatórios. Esse método é usado especialmente naqueles casos em que o número de fatores incluídos no problema é tão grande que a sua solução analítica é demorada ou, em termos práticos, impossível, o que é o caso do presente trabalho. Observa-se que ao simular uma variedade muito grande de pontos o valor calculado para π se aproxima muito do seu valor real. Em contrapartida, o Problema da Agulha de Buffon é lento, quando se insere um grande número de agulhas soltas, perde-se em precisão, ou seja o valor aproximado fica distante do valor real, é possível calcular esse valor via simulação, porém é demorado e o erro alto. Esse problema não é tão preciso e por isso não é o ideal para o cálculo aproximado de π , embora seja possível de ser usado.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Marco Histórico

2.1.1 Agulha de Buffon

Em meados do século XVIII, o matemático e naturalista francês Georges Louis Leclerc, conhecido como Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade e que chamavam a atenção devido à sua abordagem geométrica dos problemas. Em maio de 1733 submeteu à *Acedémie Royale des Sciences* um artigo em que, dentre outros problemas geométricos, estabelecia o seguinte problema:

“Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponha de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?”.

O Conde de Buffon então determinou a probabilidade de um objeto, como uma agulha, de comprimento L intersectar uma das linhas paralelas separadas por uma distância d e dispostas sobre um plano quando a agulha é jogada de forma aleatória sobre o plano. Tal proposição é por muitos considerada a primeira aplicação do Método de Monte Carlo.

Segundo Paes et al. (2015), o Problema da Agulha de Buffon tem uma extraordinária importância histórica: foi o primeiro problema de um novo território, a Teoria da Probabilidade Geométrica, e nesse sentido foi um marco para novas ideias matemáticas, que ainda hoje dão frutos.

2.1.2 Método de Monte Carlo

O crédito por inventar o método de Monte Carlo frequentemente vai para Stanislaw Ulam, um matemático polonês que trabalhou para John von Neumann no Projeto Manhattan nos Estados Unidos durante a Segunda Guerra Mundial. Ulam é conhecido principalmente por projetar a bomba de hidrogênio com Edward Teller em 1951. Ele concebeu o método de Monte Carlo em 1946 enquanto ponderava a probabilidade de ganhar um jogo de solitário, mais conhecido como paciência (FILETI, 2000)

De acordo com Fileti (2000) depois de tentar resolver este problema com cálculos combinatórios puros, ele se perguntou se poderia ser mais fácil jogar múltiplas mãos do jogo e observar a frequência de vitórias. Isso levou Ulam a considerar como problemas de difusão de nêutrons e outras questões de física matemática podem ser representados em uma forma interpretável como uma sucessão de operações aleatórias.

No projeto de construção da bomba atômica, Ulam e von Neumann consideraram a possibilidade de utilizar o método, que envolvia a simulação direta de problemas de natureza probabilística relacionados com o coeficiente de difusão do neutron em certos materiais.

O método de Monte Carlo, como se entende hoje, abrange qualquer técnica de amostragem estatística empregada para aproximar soluções para problemas quantitativos. Monte Carlo agora se refere a qualquer método que utilize sequências de números aleatórios para realizar simulação estatística.

A contribuição de Ulam foi reconhecer o potencial para o computador eletrônico recém-inventado para automatizar essa amostragem. Trabalhando com John von Neumann e Nicholas Metropolis, ele desenvolveu algoritmos para implementações de computadores, além de explorar meios de transformar problemas não-aleatórios em formas aleatórias que facilitariam sua solução por meio de amostragem estatística.

2.1.3 Simulação

Também durante a Segunda Guerra Mundial a simulação computacional teve sua origem como extensão do Método de Monte Carlo, para solucionar problemas matemáticos. Mais tarde, na década de 50, o método foi usado na solução de problemas probabilísticos de caráter geral, como o tratamento das filas de espera, era o nascimento dos métodos de simulação de Monte Carlo (BORGES, 2000)

Mas, efetivamente, a Simulação só começou a ser usada no começo da década de 60, sendo que a área militar dos EUA foi a primeira a utilizá-la como ferramenta de análise e planejamento. Com o sucesso obtido na aplicação do método na área militar, rapidamente ocorreu sua extensão na indústria Norte Americana, proporcionando o desenvolvimento do método através da evolução dos computadores e das linguagens de programação. O avanço dos métodos de simulação está relacionado com a evolução tecnológica e com a facilidade de acesso à tecnologia encontrada nos dias de hoje. Pelas empresas, o uso do método como ferramenta de auxílio à tomada de decisão está cada vez mais frequente.

No Brasil, apesar de ser uma técnica ainda pouco conhecida, organizações públicas como a Petrobras e a Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos e algumas grandes organizações privadas como instituições bancárias e setores industriais, também já começam a utilizar o método como ferramenta de auxílio à tomada de decisão.

2.2 Métodos Estatísticos

2.2.1 O problema da Agulha de Buffon

O Problema da Agulha de Buffon permite obter aproximações para o valor de π através da realização de experiências físicas ou computacionais, na linha dos métodos de simulação de Monte Carlo. É muito frequente a atribuição desta ideia ao próprio Buffon.

A intenção é descobrir qual a probabilidade de que agulhas lançadas em um plano marcado por linhas paralelas toquem em uma dessas linhas. Surpreendentemente, o resultado encontrado é diretamente relacionado ao valor de π , que é a proporção numérica definida pela relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro.

Segundo Buescu (2014) Georges-Louis Leclerc, o Conde de Buffon, é famoso por uma famosa “experiência”, descrita a seguir. Suponha que estejam numa sala cujo chão (superfície plana) é constituído por tábuas paralelas. Designem a distância entre as tábuas por d . Tome uma agulha, ou um objeto semelhante, de comprimento L menor do que d . Esta condição assegura que, se deixar cair a agulha no chão, ela só poderá atravessar uma única linha que divide tábuas diferentes. A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) pode ser calculada como

$$P = \frac{2L}{\pi d}.$$

Esta fórmula contém a constante π proporcionando, portanto, a possibilidade de se obter aproximações para esta constante experimentalmente. Será necessário, evidentemente, atirar a agulha um grande número de vezes, que pode ser designado por n . Se a agulha atravessar a linha divisória entre duas tábuas k vezes ao fim das n tentativas, então a frequência relativa k/n deverá ser uma boa aproximação para P ; resolvendo a equação anterior em relação a π obtem -se

$$\pi = \frac{2L}{Pd},$$

pelo que a aproximação obtida conduzirá a um valor aproximado de π . (BUESCU, 2014). É claro que, em vez de agulhas e de um piso de tábuas, pode-se utilizar simplesmente papel e fósforos ou alfinetes; a única restrição é que a distância entre as linhas seja maior do que o comprimento da agulha (ou do objeto correspondente que esteja sendo utilizado em seu lugar).

Ainda segundo Buescu (2014) é geralmente aceito que a experiência da Agulha de Buffon representa a primeira aplicação do método de Monte Carlo da história da Matemática, ou seja, a primeira vez em que se utiliza um método aleatório para resolver, de forma aproximada, um problema computacional. Estes métodos podem ser utilizados com grande sucesso, por exemplo, para calcular integrais definidas em domínios multidimensionais ou para resolver inúmeros problemas de contagem.

Além deste método que usa a ideia do Problema da Agulha de Buffon, o valor da constante π também pode ser calculado de maneira aproximada usando uma outra abordagem de simulação computacional, que será abordado na próxima seção.

2.2.2 Simulação - ideias e definições

A simulação não é uma ferramenta que substitui o trabalho de interpretação humana, mas sim uma ferramenta capaz de fornecer resultados para análises mais elaboradas a respeito da dinâmica do sistema, permitindo desta maneira uma interpretação mais profunda e abrangente do sistema estudado. Ou seja, é uma ferramenta estatística para analisar sistemas reais, que imita o funcionamento lógico do sistema ao longo do tempo em um programa de computador. A mesma permite analisar sistemas complexos que não são possíveis de se tratar com modelos matemáticos que possam ser resolvidos analiticamente e não permita otimizar os parâmetros de um sistema e obter respostas exatas.

São diversas as áreas de aplicação da simulação, dentre elas é possível destacar os sistemas computacionais e de telecomunicações, fabricação, negócios, logística, militar, treinamento, científica, econômica e serviços. utilizar essa ideia na prática requer competências técnicas de simulação, estatística, programação, modelagem de sistemas além da necessidade de seguir uma metodologia de análise do sistema real.

Segundo Garcia (2005), a simulação é a obtenção da resposta temporal das variáveis de interesse (variáveis dependentes) de um modelo, quando se atribui às suas variáveis de entrada certos valores desejados e se definem os atributos das condições iniciais para as variáveis dependentes. Já para Prado (2006), a simulação é uma técnica de solução de um problema pela análise de um modelo que descreve o comportamento do sistema usando um computador digital.

Meyers e Stephens (2005), definem a simulação como uma técnica experimental, executada geralmente em um computador, para analisar o comportamento de todo um sistema no mundo real. A simulação envolve a modelagem de um processo ou de um sistema onde o modelo produz a mesma resposta do sistema real aos eventos que ocorrem nele durante um período dado de tempo. A simulação pode ser usada para prever o comportamento de um sistema complexo de fabricação ou de serviço, através dos movimentos e da interação dos componentes do sistema.

Segundo Meyers e Stephens (2005), a finalidade da simulação é ajudar o responsável a tomar as decisões corretas para a solução de um problema particular. O processo pode ser modificado e resumido, de acordo com a necessidade do planejador. A simulação do modelo pode ser usada para uma aproximação de um problema de planejamento e para trabalhar para uma solução lógica.

2.2.3 Modelagem de Sistemas por Simulação

Simulação é uma técnica estatística que utiliza um computador para imitar, ou simular, operações de instalações ou processos reais de interesse. Consiste em fazer variar os parâmetros de entrada de um modelo do sistema real e analisar o seu impacto nas medidas de desempenho relevantes. Podemos dizer que o sistema é a instalação ou processo real que interessa analisar, e sobre o qual se conhecem as regras lógicas de funcionamento. Já o modelo de sistema é o conjunto de relações matemáticas ou lógicas que descrevem o funcionamento do sistema real, e que serve para analisar e avaliar o comportamento do sistema. Existem dois métodos de análise de modelos que são:

Dedução: são métodos matemáticos que permitem obter informações exatas sobre o modelo, soluções *analíticas* (ex. álgebra, cálculo, teoria da probabilidade);

Simulação: são métodos estatísticos que permitem obter estimativas das *verdadeiras* características do modelo, a partir da avaliação numérica do modelo em computador.

Segundo Gavira (2004), pode se dizer que sistema, em sua definição mais geral, é um conjunto de entidades (pessoas, máquinas, etc) que atuam e interagem conjuntamente para cumprir um objetivo lógico. Aquilo que se designa por "sistema" depende dos objetivos em estudo. E o conjunto de entidades do sistema num estudo pode ser apenas um subconjunto do sistema global de outro estudo.

Em um processo de simulação, é modelada a dinâmica de um sistema, reproduzindo-se em ambiente computacional, a complexidade de seu mecanismo de desenvolvimento, que opera através de processos de troca de materiais, energia, informação e espécies/estados entre os componentes ou elementos do sistema.

Assim, observa-se que modelos de simulação se tornaram recentemente um promissor campo de pesquisa recebendo especial atenção por parte de pesquisadores de diversas áreas. A importância da simulação advém de sua capacidade de multiplicar a nossa imaginação individual, permitindo que grupos de pessoas compartilhem, através de uma experiência comum, modelos mentais de uma certa realidade, independente de sua complexidade, como por exemplo descobrir a área de um determinado estado utilizando a simulação de Monte Carlo através do Problema da Agulha de Buffon. Além disso, uma especial classe de modelos de simulação é representada pelos modelos espaciais ou modelos de paisagem, que simulam mudanças dos atributos do meio ambiente através do território geográfico (JUNIOR, 2009).

De acordo com Kumar e Phrommathed (2005), o mapeamento do processo, a análise dos dados e a simulação computacional podem reduzir com sucesso o risco da ineficácia de uma operação no mundo real, antes da implantação direta de qualquer mudança no sistema produtivo. O funcionamento do modelo desenvolvido baseia-se em cálculos

matemáticos e permite que se façam testes de alterações dos parâmetros relacionados com o modelo, sendo possível constatar-se o que aconteceria se estas modificações fossem feitas no empreendimento real.

Em seu livro, *Modelagem Empresarial*, Pidd (1998), chama a atenção para o fato de existir muitas definições para a palavra modelo, em geral, e também muitas definições de modelo como o termo usado dentro das ciências administrativas. Uma das primeiras definições, simplesmente, diz que um modelo é uma representação da realidade. Para Fishwick (1995), modelar é abstrair da realidade uma descrição de um sistema dinâmico. Ao criar um modelo, são definidos claramente as partes que o compõem. Estas partes podem ser integrantes do sistema (isto é, estão dentro dele) ou podem afetar o sistema pela parte externa.

2.2.4 O método Monte Carlo

A análise de risco faz parte de cada decisão que é tomada. Constantemente, as pessoas, estão confrontadas com incertezas, ambiguidades e variabilidades. E mesmo que se tenha acesso sem precedentes à informação, não se pode prever com precisão o futuro. A simulação de Monte Carlo (também conhecida como o Método Monte Carlo) permite que você veja todos os resultados possíveis de suas decisões e avalie o impacto do risco, permitindo uma melhor tomada de decisão sob incertezas. Então é possível dizer que a simulação de Monte Carlo é uma técnica matemática computadorizada que permite que as pessoas avaliem o risco em análise quantitativa e tomada de decisão. A técnica é utilizada por profissionais em áreas tão diversas como finanças, gerenciamento de projetos, energia, fabricação, engenharia, pesquisa e desenvolvimento, seguros, petróleo e gás, transporte e meio ambiente (GAVIRA, 2004).

Para Gavira (2004). Monte Carlo realiza análise de risco construindo modelos de possíveis resultados, substituindo uma gama de valores - uma distribuição de probabilidade - para qualquer fator que tenha incerteza inerente. Em seguida, calcula resultados repetidamente, cada vez que usa um conjunto diferente de valores aleatórios das funções de probabilidade. Dependendo do número de incertezas e dos intervalos especificados para eles, uma simulação de Monte Carlo pode envolver milhares ou dezenas de milhares de recálculos antes de completar. A simulação de Monte Carlo produz distribuições de possíveis valores de resultados.

Segundo Filho (2000) Monte Carlo é o nome dado, de forma geral, as técnicas de resolução de problemas numéricos através do uso intensivo de números aleatórios. No trato computacional, esses números não são, de fato, aleatórios, mas pseudoaleatórios, pois são gerados por algoritmos determinísticos que, no entanto, parecem aleatórios, isto é, são aprovados em testes de aleatoriedade.

Uma das principais vantagens, na utilização do método é que, acima de tudo, problemas de grande complexidade podem ser tratados de forma mais simplificada e modificações e ajustes podem ser efetuados mais facilmente. E uma das principais desvantagens é, geralmente, a pequena precisão dos resultados, comparados com o grande número de simulações necessárias.

2.2.5 Geradores de números aleatórios

O propósito dos geradores de números aleatórios é produzir uma sequência de números que aparentam ser gerados aleatoriamente de uma distribuição de probabilidade específica. Usualmente, um gerador de números aleatórios básico uniforme produz números que imitam variáveis aleatórias independentes da distribuição uniforme sobre o intervalo $[0, 1]$. As variáveis aleatórias de outras distribuições (tais como normal, qui-quadrado, exponencial, poisson, entre outras) são simuladas empregando-se transformações apropriadas aos números aleatórios uniformes (VIEIRA, 2004).

De acordo com Vieira (2004) os geradores de números aleatórios são programas de computador cujo objetivo é imitar ou simular o comportamento típico de uma sequência de variáveis aleatórias independentes. São algoritmos específicos, sequenciais e determinísticos, ou seja, se iniciados em computadores ou momentos diferentes com o mesmo estado inicial ou semente, produzem a mesma sequência numérica. Os números gerados são, portanto, apenas pseudoaleatórios, mas com um leve abuso de linguagem são chamados de aleatórios.

2.2.6 Números Pseudoaleatórios

Um gerador de números pseudoaleatórios é um algoritmo que gera uma sequência de números, os quais são aproximadamente independentes uns dos outros. Esses números possuem as seguintes características: possibilidade de repetição de sequências, se desejado; seguem distribuição aparentemente uniforme e geração rápida com baixo custo computacional.

Uma sequência de números pseudoaleatórios $\{U_i\}_{i \geq 1}$ é uma sequência determinística de números no intervalo $[0, 1]$ que, embora tenham sido gerados de forma determinística, parecem ser aleatórios e distribuídos uniformemente. Além disso, esta sequência possui propriedades estatísticas relevantes.

Em termos históricos os números pseudoaleatórios eram originalmente gerados de maneira manual ou mecânica, usando técnicas como rodas giratórias, rolo de dados ou embaralhamento de cartas, atualmente a abordagem moderna é usar um computador para gerar sucessivamente tais números. Estes números pseudoaleatórios constituem uma sequência de valores que, apesar de serem gerados deterministicamente, têm todas as aparências de serem variáveis aleatórias uniformes independentes no intervalo $[0, 1]$ (ROSS,

2013).

O uso de um algoritmo para gerar um número aleatório parece violar o princípio básico da aleatoriedade, por isso é que se convencionou chamar esses números de sintéticos ou pseudoaleatórios. Sua geração começa sempre de um valor inicial X_0 , chamado semente (do inglês, *seed*) e, segundo Ross (2013), uma das abordagens mais comuns para isso é calcular recursivamente valores sucessivos X_n , com $n \geq 1$, a partir de X_0 , da forma

$$X_n = (aX_{n-1}) \bmod M,$$

em que a e M são números inteiros positivos. Neste método, $d \bmod M$ corresponde ao resto da divisão inteira de d por M . É importante observar que, desta forma, cada valor X_n pertence ao conjunto $\{0, 1, \dots, M - 1\}$ e a quantidade X_n/m – chamada número pseudoaleatório – é tomada como uma realização de um valor para uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

2.2.7 Estimação do valor de π pelo Problema da Agulha de Buffon via Simulação Computacional

Como já citado anteriormente, embora originalmente π tenha sido definido na geometria, é interessante notar como ele aparece inesperada e frequentemente no cálculo das probabilidades. Um exemplo famoso é o problema conhecido como a Agulha de Buffon.

Imagine um plano com linhas paralelas, todas iguais e com distância d uma da outra. Agora imagine que deixa-se cair algumas agulhas com comprimento $L \leq d$ no chão, qual a probabilidade de uma agulha cruzar uma linha? Quando uma agulha cruza uma linha?

Uma agulha cruza uma linha quando $x \leq (\frac{1}{2}) \sin \theta$, onde x é a distância do ponto médio da agulha à linha mais próxima. Portanto, a probabilidade da agulha cruzar uma linha será $P(x \leq (\frac{1}{2}) \sin \theta)$.

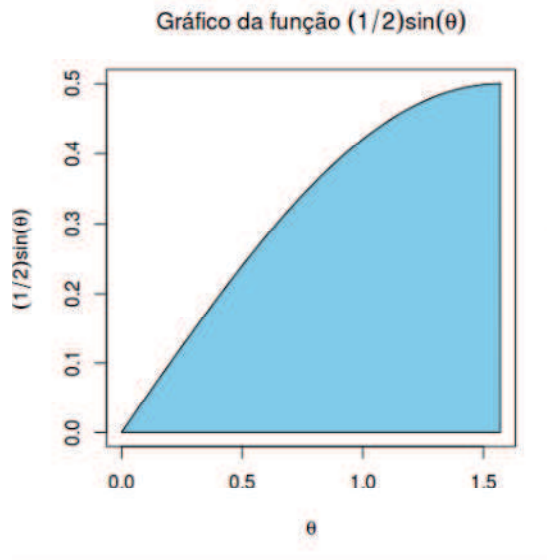
Para melhor entendimento, pode-se definir uma região para simples demonstração dessa probabilidade, onde o comprimento da agulha é de uma unidade e a distância entre as linhas é também uma unidade. Existem duas variáveis, o ângulo em que a agulha cai (θ) e a distância do centro da agulha para a linha mais próxima ($x =$ ponto médio da agulha). O ângulo θ pode variar de 0 a 180 graus e é medido contra uma linha paralela às linhas no piso. A distância do centro à linha mais próxima nunca pode ser mais que a metade da distância entre as linhas.

A agulha atingirá alguma linha se a distância mais próxima a ela (x) for inferior ou igual a $\frac{1}{2} \sin(\theta)$, ou seja, se $x \leq \frac{1}{2} \sin(\theta)$. Para verificar a frequência com que isso ocorre é possível traçar x ao longo do eixo das ordenadas e $\frac{1}{2} \sin(\theta)$ ao longo do eixo das abcissas e observar os valores em ou abaixo da curva, que representam a fração de pontos tais que

$x \leq \frac{1}{2} \sin(\theta)$. Assim, a probabilidade de sucesso é a proporção de área sombreada para todo o retângulo, conforme representado na Figura 1. Veja o passo a passo:

- Por simplicidade, defina $d = L = 1$,
- Trace $\frac{1}{2} \sin(\theta)$ como uma função de θ , com $0 \leq \theta \leq \pi/2$,
- Identifique a região sombreada representada como $x \leq \frac{1}{2} \sin(\theta)$,
- Por fim, calcula-se a área total e a área da região sombreada.

Figura 1 – Representação da área sombreada para a função $(1/2) \sin(\theta)$.



A área sombreada é encontrada através da integral definida de $\frac{1}{2} \sin(\theta)$ avaliada de zero a $\pi/2$. O resultado é que a área da parte sombreada é igual a $1/2$. O valor de todo o retângulo é $(1/2)(\pi)$ ou $\pi/2$, ou seja a área sombreada é calculada por

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) \right] = \frac{1}{2},$$

enquanto a área total fica dada por

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

e assim, é possível mostrar que a probabilidade de uma agulha cair e cruzar uma linha é $2/\pi$, que está calculado abaixo

$$P\left(x \leq \frac{1}{2} \sin(\theta)\right) = \frac{1/2}{\pi/4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi} = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366197, \quad (2.1)$$

E, em geral, pode-se mostrar que

$$P\left(x \leq \frac{L}{2} \sin(\theta)\right) = \frac{2L}{d\pi}, \quad \text{para } L \leq d. \quad (2.2)$$

Para entender como utilizar este resultado para o cálculo aproximado do valor de π , é necessário supor que se deixa cair n agulhas sobre o piso. Mais uma vez, suponha que $L = 1$ e $d = 1$, de modo que a probabilidade de uma dessas agulhas cruzar uma linha já foi calculada na expressão (2.1). É possível assumir que cada agulha cai de maneira independente umas das outras, de modo que se tem n repetições independentes de ensaios de Bernoulli cuja probabilidade de sucesso, ou seja, uma agulha cruzar uma linha, é constante e dada por $2/\pi$, da Equação (2.1). Logo, o processo de deixar cair n agulhas e observar o número de intersecções com linhas do piso tem a configuração Binomial com parâmetros n e $p = 2/\pi$. Deste modo, o número esperado de sucessos, ou seja, o número esperado de agulhas que intersectam alguma linha, é dado por

$$E(x) = np = \frac{2n}{\pi}.$$

Por exemplo, suponha que sejam lançadas 1000 agulhas, então o número esperado delas que cruzam alguma linha é de $2000/\pi$, o que resulta aproximadamente em 637.

Por outro lado, definindo k como um particular resultado obtido de uma distribuição binomial com parâmetros n e p conforme discutido acima, ou seja, k é o número de sucessos obtidos nas n repetições independentes dos experimentos de Bernoulli. Logo, ainda que conhecida, a probabilidade de sucesso desta binomial pode ser estimada por

$$\hat{p} = \frac{k}{n},$$

por exemplo, supondo que 1000 agulhas foram lançadas e 650 êxitos foram observados, então para este caso particular, uma estimativa para p é dada por

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{650}{1000} = 0,65.$$

Mas, como no caso do lançamento de Agulhas de Buffon, a probabilidade de sucesso da Bernoulli é conhecida e igual a $2/\pi$, é possível se utilizar o estimador de proporções da binomial para se calcular um valor aproximado para a constante π do seguinte modo

$$\hat{p} = \frac{k}{n} \approx \frac{2}{\pi} \Rightarrow \pi \approx \frac{2n}{k}.$$

Voltando para o exemplo anterior onde se obteve 650 sucessos no lançamento de 1000 agulhas, a aproximação de π para este caso é dada por

$$\pi \approx \frac{2000}{650} \approx 3,08.$$

E finalmente, verifica-se a que frequência de agulhas que cruzam linhas, de acordo com o problema proposto pelo Conde de Buffon, pode ser usada para estimar π . Voltando para a forma mais geral, cuja probabilidade de sucesso era dada pela expressão (2.2), obtém-se uma forma mais geral para o cálculo aproximado de π

$$\pi \approx \frac{2nL}{kd},$$

onde L é o comprimento da agulha e d a distância entre as tábuas no Problema da Agulha de Buffon.

2.2.8 Estimação do valor de π pelo Problema do Círculo Inscrito via simulação Computacional

O número representado por π é usado em cálculos sempre que algo circular (ou quase circular) esteja envolvido, como círculos, esferas, cilindros, cones e elipses. O valor desta constante é necessário para se calcular muitas quantidades importantes sobre essas formas, tal como a compreensão da relação entre o raio de um círculo com a sua circunferência e sua área (circunferência = $2\pi r$; área = πr^2).

De acordo com Henrique (2017) a constante π também aparece nos cálculos para determinar a área de uma elipse e para se encontrar o raio, a área de superfície e o volume de uma esfera. O mundo contém muitos objetos circulares ou quase circulares; porém encontrar o valor exato de π é praticamente impossível, dado que ele é um número irracional, mas a capacidade de se calcular boas aproximações para ele ajuda a trabalhar, ou mesmo fabricar, tais objetos com maior precisão.

Historicamente, as pessoas tinham apenas estimativas muito grosseiras de π (tais como 3, 3, 12, ou 3, 16) e, embora soubessem que estas eram estimativas, elas não tinham ideia de quão longe poderiam estar. A busca pelo seu valor exato levou não apenas a maior precisão, mas também ao desenvolvimento de novos conceitos e técnicas, como limites e algoritmos iterativos, que se tornaram fundamentais para novas áreas da matemática e áreas correlatas (HENRIQUE, 2017).

Segundo Henrique (2017) Entre 3.000 e 4.000 anos atrás, as pessoas usavam aproximações do valor de π obtidas por tentativa e erro, sem fazer nenhum cálculo para considerar possíveis erros. As primeiras aproximações escritas desse valor são 3,125 na Babilônia (1900-1600 a.C.) e 3,1605 no antigo Egito (1650 a.C.). Ambas as aproximações começam com 3,1 — muito perto do valor real, mas ainda relativamente longe.

Por volta de 265 d.C., o matemático chinês Liu Hui criou um algoritmo iterativo baseado em polígonos simples. Ele propôs um método de aproximação muito rápido e eficiente, o qual deu quatro dígitos precisos para o valor de π . Mais tarde, por volta de 480 dC, Zu Chongzhi adotou o método de Liu Hui e conseguiu sete dígitos de precisão. Esse registro de Liu Hui perdurou por outros 800 anos. Em 1630, o astrônomo austríaco Christoph Grienberger chegou a 38 dígitos, que é a aproximação mais precisa manualmente obtida usando algoritmos poligonais (HENRIQUE, 2017).

Hoje com a ajuda da simulação computacional, estimar o valor dessa constante se tornou algo muito prático e fácil. Hoje, existem certas formas de conhecimento, mais particularmente de métodos, que possibilitam trazer para intuição um pouco da lógica

matemática, e um desses métodos é a simulação (GAVIRA, 2004).

Ross (2013) apresenta uma abordagem de simulação para o cálculo aproximado do valor de π , onde suponha que o vetor aleatório (X, Y) esteja uniformemente distribuído em um quadrado de área 4 centrado na origem. Considere agora a probabilidade de que um ponto aleatório dentro deste quadrado esteja contido no círculo circunscrito de raio igual a um. Observe que, uma vez que (X, Y) está uniformemente distribuído no quadrado segue-se que

$$P\{(X, Y) \text{ estar no círculo}\} = P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\text{Área do círculo}}{\text{Área do quadrado}} = \frac{\pi}{4}.$$

Portanto, se for gerado um grande número de pontos aleatórios no quadrado, a proporção de pontos que se enquadram no círculo será aproximadamente $\pi/4$. Agora, se X e Y fossem independentes e ambos fossem distribuídos uniformemente sobre $(-1, 1)$, sua densidade conjunta seria

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Ainda, segundo Ross (2013), uma vez que a função de densidade de (X, Y) é constante no quadrado, segue (por definição) que (X, Y) está uniformemente distribuído no quadrado. Agora, se U é uniforme no intervalo $(0, 1)$, então $2U$ tem distribuição uniforme em $(0, 2)$, e assim $2U - 1$ é uniforme em $(-1, 1)$. Portanto, se forem gerados números aleatórios U_1 e U_2 , defina $X = 2U_1 - 1$ e $Y = 2U_2 - 1$ e defina

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

então

$$E(I) = P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}.$$

Por isso, $\pi/4$ pode ser estimado, gerando um grande número de pares ordenados aleatórios (u_1, u_2) e estimando $\pi/4$ pela fração deles tais que $(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1$. Assim, geradores de números aleatórios podem ser usados para gerar valores de variáveis aleatórias uniformes $(0, 1)$, e o resultado acima usado para se calcular o valor aproximado de π .

3 Aplicação

A seguir será desenvolvido, passo a passo, os métodos propostos no capítulo anterior, que são estimação do valor de π pelo problema da Agulha de Buffon via simulação e a estimação do valor de π pelo método de Monte Carlo também via simulação. Para execução da simulação, foi utilizado o *software* R, que é uma linguagem e também um ambiente de desenvolvimento integrado para cálculos estatísticos e gráficos. Para tanto, também foi necessário instalar alguns pacotes adicionais que são `sp` (PEBESMA; BIVAND, 2005), `raster` (HIJMANS, 2016), `rgdal` (BIVAND; KEITT; ROWLINGSON, 2017), `rgeos` (BIVAND; RUNDEL, 2017), `plyr` (WICKHAM, 2011), `dplyr` (WICKHAM et al., 2017), `ggplot2` (WICKHAM, 2009) e `scales` (WICKHAM, 2017). A versão do R utilizada para este trabalho foi 3.4.2, com a interface do RStudio versão 1.1.383.

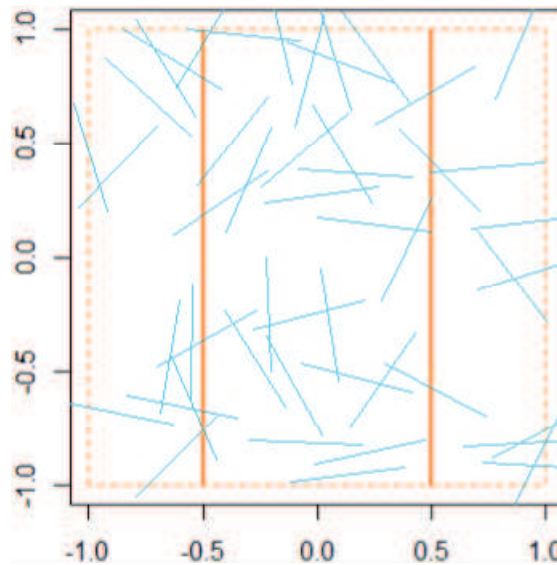
3.1 Estimação de π através do Problema da Agulha de Buffon

Na estimação de π via Problema da Agulha de Buffon, tem-se que através do resultado obtido no problema é possível calcular de forma empírica o valor de π . Para tanto, basta realizar o experimento proposto por Buffon utilizando-se convenientemente uma agulha (ou um objeto retilíneo) com comprimento maior ou igual à distância entre as retas paralelas. Após lançar diversas vezes a agulha sobre a superfície plana contendo as retas paralelas equidistantes, registra-se a quantidade de lançamentos realizados, bem como o número de casos em que a agulha corta uma das retas. Fazendo a simulação desses resultados, mostra-se na Figura 2 a representação esquemática das agulhas soltas na superfície plana para n agulhas sendo soltas. A mesma foi feita no R usando a função `spsample` do pacote `sp`.

Com base nesses objetos espaciais, determina-se π para 1000 agulhas jogadas num plano, encontrando, assim, 290 intersecções, ou seja, 290 agulhas cruzaram as retas paralelas e é obtido uma aproximação para π de 3,448. Com 1000 agulhas recebe-se um erro de cerca de 9,76%. Sendo assim, esse método é menos preciso do que o método do círculo que veremos mais adiante e também é muito mais lento devido à maneira complicada de criar as agulhas. Cada lote de agulhas que você soltará aumentará o número total de agulhas medidas, permitindo aproximar π com mais precisão em cada simulação, ou seja, simulando algumas vezes para 1000 agulhas soltas, é percebido diferentes estimações com tempo de execução diferente e erros também diferentes.

Para avaliar a convergência da aproximação, ou seja, para ver como as estimativas dessa abordagem convergem para o verdadeiro valor de π , repete-se o processo para diferentes números de agulhas soltas escrevendo uma função simples que aproxime π com

Figura 2 – Representação esquemática das agulhas soltas “em uma superfície”.



base em um determinado número de agulhas soltas.

Cronometrando o tempo de compilação para esse método e compilando novamente, para 1000 agulhas soltas é encontrado uma estimativa para π de aproximadamente 3,247 e o tempo gasto em segundos é de 0,92. A medida que se aumenta o número de agulhas soltas aumentará também o tempo de simulação até se tornar quase impossível fazer uma simulação com mais de 1.000.000 de agulhas, pois o tempo que levará será muito grande e não valerá a pena. É observado que a medida em que se aumenta o número de agulhas simuladas se observa que a variabilidade da estimativa para esse valor diminui.

Percebe-se, também, que para 1.000.000 de agulhas soltas o tempo gasto foi um pouco mais que 800 segundos. Já com relação ao erro, dado em porcentagem, vai diminuindo a medida em que se aumenta o número de agulhas simuladas. Para a simulação de 1000 agulhas o erro foi aproximadamente 7,5% e para 1000.000 o erro foi um pouco mais que 3%, o que mostra claramente que quanto maior o número de agulhas menor será o erro de aproximação.

Portanto, é observado que quanto maior o número de agulhas, mais precisa fica a estimativa de π , porém vê-se, claramente, que o tempo necessário para a simulação também aumenta consideravelmente. O Erro da estimativa de π também vai diminuindo conforme o número de agulhas soltas é aumentado, como pode ser visto nas Figuras mais adiante. As rotinas feitas no *software* R e utilizadas aqui encontram-se no Apêndice A e para organizar o *script* da análise foram utilizadas ideias de Strimas-Mackey (2015).

Entende-se que a simulação para o cálculo aproximado de π pelo Problema da agulha de Buffon é possível, porém, com um tempo de execução demorado e um erro alto, apesar de ir diminuindo ao aumentar-se o número de agulhas soltas. O que leva a perceber que, como uma questão prática, a experiência da agulha de Buffon não é um problema

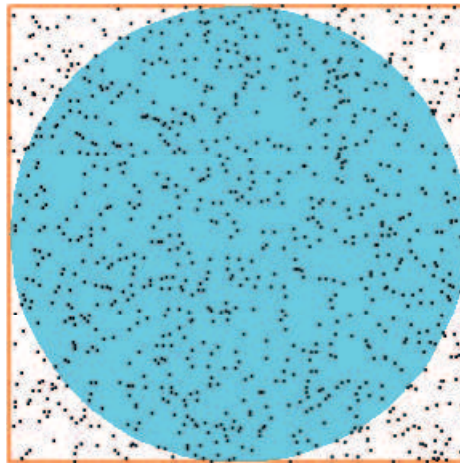
muito eficiente de aproximação para π .

Logo, pode-se concluir que, com relação a estimação de π via Problema da Agulha de Buffon, a teoria afirma que o melhor que se pode obter são resultados do seguinte tipo: Se lançarmos a agulha n vezes e ela cruzar uma linha k vezes, utilizando a razão k/n para calcular uma aproximação de π , então com uma certa probabilidade p o resultado estará numa certa vizinhança ε de π . Cabe, então, obter majorações para o erro cometido, percebendo assim que são relativamente grandes e os cálculos simulados revelam que com valores de n astronomicamente elevados a convergência se torna extraordinariamente lenta, levando então a perceber que o método da agulha de Buffon não é, pois, adequado para se obter informação sobre os algarismos de π .

3.2 Estimação de π através do Problema do Círculo Inscrito

Esta seção apresenta os resultados obtidos a partir do método de Monte Carlo, com a abordagem do círculo circunscrito em um quadrado via simulação no R. Neste caso, como descrito anteriormente, distribui-se aleatoriamente um grande número de pontos sobre o quadrado, de modo que existe uma probabilidade uniforme de que um determinado ponto esteja em qualquer lugar dentro do quadrado, e conta-se o número de pontos total e dentro do círculo.

Figura 3 – Representação dos pontos simulados no quadrado



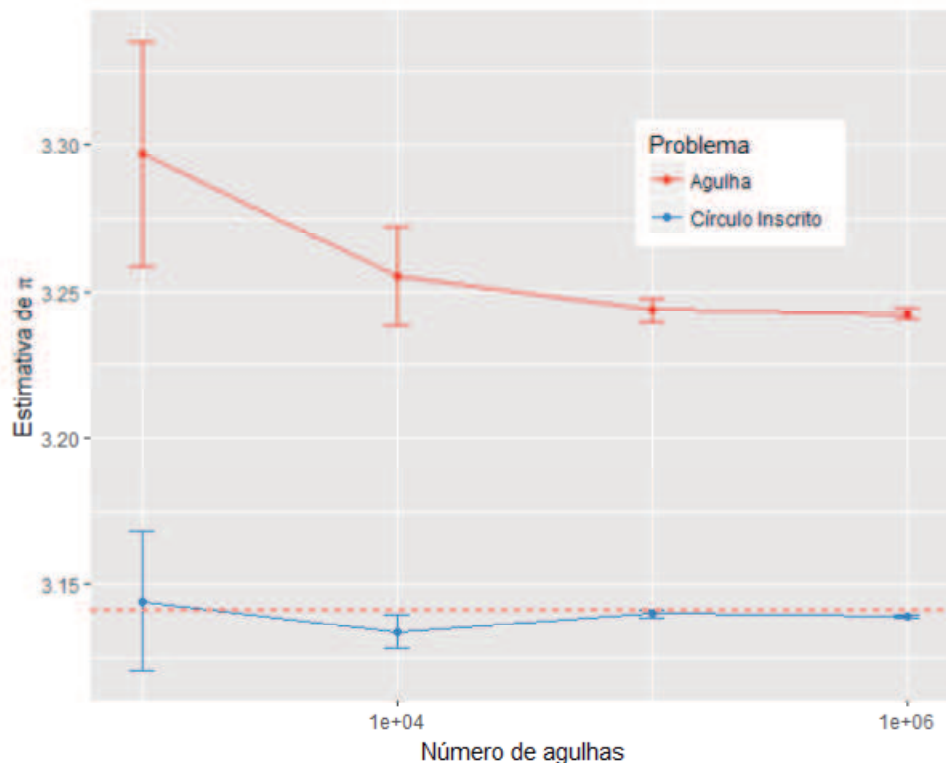
Inicialmente foi desenhado um quadrado com um círculo inscrito, sendo em seguida, simulados aleatoriamente um grande número de pontos dentro deste quadrado usando a função `spsample` do pacote `sp` e, como pode-se observar na Figura 3 que apresenta a distribuição de pontos gerados aleatoriamente dentro e fora do círculo. Para organizar o *script* da análise para o método de Monte Carlo também foram utilizadas ideias de Strimas-Mackey (2015).

Existem algumas maneiras de determinar quantos pontos caíram dentro do círculo, no pacote `sp` tem-se a função `over(x,y)`, que fornece os índices do objeto espacial y nas localizações espaciais do objeto x . Se uma determinada característica em x não estiver contida dentro de y , uma ausência de resposta (denotada no R por `NA`) é retornada, nesse trabalho pode-se dizer que x são os pontos e y é o círculo. Além disso, o pacote `sp`, alternativamente, oferece um tipo de linguagem para extrair os recursos em uma geometria que se encontra dentro de outra geometria. Além desses métodos, o pacote `rgeos` fornece um conjunto mais completo de operações topológicas para calcular quantos pontos caíram dentro do círculo. Mas, no fim todos esses métodos chegam a mesma contagem.

Logo, executando o programa para 1000 pontos simulados no quadrado foi encontrado que o número de pontos dentro do círculo foi 792, se executar outras vezes possivelmente será encontrado diferentes estimativas de pontos dentro do círculo, ou seja, esta aproximação, no entanto, mudará com cada execução diferente do código à medida que os pontos gerados aleatoriamente mudam, desde que a semente inicial do gerador de números aleatórios não seja fixada.

Finalmente, tomando a proporção de pontos dentro do círculo para pontos totais que nesse caso o total foi 1000 e multiplicando por 4, têm-se a estimativa de $\pi \approx 3.168$. Assim como no Problema da Agulha de Buffon é possível se encontrar uma estimativa do

Figura 4 – Representação gráfica comparando a aproximação de π pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.



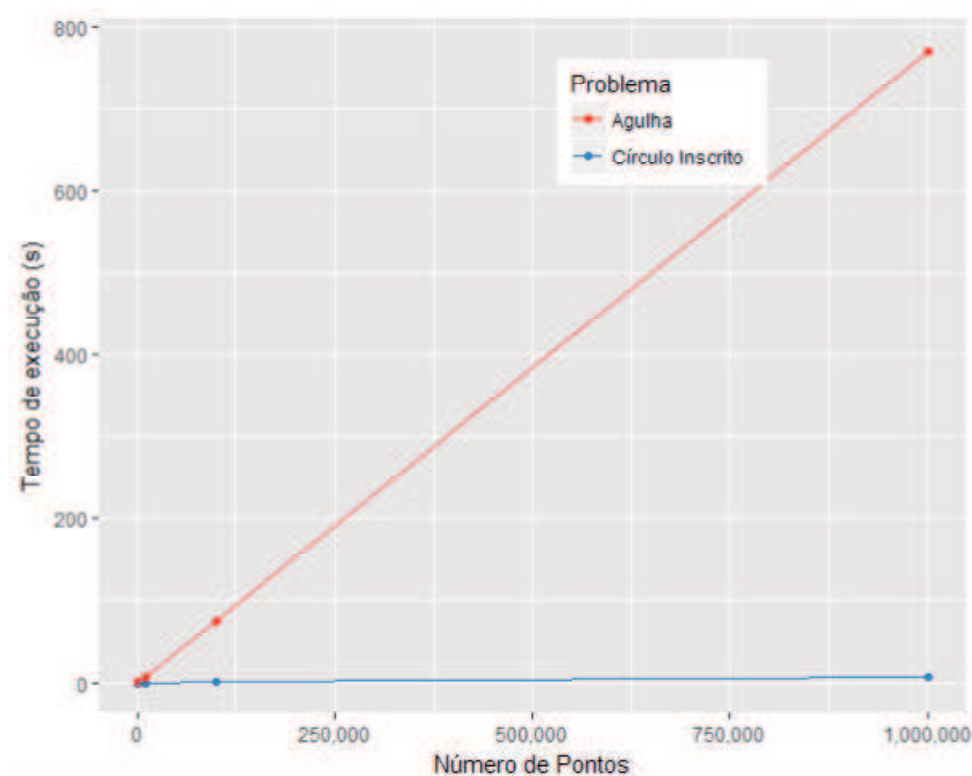
erro para o Problema do Círculo Inscrito. Com a função `round()` para 1000 pontos, foi recebido um erro de cerca de 0,84% o que não é tão ruim, pois a estimativa de π foi bem mais precisa do que no Problema da agulha de Buffon.

Para ver como as estimativas dessa abordagem convergem para o verdadeiro valor de π , Repete-se o processo para diferentes números de pontos simulados. Primeiro, ao escrever uma função simples para estimar π com base em um determinado número de pontos, no caso 1000 encontrou uma estimativa de $\pi \approx 3,1532$, com tempo de execução observado em 0,14s, bem menor do que o tempo gasto pelo Problema da Agulha de Buffon.

Portanto, para se ter uma sensação de variabilidade, esta mesma função foi implementada para uma variedade de valores de número de pontos, estimando, assim, a estimativa de π várias vezes, no caso para 1000, 10.000, 100.000 e 1.000.000 de pontos simulados dentro do quadrado.

Foi observado que quanto maior o número de pontos plotados no quadrado, mais o valor estimado de π se aproxima do valor verdadeiro. Observa-se que o tempo de execução para o Problema do círculo circunscrito é bem menor em comparação com o Problema da Agulha de Buffon, tornando assim esse problema mais eficiente em termos computacionais. Neste sentido, é possível observar que o tempo gasto para 1000 pontos plotados foi de

Figura 5 – Representação gráfica comparando o tempo gasto na execução do cálculo de π pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.



aproximadamente 0,1 segundos e para 1000.000 de pontos plotados foi próximo de 6,5 segundos, o que é bem menor que o Problema da Agulha.

É observado um erro de aproximadamente 2% para 1000 pontos e aproximadamente 0,1% para 1.000.000 de pontos, o que é bem menor que o problema anterior. Então, com um milhão de pontos gerados, 785.217 deles caíram dentro do círculo e a estimativa de $\pi \approx 3,140868$ foi obtida com um tempo de execução de aproximadamente 6,5s, com uma margem de erro de 0,1%. No entanto, há claramente um efeito de retornos decrescentes e o tempo de execução aumenta linearmente com o número de pontos, mas os ganhos de precisão estão diminuindo exponencialmente, isso é observado nas figuras abaixo.

O interessante sobre esta simulação é que usando apenas 1000 pontos, obtém-se uma boa aproximação para π , em torno de 3,1532. Esta aproximação, no entanto, mudará com cada compilação diferente do algoritmo à medida que os pontos gerados aleatoriamente mudam. As estimativas para π eventualmente começam a convergir para o seu valor real. No entanto, se entende que aumentar o número de simulações aumenta o tempo necessário para a completa execução da tarefa.

A intuição por trás do processo de simulação é que, se forem gerados aleatoriamente pontos confinados dentro de um quadrado que circunscreva um círculo, a probabilidade de os pontos que caem dentro do círculo será diretamente proporcional à área do círculo. Uma vez que o círculo está inscrito na região, portanto, o seu raio é igual a 1 e, portanto, a área será $\pi/4$. Essa relação também é aproximadamente igual aos pontos numéricos gerados aleatoriamente dentro do quadrado que se enquadram no círculo para os pontos gerados totais. A aproximação deve convergir para o valor real de π se tiver um número muito grande de pontos que tendem idealmente a pontos infinitos dentro do quadrado.

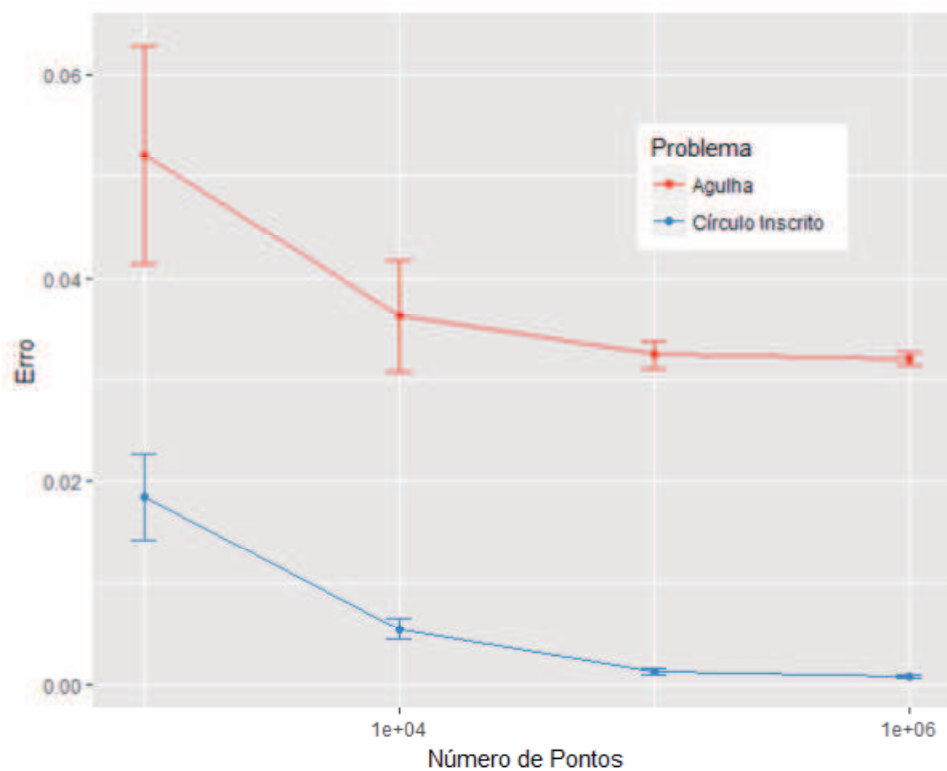
Por fim, combina-se os resultados das duas abordagens para comparação entre elas. A Figura 4 apresenta os resultados do cálculo de π , onde a linha vermelha representa o Problema da Agulha de Buffon, a linha azul o Problema do Círculo Inscrito e a linha tracejada em vermelho representa o valor real da constante π . Observando o gráfico, fica claro que o Problema do Círculo Inscrito é mais preciso, a diferença de precisão entre os dois problemas é visível.

A Figura 5 apresenta o tempo referente aos dois problemas, ao compará-los, nota-se de modo bastante perceptível, que o Problema do Círculo Inscrito é mais rápido do que o Problema da Agulha de Buffon que é muito mais lento devido à maneira complicada de criar as agulhas, e observa-se também que o tempo cresce linearmente.

Finalmente, a Figura 6 apresenta a comparação dos erros cometidos nos dois procedimentos de simulação, dados em porcentagem para facilitar a interpretação. Comparando os dois problemas, observa-se que o erro de aproximação referente ao Problema do Círculo Inscrito é insignificante comparado ao erro do Problema da Agulha. O gráfico apresenta

claramente que os ganhos de precisão estão diminuindo exponencialmente, como já citado anteriormente.

Figura 6 – Representação gráfica comparando o erro pelo Problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito para n variando em 10^3 , 10^4 , 10^5 e 10^6 agulhas soltas e pontos plotados, respectivamente.



4 Conclusão

Uma aplicação prática da simulação computacional foi realizada sobre a estimação de π pelo problema da Agulha de Buffon e pelo Problema do Círculo Inscrito através do Método de Monte Carlo. Uma revisão bibliográfica sobre simulação, destacando os principais pontos para este trabalho: Problema da Agulha de Buffon, Problema do Círculo Inscrito, Monte Carlo e Simulação Computacional foi apresentada e sugestões sobre a forma de utilização das ferramentas de simulação para a aquisição dos cálculos com o intuito de estimar o valor de π , que foi o ponto principal trabalhado no Capítulo 3, deste trabalho, foram apresentadas.

Cabe ressaltar que o conhecimento que aqui se buscou está relacionado apenas com o uso do `software` R para simular a estimativa de π via Monte Carlo pelo Problema do Círculo Inscrito e pelo Problema da Agulha de Buffon. Então, pode-se ver que a simulação é uma ferramenta eficiente para estimar tal valor, embora com números elevados de valores simulados possa se tornar uma ferramenta lenta, tornando, assim, o trabalho muito mais difícil.

Deve-se, também, ressaltar que para ser uma ferramenta útil, a simulação deve ser utilizada corretamente: os passos do estudo devem ser seguidos sistematicamente, os dados devem ser analisados com cuidado e a implementação deve ser conduzida corretamente. Caso contrário, erros advindos de uma simulação incorreta causarão danos e prejuízos, sendo que no caso aqui apresentado, poderá resultar em uma estimativa incorreta da constante π .

Após todo um estudo dos problemas trabalhados aqui, optou-se por realizar uma simulação, em vez de experimentos com objetos, o que permitiria um grande número de lançamentos das agulhas e um grande número de pontos plotados, isto é, com o uso da simulação os problemas poderiam ser melhor visualizados, já que outros parâmetros envolvidos nos experimentos poderiam ser variados com praticidade. O que leva a perceber que uma simulação de Monte Carlo é um método para encontrar uma resposta a um problema repetidamente ao gerar valores de alguma variável de interesse ao acaso. Eles são principalmente adequados para problemas em que um algoritmo determinístico pode não ser prático ou mesmo viável.

Verificou-se que o Problema da Agulha de Buffon é válido como um problema aleatório para estimar valores para a constante matemática π e todas as previsões teóricas foram corretamente verificadas a partir de dados gerados computacionalmente. No entanto, o problema se mostrou pouco eficiente, já que um número muito grande de lançamentos de agulhas n é necessário para obter um valor estimado para π próximo ao seu valor

verdadeiro.

Obviamente, ao serem simulados mais pontos dentro do quadrado, a proporção tornou-se mais próxima da probabilidade teórica e aproximação ficou mais precisa, porém aumentou o tempo de compilação, mas, o erro de precisão diminuiu, o que foi bom para o objetivo deste trabalho que era estimar o valor de π o mais próximo do valor real.

A comparação feita entre esses dois métodos para estimar esta constante matemática nos mostrou claramente que o problema mais eficaz é o do Círculo Inscrito, uma vez que levou menos tempo para executar o algoritmo para valores grandes e a margem de erro de precisão foi bem menor, o que só confirmou a conclusão que havia chegado antes.

Este mesmo método de simulação de Monte Carlo também pode ser usado se calcular de maneira aproximada áreas de regiões desconhecidas. Para isso, usa-se uma ideia parecida ao que foi proposto aqui, porém colocando o recorte da área a ser estimada dentro de polígono com área conhecida. O grande problema aqui, é conseguir identificar os pontos que estão dentro da região, principalmente para figuras irregulares.

Referências

- BIVAND, R.; KEITT, T.; ROWLINGSON, B. *rgdal: Bindings for the 'Geospatial' Data Abstraction Library*. 2017. R package version 1.2-13. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=rgdal>>. Citado na página 24.
- BIVAND, R.; RUNDEL, C. *rgeos: Interface to Geometry Engine - Open Source ('GEOS')*. 2017. R package version 0.3-25. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=rgeos>>. Citado na página 24.
- BORGES, M. A. V. *Análise da potencialidade de sinergia entre o pensamento sistêmico e a simulação computacional*. 2000. UFRGS. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Citado na página 13.
- BUESCU, J. Terá Buffon realmente lançado agulhas? *Boletim da SPM*, v. 71, p. 10, 2014. Citado na página 14.
- FILETI, E. E. *Implementação e Aplicações do método Monte Carlo Reverso para líquidos homogêneos*. 2000. Universidade de São Paulo - Instituto de Física. Departamento de Física dos Materiais e Mecânica. Citado na página 12.
- FILHO, A. A. D. *A Simulação de Variáveis Aleatórias e os Métodos Monte Carlo e Quase-Monte Carlo na Quadratura Multidimensional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000. Citado na página 17.
- FISHWICK, P. A. A taxonomy for simulation modeling based on programming language principles. *University of Florida*, v. 30, p. 10, ago. 1995. Department of Computer and Information Science and Engineering, University of Florida, Building CSE, Room 301, Gainesville, FL 32611. Received August 1995 and accepted June 1996. Citado na página 17.
- GARCIA, C. *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*. 2. ed. [S.l.]: São Paulo, Editora Edusp, 2005. ISBN 9788531409042. Citado na página 15.
- GAVIRA, M. de O. *Simulação Computacional como uma ferramenta de Aquisição de Conhecimento*. 2004. Universidade de São Paulo. Dissertação Apresentada a Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 23.
- HENRIQUE, D. *A longa busca pelo valor de Pi*. 2017. Disponível em: <<http://socientifica.com.br/2017/03/longa-busca-pelo-valor-de-pi/>>. Acesso em: 20 de novembro de 2017. Citado na página 22.
- HIJMANS, R. J. *raster: Geographic Data Analysis and Modeling*. 2016. R package version 2.5-8. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=raster>>. Citado na página 24.

- JUNIOR, J. R. Z. *O Uso da Simulação Como Ferramenta De Apoio a Análise de Alternativas de Layout Visando o Aumento de Capacidade de Produção do Sistema de Manufatura*. 2009. São Bernardo do Campo, Centro Universitário da FEI. Mestrado em Engenharia de Produção. Citado na página 16.
- KUMAR, S.; PHROMMATHED, P. *Improving a manufacturing process by mapping and simulation of critical operations* *Improving a manufacturing process by mapping and simulation of critical operations*. [S.l.]: Springer, 2005. Citado na página 16.
- MEYERS, F. E.; STEPHENS, M. P. *Manufacturing facilities design and material handling*. 3. ed. [S.l.]: New Jersey: Prentice Hall, 2005. Citado na página 15.
- PAES, A. Z. et al. O problema das agulhas de Buffon. jun. 2015. São Paulo, Métodos Estatísticos em Física Experimental, Instituto de Física – Universidade de São Paulo. Citado na página 12.
- PEBESMA, E. J.; BIVAND, R. S. *Classes and methods for spatial data in R*. 2005. R News. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/doc/Rnews/>>. Citado na página 24.
- PIDD, M. *Modelagem Empresarial: ferramentas para tomada de decisão*. [S.l.]: Porto Alegre, Bookman, 1998. ISBN 9788573073522. Citado na página 17.
- PRADO, D. *Teoria das Filas e da Simulação*. 3. ed. [S.l.]: INDG, 2006. Citado na página 15.
- ROSS, S. M. *Simulation*. 5. ed. [S.l.]: Academic Press, 2013. Epstein Department of Industrial and Systems Engineering University of Southern California. ISBN 9780124158252. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- STRIMAS-MACKEY, M. *Estimating pi with GIS and Monte Carlo methods in R*. 2015. Disponível em: <<http://strimas.com/gis/estimating-pi/>>. Acesso em: 22 de novembro de 2017. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- VIEIRA, C. E. C. *Geradores de Números Aleatórios*. 2004. Puc Rio. Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio. Citado na página 18.
- WICKHAM, H. *ggplot2: Elegant Graphics for Data Analysis*. Springer-Verlag New York, 2009. ISBN 978-0-387-98140-6. Disponível em: <<http://ggplot2.org>>. Citado na página 24.
- WICKHAM, H. *The Split-Apply-Combine Strategy for Data Analysis*. Journal of Statistical Software, 2011. Disponível em: <<http://www.jstatsoft.org/v40/i01/>>. Citado na página 24.
- WICKHAM, H. *scales: Scale Functions for Visualization*. [S.l.], 2017. R package version 0.5.0. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=scales>>. Citado na página 24.
- WICKHAM, H. et al. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. [S.l.], 2017. R package version 0.7.4. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=dplyr>>. Citado na página 24.

APÊNDICE A – Rotina utilizada na análise

Este Apêndice apresenta os códigos do R utilizados no trabalho apresentado aqui.

```
#### Área Sombreada

fx <- function(x) (1/2)*sin(x)
cord.x <- c(0, seq(0, pi/2, 0.01), pi/2)
cord.y <- c(0,fx(seq(0, pi/2, 0.01)), 0)
curve(fx(x), 0, pi/2, xlab=expression(theta), ylab=expression((1/2)*sin(theta)),
main=expression(paste("Gráfico da função ", (1/2)*sin(theta))))
polygon(cord.x,cord.y,col='skyblue')

#### Aproximação do Valor de pi pelo Problema da agulha de Buffon
#### e pelo Problema do Círculo Inscrito via Método de Monte Carlo

#### pacotes necessários

library(sp)
library(raster)
library(rgdal)
library(rgeos)
library(plyr)
library(dplyr)
library(ggplot2)
library(scales)
set.seed(1)

##### PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

plano <- readWKT('POLYGON((-1 -1,-1 1,1 1,1 -1, -1 -1))')
ruled_lines <- readWKT('MULTILINESTRING((-0.5 -1, -0.5 1),(0.5 -1, 0.5 1))')
agulha_solta <- function(n_agulhas, plano, l = 0.5) {
midpoints <- spsample(plano, n_agulhas, type = 'random') %>%
coordinates
angulos <- 2 * pi * runif(n_agulhas)
troca <- cbind(l * cos(angulos) / 2, l * sin(angulos) / 2)
cbind(midpoints - troca, midpoints + troca) %>%
{dimnames(.) <- NULL; .} %>%
```

```

alply(1, function(x) {Line(rbind(x[1:2], x[3:4]))}) %>%
{SpatialLines(list(Lines(., ID = 'a')))} %>%
disaggregate
}
plot(plano, axes=T, border = '#F38630', col = 'transparent', lwd = 1, lty = 2)
plot(ruled_lines, axes = T, col = '#FA6900', lwd = 2, add = T)
agulha_solta(50, plano, l = 0.5) %>%
plot(add = T, col = '#69D2E7', lwd = 1.5)

##### Aproximar pi para 1000 agulhas soltas

#### Criando agulhas (ou seja, segmentos de linha aleatórios)
#### Calculando o erro de aproximação através da função round

n_agulhas <- 1000
agulhas <- agulha_solta(n_agulhas, plano, l = 0.5)
(n_intersecção <- sum(gIntersects(agulhas, ruled_lines, byid = T)))
(pi_est <- n_agulhas / n_intersecção)
round(abs(100 * (pi_est / pi - 1)), 2)

#### Convergência

#### Envolvendo tudo em uma função para estimar pi.

estimativa_pi_agulhas <- function(n_agulhas) {
t <- system.time({
plano <- readWKT('POLYGON((-1 -1,-1 1,1 1,1 -1, -1 -1))')
ruled_lines<-readWKT('MULTILINESTRING((-0.5 -1, -0.5 1),(0.5 -1, 0.5 1))')
agulhas <- agulha_solta(n_agulhas, plano, l = 0.5)
n_intersecção <- sum(gIntersects(agulhas, ruled_lines, byid = T))
pi_estimado <- n_agulhas / n_intersecção
})
return(data.frame(pi_estimado, t = t[['user.self']]))
}
estimativa_pi_agulhas(1000)

#### Aproximando pi para uma gama de parâmetros: 103, 104, 105 e 106
#### agulhas soltas

n_valores <- 10^(3:4)

```

```

n_reps <- 10
estimativa_n <- expand.grid(n_valores, 1:n_reps) %>%
setNames(c('n_pts', 'run')) %>%
tbl_df %>%
group_by(n_pts, run) %>%
do(estimativa_pi_agulhas(.$n_pts))

## traçando as estimativas resultantes.

estimativa_n_resumo<- estimativa_n %>%
mutate(pct_error = abs((pi_estimado / pi - 1))) %>%
group_by(n_pts) %>%
summarize(pi_mean = mean(pi_estimado),
pi_se = se(pi_estimado),
error_mean = mean(pct_error),
error_se = se(pct_error),
t_mean = mean(t))

# Gráfico da aproximação para pi.

ggplot(estimativa_n_resumo, aes(x = n_pts, y = pi_mean)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = pi_mean-pi_se, ymax = pi_mean+pi_se), width = .1) +
geom_line() +
geom_hline(aes(yintercept=pi), color = 'red', linetype = 'dashed') +
scale_x_log10() +
labs(x = 'Número de agulhas', y = expression(Estimativa ~de~pi))

# Gráfico do erro de precisão da aproximação para pi.

ggplot(estimativa_n_resumo, aes(x = n_pts, y = error_mean)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = error_mean - error_se, ymax = error_mean+error_se),
width = 0.1) +
geom_line() +
scale_x_log10() +
scale_y_continuous(labels = percent, breaks = 0:6 * 0.01) +
labs(x = 'Número de Agulhas', y = 'Erro')

# Gráfico do tempo de execução do algoritmo

ggplot(estimativa_n_resumo, aes(x = n_pts, y = t_mean)) +

```

```

geom_point() +
geom_line() +
scale_x_continuous(labels = comma) +
labs(x = 'Número de Agulhas', y = 'Tempo de execução (S)')

#####
###
#### PROBLEMA DO CÍRCULO INSCRITO

#### Primeiro desenha-se um quadrado com um círculo inscrito

quadrado <- readWKT('POLYGON((-1 -1,-1 1,1 1,1 -1, -1 -1))')
circulo <- readWKT('POINT(0 0)') %>%
gBuffer(width = 1, quadsegs = 25)
plot(quadrado, axes = F, border = '#FA6900', lwd = 2)
plot(circulo, add = T, col = '#69D2E7', border = 'transparent')

##### Mostrando aleatoriamente um grande número de pontos
##### dentro deste quadrado.

n_pts <- 1000
pts <- spsample(quadrado, n_pts, type = 'random')
plot(quadrado, axes = F, border = '#FA6900', lwd = 2)
plot(circulo, add = T, col = '#69D2E7', border = 'transparent')
plot(pts, add = T, pch = 21, cex = 0.25, col = '#333333')

#### Usando a função over(x,y) no pacote sp para mostrar quais
#### dos pontos estão dentro do círculo

over(pts, circulo) %>%
{!is.na(.)} %>%
sum

#### Alternativamente, o pacote sp oferece um tipo de linguagem para extrair
#### os recursos em uma geometria que se encontra dentro de outra geometria.

pts_dentro <- pts[circulo, ]
length(pts_dentro)

```



```
#### Além desses métodos no sp pacote, o rgeos pacote fornece um conjunto mais
#### completo de operações
```

```
n_dentro <- gIntersects(pts, circulo, byid = T) %>%
sum
n_dentro
```

```
#### Finalmente, levando a proporção de pontos dentro do círculo para pontos
#### totais e multiplicando por 4, dá uma estimativa para pi e com a função
#### round calcula-se o erro.
```

```
(pi_est <- 4 * n_dentro / n_pts)
round(abs(100 * (pi_est / pi - 1)), 2)
```

```
#####
#### CONVERGÊNCIA
```

```
#### Observando como as estimativas dessa abordagem converge para o verdadeiro
#### valor de pi.
#### Repetindo o processo para diferentes números de pontos
#### Escrevendo uma função simples para estimar pi com base em um determinado
#### número de pontos.
#### Cronometrando o tempo
```

```
estimativa_pi <- function(n_pts) {
t <- system.time({
quadrado <- readWKT('POLYGON((-1 -1,-1 1,1 1,1 -1, -1 -1))')
circulo <- readWKT('POINT(0 0)') %>%
gBuffer(width = 1, quadsegs = 25)
n_dentro <- spsample(quadrado, n_pts, type = 'random') %>%
gIntersects(circulo, byid = T) %>%
sum
pi_estimado <- (4 * n_dentro/ n_pts)
})
return(data.frame(pi_estimado, t = t[['user.self']]))
}
estimativa_pi(1e4)
```

```
#### Executando para 103, 104, 105 e 106 número de pontos no quadrado
```

```
n_valores <- 10^(3:6)
```

```
n_reps <- 10
estimativas <- expand.grid(n_valores, 1:n_reps) %>%
setNames(c('n_pts', 'run')) %>%
tbl_df %>%
group_by(n_pts, run) %>%
do(estimativa_pi(.$n_pts))

## Traçando os resultados:

se <- function(x) {
sd(x) / sqrt(length(x))
}
estimativa_resumo <- estimativas %>%
mutate(pct_error = abs(( pi_estimado / pi - 1))) %>%
group_by(n_pts) %>%
summarize(pi_mean = mean( pi_estimado),
pi_se = se( pi_estimado),
error_mean = mean(pct_error),
error_se = se(pct_error),
t_mean = mean(t))

#### Gráfico da estimativa de pi

ggplot(estimativa_resumo, aes(x = n_pts, y = pi_mean)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = pi_mean-pi_se, ymax = pi_mean+pi_se), width = .1) +
geom_line() +
geom_hline(aes(yintercept=pi), color = 'red', linetype = 'dashed') +
scale_x_log10() +
labs(x = 'Número de pontos', y = expression(Estimativa ~de~pi))

# Erro de aproximação da estimativa de pi

ggplot(estimativa_resumo, aes(x = n_pts, y = error_mean)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = error_mean-error_se, ymax = error_mean + error_se),
width = 0.1) +
geom_line() +
scale_x_log10() +
scale_y_continuous(labels = percent, breaks = 0:6 * 0.01) +
labs(x = 'Número de Pontos', y = 'Erro')
```

```
# Tempo gasto para estimar pi

ggplot(estimativa_resumo, aes(x = n_pts, y = t_mean)) +
geom_point() +
geom_line() +
scale_x_continuous(labels = comma) +
labs(x = 'Número de Pontos', y = 'Tempo de execução (s)')

#####
##### COMPARANDO OS TRÊS MÉTODOS

## Comparação de Métodos

## Por fim, combinA-SE os resultados das duas abordagens para comparação.

comparação <- bind_rows(
mutate(estimativa_resumo, method = 'Circulo inscrito'),
mutate(estimativa_n_resumo, method = 'Agulha'))

# Gráfico comparando a estimativa de pi
ggplot(comparação, aes(x = n_pts, y = pi_mean, color = method)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = pi_mean-pi_se, ymax = pi_mean+pi_se), width = .1) +
geom_line() +
geom_hline(aes(yintercept=pi), color = 'red', linetype = 'dashed') +
scale_x_log10() +
scale_color_brewer(name = 'Method', palette = 'Set1') +
labs(x = 'Número de agulhas', y = expression(Estimativa~de~pi)) +
theme(legend.position=c(0.75, 0.75))

# Gráfico comparando o erro de aproximação

ggplot(comparação, aes(x = n_pts, y = error_mean, color = method)) +
geom_point() +
geom_errorbar(aes(ymin = error_mean - error_se, ymax = error_mean+error_se),
width = 0.1) +
geom_line() +
scale_x_log10() +
scale_color_brewer(name = 'Method', palette = 'Set1') +
labs(x = 'Número de Pontos', y = 'Erro') +
theme(legend.position=c(0.75, 0.75))
```

```
# Gráfico comparando o tempo de execução

ggplot(comparação, aes(x = n_pts, y = t_mean, color = method)) +
  geom_point() +
  geom_line() +
  scale_x_continuous(labels = comma) +
  scale_color_brewer(name = 'Method', palette = 'Set1') +
  labs(x = 'Número de Pontos', y = 'Tempo de execução (s)') +
  theme(legend.position=c(0.75, 0.75))
```