UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

CRYSTIANE MEDEIROS FERNANDES

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DE FONTAINE PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS INEXATAS

PATOS - PB
NOVEMBRO/2018

CRYSTIANE MEDEIROS FERNANDES

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DE FONTAINE PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS INEXATAS

Monografia de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Coorientador: Prof. Me. José Elias da Silva

PATOS - PB

NOVEMBRO/2018

F363e Fernandes, Crystiane Medeiros.

Um estudo sobre o Método de Fontaine para a solução de equações diferenciais inexatas [manuscrito] / Crystiane Medeiros Fernandes. - 2018.

55 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2018.

"Orientação : Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

"Coorientação: Prof. Me. José Elias da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Método de Fontaine. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Camile de A. Gomes - CRB - 15/559 BC/UEPB

CRYSTIANE MEDEIROS FERNANDES

UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DE FONTAINE PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS INEXATAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 26 de novembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

A persistência é o caminho do êxito.

Charles Chaplin

AGRADECIMENTOS

Sem o amor e a fidelidade de Deus, eu não teria chegado até aqui. Então, agradeço primeiramente a Ele que me sustentou com a sua mão diante dos obstáculos encontrados durante a caminhada e que me dá saúde, força, coragem e muita sabedoria para continuar em busca dos meus objetivos.

À toda a minha família (minha mãe Luzia, minha filha Beatriz, meus irmãos Karine e Adryel, meus avós Maria e Antônio, minha tia Vera, meu tio Marcos - *in memoriam* - e os meus primos Stefany, Douglas e Júnior), gratidão! Vocês representam luz na minha vida e se cheguei até aqui, foi porque vocês sempre estiveram comigo. Vocês acreditaram muito mais do que eu na realização desse sonho.

Gratidão ao meu orientador, Arlandson, pela paciência e companheirismo durante a jornada de estudos. O seu apoio, a sua amizade, a sua orientação, dedicação e a sua compreensão foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a todos os professores, do ensino básico ao ensino superior, que contribuiram para minha formação tanto como ser humano como profissional, em especial a Lidiane, Júlio, Dilma, Nádia, Sérgio, Rhodolffo, Rozana, Renato, Ginaldo, Paulo Filho e Horácio (UFCG). Meus agradecimentos se estendem carinhosamente a todos que fazem parte da UEPB, desde a limpeza e segurança até a direção.

De forma muito especial, agradeço ao mestre José Elias, coorientador e "pai" na instituição. Gratidão pelas contribuições, pela paciência, dedicação, companheirismo, amizade, disposição e por todas as vezes que não permitiu que eu desanimasse.

Agradeço aos colegas, que tive o prazer de conhecer ao longo desses 4 anos, por todo apoio, incentivo e companheirismo, em especial ao 9° período de Matemática - diurno (vocês são incríveis) e noturno - e ao 7° período diurno. De forma mais que especial, agradeço a Italo Pereira, Andreza Campos e Nara Nóbrega, meus melhores amigos e presentes que a Matemática me deu, as pessoas que estiveram comigo além da vida acadêmica. Vocês são únicos e eu os carregarei em meu coração por toda a vida.

RESUMO

No presente trabalho, estudamos a resolução de equações da forma

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{1}$$

que é chamada exata quando seu lado esquerdo é a diferencial total de alguma função. Inicialmente, revisitamos diversos conceitos fundamentais de Cálculo no $\mathbb{R}^n$ e de Equações Diferenciais. De posse desses conceitos e tomando por base o artigo de Aaron E. Leanhardt e Adam E. Parker [11], descrevemos o método de Fontaine para resolução de equações inexatas do tipo

$$dx + \alpha dy = 0,$$

onde o coeficiente α é suposto não homogêneo de grau 0 e que se relaciona com (1) por $\alpha = N/M$. Esse método, praticamente desconhecido até hoje, consiste em considerar três equações, a que chamamos equações de Fontaine. Para a terceira delas, que é uma EDP, apresentamos uma família de soluções.

Palavras-chave: Análise Matemática. Equações Diferenciais. Método de Fontaine.

ABSTRACT

In this work, we study the resolution of differential equations of the form

$$Mdx + Ndy = 0, \tag{2}$$

which are called exact when the left-hand side is the total differential of some function. Initially, we revisit some seminal concepts from the Calculus in $\mathbb{R}^n$ and Differential Equations. With these concepts at hand and following Aaron E. Leanhardt e Adam E. Parker's article [11], we describe the method due to Fontaine for solving inexact equations of the type

$$dx + \alpha dy = 0,$$

where α is supposed to be non-homogeneous of degree 0 and relates to (2) by $\alpha = N/M$. This method, practically unknown until nowadays, consists of considering three equations, which are called Fontaine equations. For the third one, which is a PDE, we provide a family of solutions.

Keywords: Mathematical Analysis. Differential Equations. Fontaine's Method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Equações diferenciais são equações que contêm as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com respeito a uma ou mais variáveis independentes. As equações diferenciais são classificadas de acordo com alguns critérios, tais como tipo, ordem e linearidade. O presente estudo consiste em descrever um método de solução para equações diferenciais inexatas.

Uma expressão diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{1.1}$$

é dita uma *diferencial exata* numa região R do plano xy se ela corresponde à diferencial de alguma função $f(x,y)$ definida em R. Neste caso, a equação diferencial de primeira ordem

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é dita uma *equação exata*. Uma conhecida condição para que a expressão (1.1) seja uma diferencial exata é a seguinte (veja [4]): *Suponha que* $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$ *são contínuas e têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região definida por* $R = (a,b)\times(c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$. *Então uma condição necessária e suficiente para que* (1.1) *seja uma diferencial exata em* R *é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Dizemos que uma função que satisfaz as hipóteses sobre $M(x,y)$ e $N(x,y)$ na condição que acabamos de citar pertence à classe $C^1(R)$. Para resolver uma equação diferencial inexata, fazemos o uso de uma técnica bastante conhecida nos cursos de equações diferenciais, que consiste em buscar um *fator de integração* $\mu(x,y)$ para "exatificar" tal equação, isto é, devemos buscar uma função $\mu(x,y)$ tal que a equação

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0. \tag{1.3}$$

Supondo que todas as funções envolvidas são de classe C^1 sobre alguma região do plano, de acordo com (1.2), a nova equação (1.3) é exata se, e somente se, $(\mu M)_y = (\mu N)_x$. Aplicando a regra do produto a esta última igualdade e rearranjando os termos, vemos que ela é equivalente a

$$\mu_x N - \mu_y M = (M_y - N_x)\mu. \tag{1.4}$$

A dificuldade aqui está em determinar a função desconhecida $\mu(x, y)$ a partir de (1.4). Façamos a seguinte simplificação: suponhamos que μ depende apenas de uma das variáveis, digamos de x. Então $\mu_x = d\mu/dx$ e $\mu_y = 0$. Assim, a equação (1.4) se torna

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{(M_y - N_x)\mu}{N}. \tag{1.5}$$

Se, por sorte, o quociente $(M_y - N_x)/N$ depender apenas de x, então (1.5) é uma equação linear separável. Integrando-a, encontramos

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}. \tag{1.6}$$

Supondo simplificações análogas com y no lugar de x, encontramos

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}. \tag{1.7}$$

Este método para resolver equações diferenciais inexatas é devido ao matemático francês Alexis-Claude Clairaut e é aprendido hoje por praticamente todo estudante de equações diferenciais. O método de Clairaut baseia-se em um melhoramento de um método do matemático francês Alexis Fontaine, publicado em um artigo de 1738, que Clairaut foi designado para avaliar. Clairaut percebeu que o método de Fontaine poderia ser melhorado e publicou o método que hoje conhecemos em um artigo que data de 1739.

Nosso trabalho foi baseado no artigo de Aaron E. Leanhardt e Adam E. Parker [11] intitulado *Fontaine's Forgotten Method for Inexact Differential Equations*, que trata de examinar os métodos de Clairaut e de Fontaine, este último praticamente desconhecido até hoje em dia, de explicar o porquê que o primeiro está relacionado com resolver uma certa equação diferencial parcial (EDP) e de mostrar que o segundo também está relacionado com a resolução de uma EDP, só que mais difícil. Os autores também apresentam novas soluções para uma dada família de equações diferenciais ordinárias (EDOs), resolvendo as EDPs envolvidas. Este é provavelmente o primeiro exemplo de uma EDO resolvida pelo método de Fontaine que não é facilmente resolvida pelo de Clairaut.

Esta monografia está organizada como segue. No Capítulo 2, apresentaremos definições e resultados necessários para compreender nosso texto. No Capítulo 3, estudaremos o método de Fontaine para resolver equações diferenciais inexatas, considerando as três equações de Fontaine e um exemplo apresentado em [11]. No Capítulo 4, estudaremos brevemente a família de soluções para a EDP obtida através da Terceira Equação de Fontaine.

2 PRELIMINARES

2.1 CÁLCULO NO ESPAÇO $\mathbb{R}^n$

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n cópias da reta real $\mathbb{R}$. Assim, seus elementos, também chamados *vetores*, são n-uplas de números reais, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ em que $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. É sabido que, munido das operações usuais de somas de n-uplas de números e do produto de um número real por uma tal n-upla, definidas coordenada a coordenada, faz de $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial real de dimensão n.

Neste espaço vetorial, podemos definir uma noção de comprimento de vetores, isto é, uma *norma* $\|\cdot\|$, inspirada no teorema de Pitágoras e denominada *norma euclidiana*, da seguinte maneira: para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

É imediato verificar que as propriedades abaixo são satisfeitas:

(i) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = (0, \ldots, 0)$ é o vetor nulo;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular).

Observe que, quando $n = 1$, $\|\cdot\|$ é simplesmente o módulo (ou valor absoluto) de um número real.

Munido desta norma euclidiana, dizemos que $\mathbb{R}^n$ é um *espaço vetorial normado*. Ora, toda norma dá origem a uma noção de distância $d(\cdot, \cdot)$ entre vetores, a qual é definida, para $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, por

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

É imediato verificar que:

(i) $d(x,x) \leq 0$ e $d(x,x) = 0$ se, e somente se, $x = (0,\dots,0)$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular).

O espaço $\mathbb{R}^n$ munido desta distância, também chamada *métrica*, é dito um *espaço métrico*. Como toda métrica induz uma *topologia*, $\mathbb{R}^n$ é também um espaço topológico, onde os *abertos* são definidos como segue. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e r um número real positivo, a *bola aberta* de centro x e raio r é o conjunto

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = \|x - y\| < r\}.$$

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é, então, dito um *conjunto aberto* se, para todo $x \in A$, existe um $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset A$. Em particular, toda bola aberta é um conjunto aberto. Estes conjuntos abertos que acabamos de definir de fato gozam das propriedades que, de maneira geral, definem os abertos de um espaço topológico, a saber: É imediato que:

(i) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos;

(ii) Se $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos, então também é a interseção $A_1 \cap \dots \cap A_k$;

(iii) A reunião $\cup_{i \in I} A_i$ de uma família de conjuntos abertos $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.

Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado, um espaço métrico e um espaço topológico – e isso nos permite fazer cálculo em $\mathbb{R}^n$ como fazemos na reta, com as devidas adaptações. Como falar de cálculo é falar em funções, apresentamos a seguinte

Definição 2.1 *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma* **função real definida em** *A é uma aplicação $f : A \to \mathbb{R}$ que associa a cada n-upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ um único número $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. O conjunto A é chamado o* **domínio de** *f e será indicado por D_f. O conjunto*

$$Im_{(f)} = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R} : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_{(f)}\}$$

é dito a **imagem de** *f.*

No que segue, quando $n = 2$, escreveremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em vez de (x_1, x_2).

Exemplo 1 *Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq y$, seja $f(x, y)$ o número real dado por*

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Isso define uma função real f cujo domínio é $D_{(f)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ Esta função transforma cada par (x, y) de seu domínio no número real $\dfrac{x+y}{x-y}$.

Analogamente ao que acontece na reta, dada uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, podemos indagar o que acontece com os valores $f(x)$ quando $x \in A$ se aproxima de um certo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Uma condição para que esta indagação faça sentido (já que precisamos que $x \in A$ possa, de fato, "estar perto" de $x_0 \in \mathbb{R}^n$) é que x_0 seja um *ponto de acumulação* de A. Isso significa que toda bola aberta $B_r(x_0)$ deve conter pelo menos um ponto de $A \setminus \{x_0\}$, qualquer que seja o valor de $r > 0$.

Definição 2.2 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de A e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando $x \in A$ tende a x_0 e escrevemos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in A,\, 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon,$$

em que $|\cdot|$ denota o módulo (ou valor absoluto) de um número real.

O limite L, quando existe, é único. Com efeito, se $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ são ambos limites de uma função $f(x)$ quando x tende a um ponto de acumulação x_0 de seu domínio, então, para todo $\epsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que, se x é um ponto do domínio de $f(x)$ e $0 < \|x - x_0\|$, devemos necessariamente ter que $|f(x) - L_1|$ e $|f(x) - L_2|$. Daí, pela desigualdade triangular, $|L_1 - L_2| < \epsilon$. Como isso acontece para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $L_1 = L_2$.

Exemplo 2 *Sejam $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Então

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0.$$

De fato, temos

$$|f(x,y)-L| = |f(x,y)-0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta = \epsilon$. Daí,

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon.$$

Definição 2.3 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é* **contínua no ponto** $x_0 \in A$ *se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in A,\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

em que $|\cdot|$ denota o módulo (ou valor absoluto) de um número real. Dizemos que f é **contínua em** *A (ou, simplesmente,* contínua) *se f é contínua em todo ponto $x_0 \in A$.*

Obviamente, quando $x_0 \in A$ é também um ponto de acumulação de A, então f é contínua em x_0 se, e somente se, existe o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0, e este limite é igual a $f(x_0)$. No Exemplo 2, se definirmos f como sendo 0 no ponto $(0,0)$, então f é contínua neste ponto. Também é possível mostrar que aquela f é contínua em qualquer outro ponto do plano.

Recorde que, se $y = f(x)$ é uma função de uma variável real, então sua derivada no ponto x_0 é definida por

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir, em que $\Delta x = x - x_0$. Esta derivada mede a taxa de variação de y em relação a x. Para funções de duas (e, mais geralmente, de n variáveis) reais $z = f(x,y)$ independentes também podemos definir taxas que meçam a variação de z com relação a x e y.

Os melhores conjuntos sobre os quais podemos derivar são os conjuntos abertos do plano. Por essa razão, suporemos daqui por diante, sempre que preciso, que os domínios de nossas funções são conjuntos abertos.

Definição 2.4 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, uma função real de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in A$. A* **derivada parcial de f com relação a x no ponto** (x_0, y_0) *é definida por*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \tag{2.1}$$

se este limite existir.

Observe que, fixado y_0 tal que $(x_0, y_0) \in A$, isso equivalente a considerar a função $g(x) = f(x, y_0)$, $(x, y_0) \in A$, e tomar a derivada de g no ponto $x = x_0$, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = \frac{dg}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogamente, definimos a derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \tag{2.2}$$

se o limite existir.

Novamente, isso equivale a fixar x_0, considerar a função $h(y) = f(x_0, y)$ e então considerar a derivada de h no ponto y_0,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = \frac{dh}{dx}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0}.$$

Observe que, fazendo $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$, (2.1) e (2.2) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Exemplo 3 *Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Encontremos $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.*

Solução: *Primeiramente, encontraremos a derivada parcial de f em relação a x. Para isso, calculamos o limite*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2xy + 2y\Delta x - 4y - (2xy - 4y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta xy}{\Delta x} \\ &= 2y. \end{aligned}$$

Oberve que poderíamos ter suposto y constante e então derivado f usando as regras usuais do cálculo de funções de uma variável real, o que nos daria

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(2xy - 4y) = 2y - 0 = 2y.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Para encontrarmos a derivada parcial de f em relação a y, realizamos um procedimento análogo. Por definição, precisamos considerar o limite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2xy+2x\Delta y-4y-4\Delta y-(2xy-4y)}{\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{2x\Delta y-4\Delta y}{\Delta y}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(2x-4)\Delta y}{\Delta y}\\
&= 2x-4.
\end{aligned}$$

O mesmo resultado é obtido quando o x é considerado como uma constante e derivamos f com respeito somente a y, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{d}{dy}(2xy-4y)=2x-4.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x-4$ *para todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

De maneira mais geral, dada uma função $f(x_1,\ldots,x_n)$, definimos a derivada parcial de f com relação a x_i no ponto $(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\lim_{x_i\to x_i^0}\frac{f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{x_i-x_i^0},$$

se este limite existir, o que na prática significa derivar f com relação a x_i considerando todas as demais variáveis $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ como constantes.

Para simplificar a notação, por vezes é conveniente escrevermos f_x em lugar de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e f_y em lugar de $\frac{\partial f}{\partial y}$, e é isso que faremos sempre que julgarmos necessário. Quando $n>3$, é conveniente também escrever f_i para denotar a derivada parcial de $f(x_1,\ldots,x_n)$ com relação à i-direção canônica de $\mathbb{R}^n$, x_i.

Uma intepretação geométrica para $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, bem como a definição de função de duas variáveis *diferenciável* e do plano tangente ao gráfico de uma tal função num ponto deste gráfico, pode ser encontrada em [1] ou em [13]. Como referência mais aprofundada de todos estes conceitos analíticos, remetemos o leitor a [2].

Proposição 2.1 (Regra da cadeia) *Sejam $z=f(x,y)$ uma função definida em um conjunto aberto $A\subset\mathbb{R}^2$ e $\alpha: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, $t\in I$, um curva tal que $\alpha(I)\subset A$, em que*

$I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. Se $\alpha(t)$ é diferenciável em $t_0 \in I$ e $f(x,y)$ é diferenciável em $\alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$, então a função composta $z(t) = f(\alpha(t))$, $t \in I$ é diferenciável em $t_0 \in I$ e

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0). \tag{2.3}$$

Para a demonstração, veja [13].

Um resultado análogo vale para uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ cujo domínio é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e uma curva $\alpha(t)$ cuja imagem está contida no domínio de f, caso em que a expressão (2.3) assume a forma

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))\frac{dx_n}{dt}(t_0).$$

As derivadas parciais de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quando definidas em todo ponto de $(x, y) \in A$, definem elas próprias funções reais

$$\frac{\partial f}{\partial x} : A \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}.$$

Desse modo, podemos perguntar se existem suas derivadas parciais com relação a x e y. Definimos, então, as *derivadas parciais de segunda ordem de f*:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\Delta x}, \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\Delta y}, \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x}, \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta y},
\end{aligned}$$

se cada um destes limites existir.

Dizemos que $f(x,y)$ é de classe C^1 quando suas derivadas parciais são contínuas. Se as derivadas parciais de segunda ordem de f são contínuas, dizemos que f é de classe C^2.

O teorema a seguir é devido ao matemático alemão H. Schwarz. Para a demonstração, veja [13].

Teorema 2.5 *Se $z = f(x, y)$ é de classe C^2, então suas derivadas mistas de segunda ordem são iguais, isto é,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2.2 ELEMENTOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 2.6 *Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com respeito a uma ou mais variáveis independentes é chamada* **Equação Diferencial (ED)**.

Tais equações se classificam quanto ao tipo, ordem e linearidade.

Quanto ao **tipo**, se classificam como equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais. Se uma equação contém as derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes com respeito a uma única variável independente é dita ser *Equação Diferencial Ordinária (EDO)*. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0.$$

Uma equação que contém as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes com respeito a duas ou mais variáveis independentes é chamada *Equação Diferencial Parcial (EDP)*. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada na equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

é uma equação de segunda ordem.

Podemos expressar uma EDO de n-ésima ordem com uma váriavel dependente da forma

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{2.4}$$

onde F é uma função real da $n+2$ variáveis $x, y, y', ..., y^{(n)}$.

A equação diferencial

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{2.5}$$

em que f é uma função real contínua, é dita a *forma normal* de (2.4).

Uma EDO (2.4) é dita **linear** se F é linear em $y, y', ..., y^{(n)}$, ou seja, quando (2.4) é da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0. \tag{2.6}$$

Dois casos particulares importantes de EDO's lineares (2.6) são as lineares de primeira ordem ($n = 1$) e as de segunda ordem ($n = 2$), cujas formas gerais são dadas, respectivamente, por

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{e} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{2.7}$$

Observando o lado esquerdo da equação (2.6), identificamos as seguintes duas características de uma EDO linear:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ são de grau 1.
- Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ em uma equação linear (2.6) dependem unicamente de x.

Por exemplo,

$$(y - x)dx + 4xdy = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

são EDO's lineares de primeira e terceira ordem, respectivamente.

Uma EDO é dita **não-linear** simplesmente quando não é linear. Por exemplo,

$$(1 - y)y' + 2y = e^x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0.$$

Funções não lineares como $\sin y$ ou $e^{y'}$ não podem aparecer em uma EDO linear.

Definição 2.7 *Qualquer função ϕ, definida em um intervalo I e possuindo pelo menos n derivadas contínuas em I, que, quando substituídas em uma EDO de ordem n reduz a equação a uma identidade, é dita ser uma* **solução** *daquela EDO no intervalo I.*

Em outras palavras, a solução de uma EDO de ordem n é uma função ϕ para a qual

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x em I. Dizemos que ϕ *satisfaz* a equação diferencial em I.

Como fica evidente na Definição 2.7, não podemos falar de solução de uma EDO sem falar ao mesmo tempo de um intervalo. O intervalo I naquela definição é dito o *intervalo de definição*, também chamado de intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução.

Exemplo 4 (Verificação de uma solução) *Verifiquemos que a função* $y = \frac{1}{16}x^4$ *é solução da EDO* $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ *no intervalo* $(-\infty, \infty)$.

Solução: *Com efeito, substituindo no lado esquerdo desta equação, encontramos*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{16}x^4\right) = \frac{1}{4}x^3.$$

Substituindo agora no lado direito, encontramos

$$xy^{1/2} = x\left(\frac{1}{16}x^4\right)^{1/2} = x\sqrt{\frac{1}{16}}\,x^2 = \frac{1}{4}x^3.$$

Observe que, ao substituirmos a função em ambos os lados da equação diferencial, chegamos a uma identidade, válida em toda a reta. Então, a função é solução $y = \frac{1}{16}x^4$ *da ED* $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ *no intervalo* $(-\infty, \infty)$*, como queríamos.*

2.2.2 Variáveis Separáveis

A partir desta subseção, passaremos a estudar como resolver equações diferenciais de primeira ordem, inicialmente com variáveis separáveis.

Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Quando f não depende de y, isto é, se $f(x, y) = g(x)$ temos

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.8}$$

que podemos resolver por integração. Se $g(x)$ é uma função contínua, então, integrando ambos os lados de (2.8), obtemos $y = \int g(x)dx = G(x)+c$, em que $G(x)$ é a antiderivada (integral indefinida) de $g(x)$. Por exemplo, se $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$, então sua solução é $y = \int (1 + e^{2x})dx$ ou $y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

Definição 2.8 *Uma equação diferencial de primeira ordem da forma*

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{2.9}$$

é dita ser **separável**.

Por exemplo, as equações

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x e^{3x+4y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = y + seny$$

são, respectivamente, uma equação separável e uma não separável.

Observe que se dividirmos a equação (2.9) pela função $h(y)$, podemos escrever a equação como $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$. Denotando $\frac{1}{h(y)} = p(y)$, temos

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2.10}$$

Veja que (2.10) se reduz a (2.8) quando $h(y) = 1$.

Agora, se $y = \phi(x)$ é a solução de (2.10), nós devemos ter $p(\phi(x))\phi(x)' = g(x)$, e portanto,

$$\int p(\phi(x))(\phi(x))'dx = \int g(x)dx.$$

Como $y = \phi(x)$, então $dy = (\phi(x))'dx$, e, daí,

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx \quad \text{ou} \quad H(y) = G(x) + c,$$

onde $H(y)$ e $G(x)$ são as antiderivadas de $p(y)$ e $g(x)$, respectivamente.

O procedimento anteriormente descrito nos mostra como encontrar uma família de soluções para uma equação separável, conforme ilustraremos no exemplo a seguir

Exemplo 5 *Para resolver $dx + e^{3x}dy = 0$, com o objetivo de deixá-la na forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, dividimos ambos os membros por $e^{3x}dx$, obtendo*

$$\frac{1}{e^{3x}} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Por integração de ambos os lados, encontramos

$$-\frac{1}{3}e^{-3x} + y(x) = c,$$

isto é,

$$y(x) = c + \frac{1}{3}e^{-3x}.$$

2.2.3 Equações Lineares

Vimos na Subseção 2.2.1 que uma EDO linear é da forma $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$, como também dois casos especiais de EDO's lineares (veja (2.7)). Nesta subseção, estudaremos o caso em que $n = 1$.

Definição 2.9 *Uma equação diferencial de primeira ordem da forma*

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.11}$$

é chamada de **equação linear** *na variável dependente* y*.*

Quando $g(x) = 0$, a equação (2.11) é dita *homogênea*. Caso contrário, dizemos que é *não-homogênea*.

Para obter a *forma padrão* de uma equação linear, dividimos ambos os lados da equação (2.11) pelo coeficiente $a_1(x)$:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \tag{2.12}$$

onde o $P(x)$ representa a divisão do coeficiente a_0 por a_1, e $f(x)$, da função $g(x)$ por a_1. Buscamos a solução de (2.12) em um intervalo em que ambas as funções $P(x)$ e $f(x)$ sejam contínuas.

Proposição 2.2 *A equação diferencial* (2.12) *tem como solução a soma de duas soluções:* $y = y_c + y_p$*, onde* y_c *é solução da equação linear homogênea*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{2.13}$$

e y_p *é solução particular da equação não-homogênea* (2.12)*.*

Para ver isso, observe que

$$\frac{d}{dx}(y_c + y_p) + P(x)(y_c + y_p) = \underbrace{\left[\frac{dy_c}{dx} + P(x)y_c\right]}_{0} + \underbrace{\left[\frac{dy_p}{dx} + P(x)y_p\right]}_{f(x)} = f(x).$$

Note que (2.13) é também separável, e, assim, podemos escrevê-la como

$$\frac{1}{y}dy + P(x)dx = 0.$$

Ao integrar ambos os lados, obtemos $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Se consideramos $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$, temos $y_c = cy_1(x)$. O fato de que $\dfrac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$ será utilizado para determinar y_p.

O procedimento para encontrar a solução particular y_p é conhecido como *variação de parâmetros*. A ideia principal é encontrar a função u para que $y_p = uy_1(x)$ seja solução de (2.12). Sendo assim, substituindo $y_p = uy_1(x)$ em (2.12):

$$\frac{d}{dx}(uy_1) + P(x)(uy_1) = \frac{du}{dx}y_1 + \frac{dy_1}{dx}u + P(x)uy_1 = \frac{du}{dx}y_1 + u\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}_{0} = f(x).$$

Logo,

$$\frac{du}{dx}y_1 = f(x).$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados, temos

$$du = \frac{f(x)}{y_1}dx,$$

donde

$$u = \int \frac{f(x)}{y_1}dx.$$

Como $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$,

$$u = \int \frac{f(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx = \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Dessa forma,

$$y_p = e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Assim sendo,

$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx. \tag{2.14}$$

Com isso, se (2.12) tem solução, ela deve ser da forma (2.14). O termo $e^{\int P(x)dx}$ é chamado *fator integrante*.

Se multiplicarmos ambos os lados da equação (2.14) por $e^{\int P(x)dx}$, obteremos (2.12). Com efeito, derivando

$$e^{\int P(x)dx}y = c + \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

temos

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = f(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$P(x)ye^{\int P(x)dx} + \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)dx} = f(x)e^{\int P(x)dx}$$

Dividindo a última equação por $e^{\int P(x)dx}$, temos (2.12).

Resolvendo uma equação diferencial linear: O primeiro passo é colocar a equação linear na forma padrão. Em seguida, identificar o $P(x)$ e encontrar o fator integrante para poder multiplicar ambos os lados da equação linear de primeira ordem. O lado esquerdo resultará, automaticamente, na derivada do produto $e^{\int P(x)dx}y$. O último passo é integrar ambos os lados da equação.

Exemplo 6 *Resolvamos* $x^2y' + xy = 1$.

Solução: *Como a equação não é homogênea, é necessário colocá-la na forma padrão:* $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$. *Dividindo ambos os lados da equação por* x^2, *temos:*

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Sendo $P(x) = \frac{1}{x}$, *o fator integrante será:*

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1/x\ dx} = e^{ln|x|} = x.$$

Multiplicando toda a equação por x,

$$xy' + y = \frac{1}{x}$$

que é o mesmo que

$$\frac{d}{dx}[yx] = \frac{1}{x}.$$

Integrando ambos os lados desta última equação:

$$yx = \int \frac{1}{x}dx = ln|x| + c \Rightarrow y = x^{-1}ln\ x + x^{-1}c,\ x \in (0,\infty).$$

2.2.4 Equações Exatas

Nessa subseção analisaremos equações diferenciais da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Veremos um critério para determinar se $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ é a diferencial de uma função $f(x,y)$. Caso seja, obtemos f através da integração parcial.

Se f é uma função de duas variáveis e possui as primeiras derivadas contínuas, sua *diferencial total* é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.15}$$

Se $f(x,y) = c$, onde c é uma constante, então (2.15) se torna

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{2.16}$$

Definição 2.10 *A expressão diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma* diferencial exata *em uma região R do plano xy se corresponde à diferencial total de alguma função definida em R. A equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é chamada uma **equação exata** *se a expressão no lado esquerdo é uma diferencial exata.*

Teorema 2.11 (Critério para uma diferencial exata) *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ contínuas com primeiras derivadas parciais contínuas em uma região retangular $R = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2$. Então uma condição necessária e suficiente para $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ser uma diferencial exata é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.17}$$

Demonstração. Por simplicidade, vamos supor que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ possuem derivadas parciais contínuas para todo (x,y). Se a expressão $M(x,y) + N(x,y)$ é uma diferencial exata, existe alguma função f em R tal que:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Assim,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Daí, temos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x},$$

em que a igualdade entre as derivadas parciais mistas segue do Teorema de Schwarz 2.5. Fica provada a necessidade.

A prova da suficiência nos fornece um procedimento para resolver uma equação diferencial exata. Suponhamos que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é a diferencial total de uma função f, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.18}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.19}$$

Por integração de (2.18) em relação à x:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{2.20}$$

Derivando (2.20) em relação a y e usando a equação (2.19):

$$N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{dg}{dy} + \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{2.21}$$

Para encontrar a constante de integração $h(y)$, integraremos a equação (2.21) com respeito a y:

$$g(y) = \int N(x,y)dy - \int M(x,y)dx + h(x). \tag{2.22}$$

Substituimos na equação (2.20), encontramos:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int N(x,y)dy - \int M(x,y)dx + h(x) = \int N(x,y)dy + h(x).$$

Observe que, neste caso, a *solução implícita* da equação exata $Mdx + Ndy = 0$ é $f(x,y) = c$. ■

Exemplo 7 *Resolvamos* $(5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0$.

Solução: *Dados* $M(x,y) = 5x+4y$ *e* $N(x,y) = 4x-8y^3$, *observe que:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Dessa forma, $(5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy$ *é uma diferencial exata. Então, existe uma função* f *tal que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrando $M(x,y)$ *em relação a x:*

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + g(y). \tag{2.23}$$

Derivando com respeito a y *a equação obtida através da integração de* $M(x,y)$*, obtemos:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + g'(y)$$

Daí, como $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$*:*

$$4x - 8y^3 = 4x + g'(y),$$

isto é,

$$g'(y) = -8y^3 \tag{2.24}$$

Para encontrar a constante de integração $g(y)$*, integramos* (2.24) *com respeito a* y*:*

$$g(y) = -2y^4.$$

Ao substituirmos $g(y)$ *em* (2.23)*, encontraremos a solução implícita*

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c.$$

Vimos como resolver uma equação diferencial exata. E quando a equação não for exata? Será necessário transformá-la em uma equação exata através de um *fator de integração*. Relembremos das equações lineares, que, através de um fator integrante, tem o lado esquerdo da equação transformado. Nas equações diferenciais não exatas, a ideia é a mesma, ou seja, é possível encontrar um fator integrante $\mu(x,y)$ de modo que ao multiplicarmos o lado esquerdo da equação, ele se torne uma diferencial exata.

Para encontrar μ, voltamos ao critério dado no Teorema 2.11. Multiplicando

$$Mdx + Ndy = 0$$

por μ, a equação resultante,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Pela regra do produto, esta última condição é equivalente a

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}M - \frac{\partial \mu}{\partial x}N = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu.$$

Supondo que μ seja uma função de apenas uma variável, digamos que ela dependa apenas de x, então

$$-\frac{d\mu}{dx}N = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu}{N}. \tag{2.25}$$

De maneira análoga, segue se μ depender apenas de y:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\mu}{M}. \tag{2.26}$$

Se, após todas as simplificações, o quociente do lado direito das últimas igualdades depender apenas de x ou de y, teremos uma EDO de primeira ordem tanto separável como linear. Se o quociente no lado direito de (2.25) é uma função de x, o fator integrante será:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}.$$

Se o quociente no lado direito de (2.26) é uma função de y, o fator integrante será:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}.$$

Exemplo 8 *Resolvamos* $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$.

Solução: *Note que* $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6x$ *e* $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 18x$. *Com isso, M(x,y)dx+N(x,y)dy não é uma diferencial exata, e temos uma equação diferencial não exata. Então, encontraremos um fator de integração μ tal que*

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

se torne exata. Considerando a condição $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, *temos que*

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}6xy + 6x\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}(4y + 9x^2) + 18x \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial y}6xy - \frac{\partial \mu}{\partial x}(4y + 9x^2) = 12x\mu.$$

Daí, considerando que μ dependa somente de y:

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{2}{y}\mu.$$

Dessa maneira, o fator integrante será:

$$e^{\int 2/y dy} = e^{2ln|y|} = y^2.$$

Multiplicando toda a equação por y^2, *temos:*

$$6xy^3dx + (4y^3 + 9x^2y^2)dy = 0,$$

que é uma equação exata. Como o lado esquerdo da equação é uma diferencial exata, existe uma função f *tal que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrando $M(x,y)$ com respeito a x:

$$f(x,y) = 3y^3x^2 + z(y).$$

Por diferenciação de $f(x,y)$ em relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2x^2 + z'(y).$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$,

$$z'(y) = 4y^3.$$

Para encontrar a constante de integração, integramos $z'(y)$ com respeito a y:

$$z(y) = y^4.$$

Logo, a solução implícita é

$$f(x,y) = 3y^3x^2 + y^4 = c.$$

2.2.5 Equações Homogêneas

Os métodos de resolução das equações diferenciais de primeira ordem apresentados até agora dependem do tipo de equação. Nesta subseção, estudaremos um procedimento útil para as equações que não coincidem com os tipos de ED's vistos até aqui.

Através de substituição, podemos transformar uma ED em outra e encontrar uma família de soluções. Observe a equação diferencial a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Pela substituição $y = g(x,u)$, onde um u é uma função da variável x, temos, se g possuir as primeiras derivadas parciais, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Então, substituindo y e a sua derivada na ED:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{du}{dx} = f(x, g(x,u)).$$

Resolvendo para $\dfrac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = F(x,u).$$

Se pudermos determinar a solução $u = \phi(x)$, então uma solução da equação diferencial original é $y = g(x, \phi(x))$.

Vimos na subseção anterior uma equação da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Tal equação é dita *homogênea* se os coeficientes M e N são funções homogêneas com o mesmo grau, ou seja, se $M(tx,ty) = t^\alpha(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^\alpha(x,y)$.

Recordamos a seguinte

Definição 2.12 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é dita* **homogênea de grau** α*, para algum número real α, se para todo $x \in A$ e todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com $tx \in A$, tivermos*

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Exemplo 9 *$f(x,y) = x^3 + y^3$ é homogênea de grau 3, pois*

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x,y),$$

enquanto que $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$ não é uma função homogênea pois

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 + 1 = t^3(x^3 + y^3) + 1$$

em geral é diferente de $t^\alpha x^3 + t^\alpha y^3 + t^\alpha = t^\alpha f(x,y)$.

O resultado a seguir é devido a Euler.

Teorema 2.13 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais de primeira ordem existem e são contínuas em $\mathbb{R}^n$. Então f é homogênea de grau α se, e somente se,*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x) \tag{2.27}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a função $g_x(t) := f(tx) - t^\alpha f(x)$. Note que $g_x(t) = 0$ para todo x exatamente quando f é homogênea de grau α. Suponhamos que (2.27) seja válida. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{dg_x}{dt}(t) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx) - \alpha t^{\alpha-1} f(x) \\
&= \frac{1}{t}\left(tx_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) + \cdots + tx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx) - \alpha t^\alpha f(x) \right) \\
&= \frac{1}{t}(\alpha f(tx) - \alpha t^\alpha f(x)) \\
&= \frac{\alpha}{t} g_x(t).
\end{aligned}$$

Portanto, $g_x'(t) = \frac{\alpha}{t} g_x(t)$, o que significa que $y(t) = g_x(t)$ é solução da ED de primeira ordem $y' = \alpha/t \cdot y$. A solução geral desta ED é $y = Ct^\alpha$, donde $g_x(t) = Ct^\alpha$ para alguma constante C. Como $g_x(1) = f(x) - f(x) = 0$, temos que $C = 0$, e, assim, $g_x(t) = 0$ para todo x, o que garante que f é homogênea de grau α.

Reciprocamente, se f é homogênea de grau α, então $g_x(t) = 0$ para todo x, donde $g_x'(t) = 0$. Mas, então, temos

$$0 = \frac{dg_x}{dt}(t) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx) - \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

Fazendo $t = 1$, obtemos (2.27). ■

Proposição 2.3 *Se $f(x,y)$ é homogênea de grau zero, então podemos escrever $f(x,y)$ como uma função de $\frac{x}{y}$, isto é, existe uma função g de uma única variável tal que*

$$f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Demonstração. Podemos escrever $f(x,y)$ como

$$f(x,y) = f\left(\frac{x}{y}y, y\right) = y^0 f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

Observe que a função acima dependente apenas de $\dfrac{x}{y}$. Seja g a função definida por

$$g(s) := f(s,1).$$

Então, temos que

$$f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

■

Retornando às ED's, sendo M e N funções homogêneas de grau α, podemos escrevê-las como

$$M(x,y) = x^\alpha M(1,u) \quad \text{e} \quad N(x,y) = x^\alpha N(1,u), \quad u = y/x. \tag{2.28}$$

De maneira análoga,

$$M(x,y) = y^\alpha M(v,1) \quad \text{e} \quad N(x,y) = y^\alpha N(v,1), \quad v = x/y. \tag{2.29}$$

As propriedades (2.28) e (2.29) acima sugerem que substituições podem ser utilizadas para resolver equações diferenciais homogêneas. Qualquer uma das substituições $y = ux$ ou

$x = vy$, onde u e v são as novas variáveis dependentes, transformará uma equação homogênea em uma separável de primeira ordem.

Observe que temos $M(x,y) = x^\alpha M(1,u)$ e $N(x,y) = x^\alpha N(1,u)$ quando $y = ux$. Logo, a equação homogênea $Mdx + Ndy = 0$ pode ser reescrita como:

$$x^\alpha M(1,u)dx + x^\alpha N(1,u)dy = 0 \quad \text{ou} \quad M(1,u)dx + N(1,u)dy = 0.$$

Como $y = ux$, substituindo a diferencial $dy = dux + xdu$ na equação anterior, obtemos:

$$M(1,u)dx + N(1,u)(du\ x + dx\ u) = 0 \Leftrightarrow [M(1,u) + u\ N(1,u)]dx + x\ N(1,u)du = 0,$$

ou seja,

$$\frac{du}{dx} = -\frac{M(1,u) + u\ N(1,u)}{x\ N(1,u)} \Leftrightarrow \frac{N(1,u)}{M(1,u) + u\ N(1,u)}du = -\frac{1}{x}dx,$$

que é uma equação diferencial separável. O processo aconteceria de maneira similar se tivéssemos usado a substituição $x = vy$.

Exemplo 10 *Vamos resolver a equação homogênea* $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$.

Solução: *Note que M e N são funções homogêneas de grau 2:*

$$M(tx,ty) = (ty)^2 + tytx = t^2(y^2 + yx) = t^2M(x,y)$$

e

$$N(tx,ty) = -(tx)^2 = -t^2x^2 = t^2(-x^2) = t^2N(x,y).$$

Sendo assim, podemos reescrever a equação substituindo $y = ux$ *e* $dy = udx + xdu$. *Observe:*

$$((ux)^2 + ux^2)dx - x^2u\ dx - x^3du = 0 \Rightarrow u^2x^2dx = x^3du \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{1}{u^2}du.$$

Esta última equação separável. Integrando ambos os lados:

$$ln|x| + c = -u^{-1},$$

isto é,

$$u = -\frac{1}{ln|x| + c}.$$

Para encontrar a família de soluções da equação diferencial original, substituímos a expressão para u em $y = ux$:

$$y = -\frac{x}{ln|x| + c},$$

ou seja,

$$x + y\ ln|x| = cy.$$

3 O MÉTODO DE FONTAINE

No Capítulo 2, vimos que equações da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.1}$$

são ditas homogêneas se M e N são funções homogêneas de mesmo grau. Além disso, vimos que, para resolver equações desse tipo, podemos usar o método de substituição de variáveis, tornando a equação homogênea em uma separável.

Fontaine iniciou seus estudos com uma equação diferencial da forma

$$dx + \alpha dy = 0. \tag{3.2}$$

As equações (3.1) e (3.2) se relacionam por $\alpha = \dfrac{N}{M}$. Fontaine supôs que α não é homogênea de grau 0, pois, conforme já sabemos, se M e N são funções homogêneas de mesmo grau, α é também o é, e a resolução de (3.2) segue os passos já estudados na Subseção 2.2.5. Escolhendo uma constante p em α e considerando-a como variável, de modo que $\alpha(x,y,p)$ se torne homogênea de grau 0, Fontaine então encontra uma função homogênea de grau 0 $\beta(x,y,p)$ e um fator de integração $\mu(x,y,p)$ de tal maneira que

$$\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp = 0$$

é exata, isto é, existe uma função $\phi(x,y,p)$ tal que

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial p}dp = \mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp.$$

Uma vez que ϕ é conhecida, removendo p com $\phi = c$ encontramos uma solução de (3.2).

De acordo com [10], o método de Fontaine foi dividido em três equações que serão detalhadas nas seções a seguir. A primeira equação de Fontaine nos permitirá encontrar ϕ; a segunda, o fator de integração μ; e a terceira, que será a primeira que usaremos, encontrar β.

3.1 PRIMEIRA EQUAÇÃO DE FONTAINE

Para encontrar ϕ, é necessário que conheçamos α e β, ambas funções homogêneas de grau zero, e μ já que

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial p}dp = \mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp. \tag{3.3}$$

Pelo Teorema de Euler 2.13 para funções homogêneas, $F(x,y,p)$ é uma função homogênea de grau r se, somente se,

$$rF = \frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial p}p.$$

Fontaine faz uso deste resultado de Euler. Se α e β são funções homogêneas de grau zero, então

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}y + \frac{\partial\alpha}{\partial p}p = 0$$

e

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}x + \frac{\partial\beta}{\partial y}y + \frac{\partial\beta}{\partial p}p = 0.$$

Por sua vez, se ϕ é uma função homogênea de grau r, então

$$r\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}y + \frac{\partial\phi}{\partial p}p = \mu x + \mu\alpha y + \mu\beta p. \tag{3.4}$$

No Exemplo 11, mostrado ao final deste capítulo, o procedimento usado para determinar ϕ é resultado de uma simplificação devida a Clairaut. Essa simplificação se dá através da divisão da equação (3.3) pela equação (3.4). Fazendo essa divisão, encontramos

$$\frac{d\phi}{r\phi} = \frac{\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp}{\mu x + \mu\alpha y + \mu\beta p} \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{1}{\phi}d\phi = \frac{\mu(dx + \alpha dy + \beta dp)}{\mu(x + \alpha y + \beta p)},$$

isto é,

$$\frac{1}{r}\frac{1}{\phi}d\phi = \frac{1}{x + \alpha y + \beta p}dx + \frac{\alpha}{x + \alpha y + \beta p}dy + \frac{\beta}{x + \alpha y + \beta p}dp. \tag{3.5}$$

A maioria dos livros didáticos de EDO mostra como encontrar ϕ através de uma sequência de integrações e diferenciações. Por exemplo, uma equação exata $Adx + Bdy = 0$ tem como solução

$$\phi = \int_x A + \int_y B - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A = c$$

onde $\int_x$ se refere a integração em relação a x, e assim por diante. Com efeito, se $Adx+Bdy$ é uma diferencial exata, existe uma função tal que:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A(x,y) \tag{3.6}$$

e

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = B(x,y). \tag{3.7}$$

Integrando (3.6) em relação a x:

$$\phi(x,y) = \int_x A + h(y). \tag{3.8}$$

Derivando (3.8) em relação a y e usando (3.7):

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_x A + \frac{dh}{dy} = B(x,y),$$

isto é,

$$\frac{dh}{dy} = B - \frac{\partial}{\partial y}\int_x A. \tag{3.9}$$

Integrando (3.9) em termos de y:

$$h(y) = \int_y B - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A \tag{3.10}$$

Substituindo (3.10) em (3.8), obtemos a desejada expressão para a solução

$$\phi(x,y) = \int_x A + \int_y B - \int_x \frac{\partial}{\partial y}\int_x A = c.$$

Este mesmo procedimento pode ser aplicado a uma equação da forma

$$Adx + Bdy + Cdp = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial p}dp = 0$$

que tem como solução

$$\phi = \int_x A + \int_y B + \int_p C - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial p}\int_x A = c.$$

Com efeito temos,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A(x,y,p), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = B(x,y,p), \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} = C(x,y,p). \tag{3.13}$$

Integrando (3.11) em relação a x:

$$\phi(x,y,p)=\int_x A+h(y,p). \tag{3.14}$$

Derivando (3.14) em termos de y e usando (3.12):

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_x A+\frac{\partial h(y,p)}{\partial y}=B,$$

ou seja,

$$\frac{\partial h(y,p)}{\partial y}=B-\frac{\partial}{\partial y}\int_x A. \tag{3.15}$$

Integrando (3.15) em relação a y:

$$h(y,p)=\int_y B-\int_y\frac{\partial}{\partial y}\int_x A+g(p). \tag{3.16}$$

Agora, por diferenciação da equação (3.14) com respeito a p e usando (3.13), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_x A+\frac{\partial h(y,p)}{\partial p}=C,$$

isto é,

$$\frac{\partial h(y,p)}{\partial p}=C-\frac{\partial}{\partial p}\int_x A. \tag{3.17}$$

Integrando (3.17) em relação a p:

$$h(y,p)=\int_p C-\int_p\frac{\partial}{\partial p}\int_x A+f(y). \tag{3.18}$$

Retornando à equação (3.14) e substituindo o $h(y,p)$ de (3.16):

$$\phi(x,y,p)=\int_x A+\int_y B-\int_y\frac{\partial}{\partial y}\int_x A+g(p). \tag{3.19}$$

Derivando (3.16) em relação a p:

$$\frac{\partial h(y,p)}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\int_y B-\frac{\partial}{\partial p}\int_y\frac{\partial}{\partial y}\int_x A+\frac{\partial g(p)}{\partial p},$$

ou seja,

$$\frac{\partial g(p)}{\partial p}=\frac{\partial h(y,p)}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial p}\int_y B+\frac{\partial}{\partial p}\int_y\frac{\partial}{\partial y}\int_x A. \tag{3.20}$$

Integrando (3.20) em termos de p:

$$g(p) = h(y,p) - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A. \tag{3.21}$$

Substituindo (3.21) em (3.19):

$$\phi(x,y,p) = \int_x A + \int_y B - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A + h(y,p) - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A. \tag{3.22}$$

Substituindo $h(y,p)$ de (3.18):

$$\phi(x,y,p) = \int_x A + \int_y B - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A + \int_p C - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_x A + f(y) - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A$$

Escolhendo $f(y) \equiv 0$, encontramos finalmente que

$$\phi(x,y,p) = \int_x A + \int_y B + \int_p C - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A.$$

A solução implítica de $Adx + Bdy + Cdp = 0$ é

$$\phi(x,y,p) = \int_x A + \int_y B + \int_p C - \int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_x A - \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y B + \int_p \frac{\partial}{\partial p}\int_y \frac{\partial}{\partial y}\int_x A = c.$$

3.2 Segunda equação de Fontaine

Fontaine afirma que μ deve satisfazer:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(r - 1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} y - \frac{\partial \beta}{\partial x} p\right)}{x + \alpha y + \beta p} dx + \frac{\left((r-1)\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial y} y - \frac{\partial \beta}{\partial y} p\right)}{x + \alpha y + \beta p} dy + \frac{\left((r-1)\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial p} y - \frac{\partial \beta}{\partial p} p\right)}{x + \alpha y + \beta p} dp.$$

De fato, temos que

$$r\phi = \mu x + \mu\alpha y + \mu\beta p \tag{3.23}$$

e

$$d\phi = \mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp. \tag{3.24}$$

Calculando a diferencial total de ambos os lados de (3.23),

$$d(r\phi) = d(\mu x + \mu\alpha y + \mu\beta p),$$

pela regra do produto, encontramos

$$r d\phi = d\mu(x + \alpha y + \beta p) + \mu d(x + \alpha y + \beta p),$$

donde

$$d\phi = \frac{d\mu(x+\alpha y+\beta p)+\mu d(x+\alpha y+\beta p)}{r}.$$

Substituindo na equação (3.24):

$$\frac{d\mu(x+\alpha y+\beta p)+\mu d(x+\alpha y+\beta p)}{r} = \mu dx+\mu\alpha dy+\mu\beta dp,$$

ou seja,

$$d\mu(x+\alpha y+\beta p)+\mu(dx+\alpha dy+\beta dp) = \mu(dx+\alpha dy+\beta dp)r,$$

donde

$$r = \frac{d\mu(x+\alpha y+\beta p)+\mu(dx+\alpha dy+\beta dp)}{\mu(dx+\alpha dy+\beta dp)},$$

isto é,

$$r = \frac{d\mu(x+\alpha y+\beta p)}{\mu(dx+\alpha dy+\beta dp)}+1,$$

ou ainda,

$$r-1 = \frac{d\mu(x+\alpha y+\beta p)}{\mu(dx+\alpha dy+\beta dp)};$$

daí,

$$(r-1)(\mu(dx+\alpha dy+\beta dp)) = d\mu(x+\alpha y+\beta p),$$

donde

$$(r-1)(dx+\alpha dy+\beta dp)\frac{1}{x+\alpha y+\beta p} = d\mu\frac{1}{\mu},$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{rdx+r\alpha dy+r\beta dp-dx-\alpha dy-\beta dp}{x+\alpha y+\beta p} = \frac{d\mu}{\mu},$$

isto é,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{r}{x+\alpha y+\beta p}dx+\frac{r\alpha}{x+\alpha y+\beta p}dy+\frac{r\beta}{x+\alpha y+\beta p}dp-\frac{d(x+\alpha y+\beta p)}{x+\alpha y+\beta p}.$$

Calculando $d(x+\alpha y+\beta p)$, temos:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{r}{x+\alpha y+\beta p}dx+\frac{r\alpha}{x+\alpha y+\beta p}dy+\frac{r\beta}{x+\alpha y+\beta p}dp-\left[\left(\frac{1+\frac{\partial\alpha}{\partial x}y+\frac{\partial\beta}{\partial x}p}{x+\alpha y+\beta p}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{0+\frac{\partial\alpha}{\partial y}y+\alpha+\frac{\partial\beta}{\partial y}p}{x+\alpha y+\beta p}\right)dy+\left(\frac{0+\frac{\partial\alpha}{\partial p}y+\frac{\partial\beta}{\partial p}p+\beta}{x+\alpha y+\beta p}\right)dp\right],$$

ou seja,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{r - 1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x} y - \frac{\partial \beta}{\partial x} p}{x + \alpha y + \beta p} \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{(r-1)\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial y} y - \frac{\partial \beta}{\partial y} p}{x + \alpha y + \beta p} \right) dy + \left(\frac{(r-1)\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial p} y - \frac{\partial \beta}{\partial p} p}{x + \alpha y + \beta p} \right) dp.$$

3.3 Terceira equação de Fontaine

Se a equação $\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp = 0$ é exata, então

$$\alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} - \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \tag{3.25}$$

De fato, uma extensão natural do Teorema 2.11 assegura que $\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp = 0$ é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}\alpha \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial x}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}\beta \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial p} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial p}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial p}\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial y}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial y}\beta \tag{3.28}$$

Substituindo as informações de (3.26) e (3.27) em (3.28), temos:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p}\mu + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}\beta \right)\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial y}\mu + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}\alpha \right)\beta,$$

isto é,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p}\mu + \frac{\partial \beta}{\partial x}\alpha\mu + \frac{\partial \mu}{\partial x}\alpha\beta = \frac{\partial \beta}{\partial y}\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\mu\beta + \frac{\partial \mu}{\partial x}\beta\alpha.$$

Cancelando $\mu_x \alpha\beta$,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial p}\mu + \frac{\partial \beta}{\partial x}\alpha\mu = \frac{\partial \beta}{\partial y}\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\beta\mu.$$

Pondo μ em evidência,

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\alpha \right)\mu = \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\beta \right)\mu$$

e finalmente, cancelando μ,

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}\alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0.$$

Fontaine sabia que resolver a equação (3.25) era o ponto crucial do método e fez suposições para simplificar o cálculo. No exemplo a seguir, para facilitar o procedimento para encontrar β, usamos um *méthode des indéterminées*, proposto por Fontaine. Suporemos que $\beta = \dfrac{L}{M}$ e $\alpha = \dfrac{N}{M}$, onde L, M e N são todas homogêneas de grau 1.

Para encontrarmos β, usamos a terceira equação de Fontaine (3.25). Quando são feitas as substituições das expressões para α e β em (3.25) e as devidas manipulações de cálculo, esta equação assume a forma

$$\frac{N}{M}\left(\frac{\frac{\partial L}{\partial x}M-\frac{\partial M}{\partial x}L}{M^2}\right)-\frac{L}{M}\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x}M-\frac{\partial M}{\partial x}N}{M^2}\right)+\left(\frac{\frac{\partial N}{\partial p}M-\frac{\partial M}{\partial p}N}{M^2}\right)-\left(\frac{\frac{\partial L}{\partial y}M-\frac{\partial M}{\partial y}L}{M^2}\right)=0.$$

Cancelando o M^2 que está dividindo todos os termos, ao passá-lo para o lado direito da igualdade,

$$\frac{N}{M}\left(\frac{\partial L}{\partial x}M-\frac{\partial M}{\partial x}L\right)-\frac{L}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}M-\frac{\partial M}{\partial x}N\right)+\left(\frac{\partial N}{\partial p}M-\frac{\partial M}{\partial p}N\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial y}M-\frac{\partial M}{\partial y}L\right)=0.$$

Fazendo as simplificações cabíveis

$$\frac{N}{\cancel{M}}\frac{\partial L}{\partial x}\cancel{M}-\cancel{\frac{N}{M}\frac{\partial M}{\partial x}}L-\frac{L}{\cancel{M}}\frac{\partial N}{\partial x}\cancel{M}+\cancel{\frac{L}{M}\frac{\partial M}{\partial x}}N+\frac{\partial N}{\partial p}M-\frac{\partial M}{\partial p}N-\frac{\partial L}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}L=0$$

encontramos

$$N\frac{\partial L}{\partial x}-L\frac{\partial N}{\partial x}+M\frac{\partial N}{\partial p}-N\frac{\partial M}{\partial p}-M\frac{\partial L}{\partial y}+L\frac{\partial M}{\partial y}=0, \tag{3.29}$$

onde L, M e N são funções que dependem de x, y e p tais que $N = ax+by+cp$, $M = ex+fy+gp$ e $L = Ax+By+Cp$ (veja Apêndice B).

Exemplo 11 *Consideremos a equação diferencial*

$$dx+\frac{2x+4}{x+y}dy=0.$$

Esta é uma equação da forma $dx+\alpha(x,y)dy=0$. *Observe que a função* $\alpha(x,y)=\dfrac{2x+4}{x+y}$ *não é homogênea de grau 0. Pela relação entre as equações* (3.1) *e* (3.2)*, temos que* $\alpha = \dfrac{N}{M}$. *Assim,* $N = 2x+4$ *e* $M = x+y$. *Além disso, vimos que para tornar homogênea a equação, é necessário escolher uma constante* p *na* α *não-homogênea e tratá-la como uma variável.*

Se escolhemos $p = 4$, *temos:*

$$\alpha(tx,ty,tp)=\frac{2tx+2tp}{tx+ty}=\frac{t(2x+p)}{t(x+y)}=t^0\alpha(x,y,p),$$

ou seja, agora temos uma α homogênea de grau 0.

Encontraremos β através da terceira equação de Fontaine (3.25). *Note que M e N são funções homogêneas de grau 1. Com isso, podemos encontrar β pelo* méthode des indéterminées, *demonstrado anteriormente, com o uso da equação* (3.25). *Como temos α e sabemos que β é dado por $\dfrac{L}{x+y}$, onde $L = Ax+By+Cp$, substituíremos em (veja* (3.29)*)*

$$N\frac{\partial L}{\partial x} - L\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial p} - N\frac{\partial M}{\partial p} - M\frac{\partial L}{\partial y} + L\frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

para encontrar

$$(2x+p)A - (Ax+By+Cp)2 + (x+y)1 - (2x+p)0 + (Ax+By+Cp)1 - (x+y)B = 0$$

Simplificando:

$$\cancel{2xA} + Ap \cancel{-2Ax} - 2By - 2Cp + x + y + Ax \cancel{+By} + Cp \cancel{-Bx} - By = 0$$

$$Ap - 2Cp + Cp - 2By + y + x + Ax - Bx = 0$$

$$p(A-C) + y(-2B+1) + x(1+A-B) = 0,$$

donde

$$\begin{cases} 1+A-B=0 \\ -2B+1=0 \\ A-C=0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $A = -\dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$ e $C = -\dfrac{1}{2}$. Então,

$$L = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}p.$$

Como $\beta = \dfrac{L}{M}$, temos:

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}(-x+y-p)}{x+y}.$$

Para encontrar ϕ, usamos a equação simplificada por Clairaut (equação (3.5)*), e, através de integrações e diferenciações, encontramos*

$$\phi = ((p+2x)^{\frac{1}{3}}(x+3y-p)^{\frac{2}{3}})^r.$$

Agora, vamos observar o papel de r na função acima. Se ϕ é exato, então

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial p}dp = 0,$$

e para qualquer potência de ϕ é também exata, pois

$$d(\phi^r) = r(\phi)^{r-1}d\phi = r(\phi)^{r-1}(0) = 0.$$

Assim, podemos atribuir a r qualquer valor, já que o seu papel é simplificar a expressão de ϕ. Neste exemplo, fazendo $r=3$:

$$\phi=(p+2x)(x+3y-p)^2.$$

Como vimos que

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial p}dp=\mu dx+\mu\alpha dy+\mu\beta dp,$$

e já encontramos α, β e ϕ, vamos encontrar μ calculando a diferencial total de ϕ:

$$\begin{aligned}
d\phi &= \frac{\partial}{\partial x}[(p+2x)(x+3y-p)^2]dx+\frac{\partial}{\partial y}[(p+2x)(x+3y-p)^2]dy\\
&\quad +\frac{\partial}{\partial p}[(p+2x)(x+3y-p)^2]dp\\
&= [2(x+3y-p)^2+(p+2x)2(x+3y-p)1]dx+(p+2x)2(x+3y-p)3]dy\\
&\quad +[1(x+3y-p)^2+(p+2x)2(x+3y-p)(-1)]dp\\
&= 2[(x+3y)^2+2(x+3y)(-p)+(-p)^2]+2xp+6yp-2p^2+4x^2+12xy-4xp\ dx\\
&\quad +[6(p+2x)(x+3y-p)]\ dy\\
&\quad +[(x+3y)^2+2(x+3y)(-p)+(-p)^2]-2xp-6yp+2p^2-4x^2-12xy+4xp\ dp\\
&= (6x^2+24xy+18y^2-6xp-6yp)dx+[6(p+2x)(x+3y-p)]dy\\
&\quad +(-3x^2-6xy+9y^2-12yp+3p^2)dp\\
&= -6(-x^2-xy-3xy-3y^2+xp+yp)dx+6(p+2x)(x+3y-p)dy\\
&\quad +3(-x^2-xp+xy-3xy+3y^2-3yp-yp+p^2+xp)dp\\
&= -6[-x(x+y)-3y(x+y)+p(x+y)]dx+6(p+2x)(x+3y-p)dy\\
&\quad +3[-x(x+p-y)-3y(x-y+p)+p(-y+p+x)]dp\\
&= -6(x+y)(-x-3y+p)dx+6(p+2x)(x+3y-p)dy+3(x+p-y)(-x-3y+p)dp.
\end{aligned}$$

Então, de

$$-6(x+y)(-x-3y+p)dx+6(p+2x)(x+3y-p)dy+3(x+p-y)(-x-3y+p)dp=\mu dx+\mu\alpha dy+\mu\beta dp.$$

encontramos $\mu=-6(x+y)(-x-3y+p)$,

$$\mu\alpha=-6(x+y)(-x-3y+p)\frac{2x+p}{x+y}=6(p+2x)(x+3y-p)$$

e

$$\mu\beta=-6(x+y)(-x-3y+p)\frac{1}{2}\frac{(-x+y-p)}{x+y}=3(x+p-y)(-x-3y+p).$$

$\phi=(p+2x)(x+3y-p)^2=c$ *é solução para equação diferencial* $\mu dx+\mu\alpha dy+\mu\beta dp=0$.

Substituindo p=4, temos dp=0 e $\phi = (4+2x)(x+3y-4)^2$*, que é solução para a equação*

$$dx + \frac{2x+4}{x+y}dy = 0.$$

Esse problema pode ser resolvido com a técnica moderna, o que exige a resolução da equação $\frac{\partial \mu}{\partial y}(x+y) - \mu - (2x+4)\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$

4 UMA FAMÍLIA DE SOLUÇÕES PARA A EDP (3.25)

No Capítulo 3, vimos que se uma equação $\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp = 0$ é exata, então

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\beta}{\partial y} = 0,$$

que é o mesmo que

$$\alpha^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\beta}{\partial y} = 0. \tag{4.1}$$

Note que β é uma função que depende da função α, isso nos sugere que procuremos soluções da forma $\beta = \alpha^k$, onde k é uma constante. Assim sendo, se α é homogêneo de grau zero, β também será. Substituindo o valor de $\beta = \alpha^k$ em (4.1):

$$\alpha\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \alpha^k\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial p} - \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

$$\alpha k\alpha^{k-1}\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \alpha^k\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial p} - k\alpha^{k-1}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

$$\alpha^k(k-1)\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial p} - k\alpha^{k-1}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

Podemos considerar uma das derivadas parciais igual a zero. Se $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$ ou $\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0$, então a equação original é separável. Se $\frac{\partial\alpha}{\partial p} = 0$, então a função α já era homogênea de grau zero. Observe que, quando $\frac{\partial\alpha}{\partial p} = 0$:

$$\alpha^k(k-1)\frac{\partial\alpha}{\partial x} - k\alpha^{k-1}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0$$

$$\frac{(k-1)\alpha^k}{\alpha^{k-1}} = k\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}$$

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}.$$

De acordo com a Proposição 2.3, podemos escrever

$$\alpha = f(\theta),$$

para alguma função f, onde $\theta = \frac{x}{y}$. Dessa forma,

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}}{\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}}$$

$$\alpha = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{x}{y}.$$

Assim, um conjunto de soluções, com $k \neq 1$, é

$$\alpha_1(k) = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \beta_1(k) = \alpha_1^k.$$

Analogamente, quando $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$, temos:

$$\alpha^k (k-1)\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial p} = 0.$$

Substituindo $\alpha^k = \beta$ na equação acima:

$$\beta = -\frac{1}{k-1}\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial p}}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}.$$

Como $\alpha = f(\theta)$, onde $\theta = \frac{x}{y}$, então

$$\beta = -\frac{1}{k-1}\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p}}{\frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}}.$$

$$\beta = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{x}{y}.$$

Deste modo, um conjunto de soluções, com $k \neq 1$, é

$$\beta_2(k) = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad \alpha_2(k) = \beta_2^{\frac{1}{k}}.$$

Retornamos à equação original,

$$\alpha\frac{\partial \beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0,$$

e procuramos por combinações lineares dos pares de soluções encontrados, $\alpha = \alpha_1(m) + \alpha_2(n)$ e $\beta = \beta_1(m) + \beta_2(n)$, que ainda satisfaçam essa EDP, ou seja, precisamos encontrar potências $\{m, n\}$ tais que os dois primeiros termos cruzados na equação se cancelem:

$$\alpha_1(m) \cdot \frac{\partial \beta_2(n)}{\partial x} - \beta_2(n) \cdot \frac{\partial \alpha_1(m)}{\partial x} + \alpha_2(n) \cdot \frac{\partial \beta_1(m)}{\partial x} - \beta_1(m) \cdot \frac{\partial \alpha_2(n)}{\partial x} = 0.$$

Como $\alpha_1(k) = -\frac{k}{k-1} \cdot \frac{x}{y}, \beta_1(k) = \alpha_1^k, \beta_2(k) = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{x}{y}$ e $\alpha_2(k) = \beta_2^{\frac{1}{k}}$, os quatro termos cruzados são:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(m) \cdot \frac{\partial \beta_2(n)}{\partial x} &= \left(-\frac{m}{m-1} \cdot \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{p}{p^2} \\
&= -\frac{m}{m-1} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x}{yp}, \\
\beta_2(n) \cdot \frac{\partial \alpha_1(m)}{\partial x} &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{x}{p} \cdot \left(-\frac{k}{k-1} \cdot \frac{y}{y^2}\right) \\
&= -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{x}{py}, \\
\alpha_2(n) \cdot \frac{\partial \beta_1(m)}{\partial x} &= \left(\frac{1}{n-1} \cdot \frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{(-m)^m \cdot m \cdot x^{m-1} \cdot y^m}{(m-1)^m \cdot (y^m)^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{(-1)^m \cdot m^{m+1} \cdot x^{m-1}}{(m-1)^m \cdot y^m} \\
&= \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{(-1)^m \cdot m^{m+1}}{(m-1)^m} \cdot \frac{x^{m-1} \cdot x^{\frac{1}{n}}}{y^m \cdot p^{\frac{1}{n}}} \quad \text{e} \\
\beta_1(m) \cdot \frac{\partial \alpha_2(n)}{\partial x} &= \left(-\frac{m}{m-1} \frac{x}{y}\right)^m \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \\
&= \left(-\frac{m}{m-1} \frac{x}{y}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \cdot p^{\frac{1}{n}}}{(p^{\frac{1}{n}})^2}\right) \\
&= \frac{(-1)^m m^m}{(m-1)^m} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{(n-1)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{x^m x^{\frac{1}{n}-1}}{y^m p^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}$$

Observe que o primeiro par de termos cruzados se cancela para qualquer $\{m, n\}$, com $m \neq 1$ e $n \neq 1$. Dessa maneira, os pares cruzados restantes devem satisfazer

$$\alpha_2(n) \cdot \frac{\partial \beta_1(m)}{\partial x} - \beta_1(m) \cdot \frac{\partial \alpha_2(n)}{\partial x} = 0$$

para $mn = 1$, que implica $n = \frac{1}{m}$. O teorema a seguir resume os resultados encontrados.

Teorema 4.1 *Se*

$$\alpha(m) = \overbrace{\left(\frac{m}{1-m}\right)\left(\frac{x}{y}\right)}^{\alpha_1(m)} + \overbrace{\left(\frac{m}{1-m}\right)^m\left(\frac{x}{y}\right)^m}^{\alpha_2\left(\frac{1}{m}\right)},$$

Então

$$\beta(m) = \overbrace{(-1)^m\left(\frac{m}{m-1}\right)^m\left(\frac{x}{y}\right)^m}^{\beta_1(m)} + \overbrace{\left(\frac{m}{1-m}\right)\left(\frac{x}{p}\right)}^{\beta_2\left(\frac{1}{m}\right)}$$

resolverá a terceira equação de Fontaine $(m \neq 0, 1)$.

Conforme mostrado acima, a principal obstrução ao uso do método de Fontaine é encontrar β a partir de uma α dada. O último passo é encontrar a solução para a equação diferencial original através de integrações e diferenciações da equação exata (3.5) (a simplificada de Clairaut). O corolário a seguir é decorrente do Teorema 4.1.

Corolário 4.2 *Se* α *e* β *têm a forma anteriormente descrita, então uma solução homogênea de grau* r *para* $\mu dx + \mu\alpha dy + \mu\beta dp = 0$ *é dada por*

$$\phi = \left(\frac{(m+1)^2 yp}{x}\right)^{\frac{rm}{m+1}} \left(\frac{m^m x^m}{(1-m)^{m-1}}\left(\frac{y}{p^m} + \frac{p}{y^m}\right) + mx + x\right)^{\frac{r}{m+1}} = c.$$

5 CONCLUSÃO

O estudo do método esquecido de Fontaine para a solução de equações diferenciais inexatas nos proporcionou, através do estudo, revisão e aprofundamento de diversos conceitos analíticos, valiosos conhecimentos. Como muitos tópicos presentes nesta monografia não são vistos (ou, quando vistos, não são aprofundados) durante a graduação, o caminho até a preparação da versão final deste trabalho se caracterizou como um enriquecimento da nossa formação matemática.

Este trabalho se configurou como um incentivo à busca de equações diferenciais que possam ser resolvidas pela teoria de Fontaine, já que o único exemplo que conhecemos é este, apresentado no trabalho. No Capítulo 4, apresentamos alguns resultados a partir dos estudos feitos. No entanto, falhamos em entender (ou em encontrar um caminho alternativo) alguns passos do itinerário que levou os autores de [11] à obtenção de tais resultados. Nossa expectativa é de elucidar esses passos em estudos posteriores, em nível de pós-graduação. Esperamos também que este texto motive a busca por mais EDOs que sejam solúveis pelo método de Fontaine.

Apêndice A - Nota histórica

Nossa história começa com a obra de Newton intitulada *Method of Fluxions and Infinite Series* [Método de Fluxões e Séries Infinitas], escrita em 1671, temas que deram origem aos nossos modernos cálculos diferencial e integral. Usando séries, Newton dá uma solução para uma equação diferencial da forma $Mdx + Ndy = 0$, mas primeiro ele descreve um Método Analítico II. O Método de Diferenciação Total I, também descrito por ele, nos permite voltar para a equação original. Contudo, Newton percebe que o Método II não funciona com toda equação do tipo $Mdx + Ndy = 0$, e, a partir daí, nasce o conceito, não formalizado até anos após a morte de Newton, de equações diferenciais exata e inexata.

Hoje, o método para resolver equações diferenciais inexatas consiste em encontrar um fator de integração μ. Esta técnica geral é devida a Alexis-Claude Clairaut e foi publicada em 1739 em seu artigo *Recherches générales sur le calcul intégral* [Investigações gerais sobre o cálculo integral] [5]. Em 1734, Euler descobriu independentemente a técnica só publicada em 1740 em seu trabalho [12] (veja [6, p. 534]).

Fatores de integração foram utilizados em problemas específicos antes mesmo de Clairaut e Euler desenvolverem uma teoria mais geral. Por exemplo, Fatio de Duillier em uma carta a Huygens em junho de 1687 [7], integrou $3x - 2ydx = 0$ multiplicando ambos os lados por y^2x^{-3} para obter $3y^2x^{-2} - 2y^3x^{-3}dx$, que é $d(y^3x^{-2}) = 0$. Portanto, a solução é $y^3x^{-2} = c$.

A teoria geral de Clairaut foi motivada por um artigo de 1738 de Alexis Fontaine, de que Clairaut foi designado como referee. Clairaut redigiu um parecer negativo para o trabalho de Fontaine e, em seu artigo [5], publicado no ano seguinte, apresentou um método mais simples para integrar equações diferenciais, como também críticas ao método sugerido por Fontaine. O trabalho de Fontaine, intitulado *Le Calcul Integral* [O Cálculo Integral], não foi publicado até cerca de 30 anos depois, quando apareceu com nome *Mémoires Donnés à* *l'Académie Royal des Sciences Non Imprimés Dans Leur Temps* [Resumos Dados À Academia Real de Ciências, Não Impressos em Seu Tempo] (veja [8, p. 29]), reimpresso em 1770 como [9].

John L. Greenberg em [10] reconstruiu o provável método de Fontaine a partir das poucas fontes que restaram. Uma vez que as versões publicadas possuem as melhorias propostas por Clairaut, Greenberg diz que o esforço de Fontaine foi praticamente desnecessário.

Durante o período entre a rejeição e a publicação do método de Fontaine, a única técnica disponível era a de Clairaut, e, por essa razão, a teoria de Fontaine nunca foi realmente usada para resolver uma equação diferencial inexata.

APÊNDICE B - CÁLCULO DE L, M E N

Temos que N, M e L são funções da forma $N = ax + by + cp$, $M = ex + fy + gp$ e $L = Ax + By + Cp$. Substituindo esses valores na equação (veja (3.29) no Capítulo 3)

$$N\frac{\partial L}{\partial x} - L\frac{\partial N}{\partial x} + M\frac{\partial N}{\partial p} - N\frac{\partial M}{\partial p} - M\frac{\partial L}{\partial y} + L\frac{\partial M}{\partial y} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}(ax+by+cp)A &- (Ax+By+Cp)a+(ex+fy+gp)c\\ &- (ax+by+cp)g-(ex+fy+gp)B+(Ax+By+Cp)f = 0.\end{aligned}$$

Fazendo os devidos cancelamentos,

$$\begin{aligned}\cancel{Aax}+Aby &+ Acp\cancel{-Aax}-aBy-aCp+cex+cfy\cancel{+cgp}-gax\\ &- gby\cancel{-gcp}-Bex\cancel{-Bfy}-Bgp+fAx\cancel{+fBy}+fCp = 0,\end{aligned}$$

encontramos

$$x(ce-ga-Be+fA)+y(Ab-aB+cf-gb)+p(Ac-aC-Bg+fC) = 0,$$

donde

$$\begin{cases} ce-ga-Be+fA = 0,\\ Ab-aB+cf-gb = 0,\\ Ac-aC-Bg+fC = 0.\end{cases}$$

Vamos resolver o sistema pelo método da adição ou cancelamento. Para encontrar B, multiplicaremos a primeira equação por b e a segunda por $-f$.

$$\begin{cases} bce-bga-Bbe\cancel{+fAb} = 0,\\ \cancel{-fAb}+faB-fcf+fgb = 0.\end{cases}$$

Somando as equações, vem que:

$$bce - bga - Bbe + faB - cf^2 + fgb = 0,$$

donde

$$B = \frac{bga - bce + cf^2 - fgb}{fa - be}$$

Substituindo o valor de B na segunda equação do sistema, encontramos A:

$$Ab - a\left(\frac{bga - bce + cf^2 - fgb}{fa - be}\right) + cf - gb = 0,$$

donde

$$\frac{Abfa - Ab^2e - a^2bg + abce \cancel{-acf^2} \cancel{+afgb} \cancel{+cf^2a} - cfbe \cancel{-gbfa} + gb^2e}{\cancel{fa - be}} = 0.$$

Daí,

$$A(bfa - b^2e) = a^2bg - abce + cfbe - gb^2e.$$

Isolando A,

$$A = \frac{b(a^2g - ace + cfe - g^2e)}{b(fa - be)};$$

cancelando b,

$$A = \frac{a^2g - ace + cfe - gbe}{fa - be}.$$

Para encontrar C, substituimos os valores de A e B na terceira equação do sistema:

$$\left(\frac{a^2g - ace + cfe - gbe}{fa - be}\right)c - aC - \left(\frac{bga - bce + cf^2 - fgb}{fa - be}\right)g + fC = 0$$

$$\frac{a^2gc - ac^2e + c^2fe \cancel{-gbec} - (af - be)aC - bg^2a \cancel{+bceg} - cf^2g + fg^2b + (af - be)fC}{fa - be} = 0$$

$$-(af - be)aC + (af - be)fC = -a^2gc + ac^2e - c^2fe + bg^2a + cf^2g - fg^2b$$

$$(af - be)(-aC + fC) = -a^2gc + ac^2e - c^2fe + bg^2a + cf^2g - fg^2b$$

$$C(-a + f) = \frac{-a^2gc + ac^2e - c^2fe + bg^2a + cf^2g - fg^2b}{af - be}$$

$$C(-a + f) = \frac{-a(-c^2e - bg^2) + f(-c^2e - bg^2) - a^2gc + cf^2g}{af - be}$$

$$C(-a + f) = \frac{(-a + f)(-c^2e - bg^2) + gc(-a^2 + f^2)}{af - be}$$

$$C(-a+f)=\frac{(-a+f)(-c^2e-bg^2)+gc(f-a)(f+a)}{af-be}$$

$$C(-a+f)=\frac{(-a+f)(-c^2e-bg^2+cfg+agc)}{af-be}$$

$$C=\frac{agc+cfg-c^2e-bg^2}{af-be}.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo.** Volume 2. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC 2008.

[2] LOURÊDO, A.T; OLIVEIRA, A.M; LIMA, O.A. **Cálculo Avançado.** 2.ed. Campina Grande: EDUEPB, 2012.

[3] GONÇALVES, M.B; FLEMMING, D.M. **Cálculo B**: Funções de Várias Variáveis Integrais Duplas e Triplas. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.

[4] ZILL, D.G. **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.** 9th ed. Belmont: Brooks/Cole, 2009.

[5] CLAIRAUT, A.C., Recherches générales sur le calcul intégral, **Hist. Acad. R. Sci. Avec Mem. Math. Phys. Registres Cette Acad.** (1739) 425-436.

[6] INCE, E.L., **Ordinary Differential Equations.** New York: Dover Press, 1944.

[7] DEDUILLIER, F., Letter from deDuillier to Huygens, No. 2465. In: **Oeuvres complètes de Christiaan Huygens.** Vol. 9. Societé Holliandaise Des Sciences, 1901.

[8] FONTAINE, A., **Mémoires Donnés à l'Académie Royale des Sciences, Non Imprimés Dans Leur Temps.** Paris, 1764.

[9] FONTAINE, A., **Traité de Calcul Différentiel et Intégral.** Paris, 1770.

[10] GREENBERG, J.L., Alexis Fontaine's integration of ordinary differential equations and the origins of the calculus of several variables, **Ann. Sci.** 39 (1982), 1-36.

[11] LEANHARDT, A.E.; PARKER, A.E., Fontaine's Forgotten Method for Inexact Differential Equations. **Mathematics Magazine**, Vol. 90, No. 3 (June 2017), p. 208-219.

[12] EULER, L., De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis, **Comm. Acad. Petrop.** 7 (1740), 174-189.

[13] PINTO, D.; MORGADO, M.C.F. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis.** 3.ed. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2009.