UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ITALO PEREIRA DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE SÉRIES COM O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PATOS - PB
2018

ITALO PEREIRA DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE SÉRIES COM O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Artigo de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura em Matemática - CCEA - UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Coorientador: Prof. Me. José Elias da Silva

Área de concentração: Análise

Patos - PB
2018

M488e Medeiros, Italo Pereira da Silva.
Um estudo sobre séries com o uso da transformada de Laplace [manuscrito] : / Italo Pereira da Silva Medeiros. - 2018.
41 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2018.
"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."
"Coorientação: Prof. Me. José Elias da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA.""

1. Transformada de Laplace. 2. Séries Convergentes. 3. Séries Numéricas. 4. Séries de Funções.
21. ed. CDD 515.723

ITALO PEREIRA DA SILVA MEDEIROS

UM ESTUDO SOBRE SÉRIES COM O USO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Análise

Aprovado em 12 de junho de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Arlandson Math Silva Oliveira

Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Ma. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Examinadora)
Universidade Estadual da Paraíba (DM/CCT/UEPB)

José Ginaldo de Souza Farias

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter me proporcionado saúde e força para superar as dificuldades e chegar até aqui.

À minha família, em especial meus pais, Sebastião e Ivonilda, e minha esposa Lidianne, por toda dedicação e paciência, contribuindo diretamente para que eu pudesse ter um caminho mais fácil e prazeroso durante todos esses anos de graduação; ao meu irmão Izaac, por toda torcida e contribuição em minha vida acadêmica; à minha filhinha Maria Rita, que mesmo "sem conhecimento", me dá ânimo e força de vontade todos dias.

Agradeço aos professores, em especial Francisco Sibério, Vilmar, Júlio, José Ginaldo, Rodholfo, Alcides, Paulo, Renato, Nádia, Rozana, entre tantos outros. Ao professor José Elias pelas importantes contribuições e disponibilidade para a construção deste trabalho. Todos sempre estiveram dispostos a ajudar e contribuir para que eu conseguisse um melhor aprendizado. Agradeço também a UEPB (Direção, Coordenação e demais funcionários) por ter me dado a chance e todas as ferramentas que permitiram chegar hoje ao final desse ciclo de maneira satisfatória.

Agradeço especialmente, ao meu professor e orientador **Arlandson**, pela paciência, confiança e orientação, sem as quais esse trabalho não teria sido desenvolvido. Também agradeço pelas palavras de apoio e ânimo, e principalmente pela sua amizade e compreenssão em tudo, durante essa jornada de estudo.

Agradeço a todos os meus amigos, que ao longo da graduação estiveram me apoiando e incentivando, especialmente os alunos do 8° período de Matemática, aos alunos da noite que tive a chance de conhecer bem. Agradeço à pessoa que sempre esteve ao meu lado no curso (para estudo, reflexões sobre a vida), em que aprendia a cada dia um algo novo, que é Crystiane (o meu Muito Obrigado, minha Amiga).

Por fim, agradeço a todos que, diretamente ou indiretamente, fizeram parte da minha formação (o meu mais sincero Obrigado).

"O sucesso nasce do querer, da determinação e da persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis."
José de Alencar

SUMÁRIO

1 Introdução **7**

2 Preliminares **8**

2.1 A Transformada de Laplace . . . 8

2.1.1 Convergência e Existência . . . 9

2.1.2 Propriedades da Transformada de Laplace . . . 11

2.1.3 Transformada Inversa de Laplace e Frações Parciais . . . 13

2.2 Séries Numéricas . . . 14

2.2.1 Séries Geométricas . . . 15

2.2.2 Série de Dirichlet . . . 16

2.2.3 Propriedades das Séries Numéricas . . . 16

2.2.4 Séries de termos não negativos e Séries alternadas . . . 17

2.2.5 Séries absolutamente convergentes e séries simplesmente convergentes 21

2.3 Séries de Funções . . . 21

2.3.1 Séries de Potências . . . 22

2.3.2 O Teorema de Abel . . . 23

2.3.3 Dois resultados de integração (ou como comutar os símbolos $\sum$ e $\int$) . 24

3 Valores exatos de somas infinitas **25**

3.1 Uma técnica mais geral . . . 29

3.2 Alguns exemplos numéricos . . . 32

4 Conclusão **37**

Um estudo sobre séries com o uso da Transformada de Laplace

Italo Pereira Da Silva Medeiros*

26 de junho de 2018

RESUMO

No presente trabalho, abordaremos técnicas para o cálculo da soma dos seguintes tipos de séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} = \frac{r}{b-a} \cdot \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du.$$

O termo u é tomado como sendo e^{-x}, advindo essencialmente da Transformada de Laplace em que se baseiam as técnicas aqui apresentadas. Os resultados que apresentaremos são devidos a Lesko e Smith [6].

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Séries Convergentes. Somas Exatas.

ABSTRACT

In this article, we will give techniques for evaluating the sum of the following types of numerical series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} = \frac{r}{b-a} \cdot \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du,$$

*Aluno de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Email: italopsm2014@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Me. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

and
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{r u^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du.$$
The term u is considering as being e^{-x}, coming essentially from the Laplace Transform, method in which the techniques presented here are based on. The results we will present are due to Lesko and Smith [6].

Keywords: Laplace Transform. Convergent Series. Exact Sum.

1 INTRODUÇÃO

Equação algébrica é toda aquela em que as incógnitas são números, enquanto que uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e em que aparecem, além da função a ser encontrada, as derivadas desta função. Numa equação diferencial, a incógnita é uma função $y(t)$, onde t é a variável independente e y é a variável dependente.

Equações diferenciais descrevem a maneira como certas quantidades variam com o tempo. Essa equações são associadas geralmente a condições iniciais que descrevem o estado inicial do sistema estudado.

Uma técnica muito poderosa para resolver problemas envolvem equações diferenciais e algumas séries numéricas é a **Transformada de Laplace**, que transforma o problema original em uma expressão algébrica (através de um operador integral) elementar que, uma vez resolvida, nos fornece a solução do problema original, com a utilização da Transformada Inversa de Laplace.

Uma parte importante do estudo do Cálculo envolve a representação de funções como somas infinitas. Isso requer que a operação usual de adição em conjuntos finitos de números seja estendida para conjuntos infinitos. Para tanto, usamos um processo de limite através de sequências.

A parte essencial do estudo de séries numéricas se resume, na verdade, a analisar sua convergência ou divergência. Há alguns tipos específicos de séries cuja convergência ou divergência é simples de se observar, fato que permite que estas séries sejam usadas como comparação para estudar a convergência de outras séries.

Determinar o valor da soma de uma série, contudo, não é em geral uma questão fácil, existem casos bem interessantes, pode ser até mesmo impossível de ser feito de maneira exata. Efthimiou [3] partiu do seguinte problema, proposto por Fischer [4], para desenvolver uma técnica para encontrar o valor exato de uma vasta classe de séries convergentes de termos racionais:

A partir dos resultados bem conhecidos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1,$$

segue-se que

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n/2} < \frac{\pi^2}{6}.$$

Encontre o valor exato da série convergente.

Lesko e Smith [6] revisitaram a técnica desenvolvida por Efthimiou [3], baseada na Transformada de Laplace, e ilustraram uma aplicação mais geral dessa técnica.

No presente trabalho, apresentaremos os resultados devidos a Lesko e Smith [6]. Mais precisamente, abordaremos técnicas para o cálculo da soma dos seguintes tipos de séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} = \frac{r}{b-a} \cdot \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du,$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} = \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du.$$

O termo u é tomado como sendo e^{-x}, advindo essencialmente da transformada de Laplace em que se baseiam as técnicas aqui apresentadas.

Este trabalho está organizado como segue. Na Seção 2, apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para que o leitor possa compreender o texto: trataremos da transformada de Laplace, do estudo de séries numéricas infinitas e de séries de funções. Na Seção 3, apresentaremos os principais resultados deste artigo, que consistem em aplicar a Transformada de Laplace para calcular a soma de determinadas séries numéricas.

2 PRELIMINARES

2.1 A Transformada de Laplace

O método da **Transformada de Laplace** é uma importante ferramenta para resolução de equações diferenciais, em particular EDO's. Esse método é caracterizado pela aplicação de um operador integral a uma função $f(t)$. A função $f(t)$ é, então, levada do domínio do tempo t ao domínio da frequência s, onde as manipulações algébricas normalmente são mais simples.

A seguir, introduziremos a Transformada de Laplace e estudaremos algumas de suas principais propriedades. Em nosso estudo, seguiremos [9]. Para mais detalhes, remetemos também o leitor a [2], [8] e [10].

Definição 1. *Sejam f uma função valorada em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$ da variável $t > 0$ e s um parâmetro real ou complexo. Definimos a* **Transformada de Laplace** *de f como*

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt, \tag{1}$$

desde que o limite exista (isto é, seja um número real).

Quando este limite existe, a integral (1) *converge*. Quando não, a integral *diverge*, e não há Transformada de Laplace definida para f.

O parâmetro s pertence a algum domínio na reta real ou no plano complexo. Matematicamente, o dominio a que s pertence é muito importante. Entretanto, na prática, quando equações diferenciais são resolvidas, o dominio de s é ignorado.

A notação $\mathscr{L}$ designa a Tranformada de Laplace que toma funções do tipo $f = f(t)$ e gera uma nova do tipo $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$.

Exemplo 1. *Vamos encontrar a Transformada de Laplace de $f(t) = t$ para $s > 0$.*

Temos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f(t)) &= \lim_{\tau\longrightarrow\infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)dt \quad (com\ s > 0) \\
&= \lim_{\tau\longrightarrow\infty} \int_0^\tau t \cdot e^{-st} dt.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(t) &= \int_0^\infty t \cdot e^{-st} dt \\
&= t \cdot \frac{-e^{-st}}{s} - \int_0^\infty \frac{-e^{\bar{\ } st}}{s} dt \\
&= \left[\frac{-t \cdot e^{-st}}{s} + \frac{1}{s} \cdot \frac{-e^{-st}}{s}\right]\Big|_0^\infty \\
&= \frac{-1}{s}\left[t \cdot e^{-st} + \frac{e^{-st}}{s}\right]\Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Definição 2. *Uma função f é chamada* **contínua por partes** *se seu domínio pode ser dividido em diversos intervalos tais que f é contínua quando restrita a cada um deles e possui limite nas extremidades de cada subintervalo, exceto possivelmente em $\pm\infty$.*

2.1.1 Convergência e Existência

A integral que define a Transformada de Laplace nem sempre converge, e, neste caso, dizemos que a função não possui Transformada de Laplace. As funções $f(t) = e^{t^2}$ e $f(t) = \frac{1}{t}$ são exemplos de funções que não possuem Transformada de Laplace.

Definição 3. *Uma função é dita* **de ordem exponencial** *em* $[0,\infty)$ *se existem constantes* $C > 0$ *e* k*, tais que* $|f(t)| \leq C \cdot e^{kt}, \forall t \in (0,\infty) \cap Dom(f)$.

Exemplo 2. *A função* $f(t) = \cos(2t)$ *é de ordem exponencial em* $[0,\infty)$*, pois para* $C = 1$ *e* $k = 0$*, temos:*

$$|f(t)| = |\cos(2t)| \leq C \cdot e^{kt} = 1, \forall t > 0.$$

Para a classe das funções que são contínuas por partes e de ordem exponencial, a transformada de Laplace é bem-definida.

Teorema 1. *Se* $f(t)$ *é integrável em cada intervalo* $[a,b] \subset [0,\infty)$ *e* ***de ordem exponencial*** *C, então a Transformada de Laplace de* $f(t)$ *existe para* $s > C$.

Demonstração. Como a função $f(t)$ é de ordem exponencial C, então existem constantes $C, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$. Assim, sendo $H \geq T$, a transformada de Laplace pode ser escrita como a seguinte soma:

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^H f(t)e^{-st}dt + \int_H^\infty f(t)e^{-st}dt$$

A primeira parcela da soma está bem definida, pelo fato de ser uma integral do produto de duas funções integráveis no intervalo $[0,H]$. Agora, como $H \geq T$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\left|\int_H^\infty f(t)e^{-st}dt\right| &\leq \lim_{\tau\longrightarrow\infty}\int_H^\tau |f(t)e^{-st}|dt \leq \lim_{\tau\longrightarrow\infty}\int_H^\tau Me^{ct}e^{-st}dt \\
&= M\cdot\int_H^\infty e^{-(s-c)t}dt \\
&= \frac{M}{c-s}e^{-(s-c)t}\Big|_H^\infty \\
&= \frac{M}{s-c}e^{-(s-c)H}, \quad s > c
\end{aligned}$$

Como $\lim_{H\longrightarrow\infty}\frac{M}{s-c}e^{-(s-c)H} = 0$, a integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ converge para todo $s > c$, ou seja, a transformada de Laplace existe neste domínio. □

Teorema 2 (Condição de existência)**.** *Se* f *é contínua por partes e de ordem exponencial, então existe uma constante* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Demonstração. Como f é de ordem exponencial, existem $C > 0$ e α reais, tais que

$$|f(t)| \leq C \cdot e^{\alpha t}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| &\leq C\cdot\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt \\ &= \lim_{t_0\to\infty} \frac{C}{s-\alpha}\cdot[1-e^{-(s-\alpha)t_0}] \\ &= \frac{C}{s-\alpha} \quad \text{se } s>\alpha. \end{aligned}$$

Logo, a transformada de Laplace de qualquer função de ordem exponencial existe. □

2.1.2 Propriedades da Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace possui algumas propriedades operacionais, herdadas da integração, conforme veremos a seguir.

Proposição 1 (Linearidade)**.** *Sejam f e g duas funções cujas Transformadas de Laplace, $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$ e $\mathscr{L}[g(t)] = G(s)$, existem para $s > a$ e $s > b$, respectivamente, onde a e b são constantes. Então, para qualquer $s > \max\{a, b\}$ existe a Transformada de Laplace da função $\lambda f(t) + \mu g(t)$, em que $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ são constantes. Além disso, vale*

$$\mathscr{L}(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda\cdot\mathscr{L}[f(t)] + \mu\cdot\mathscr{L}[g(t)].$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[(\lambda f + \mu g)(t)] &= \int_0^\infty [\lambda\cdot f(t) + \mu\cdot g(t)]\cdot e^{-st}dt \\ &= \lambda\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}dt + \mu\int_0^\infty g(t)\cdot e^{-st}dt \\ &= \mu\cdot\mathscr{L}[f(t)] + \mu\cdot\mathscr{L}[g(t)]. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3. *Desejamos encontrar a Tranformada de Laplace da função $f(t) = \sin(wt)$.*

Pela fórmula de Euler, temos

$$\sin(wt) = \frac{1}{2i}\cdot(e^{iwt} - e^{-iwt}).$$

Daí,

$$\mathscr{L}[\sin(wt)] = \frac{1}{2i}\left\{\mathscr{L}[e^{iwt}] - \mathscr{L}[e^{-iwt}]\right\}.$$

A Transformada de Laplace da função $g(t) = e^{at}$ é igual a $\frac{1}{s-a}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\sin(wt)] &= \frac{1}{2i} \cdot \left[\frac{1}{s - iw} - \frac{1}{s + iw} \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{(s + iw) - (s - iw)}{(s - iw) \cdot (s + iw)} \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{2iw}{s^2 + w^2} \right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}.
\end{aligned}$$

Proposição 2 (Derivada)**.** *Suponhamos que f seja derivável e que sua Transformada de Laplace, $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$, exista para $s > a$, onde a é uma constante. Suponhamos também que a derivada de f, f', seja contínua por partes em* $[0, \infty]$. *Então, a Transformada de Laplace da derivada existe para $s > a$ e*

$$\mathscr{L}[f'(t)] = s \cdot \mathscr{L}[f(t)] - f(0).$$

Demonstração. Temos:

$$\mathscr{L} f'(t) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t) dt.$$

Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f'(t)] &= f(t) \cdot e^{-st} - \int_0^\infty f(t) \cdot [-s \cdot e^{-st}] dt \\
&= -f(0) + s \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \\
&= s \cdot \mathscr{L}[f(t)] - f(0).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4. *Desejamos encontrar a Transformada de Laplace da derivada de segunda ordem da função f, ou seja, $\mathscr{L}[f''(t)]$.*

Temos:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f''(t)] &= \mathscr{L} \left[\frac{d}{dt} (f'(t)) \right] \\
&= s \cdot \mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) \\
&= s \cdot \{ s \cdot \mathscr{L}[f(t)] - f(0) \} - f'(0) \\
&= s^2 \cdot \mathscr{L}[f(t)] - s \cdot f(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Observação 1. *Mais geralmente, valem as seguintes identidades:*

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} f'(t) &= s \cdot \mathscr{L} f(t) - f(0), \\
\mathscr{L} f''(t) &= s^2 \cdot \mathscr{L} f(t) - s \cdot f(0) - f'(0), \\
&\vdots \\
\mathscr{L} f^{(n)}(t) &= s^n \cdot \mathscr{L} f(t) - s^{(n-1)} \cdot f(0) - s^{(n-2)} \cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Proposição 3 (Deslocamento). *Se f é uma função cuja Transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > 0$, então*

$$\mathscr{L}[e^{ct} \cdot f(t)] = F(s-c), \quad \text{para } s > a + c.$$

Demonstração. Para $s - c > a$, temos:

$$\begin{aligned} F(s-c) &= \int_0^\infty e^{-(s-c)t} \cdot f(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot [e^{ct} \cdot f(t)]dt \\ &= \mathscr{L}[e^{ct} \cdot f(t)]. \end{aligned}$$

□

2.1.3 Transformada Inversa de Laplace e Frações Parciais

A Transformada de Laplace determina soluções de EDO's construindo, a partir de $y(t)$, a transformada $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$. O operador que retorna $y(t)$ a partir de $Y(s)$ é a **Transformada Inversa de Laplace**. Escreveremos $\mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = y(t)$ para denotar a transformada inversa.

No cálculo de alguma transformada $\mathscr{L}[f]$, podemos nos deparar com expressões racionais, do tipo $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios. Para encontrar a inversa $\mathscr{L}^{-1}[F]$ é conveniente decompor F em frações mais simples. Faremos isso através do **Método das Frações Parciais**.

Ilustraremos inicialmente o caso em que $Q(s)$ só tem fatores lineares não repetidos, ou seja, $Q(s)$ é da forma:

$$Q(s) = (s-\alpha_1) \cdot (s-\alpha_2) \cdot \dots \cdot (s-\alpha_n).$$

Então decompomos $F(s)$ em frações do tipo

$$F(s) = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{s-\alpha_n}.$$

Exemplo 5. *Vamos decompor $F(s) = \frac{s^2+3s-6}{s(s-1)(s-2)}$.*

Observe que o denominador só tem fatores lineares e não repetidos, donde podemos escrever $F(s)$ na forma

$$F(s) = \frac{s^2+3s-6}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-2)}.$$

A partir de cálculos simples, obtemos $A = -3; B = 2; C = 2$. Logo,

$$\frac{s^2+3s-6}{s(s-1)(s-2)} = \frac{-3}{s} + \frac{2}{(s-1)} + \frac{2}{(s-2)}.$$

Isso torna o cálculo da Transformada Inversa de Laplace bem mais simples.

Exemplo 6. *Desejamos calcular*

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6s^2-2s^4+24}{s^4(s^2+4)}\right].$$

Usando a técnica de frações parciais, veremos que a função pode ser escrita como

$$\begin{aligned} F(s)=\left[\frac{6s^2-2s^4+24}{s^4(s^2+4)}\right] &= \frac{A}{s^4}+\frac{B}{s^2+4} \\ &= \frac{A(s^2+4)+Bs^4}{s^4(s^2+4)} \\ &= \frac{Bs^4+As^2+4A}{s^4(s^2+4)}, \end{aligned}$$

donde obtemos $A=6$ e $B=-2$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6s^2-2s^4+24}{s^4(s^2+4)}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}-\frac{B}{s^2+4}\right] \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]. \end{aligned}$$

Fazendo uma comparação (com uma tabela de transformadas inversas), vemos que $F_1(s)=\frac{6}{s^4}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, o que resulta em $f_1(t)=t^n$, e $F_2(s)=\frac{2}{s^2+4}=\frac{a}{s^2+a^2}$, o que resulta em $f_2(t)=\sin(at)$.

Daí, temos como solução

$$f(t)=t^3-\sin(2t).$$

2.2 Séries Numéricas

Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Consideremos a soma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

Para dar sentido a essa soma, consideremos a sequência

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_1+a_2+\cdots+a_n = S_n.$$

Definição 4. *(i) Se a sequência $(S_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge para, digamos, $S\in\mathbb{R}$, isto é, $\lim_{n\to\infty}S_n = S\in\mathbb{R}$, dizemos que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é* **convergente** *e então escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$. O número S é chamado de* **soma** *da série.*

(ii) Se a sequência $(S_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ é divergente, isto é, $\lim_{n\to\infty}S_n$ não existe ou é infinito, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é **divergente**. *Neste caso, a série não tem soma.*

Os números $a_1, a_2, \ldots$ chamam-se termos da série numérica; o n-ésimo termo a_n da sequência (a_n) é dito o **termo geral** da série; e a sequência $(S_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ é chamada de **sequência de somas parciais**.

2.2.1 Séries Geométricas

Uma **série geométrica** de razão r e primeiro termo a é uma série numérica da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots,$$

com $a, r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Teorema 3. *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ *diverge se, e somente se,* $|r| \geq 1$, *e converge se, e somente se,* $|r| < 1$. *Neste último caso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \cdots + a\cdot r^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Multiplicando S_n por r, obtemos

$$S_n\cdot r = a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \cdots + a\cdot r^n.$$

Subtraindo, encontramos

$$S_n - S_n\cdot r = a + a\cdot r + \cdots + a\cdot r^{(n-1)} - a\cdot r - a\cdot r^2 - \cdots - a\cdot r^{(n-1)} - a\cdot r^n.$$

Assim,

$$S_n - S_n\cdot r = a - a\cdot r^n \Rightarrow S_n\cdot(1-r) = a - a\cdot r^n \Rightarrow S_n = \frac{a - a\cdot r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a\cdot r^n}{1-r}.$$

Fazendo $n\to\infty$, temos que $\frac{a\cdot r^n}{1-r}\to 0$, desde que $|r|<1$. Neste caso, oncluímos, então, que

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Note que, quando $|r| \geq 1$ e fazendo $n\to\infty$, teremos $\frac{a\cdot r^n}{1-r}\to\pm\infty$, ou seja, diverge. □

Exemplo 7. *Para quais valores de a a série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{a^{n-1}\cdot 2^{n+1}}$ *tem soma 1?*

Note primeiro que esta é uma série geométrica, pois seu termo geral é dado por

$$\frac{3^n}{a^{n-1}\cdot 2^{n+1}} = \frac{3^n}{a^n\cdot a^{-1}\cdot 2^n\cdot 2} = \frac{1}{a^{-1}\cdot 2}\cdot\frac{3^n}{a^n\cdot 2^n} = \frac{a}{2}\cdot\left(\frac{3}{2a}\right)^n.$$

A condição para que esta série convirja é

$$\left|\frac{3}{2a}\right| < 1,$$

isto é, $|a| > 3/2$*.*

O primeiro termo desta série é

$$a_1 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{3}{2a}\right) = \frac{3}{4}.$$

Supondo a série convergente, sua soma seria dada por

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{2a}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a}{2a-3}.$$

Impondo que $S = 1$*, encontramos* $a = 6$*. Observe que este valor para* a *é compatível com a condição para que a série seja convergente.*

2.2.2 Série de Dirichlet

Definição 5. *Chamamos* **série de Dirichlet** *à série definida por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{2}$$

com $p > 0$*. Para* $p = 1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é denominada* **série harmônica***.*

Teorema 4. *A série de Dirichilet* (2) *é convergente se* $p > 1$ *e é divergente se* $0 < p \leq 1$*.*

Demonstração. Se $0 < p \leq 1$, então $1/n^p \geq 1/n$. Como sabemos que a série harmônica diverge, por comparação, o mesmo acontece com a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$. Se $p > 1$, então, por comparação com as reduzidas da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/2^{nr}$, vemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge.Para compreenssão do **Critério da comparação**, veja o livro do Elon [7] . ☐

Exemplo 8. *(a) A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$ *diverge, pois, neste caso,* $p = \frac{3}{5} < 1$*.*

(b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e}$ *converge, uma vez que* $p = e > 1$*.*

2.2.3 Propriedades das Séries Numéricas

Teorema 5. *Para todo* $p \in \mathbb{N}$*, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se,* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ *converge.*

A demonstração é imediata.

Teorema 6. *Se as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são convergentes, com somas* S *e* T*, respectivamente, então:*

(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ converge e tem soma $S \pm T$.

(ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ converge e tem soma αS.

Demonstração. (i) Sejam S_n e T_n as sequências das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente. Como essas séries são convergentes, temos que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ e $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

Seja R_n a sequência das somas parciais de série soma, isto é, $R_n = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j = S_n + T_n$. Então $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} S_n + T_n = S + T$, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $S + T$.

(ii) Seja S_n a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Por hipotése, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Seja R_n a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$. Então $R_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha \cdot a_j = \alpha \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \alpha \cdot S_n$. Segue-se que $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot S_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha \cdot S$. Isso mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ é convergente e tem soma $\alpha \cdot S$. □

Teorema 7 (Condição Necessária de Convergência)**.** *Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Demonstração. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente, a sequência das suas somas parciais, $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, tende para um certo real S. A sequência $S_{(n+1)} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{(n+1)}$ tende para o mesmo limite, pois é uma subsequência da anterior.

Como $S_{(n+1)} = S_n + a_{(n+1)}$, temos que $a_{(n+1)} = S_{(n+1)} - S_n$. Uma vez que $\lim_{n\to\infty} S_{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n$, concluimos então que $\lim_{n\to\infty} a_{(n+1)} = 0$, e, portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

2.2.4 Séries de termos não negativos e Séries alternadas

Teorema 8. *Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a sucessão das suas somas parciais é limitada.*

Demonstração. Seja $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$. Se a série é convegente, então, por definição, a sequência S_n tem limite finito; consequentemente, é uma sequência limitada.

Reciprocamente, suponhamos que S_n é limitada. Como $a_n \geq 0$, temos que $S_{n+1} \geq S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, S_n é uma sucessão monótona crescente. As duas afirmações anteriores implicam a convergência de S_n, o que equivale a dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. □

Definição 6. *Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é* **absolutamente convergente** *quando $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.*

Definição 7 (Sequência limitada e Limites superior e inferior)**.** *Uma sequência (a_n) é dita* **limitada superiormente** *quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, uma sequência (a_n) é dita* **limitada inferiormente** *quando existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência (a_n) é dita* **limitada** *quando é limitada tanto inferiormente quanto superiormente. Neste último caso, equivalentemente, uma sequência (a_n) é dita limitada quando existe uma constante real $M \geq 0$ tal que $|a_n| \geq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Se (a_n) é uma sequência limitada, digamos que seja $\alpha \leq a_n \geq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então, considerando o conjunto $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$, temos que $[\alpha, \beta] \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$. Logo, pondo $x_n := \inf A_n$ e $y_n := \sup A_n$, temos que

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1 \leq \beta.$$

Definimos, então, o **limite inferior** *de (a_n) como*

$$x = \lim x_n = \sup x_n = \sup_n \inf A_n$$

e o **limite superior** *de (a_n) como*

$$x = \lim y_n = \inf y_n = \inf_n \sup A_n.$$

Teorema 9 (Critério de Cauchy ou da raiz)**.** *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ uma série e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in [0, +\infty)$.*

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $L > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $L = 1$, então nada se pode concluir.

Demonstração. (i) Seja δ, tal que $0 \leq L < \delta < 1$. Por definição de limite superior, existe n_0 tal que se $n > n_0$, então $\sqrt[n]{|a_n|} < \delta$, e, daí,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \delta^n < \infty.$$

(ii) Pela definição de limite Superior, existe uma subsequência (a_{n_k}) satisfazendo

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1, \quad \forall k,$$

donde $|a_{n_k}| > 1$ se $k \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Observe, por exemplo, que a série harmônica $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, enquanto a série $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$ $\square$

Exemplo 9. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *converge, pois*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Teorema 10 (Critério de D'Alembert ou da razão)**.** *Dada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *em* $\mathbb{R}$ *com* $a_n \neq 0 \forall n$*, sejam*

$$r = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

e

$$R = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

(i) Se $R < 1$*, então a série dada é absolutamente convergente.*

(ii) Se $r > 1$ *, então a série dada é divergente.*

(iii) Se $r \leq 1 \leq R$*, então nada se pode concluir.*

Demonstração. (i) Seja $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $R < \delta < 1$. Pela definição de limite superior, existe n_0 tal que para $n > n_0$, teremos $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \delta$. Então, para $n > n_0$, obtemos a desigualdade

$$|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|} \cdot |a_{n_0}| \leq \delta^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|,$$

donde segue-se que $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

(ii) Existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \delta$, para algum $\delta > 1$. Daí, segue-se que

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq |a_{n_0}| > \delta > 0$$

.

(iii) Imite o argumento do último item do teste da raiz. □

Os testes apresentados até agora exigiram como hipótese que os termos das séries envolvidas fossem positivos. Agora estudaremos as séries cujos termos não são necessariamente positivos, mas cuja convergência ainda podemos garantir por testes apropriados.

Definição 8. *Chamamos* **série alternada** *a toda série em que dois termos consecutivos têm sinais opostos, ou seja, a toda série da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \cdot a_n$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n,$$

com $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema 11 (Critério de Leibniz). *Se $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, a série alternada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n$ *converge se verifica as seguintes condições:*

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*;*

(ii) a sucessão $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ é decrescente, ou seja, $a_{(n+1)} - a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja S_n a sequência das somas parciais desta série, isto é,

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1} \cdot a_n.$$

Investiguemos as subsequências de índices pares e ímpares. Temos:

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + ... + a_{2k-1} - a_{2k}$$

e

$$S_{2k+1} = a_1 - a_2 + ... + a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1}.$$

A subsequência S_{2k} é crescente, pois, como a_n é decrescente,

$$\begin{aligned} S_{2k+2} - S_{2k} &= a_1 - a_2 + ... + a_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} - (a_1 - a_2 + ... + a_{2k-1} - a_{2k}) \\ &= a_{2k+1} - a_{2k+2} \\ &\geq 0; \end{aligned}$$

e é uma sucessão limitada, porque

$$S_2 \leq S_{2k} = a_1 - [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + ... + a_{2k}] < a_1.$$

Sendo uma sequência limitada e monótona, S_{2k} é uma sequência convergente.

Raciocínio análogo se usa para mostrar que a sequência S_{2k+1} também converge.

De $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$ resulta que $\lim_{n\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2k}$, visto que por hipótese a_n vai para zero. Como as subsequêcias dos termos de ordem par e de ordem ímpar tem o mesmo limite, S_n é convergente. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n$ é convergente. $\square$

Exemplo 10. *A série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$ é convergente, pois é alternada e $\frac{1}{\ln(k)}$ decresce para 0 quando $k \to \infty$.*

Exemplo 11. *A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ é convergente, pois $\frac{1}{n}$ é uma sequência de termos positivos, decrescente e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Assim, são satisfeitas as condições do Teorema 11.*

2.2.5 Séries absolutamente convergentes e séries simplesmente convergentes

Nessa subseção, veremos um critério para decidir se uma série é convergente, mesmo se nela houver termos negativos.

Teorema 12 (Convergência absoluta)**.** *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ *é convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também é convergente.*

Demonstração. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ é convergente se, e somente se,

$$\forall \alpha > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : m > n > p \Rightarrow \|\, a_{n+1}| + ... + |a_m\| < \alpha.$$

Como $| \, a_{n+1} + ... + a_m| \leq |a_{n+1} \,| + ... + |a_m|$,

$$\forall \alpha > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : m > n > p \Rightarrow |\, a_{n+1} + ... + a_m| < \alpha,$$

ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente. $\square$

Exemplo 12. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *é convergente ?*

Se mostrarmos que esta série é absolutamente convergente, então ela será convergente. Veja que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é uma série de Dirichlet, com $p = 2 > 1$*.*

Logo, a série é convergente.

Definição 9. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é dita* **simplesmente convergente** *se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid$ *diverge.*

Exemplo 13. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ *é simplesmente convergente.*

2.3 Séries de Funções

Como o nome sugere, **séries de funções** são séries cujos termos são funções. Mais precisamente, seja $X \subseteq \mathbb{R}$ e considere uma sequência de funções $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots : X \to \mathbb{R}$. Tomemos a soma formal

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Esta série define uma função $f : X \to \mathbb{R}$? Isto é, para cada $x \in X$, a série converge? Esta é a questão central que tentaremos, pelo menos parcialmente, responder.

2.3.1 Séries de Potências

Definição 10. *Uma* **série de potências com centro em** *a é uma série da forma*

$$a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n. \qquad (3)$$

Observe que uma série de potências é sempre convergente para $x = a$, pois, neste caso, obtemos a série numérica $a_0 + 0 + 0 + \cdots$, cuja soma é a_0.

Definição 11. *Chamamos* **intervalo de convergência** *da série de potências* (3) *ao conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge.*

Exemplo 14. *Determinemos o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

Podemos observar que a série é centrada em $a = 1$. Vamos utilizar o teste da razão, visto anteriormente, para estudar sua convergência:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{(n+1)}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-1)^n}{n!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)}{n+1} \right| \\ &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definição 12. *O raio de convergência R de uma série de potências da forma* (3) *é dado por:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{(n+1)}}{a_n} \right|,$$

desde que o limite exista ou seja igual a $+\infty$; ou

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right|,$$

desde que o limite exista ou seja igual a $+\infty$.

Observação 2. *Note que*

(i) Se $R = 0$ a série converge para $x = a$.

(ii) Se $R = +\infty$ a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $R \in]0, +\infty[$ a série converge pelo menos para todos os $x \in]a-R, a+R[$.

2.3.2 O Teorema de Abel

Teorema 13 (Abel)**.** *Seja* $\sum a_n \cdot x^n$ *uma série de potências cujo raio de convergência* r *é finito e positivo. Se* $\sum a_n \cdot x^n$ *converge, então* $\sum a_n \cdot x^n$ *converge uniformemente no intervalo* $[0, r]$*. Em particular,* $\lim\limits_{x \to r^-} \left(\sum a_n \cdot x^n\right) = \sum a_n \cdot x^n$.

Observe que, $\sum a_n \cdot x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ Na demonstração, usaremos o teorema de Dirichlet (veja [7], Teor. 21, Cap. IV, pág. 115), que assevera o seguinte: *Seja* $\sum a_n$ *uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência limitada. Seja* (b_n) *uma sequência não crescente de números positivos com* $\lim b_n = 0$*. Então a série* $\sum a_n b_n$ *é convergente.*

Usaremos também o seguinte lema (veja [7], Cap. X, pág. 310).

Lema 1. *Seja* $\sum a_n$ *uma série (não necessáriamente convergente) cujas reduzidas* $S_p = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ *são limitadas, isto é, existe* $K > 0$ *tal que* $|S_p| \leq K$ *para todo* $p \in \mathbb{N}$*. Seja* $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_p \geq \cdots$ *uma sequência não crescente de números* $b_p \geq 0$*. Então, para todo* $p \in \mathbb{N}$ *vale* $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p| \leq K \cdot b_1$.

Demonstração do Teorema de Abel. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica

$$\left|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p}\right| < \varepsilon, \ \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Dado $n > n_0$, escrevemos $\alpha_p = a_{n+p} r^{n+p}, \ \ \forall p \in \mathbb{N}$. Estes α_p cumprem a hipótese do Lema 1, com $K = \varepsilon$. Para todo $x \in [0, r]$, temos

$$\left|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p}\right| = \left|\alpha_1 \cdot \left(\frac{x}{r}\right) + \alpha_2 \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \cdots + \alpha_p \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^p\right| \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

Usando o Lema 1, com $b_p = \left(\frac{x}{r}\right)^n$, concluímos que, para todo $n > n_0$ e $x \in [0, r]$, vale

$$\left|a_{n+1} r^{n+1} + a_{n+2} r^{n+2} + \cdots + a_{n+p} r^{n+p}\right| \leq \varepsilon \cdot \left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} \leq \varepsilon,$$

seja qual for $p \in \mathbb{N}$. Isto prova que $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em [0,r]. Como cada termo $a_n x^n$ é uma função contínua, a soma $f(x) = \sum a_n x^n$ é contínua em [0,r]. Logo,

$$\sum a_n x^n = f(r) = \lim_{x \longrightarrow r^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow r^-} \left(\sum a_n x^n\right).$$

$\square$

Observação 3. *(i) As mesmas conclusões do teorema de Abel valem com* $-r$ *no lugar de* r*. Basta tomar a série* $\sum (-1)^n a_n x^n$.

(ii) a série $\sum a_n x^n$ *converge uniformemente no seu intervalo de convergência* $(-r, r)$ *se, e somente se, converge nos pontos* r *e* $-r$.

(iii) a série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ *converge uniformemente em cada intervalo* $[-1+\delta, 1]$*, com* $\delta > 0$*, mas não converge uniformemente em (-1,1].*

2.3.3 Dois resultados de integração (ou como comutar os símbolos $\sum$ e $\int$)

Algumas funções muito simples não podem ser integradas no sentido aprendido nos cursos de Cálculo. Tal é o caso, por exemplo, da função de Dirichlet $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}.\end{cases}$$

Esta função não é integrável a Riemann, isto é, não existe $\int_0^1 f(x)dx$, conforme o leitor concluirá a partir do Teorema 20, à página 273 de [7].

Uma nova teoria da integração foi proposta pelo matemático francês Henri Lebesgue no começo do século passado. A função de Dirichlet é integrável a Lebesgue e

$$\int_{[0,1]}\chi_{\mathbb{Q}}d\mu=\mu(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0,$$

em que renomeamos a função f por $\chi_{\mathbb{Q}}$, a função indexadora do conjunto de todos os números racionais, restrita ao intervalo $[0,1]$. Introduzir este novo conceito de integração, contudo, foge aos propósitos deste trabalho. Precisaríamos, para tanto, dado um conjunto não vazio X, definir uma σ-álgebra $\mathfrak{A}$ sobre X e uma medida μ sobre esta σ-álgebra, estabelecendo, assim, um espaço de medida $(X,\mathfrak{A},\mu)$ onde faria sentido definir a integral de Lebesgue de certas funções f de X na reta estendida $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

No entanto, necessitaremos de dois resultados que pertecem à teoria da integração de Lebesgue. Vejamos quais são eles. O leitor interessado pode procurar detalhes em [5].

Seja $(\mathbb{R},\mathfrak{M},\mu)$ o espaço de medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Denotemos por L^+ o espaço das funções integráveis $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty]$, isto é, tais que $\int f d\mu<\infty$.

Teorema da Convergência Monótona. Sejam (f_n) uma sequência de funções em L^+ tal que $f_i\le f_{i+1}$ para todo i e $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n=\sup\limits_n f_n$. Então $\displaystyle\int f d\mu=\lim\int f_n d\mu$.

Como corolário, temos o seguinte

Teorema 14. *Sejam (f_n) uma sequência finita ou infinita de funções em L^+ e $f=\sum\limits_n f_n$. Então $\displaystyle\int f d\mu=\sum_n\int f_n d\mu$.*

Denotemos por L^1 o espaço das funções integráveis $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, isto é, tais que $\int|f|d\mu<\infty$.

Teorema da Convergência Dominada. Seja (f_n) uma sequência de funções em L^1 tal que $f_n \to f$ em quase todo ponto, isto é, $\mu(\{x : f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$, e tal que existe uma função não-negativa $g \in L^1$ satisfazendo $|f_n| \leq g$ para todo n. Então $f \in L^1$ e $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Como corolário, temos o seguinte

Teorema 15. *Suponhamos que (f_n) é uma sequência de funções em L^1 tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge em quase todo ponto para uma função em L^1 e $\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$.*

Para os resultados apresentados no restante deste artigo, esclareçamos a relação existente entre as integrais de Lebesgue e Riemann que nos permitirá fazer dos dois teoremas anteriormente apresentados.

Seja $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, em que $-\infty < a < b \leq +\infty$. Suponhamos que:

(i) f é contínua em quase todo ponto de $[a,b)$;

(ii) f é limitada em $[a,c]$ para todo $c \in [a,b)$;

(iii) a integral imprópria de Riemann $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$ existe.

Tomando uma sequência crescente $(c_n) \subset [a,b)$ tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = b$, temos a igualdade $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{c_n} f(x)dx$. Se $\lim_{n\to\infty} \int_a^{c_n} |f(x)|dx < \infty$, então, observando que $\int_a^{c_n} |f(x)|dx = \int_{[a,c_n]} |f|d\mu$, f é integrável no sentido de Lebesgue em $[a,b)$ e

$$\int_{[a,b)} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,c_n]} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_a^{c_n} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Remetemos o leitor a [11] para detalhes.

3 Valores exatos de somas infinitas

Apresentaremos agora um estudo em que a Transformada de Laplace é usada como ferramenta para o cálculo da soma de alguns tipos de séries infinitas.

Efthimiou [3] desenvolveu uma técnica para encontrar o valor exato de séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}, \quad \text{em que} \quad a,b \notin \{-1,-2,-3,\dots\}. \tag{4}$$

Ele aplicou a mesma técnica para séries do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q(n)}{P(n)}$, sendo P e Q polinômios que obedecem a condição grau$(P)-$grau$(Q)=2$ e P se fatora completamente com fatores lineares sem raízes em $\{1,2,3,...\}$.

A técnica de Efthimiou pode também ser aplicada quando $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ é uma série infinita, em que u_n pode ser escrito como uma transformada de Laplace do tipo $u_n=\int_0^{\infty}e^{-nx}f(x)dx$. Assim, o que tínhamos como uma soma de números reais pode então ser escrito como uma soma de integrais. À primeira vista, isso pode não parecer um progresso, mas, ao trocar a ordem do somatório e da integração (com manipulações adequadas), obteremos uma nova série (geométrica!) que podemos avaliar facilmente.

Aplicando o somatório em u_n e na integral, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-nx}f(x)dx\\ &= \int_0^{\infty}f(x)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}dx.\end{aligned}$$

Para cada x, $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ é uma série geométrica cuja soma é $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\int_0^{\infty}f(x)\cdot\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx.$$

Se essa integral for fácil de avaliar, obteremos a partir dela a soma desejada.

Para ilustrar essa técnica, consideremos a série (4) com $a\neq b$. Suponhamos que $b>a>-1$. O n-ésimo termo pode ser escrito como uma transformada de Laplace. Usando o método de frações parciais, podemos mostrar que

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\int_0^{\infty}e^{-nx}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a}\right)dx.$$

De fato, temos que

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{A}{n+a}+\frac{B}{n+b}=\frac{A(n+b)+B(n+a)}{(n+a)(n+b)},$$

o que implica

$$1=An+Ab+Bn+Ba=Ab+Ba+(A+B)n;$$

logo,

$$\begin{cases}Ab+Ba=1\\ A+B=0,\end{cases}$$

donde obtemos

$$A=\frac{1}{b-a}\quad\text{e}\quad B=-\frac{1}{b-a},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\int_0^\infty e^{-(n+a)x}dx - \int_0^\infty e^{-(n+b)x}dx\right),$$

pois

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-ux}dx.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+a)(n+b)} &= \frac{1}{b-a}\int_0^\infty \left(e^{-(n+a)x} - e^{-(n+b)x}\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-(n+a)x} - e^{-(n+b)x}}{b-a}\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-nx}e^{-ax} - e^{-nx}e^{-bx}}{b-a}\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-nx}(e^{-ax} - e^{-bx})}{b-a}\right)dx \\
&= \int_0^\infty e^{-nx}\left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\right)dx.
\end{aligned}$$

Como os integrantes são todos não-negativos para $0 < x < \infty$, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona para mudar a ordem da soma e da integral, encontrando assim

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\cdot\left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\right)dx \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}dx \\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\int_0^\infty (e^{-ax} - e^{-bx})\cdot\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Para simplificar a integral

$$\frac{1}{b-a}\cdot\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{1-e^{-x}}\cdot e^{-x}dx$$

vamos fazer uma mudança de variáveis adequada. Assim, tomemos $u = e^{-x}$ o que implica $du = -e^{-x}dx$. Os limites de integração passam a ser

$$\begin{cases} x \to \infty & \Longrightarrow u \to 0, \\ x \to 0 & \Longrightarrow u \to 1. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\cdot\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{1-e^{-x}}\cdot e^{-x} &= -\frac{1}{b-a}\cdot\int_1^0 \frac{u^a - u^b}{1-u}du \\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-u}du.
\end{aligned}$$

Exemplo 15. *Vamos encontrar a soma da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1/2)}$. *Note que essa série é da forma* (4) *com* $a = 0$ *e* $b = \frac{1}{2}$.

Usando a técnica esboçada acima, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1/2)} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{2}}}{1-u} du.$$

Podemos simplificar a integral, usando o produto pelo conjugado:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{2}}}{1-u} du &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{1-u^{\frac{1}{2}}}{1-u} \cdot \frac{1+u^{\frac{1}{2}}}{1+u^{\frac{1}{2}}} du \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{1-u}{(1-u)[1+u^{\frac{1}{2}}]} du \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{1}{2}}} du. \end{aligned}$$

Agora, usemos a técnica da mudança de variável na integral: se $x = 1 + u^{\frac{1}{2}}$, *então* $dx = \frac{1}{2 \cdot u^{\frac{1}{2}}} du$. *Como* $u = (x-1)^2$, *então* $du = 2(x-1)dx$. *Daí,*

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{1}{2}}} du &= 2 \cdot \int_{0_u}^{1_u} \frac{1}{x} \cdot 2(x-1) dx \\ &= 2 \cdot \int_{0_u}^{1_u} \frac{2x}{x} - \frac{2}{x} dx \\ &= 2 \cdot [2x - 2\ln(x)] \Big|_{0_u}^{1_u} \\ &= 2 \cdot \left[2(1+u^{\frac{1}{2}}) - 2 \cdot (\ln(1+u^{\frac{1}{2}})) \right] \Big|_0^1 \\ &= 2 \cdot [(4-2) - (2 \cdot \ln(2) - 0)] \\ &= 4 - 4 \cdot \ln(2) = 4[1 - \ln(2)]. \end{aligned}$$

Exemplo 16. *Na série* (4)*, façamos* $a = 0$, *e seja* b *um inteiro positivo. Vamos calcular a soma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} &= \frac{1}{b} \cdot \int_0^1 \frac{1-u^b}{1-u} du \\ &= \frac{1}{b} \cdot \int_0^1 \frac{(1-u)(u^{b-1} + u^{b-2} + \dots + u^2 + u + 1)}{1-u} du \\ &= \frac{1}{b} \cdot \int_0^1 (u^{b-1} + u^{b-2} + \dots + u^2 + u + 1) du \\ &= \frac{1}{b} \cdot \left[\frac{u^b}{b} + \frac{u^{b-1}}{b-1} + \dots + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{b} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

3.1 Uma técnica mais geral

A técnica de Efthimiou [3] pode ser generalizada para séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n, \tag{5}$$

em que podemos tomar apenas v_n como uma transformada de Laplace. Podemos escrever a série (5) como uma soma de integrais, sendo que agora um fator de u_n aparecerá antes de cada integral. Se a ordem do somatório e integração puder ser trocada (novamente, com manipulações adequadas), precisaremos encontrar uma soma explicita para a série $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx}$. Se conseguirmos fazer tudo isso funcionar, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \int_0^{\infty} e^{-nx} f(x) dx \\
&\stackrel{?}{=} \int_0^{\infty} f(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-nx} \right) dx \\
&= \int_0^{\infty} f(x) h(x) dx.
\end{aligned}$$

Foi isso que Lesko e Smith [6] fizeram e é o que passaremos a investigar aqui.

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b}, \tag{6}$$

em que $r \in [-1,1)$, $a > 0$ e $b \geq 0$. Conforme mostrado anteriormente, podemos reconhecer $\frac{1}{an+b}$ como sendo igual a Transformada de Laplace do tipo

$$\int_0^{\infty} e^{-nx} \cdot \left(e^{\frac{-b}{a}x} \right) dx.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-nx} \cdot \left(\frac{e^{\frac{-b}{a}x} a}{a} \right) dx &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\left(n+\frac{b}{a}\right)x} dx \\
&= -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{n+\frac{b}{a}} \cdot e^{\left(n+\frac{b}{a}\right)x} \right] \Bigg|_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{a} \left[-\frac{a}{an+b} \right] \\
&= \frac{1}{an+b}.
\end{aligned}$$

Partindo do fato de que $r \neq -1$, as somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cdot e^{-nx} \cdot e^{\frac{-bx}{a}}}{a}$ são dominadas superiormente por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| r^n e^{-nx} \left(\frac{e^{\frac{-bx}{a}}}{a} \right) \right| = \frac{e^{\frac{-bx}{a}}}{a} \cdot \left(\frac{|r| e^{-x}}{1 - |r| e^{-x}} \right).$$

Assim,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-bx}{a}}}{a} \cdot \left(\frac{|r| \cdot e^{-x}}{1 - |r| \cdot e^{-x}} \right) dx \leq \frac{1}{a} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{|r| \cdot e^{-x}}{1 - |r| \cdot e^{-x}} \right) dx < \infty.$$

Vamos então aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para alterar a ordem da soma e da integração, para obtermos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{r^n e^{-nx} \cdot e^{\frac{-b \cdot x}{a}}}{a} dx \\ &\overset{T.C.D.L}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{-b \cdot x}{a}}}{a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx} dx. \end{aligned}$$

A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx}$ é uma série geométrica convergente com soma $\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}}$. Segue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{b}{a}x} \cdot \left(\frac{re^{-x}}{1 - re^{-x}} \right) dx.$$

Novamente fazendo a mudança de variável para $u = e^{-x}$, temos uma integral do tipo

$$\frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1 - ru} du$$

Esta fórmula é válida para todo $r \in (-1, 1)$, desde que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b}$ e $\frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{ru^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du$ convirjam para $r = -1$ satisfaçam as condições do Teorema de Abel.

Exemplo 17. *Vamos encontrar o valor da soma* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{an+b}$ *quando* $a = 1$ *e* $b = 0$.

Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} = \int_0^1 \frac{r}{1 - ru} du$$

Resolvemos a integral pelo método da mudança de variável. Se $x = 1 - ru$, *então* $dx = -rdu$. *Daí,*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{r}{1 - ru} du &= -\int_{0_u}^{1_u} \frac{1}{x} dx \\ &= -[\ln(x)]|_{0_u}^{1_u} \\ &= -[\ln(1 - ru)]|_0^1 \\ &= -[\ln(1 - r) - \ln(1)] \\ &= \ln\left(\frac{1}{1 - r} \right). \end{aligned}$$

Vamos, por fim, aplicar a técnica descrita anteriormente à soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)}, \tag{7}$$

em que $r \in [-1,1]$ e $b > a > -1$.

Como mostrado no início desta seção, podemos escrever $\frac{1}{(n+a)(n+b)}$ na forma de uma transformada de Laplace. Supondo $r \in (-1,1)$, as estimativas de somas parciais são semelhantes as que foram mostradas anteriormente.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \frac{1}{(n+a)(n+b)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \int_0^{\infty} e^{-nx} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a} \right) dx \\
&\overset{T.C.D.L}{=} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{b-a} \right) \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-nx} dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \left(\frac{re^{-x}}{1-re^{-x}} \right) dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = e^{-x}$ e as manipulações devidas (como visto anteriormente), encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{(n+a)(n+b)} = \frac{r}{b-a} \cdot \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du$$

Isto funciona para $r \in (-1,1)$. Mas, uma vez que a soma infinita e $\frac{r}{b-a} \cdot \int_0^1 \frac{u^a-u^b}{1-ru} du$ existem para $r = \pm 1$, elas devem ser iguais para $r = \pm 1$, em virtude do Teorema de Abel.

Exemplo 18. *Tomemos em* (7) $a = 0$ *e* $b = 1$, *ou seja,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(n+1)}$. *Substituindo na integral, temos*

$$r \cdot \int_0^1 \frac{1-u}{1-ru} du = r \cdot \int_0^1 \frac{1}{1-ru} du + (-r) \cdot \int_0^1 \frac{u}{1-ru} du := I_1 + I_2.$$

Para resolver I_1, *fazemos* $x = 1 - ru$, *donde* $dx = -rdu$, *isto é,* $du = -\frac{dx}{r}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
r \cdot \int_{0_u}^{1_u} \frac{\frac{-1}{r}}{x} dx &= -\int_{0_u}^{1_u} \frac{1}{x} dx \\
&= [-\ln(x = 1 - ru)]|_0^1 \\
&= [-\ln(1-r) + \ln(1)] \\
&= -\ln(1-r).
\end{aligned}$$

Para resolver I_2, *fazemos novamente* $x = 1 - ru$, *donde* $du = -\frac{dx}{r}$ *e* $u = \frac{1-x}{r}$. *Assim,*

$$\begin{aligned}
-r \cdot \int_{0_u}^{1_u} \frac{\frac{(1-x)(-1)}{r \cdot r}}{x} dx &= \frac{1}{r} \cdot \int_{0_u}^{1_u} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx \\
&= \frac{1}{r} \cdot [\ln(x = 1 - ru) - (x = 1 - ru)]|_{0_u}^{1_u} \\
&= \frac{1}{r} \cdot [[(1-r) - \ln(1)] - [(1-r) - 1]] \\
&= \frac{\ln(1-r)}{r} + 1.
\end{aligned}$$

Somando os resultados de I_1 e I_2, encontramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n(n+1)} = r \cdot \int_0^1 \frac{1-u}{1-ru} du = \frac{\ln(1-r)}{r} - \ln(1-r) + 1.$$

3.2 Alguns exemplos numéricos

A seguir, apresentaremos mais alguns exemplos numéricos que figuram como exercícios em [6].

A. Seja $b \in \{1, 2, 3, ...\}$. Vamos seguir os passos abaixo para dar uma prova alternativa de que a série (4) (com $a = 0$) tem soma $\frac{1}{b} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{b}\right)$.

(i) Usar a Transformada de Laplace de $\frac{1}{n+b} = \int_0^1 e^{-nx}(e^{-bx})dx$ para mostrar a igualdade:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \int_0^1 u^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) du.$$

(ii) Mostrar que

$$\int_0^1 u^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{b}\right).$$

PASSO 1. Vamos mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \int_0^1 u^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-u}\right) du.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx} e^{-bx} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-bx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-nx} \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-bx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} \right) dx. \end{aligned} \tag{8}$$

Resolvendo o parênteses (da mesma forma que calculamos (6), fazendo aqui $a = 1$ e $b = 0$), temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} &= \int_0^1 \frac{e^{-x} u^0}{1 - e^{-x} u} du \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x} u} du. \end{aligned}$$

Façamos uma mudança de variável: tomando $v = 1 - e^{-x}u$, temos $dv = -e^{-x}du$. Além disso, quando $u = 0$, então $v = 1$; e, quando $u = 1$, então $v = 1 - e^{-x}$. Segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}u}du &= -\int_1^{1-e^x} \frac{1}{v}dv \\
&= \int_{1-e^x}^1 \frac{1}{v}dv \\
&= \ln|v|\Big|_{1-e^x}^1 \\
&= \ln(1) - \ln(1-e^{-x}) \\
&= -\ln(1-e^{-x}).
\end{aligned}$$

Voltando à integral inicial na última linha de (8), obtemos a integral

$$-\int_0^\infty e^{-bx}\ln(1-e^{-x})dx. \tag{9}$$

Façamos uma nova mudança de variável. Desta vez, tomemos $u = e^{-x}$, donde $du = -e^{-x}dx$, isto é, $dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u}$. Além disso, quando $x = 0$, então $u = 1$; e, quando $x \to \infty$, então $u \to 0$. Finalmente, note que $e^{-bx} = (e^{-x})^b = u^b$. Colocando todas estas informações na integral (9), chegamos a

$$\begin{aligned}
-\int_0^\infty e^{-bx}\ln(1-e^{-x})dx &= -\left(-\int_0^1 u^b \ln(1-u)\left(\frac{-du}{u}\right)\right) \\
&= -\int_0^1 u^b u^{-1}\ln(1-u)du \\
&= -\int_0^1 u^{b-1}\ln(1-u)du \\
&= \int_0^1 u^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-u}\right)du.
\end{aligned}$$

Passo 2. Queremos mostrar que $\int_0^1 x^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = \frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{b}\right)$, em que $b \in \{1,2,3,\ldots\}$.

Vamos primeiro calcular a integral indefinida $\int x^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$. Recorde que $\ln(c^d) = d\cdot\ln c$. Assim, $\int x^{b-1}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = -\int x^{b-1}\ln(1-x)\,dx$. Integremos por partes. Fazendo $u = \ln(1-x), dv = x^{b-1}dx$, obtemos

$$du = -\frac{dx}{1-x}, v = \frac{x^b}{b}.$$

Daí,

$$\int x^{b-1}\ln(1-x)\,dx = \frac{x^b\ln(1-x)}{b} + \frac{1}{b}\int \frac{x^b}{1-x}dx.$$

Como $b \in \{2,3,\ldots\}$, efetuando a divisão de polinômios que aparece no integrando da última integral acima, obtemos

$$x^b = (1-x)(-x^{b-1} - x^{b-2} - \cdots - x - 1) + 1,$$

donde

$$\frac{x^b}{1-x} = -x^{b-1} - x^{b-2} - \cdots - x - 1 + \frac{1}{1-x}.$$

Retornando àquela última integral, encontramos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^b}{1-x} dx &= \int -x^{b-1} - x^{b-2} - \cdots - x - 1 + \frac{1}{1-x} dx \\
&= -\frac{x^b}{b} - \frac{x^{b-1}}{b-1} - \cdots - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x).
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\int x^{b-1} \ln(1-x)\, dx = \frac{x^b \ln(1-x)}{b} + \frac{1}{b}\left(-\frac{x^b}{b} - \frac{x^{b-1}}{b-1} - \cdots - \frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x)\right) + C,$$

em que C é uma constante de integração que deixamos para incluir por último. (Não escrevemos $\ln|1-x|$ porque estamos interessados em valores de x entre 0 e 1.) Retornando à integral indefinida original, encontramos

$$\int x^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{b}(1-x^b)\ln(1-x) + \frac{1}{b}\left(\frac{x^b}{b} + \frac{x^{b-1}}{b-1} + \cdots + \frac{x^2}{2} + x\right) + C.$$

Como 1 não pertence ao domínio da função $x \mapsto x^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, a integral definida que estamos interessados em calcular é uma integral imprópria. Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx &= \lim_{\epsilon\to 1} \int_0^\epsilon x^{b-1} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} \left[\frac{1}{b}(1-x^b)\ln(1-x) + \frac{1}{b}\left(\frac{x^b}{b} + \frac{x^{b-1}}{b-1} + \cdots + \frac{x^2}{2} + x\right)\right]\Bigg|_0^\epsilon \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} \left[\frac{1}{b}(1-\epsilon^b)\ln(1-\epsilon) + \frac{1}{b}\left(\frac{\epsilon^b}{b} + \frac{\epsilon^{b-1}}{b-1} + \cdots + \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon\right)\right].
\end{aligned}$$

Se conseguirmos mostrar que $\lim_{\epsilon\to 1}[(1-\epsilon^b)\ln(1-\epsilon)] = 0$, nosso trabalho estará concluído. Perceba que este limite é uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$. Reescrevendo

$$(1-\epsilon^b)\ln(1-\epsilon) = \frac{\ln(1-\epsilon)}{\frac{1}{1-\epsilon^b}},$$

podemos aplicar a regra de L'Hôpital duas vezes para obter

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 1}[(1-\epsilon^b)\ln(1-\epsilon)] &= \lim_{\epsilon\to 1}\left[\frac{\ln(1-\epsilon)}{\frac{1}{1-\epsilon^b}}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} \frac{-\frac{1}{1-\epsilon}}{\frac{b\epsilon^{b-1}}{(1-\epsilon^b)^2}} \\
&= \lim_{\epsilon\to 1}\left[-\frac{(1-\epsilon^b)^2}{b\epsilon^{b-1}(1-\epsilon)}\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 1} \frac{2(1-\epsilon^b)\epsilon^{b-1}}{(b-1)\epsilon^{b-2}(1-\epsilon) - \epsilon^{b-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

B. Encontrar valores exatos para as séries a seguir, usando técnicas descritas nesta seção.

(B1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+5)} = \frac{r}{(b-a)} \cdot \int_0^1 \frac{u^a - u^b}{1-ru} du.$

Fazendo $r = 1$, $a = 0$ e $b = 5$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} \cdot \int_0^1 \frac{u^0 - u^5}{1-u} du &= \frac{1}{5} \cdot \int_0^1 \frac{(1-u)(u^4 + u^3 + u^2 + u + 1)}{1-u} du \\
&= \frac{1}{5} \cdot \int_0^1 (u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) du \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u \right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{137}{60} \right) = \frac{137}{300}.
\end{aligned}$$

(B2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})^n}{n}.$

Aqui, temos $r = \frac{1}{4}$, $a = 1$ e $b = 0$. Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{r u^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du &= \int_0^1 \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{u}{4}} du \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4}{4-u} du \\
&= [\ln(4-u)] \Big|_0^1 \\
&= -\ln(3) + \ln(4) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).
\end{aligned}$$

(B3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = (-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

Indentificamos os seguintes valores: $a = 2$, $b = 1$ e $r = -1$. Podemos então usar uma integral igual a do exemplo anterior:

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{r u^{\frac{b}{a}}}{1-ru} du &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{(-1) u^{\frac{1}{2}}}{1-(-1)u} du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u} du.
\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável trigonométrica, podemos facilmente resolver essa integral. Seja $u = \tan^2(x)$, o que implica $du = 2\cdot\tan(x)\cdot\sec^2(x)dx$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{1+u}du &= \frac{1}{2}\cdot\int_{0_u}^{1_u}\left[\frac{\sqrt{\tan^2(x)}}{\sec^2(x)}\cdot 2\cdot\tan(x)\cdot\sec^2(x)\right]dx\\
&= \int_{0_u}^{1_u}\tan^2(x)dx\\
&= \int_{0_u}^{1_u}(\sec^2(x)-1)dx\\
&= [\tan(x)-x]|_{0_u}^{1_u}\\
&= [\sqrt{u}-\arctan(\sqrt{u})]|_0^1\\
&= [1-\arctan(1)+\arctan(0)] = 1-\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(B4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = (-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

Como $a=0$, $b=1$ e $r=-1$, temos

$$\begin{aligned}
(-1)r\cdot\int_0^1\frac{1-u}{1-ru}du &= \int_0^1\frac{1-u}{1+u}du\\
&= \left[\int_0^1\frac{1}{1+u}du - \int_0^1\frac{u}{1+u}du\right]\\
&= [\ln(1+u)]\Big|_0^1 - \left[\int_0^1\frac{u+1-1}{1+u}du\right]\\
&= [\ln(1+u)]\Big|_0^1 - \left[\left(\int_0^1 du - \int_0^1\frac{1}{1+u}du\right)\right]\\
&= -[\ln(1+u)-u+\ln(1+u)]|_0^1\\
&= -[2\ln(1+u)-u]|_0^1 = 1-2\ln(2).
\end{aligned}$$

(B5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+2)} = (-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$.

Temos: $a=0$, $b=2$ e $r=-1$ Daí,

$$\begin{aligned}
(-1)\cdot\frac{r}{b}\cdot\int_0^1\frac{1-u^b}{1-ru}du &= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{1-u^2}{1+u}du\\
&= \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{(1-u)(1+u)}{1+u}du\\
&= \frac{1}{2}\left[u-\frac{u^2}{2}\right]\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(B6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n(n+k)}$ $k\notin\{-1,-2,-3,\ldots\}$.

Vemos que $a=0$, $b=k$ e $r=\frac{1}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{r}{b}\cdot\int_0^1 \frac{u^a-u^b}{1-ru}du &= \frac{1}{2k}\cdot\int_0^1 \frac{1-u^k}{1-\frac{u}{2}}du\\
&= \frac{1}{2k}\cdot\int_0^1 \frac{2(1-u^k)}{2-u}du\\
&= \frac{1}{k}\cdot\int_0^1 \frac{1-u^k}{2-u}du.
\end{aligned}$$

Dividindo os polinômios do integrando, encontramos

$$\frac{u^k-2}{u-2}=\left(u^{k-1}+2u^{k-2}+4u^{k-3}+\cdots+2^{k-3}u+2^{k-2}\right)+\left(2^{k-1}-1\right).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\cdot\int_0^1 \frac{u^k-2}{u-2}du &= \frac{1}{k}\cdot\int_0^1 \left(u^{k-1}+2u^{k-2}+4u^{k-3}+\cdots+2^{k-3}u+2^{k-2}\right)du\\
&\quad +\frac{1}{k}\int_0^1 \frac{2^{k-1}-1}{u-2}du\\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{u^k}{k}+\frac{2u^{k-1}}{k-1}+\frac{4u^{k-2}}{k-2}+\cdots+\frac{2^{k-3}u^2}{2}+2^{k-2}u\right)\Bigg|_0^1\\
&\quad +\frac{1}{k}\int_0^1 \frac{2^{k-1}-1}{u-2}du\\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{u^k}{k}+\frac{2u^{k-1}}{k-1}+\frac{4u^{k-2}}{k-2}+\cdots+\frac{2^{k-3}u^2}{2}+2^{k-2}u\right)\Bigg|_0^1\\
&\quad +\frac{2^{k-1}-1}{k}\cdot\int_0^1 \frac{1}{u-2}du\\
&= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k-1}+\frac{4}{k-2}+\cdots+\frac{2^{k-3}}{2}+2^{k-2}\right)\\
&\quad +\frac{2^{k-1}-1}{k}[\ln|u-2||]|_0^1\\
&= \frac{1}{k}\cdot\left[\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k-1}+\frac{4}{k-2}+\cdots+\frac{2^{k-3}}{2}+2^{k-2}\right)+(2^{k-1}-1)\ln(2)\right].
\end{aligned}$$

4 CONCLUSÃO

O estudo sobre séries usando a Transformada de Laplace nos propiciou um rico itinerário que englobou desde a revisão de fatos básicos sobre séries numéricas até tópicos mais avançados da Análise, como a própria Transformada de Laplace e alguns conceitos e resultados acerca de séries de funções. Tangenciamos também uma nova teoria de integração, que esperamos poder retomar num curso de Teoria da Medida na pós-graduação. Como, em geral, esses tópicos não são vistos (ou, quando vistos, não são aprofundados) nos componentes curriculares, durante a graduação, o itinerário que percorremos até a preparação deste Trabalho de Conclusão de Curso se configura como um enriquecimento de nossa formação matemática.

Embora as técnicas desenvolvidas neste trabalho para o cálculo da soma de algumas séries infinitas não sejam novas (há também outras maneiras de fazer o mesmo), essas técnicas são um bom método para determinar o valor exato de certas somas infinitas, a ser, inclusive, incorporado ao dia a dia da prática docente quando se aborda os conteúdos de que aqui tratamos.

REFERÊNCIAS

[1] CERQUEIRA, A.C.S. **Um estudo sobre sequências e séries.** 2013. 63.p Dissertação de especialização. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2013.

[2] DYKE,P.P.G. **An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series.** 3rd ed. London: Springer, 2004.

[3] EFTHIMIOU, C.J. **Finding Exact Values For Infinite Series.** Mathematics Magazine, Vol. 72, No. 1 (Feb., 1999), pp. 45-51.

[4] FISCHER, I. **Problem 23 in Problem Section.** Math Horizons, February 1995.

[5] FOLLAND, G. **Real Analysis: Modem Techniques and Their Applications.** New York: John Wiley & Sons, 1984.

[6] LESKO, J.P.; SMITH, W.D. **A Laplace Transform Technique for Evaluating Infinite Series.** Mathematics Magazine, Vol. 76, No. 5 (Dec., 2003), p. 394-398.

[7] LIMA, E.L. **Curso de Análise.** Vol. 1. 6. ed. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

[8] SAUTER, E.; DE AZEVEDO, F.S.; STRAUCH. I.M.F. (org.). **Transformada de Laplace – Um Livro Colaborativo.** Disponível em: `https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-tl/livro.pdf`. Acesso em 02/06/2018.

[9] SCHIFF, J.L. **The Laplace Transform: Theory and Applications.** New York: Springer, 1999.

[10] SPIEGEL, M.R. **Theory and Problems of Laplace Transforms.** Schaum's Outine Series. New York: McGraw-Hill, 1966.

[11] YEH, J. **Real analysis: Theory of Measure and Integration.** 2^a ed. Singarope: World Scientific, 2006.

[12] PACHECO, A.L.S. **Transformada de Laplace: algumas aplicações.** 2011. 84p. TCC. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.