UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ANA CRISTINA OLIVEIRA PEREIRA

A IRRACIONALIDADE DE π

CAMPINA GRANDE
2018

ANA CRISTINA OLIVEIRA PEREIRA

A IRRACIONALIDADE DE π

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção parcial do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE
2018

P436i Pereira, Ana Cristina Oliveira.
A Irracionalidade de [Pi] [manuscrito] / Ana Cristina Oliveira Pereira. - 2018.
39 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2018.

"Orientação : Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Irracionalidade. 2. Método de Hermite. 3. Série de Fourier. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

ANA CRISTINA OLIVEIRA PEREIRA

A IRRACIONALIDADE DE π

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba como requisito para a obtenção parcial do título de Licenciada em Matemática

Aprovado em 04/12/2018
Nota (10,0)

BANCA EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
ORIENTADOR

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
EXAMINADORA

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque
Dpto. Matemática-CCT/UEPB
EXAMINADOR

CAMPINA GRANDE
2018

Dedico esse trabalho a Deus, razão e centro da minha vida, e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuiram para que esse sonho se tornasse real.

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre ao meu lado, me guiando, me protegendo e me dando forças para seguir realizando os meus sonhos.

Aos meus pais, Marizete e David, por acreditarem em mim e sempre estarem ao meu lado em todos os momentos desse percurso.

A minha irmã, Ana Paula, pela compreensão e pelos conselhos.

Aos meus tios Severina, João Batista, Severino e Zenaide, por me darem hospedagem em suas casas.

Ao meu orientador e professor Davis Matias, pela dedicação, paciência, incentivo e oportunidade de aprender muito, não só sobre a Matemática, mas também aprender com a sua simplicidade e comprometimento. Jamais esquecerei as suas críticas construtivas, as quais oportunizaram o desenvolvimento do meu raciocínio matemático e investigativo.

A todos os meus professores do curso de Matemática, em especial, Emanuela Régia, Francisco Sibério e Fernando Luiz, pelo incentivo e pelos inúmeros ensinamentos.

Aos meus amigos Lidiane, André e Emanuel, por estarem sempre presentes quando mais precisei de ajuda.

Ao padre Gaspar Rafael, pelo apoio e pelas orações.

Aos meus amigos do curso de Matemática Isis, Arielson e Mauricio, pelo incentivo e pela parceria nos estudos.

A todos os meus amigos do curso, em especial, Gregório, Pedro, Deiverson, Anna Karollyna e Renan, pelas conversas e pela parceria nos estudos.

Aos meus amigos do ônibus, em especial, Aline, Maxciel, Eduardo e aos do “Grupo do πssis“, pelo companheirismo.

“O Senhor não olha tanto a grandeza das nossas obras. Olha mais o amor com que são feitas.“

(Santa Teresa de Ávila)

Resumo

O presente trabalho tem como tema principal a irracionalidade dos números, em especial do número π. O objetivo do trabalho é mostrar a importância do número π e alguns métodos de demonstração da sua irracionalidade. Também será apresentada um pouco da história do surgimento dos números irracionais e, consequentemente, a prova de que o conjunto dos números irracionais é não vazio. Além disso, serão exibidos alguns métodos de prova da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Por fim, apresentaremos uma forma de obter o número π por meio de uma série de Fourier.
Palavras-chave: Irracionalidade. Método de Hermite. Série de Fourier.

Abstract

The present work has as its main theme the irrationality of the numbers, especially the number π. The objective of the work is to show the importance of number π and some methods of demonstrating its irrationality. It will also be presented a little of the history of the emergence of irrational numbers and, consequently, the proof that the set of irrational numbers is not empty. In addition, some methods of proving the irrationality of the number $\sqrt{2}$ will be displayed. Finally, we will present a way to obtain the number π by means of a series of Fourier.
Keywords: Irrationality. Hermite Method. Fourier series.

Lista de ilustrações

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\overline{AB}$	medida do segmento AB
$\mathbb{Z}[x]$	anel dos polinômios sobre o anel $\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}[x]$	anel dos polinômios sobre o anel $\mathbb{Q}$
$\mathbb{C}[x]$	anel dos polinômios sobre o anel $\mathbb{C}$
$\mathbb{Z}[i]$	anel dos números da forma $z = a + bi$, $a,b \in \mathbb{Z}$
$D^k f$	k-ésima derivada da função f
$D^k f\|_{x=a}$	k-ésima derivada da função f no ponto a
F'	derivada da função F

Sumário

Introdução

Um dos números que mais despertou e desperta o interesse dos matemáticos é o número π. Esse número denota comumente a razão constante entre a medida do comprimento de uma circunferência qualquer e o seu diâmetro. Segundo Mendes (2006), a necessidade de encontrar o valor de π surgiu desde a Antiguidade, devido à impossibilidade de se resolver problemas que envolviam circunferências, como, por exemplo, saber o comprimento de uma roda de determinado diâmetro ou saber o quanto de água cabe em um copo de seção circular.

Um dos problemas matemáticos mais antigos e que provavelmente originou o número π era encontrar um quadrado cuja área se igualava a de um círculo dado, que ficou conhecido como o famoso problema da quadratura do círculo. Esse problema ultrapassou várias épocas, e continua ainda hoje despertando o interesse dos matemáticos. Para solucionar o problema, diversas tentativas e resultados foram encontrados até obter as conclusões que proporcionaram novas descobertas matemáticas. Uma das descobertas foi a relação existente entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro e, entre as áreas do círculo e do quadrado.

Considerando um quadrado de lado D e uma circunferência de raio R e comprimento C, as relações encontradas foram as seguintes:

$$\begin{aligned} C &= 2\pi R \\ D &= 2R \\ \frac{C}{D} &= \frac{2\pi R}{2R} = \pi \\ \frac{\text{área da circunfência}}{\text{área do quadrado}} &= \frac{\pi R^2}{D^2} = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ainda segundo Mendes (2006), no papiro de Rhind (1650 a.C.) está descrita uma tentativa de calcular o valor de π, onde é apontada a forma de encontrar um quadrado com a área igual à de um círculo, tomando o lado do quadrado igual à $\frac{8}{9}$ da medida do diâmetro da circunferência. Nessas condições, igualando a área do círculo com a do quadrado, tem-se:

$$\left(\frac{8D}{9}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} = 3,160493827,$$

um valor bastante próximo ao que conhecemos atualmente: $3,1415926\ldots$. Já os babilônios estimavam o valor 3 para o número π, provavelmente devido a descoberta de que o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência é igual ao seu raio e, inclusive na Bíblia, está implícito o valor de π igual a 3, no livro 1 dos Reis e no livro 2 das Crônicas, na parte que se refere a construção liderada pelo rei Salomão do templo de Deus.

Muitas foram as tentativas encontradas pelos matemáticos de várias épocas para encontrar o valor de π, porém, segundo Oliveira (2013), o primeiro a utilizar o símbolo π, com o mesmo significado que conhecemos hoje, foi o matemático inglês William Jones em 1706, e o símbolo foi adotado, em 1737, pelo matemático suíço Leonhard Euler. Já a irracionalidade do número π, segundo Figueiredo (2002), foi provada pela primeira vez, provavelmente, em 1761, por J.H. Lambert, o qual utilizou frações contínuas para atingir o resultado.

O problema da quadratura do círculo, por sua vez, só foi resolvido em 1822, por Lindemann, quando ele conseguiu provar a transcendência do número π e, consequentemente, a impossibilidade de se encontrar um quadrado de área igual à de uma circunferência dada (MARQUES, 2013, p.109). Segundo Marques (2013), a teoria dos números transcendentes teve início com Liouville, quando o mesmo conseguiu encontrar uma classe descrita no título de seu artigo como *trèsétendue*, uma classe de números transcendentes. Um número é dito transcendente quando não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros.

Tendo em vista o exposto, esse trabalho irá tratar sobre a irracionalidade do número π, mostrando um pouco da história do surgimento dos número irracionais e alguns métodos utilizados pelos matemáticos para provar a irracionalidade dos números, em especial dos números $\sqrt{2}$ e π. Além disso, por fim, mostraremos uma forma de obter o número π por meio de uma série, e com isso, exemplificar o fato de que esse número não é importante apenas para a Geometria, mas também para outros ramos da Matemática tais como: trigonometria; números complexos e; séries numéricas.

O trabalho foi divido em dois capítulos: No Capítulo 1 serão apresentados alguns métodos de demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e, com isso, concluimos que o conjunto dos números irracionais é não vazio e; no Capítulo 2, serão apresentados alguns métodos de demonstração da irracionalidade do número π.

1 Um número irracional: $\sqrt{2}$

Um número é dito *racional* quando pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$. Os números que não são racionais são chamados *irracionais*. Nesse capítulo será apresentada um pouco da história do surgimento dos números irracionais e algumas formas de demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Com isso, mostra-se que o conjunto dos números irracionais é não vazio.

1.1 Segmentos incomensuráveis e números irracionais

Nessa seção utilizaremos as ideias de Lima et al. (2006) para mostrar, a partir do conceito de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, como surgiram os números irracionais e, consequentemente, uma demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Por isso, a priori, definiremos o que são segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

Definição 1.1.1. *Dois segmentos AB e CD são ditos comensuráveis quando apresentam um segmento de reta w que cabe exatamente n vezes em AB e m vezes em CD. Os segmentos que não são comensuráveis são denominados incomensuráveis.*

A medida do segmento w, citado anteriormente, nem sempre é igual a um número natural e, esta descoberta causou um problema entre os antigos matemáticos gregos, que não consideravam a fração $\frac{m}{n}$ como um número, e sim como uma razão entre dois números, embora soubessem utilizar de forma racional a notação fracionária.

Exemplo 1.1. *Seja u o segmento-padrão, cuja medida é igual a 1, chamado segmento unitário. Se u e AB são segmentos comensuráveis, então existe um segmento w que cabe n vezes em u e m vezes em AB e w será uma medida comum de u e AB. Logo, $\overline{w} = \frac{1}{n}$ e $\overline{AB} = m\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.*

Outro problema dos matemáticos gregos era a convicção de que dois segmentos eram sempre comensuráveis, ou seja, não existiam segmentos incomensuráveis. Essa concepção só deixou de ser aceita muito tempo depois, quando alguém entre os discípulos de Pitágoras constatou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. A demonstração desse fato se deu da seguinte forma: Considerando um quadrado $ABCD$, se o lado AB e a diagonal AC desse quadrado são comensuráveis, então existe um segmento de reta w que cabe n vezes em AB e m vezes em AC. Sendo a medida do lado AB igual a 1 e tomando AB como unidade de comprimento, a medida da diagonal AC é igual a $\frac{m}{n}$, como justificado no exemplo 1.1. Logo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Porém $m^2 = 2n^2$ é um absurdo, pois decompondo m^2 em fatores primos o expoente do fator 2 é par enquanto que decompondo $2n^2$ o expoente do fator 2 é ímpar, o que contraria a propriedade de fatoração única, abaixo enunciada.

Teorema 1.1.1 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número natural maior que 1 pode ser escrito de forma única como produto de potências de primos.*

Uma demonstração do teorema anterior pode ser encontrada em (LIMA, 1976, p.32).

A prova da existência de segmentos incomensuráveis fez surgir a necessidade de ampliar o conceito de número para além dos números naturais e das frações e, dessa forma, tornar possível a atribuição de uma medida para qualquer segmento de reta dado. Assim surgiram os números irracionais, que representam as medidas dos segmentos de reta que são incomensuráveis com um dado segmento de reta tido como unidade de comprimento. Já as medidas dos segmentos de reta que são comensuráveis com a unidade são representadas por números racionais (naturais, inteiros e frações). A demonstração acima provou que a medida do segmento AC é incomensurável com a unidade de medida utilizada, logo a medida desse segmento é igual a um número irracional, a saber $\overline{AC} = \sqrt{2}$, ou seja, provamos a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

1.2 Princípio da Boa Ordenação

Um resultado muito importante para a Matemática é o chamado Princípio da Boa Ordenação, também conhecido como Princípio da Boa Ordem ou simplesmente PBO, abaixo enunciado:

Teorema 1.2.1 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento.*

O PBO é amplamente utilizado na Matemática como método de demonstração e, nesta seção, será aplicado para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, conforme a demonstração contida em (MARQUES, 2013, p.18).

Supondo por absurdo que $\sqrt{2}$ é um número racional, então o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}; n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$ é não vazio. Pelo PBO S tem um elemento mínimo, que será representado por b. Assim, $\exists a \in \mathbb{Z}$, tal que $b\sqrt{2} = a$, onde $b \leq n$, $\forall n \in S$. Daí

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1} = \frac{\frac{2b-a}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{2b-a}{a-b}.$$

E mais, sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$ logo,

$$1-1 < \sqrt{2}-1 < 2-1$$

consequentemente,

$$0 < \sqrt{2}-1 < 1$$

o implica em,

$$0 < \frac{a}{b} - 1 < 1$$

então,

$$0 < \frac{a-b}{b} < 1$$

portanto,

$$0 < a - b < b.$$

Logo, $a - b \in S$, pois

$$(a-b)\sqrt{2} = (a-b)\left(\frac{2b-a}{a-b}\right) = 2b - a \in \mathbb{Z},$$

e $a - b$ é menor que b, o que contraria o fato de b ser o menor elemento do conjunto S. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

1.3 O critério de Eisenstein

A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ mostrada nessa seção pode ser encontrada em (MARQUES, 2013, p.14) e utiliza o conceito de polinômio irredutível; por isso, vamos enunciá-lo a seguir.

Definição 1.3.1 (Polinômios redutíveis e polinômios irredutíveis)**.** *Um polinômio $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, isto é, um polinômio com coeficientes racionais, é dito redutível sobre $\mathbb{Q}$, ou sobre $\mathbb{Q}[x]$, ou simplesmeste redutível, quando $P(x) = R(x)S(x)$, com $R(x), S(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ou seja, quando $P(x)$ pode ser expresso como um produto de polinômios não constantes. Quando não é redutível o polinômio é chamado irredutível.*

Exemplo 1.2. *O polinômio $x + 3$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ enquanto que o polinômio $x^2 - 4$ é redutível, pois $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.*

Podemos afirmar que se um polinômio de grau maior do que ou igual a 2 é irredutível, então suas raízes não pertencem aos números racionais, como encontrado em (LIMA et al., 2006, p 162). Ora, seja $P(x)$ um polinômio irredutível. Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ e $P(\alpha) = 0$, então $P(x) = (x - \alpha)P_1(x)$, para algum $P_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$, o que contradiz a irredutibilidade de $P(x)$. Assim, para provar que $\sqrt{2}$, ou qualquer outro número, é irracional, basta encontrar um polinômio irredutível que tenha esse número como raiz. Porém, verificar que um polinômio com coeficientes racionais é redutível (ou não redutível) nem sempre é uma tarefa fácil. Por isso, será apresentado a seguir o chamado Critério de Eisenstein [1], que fornece uma condição suficiente para verificar se um polinômio com coeficientes inteiros é irredutível, e, segundo o *Lema de Gauss*[2], a irredutibilidade sobre $\mathbb{Z}$ é equivalente a irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}$.

[1] Para uma demonstração desse teorema indicamos (VIEIRA, 2013, p 441).
[2] Para uma demonstração desse resultado indicamos (VIEIRA, 2013, p 438).

Teorema 1.3.1 (Critério de Eisenstein). *Seja $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes pertencentes a $\mathbb{Z}$. Se existe um número primo p, tal que*

1. *p é divisor de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$;*
2. *p não é divisor de a_n;*
3. *p^2 não é divisor de a_0,*

então $P(x)$ é irredutível em $Q[x]$.

Observação 1.3.1. *Quando o coeficiente a_0 de um polinômio $P(x)$ é igual a ± 1 ou, igual a potência de um primo, o critério de Eisenstein, de acordo com (MARQUES, 2013, p 15), não pode ser usado de forma direta para provar a irredutibilidade desse polinômio. Para tal finalidade, é necessário e suficiente provar a irredutibilidade de $P(x+1)$ utilizando o critério de Eisenstein, pois, segue diretamente da definição, que $P(x)$ é irredutível se, e somente se, $P(x+1)$ é irredutível.*

Exemplo 1.3. *O polinômio $x+6$ é irredutível, pois o número 3, que é primo e divide $a_0 = 6$, não divide o coeficiente líder $a_1 = 1$ e $3^2 = 9$ não divide a_0. Portanto, pelo critério de Eisenstein, $x+6$ é irredutível.*

Logo, para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, precisamos apenas encontrar um polinômio que satisfaça as condições do critério de Eisenstein e que tenha como uma de suas raízes o número $\sqrt{2}$. Note que $\sqrt{2}$ é raiz do polinômio $x^2 - 2$, e, pelo critério de Eisenstein, esse polinômio é irredutível, pois, o número primo 2 divide $a_0 = -2$; 2 não divide $a_2 = 1$ e; $2^2 = 4$ não divide a_0. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

1.4 Frações contínuas e a irracionalidade de $\sqrt{2}$

Nessa seção mostraremos, por meio de frações contínuas, que o número $\sqrt{2}$ é irracional, seguindo uma demonstração contida em (MARQUES, 2013). Na demonstração utilizaremos o fato de que toda fração contínua simples e infinita tem valor igual a um número irracional. Para isso, vamos enunciar um método chamado algoritmo de Euclides e, em seguida, utilizando esse método, mostraremos o que é uma fração contínua.

O algoritmo de Euclides sobre $\mathbb{Z}$ é um importante método para determinar o máximo divisor comum entre dois números inteiros, uma vez que, determinar o $mdc(a,b)$ quando a e b são números inteiros com valores absolutos muito grandes não é uma tarefa fácil.

Como encontrado em Vieira (2013), o algoritmo de Euclides consiste no seguinte: Sendo a e b números inteiros, onde $a > b > 0$, pela divisão euclidiana,

$$a = b \cdot q_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b,$$

em que q_0 e r_0 são números inteiros. Então, $mdc(a,b) = mdc(b,r_0)$. Uma demonstração desse fato pode ser vista em (VIEIRA, 2013, p.100).

Daí,

- Se $r_0 = 0$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(b,0) = b$ e;
- Se $r_0 \neq 0$, então, dividindo b por r_0, obtemos

$$b = r_0 \cdot q_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r_0,$$

em que $r_1 \in \mathbb{Z}$.

Logo, $mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(r_0,r_1)$.

Agora, temos

- Se $r_1 = 0$, então $mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(r_0,r_1) = mdc(r_0,0) = r_0$ e;
- Se $r_1 \neq 0$, então, dividindo r_0 por r_1, obtemos

$$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1,$$

em que $r_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(r_0,r_1) = mdc(r_1,r_2)$.

Assim, continuando o processo de divisões acima, obteremos um último resto $r_n \neq 0$. Daí,

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_0) = mdc(r_0,r_1) = mdc(r_1,r_2) = \cdots = mdc(r_n,r_{n+1}) = mdc(r_n,0) = r_n.$$

Portanto, o último resto dessas sucessões de divisões é o $mdc(a,b)$ procurado, ou seja, $r_n = mdc(a,b)$. Esse método apresentado é o *algoritmo de Euclides*.

Agora iremos construir a fração contínua de um número racional. Seja $\frac{x_0}{x_1}$ esse número racional, em que $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$; $x_1 \neq 0$ e; $mdc(x_0,x_1) = 1$. Utilizando o algoritmo de Euclides obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 a_0 + x_2, & 0 < x_2 < x_1 \\ x_1 &= x_2 a_1 + x_3, & 0 < x_3 < x_2 \\ x_2 &= x_3 a_2 + x_4, & 0 < x_4 < x_3 \\ &\vdots & \\ x_{j-1} &= x_j a_{j-1} + x_{j+1}, & 0 < x_{j+1} < x_j \\ x_j &= x_{j+1} a_j. & \end{aligned}$$

Fazendo $\zeta_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$, donde $0 \leq i \leq j$, obtemos:

$$\zeta_i = \frac{x_{i+1}a_i + x_{i+2}}{x_{i+1}} \Rightarrow \zeta_i = a_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}}, \qquad 0 < i < j-1$$

e

$$x_j = x_{j+1}a_j \Rightarrow \frac{x_j}{x_{j+1}} = a_j \Rightarrow \zeta_j = a_j.$$

Para $i = 0$ e $i = 1$,

$$\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{\zeta_1} \tag{1.1}$$

e

$$\zeta_1 = a_1 + \frac{1}{\zeta_2}. \tag{1.2}$$

Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos:

$$\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\zeta_2}}.$$

Em seguida, substituindo $\zeta_2 = a_2 + \frac{1}{\zeta_3}$ e continuando o processo de substituições até ζ_j, obtemos:

$$\frac{x_0}{x_1} = \zeta_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_j}}}. \tag{1.3}$$

Essa é a expansão em *fração contínua* de $\frac{x_0}{x_1}$.

De modo geral, qualquer número real pode ser escrito como uma fração contínua e utilizaremos a seguinte notação para a fração contínua em (1.3):

$$\left\langle x_0; x_1, \ldots, x_j \right\rangle = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{x_j}}} = x_0 + \frac{1}{\left\langle x_1; x_2 \ldots, x_j \right\rangle}. \tag{1.4}$$

Quando todos os x_i são inteiros a fração contínua é chamada de *simples*.

A construção acima prova que todo número racional pode ser expresso por meio de uma fração contínua simples e finita. E a recíproca desse fato também é verdadeira, ou seja, toda fração contínua simples e finita tem valor igual a um número racional. Ora, seja $\left\langle a_0; a_1, \ldots, a_j \right\rangle$ uma fração contínua simples e finita. Para $j = 0$, temos $\langle a_0 \rangle = a_0 \in \mathbb{Q}$. Supondo que a afirmação é válida para $j = k$, ou seja,

$$\langle a_1; a_2 \ldots, a_k \rangle \in \mathbb{Q},$$

provaremos que a sentença também é verídica para $j = k + 1$. Note que,

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_k \rangle = a_0 + \frac{1}{\langle a_1; \ldots, a_k \rangle} \in \mathbb{Q},$$

pois $a_0 \in \mathbb{Z}$ e, por hipótese, $\langle a_1; \ldots, a_k \rangle \in \mathbb{Q}$.

Portanto, por Indução Matemática, concluímos que, de fato, uma fração contínua simples e finita é igual a um número racional.

Agora, demonstraremos que uma fração contínua simples e infinita tem valor irracional. Para isso, vamos definir duas sequências de inteiros $(h_n)_n$ e $(k_n)_n$ do seguinte modo:

$$h_{-2} = 0, h_{-1} = 1, h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}, \quad \forall i \geq 0$$

$$k_{-2} = 1, k_{-1} = 0, k_i = a_i k_{i-1} + k_{i-2}, \quad \forall i \geq 0.$$

Logo, $1 = k_0 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$.

A seguir mostraremos algumas propriedades acerca das sequências $(h_n)_n$ e $(k_n)_n$ definidas anteriormente.

Proposição 1.4.1. *Para qualquer número real* $x > 0$*, temos*

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, x \rangle = \frac{x h_{n-1} + h_{n-2}}{x k_{n-1} + k_{n-2}}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre n:
Note que, para $n = 0$ a sentença é verdadeira, pois

$$\begin{aligned} \langle a_0 \rangle &= a_0 \\ &= \frac{a_0 \cdot 1 + 0}{a_0 \cdot 0 + 1} \\ &= \frac{a_0 h_{-1} + h_{-2}}{a_0 k_{-1} + k_{-2}}. \end{aligned}$$

Suponha que a sentença é verdadeira para $n = m$, ou seja,

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, x \rangle = \frac{x h_{m-1} + h_{m-2}}{x k_{m-1} + k_{m-2}},$$

e devemos provar que a sentença também é verdadeira para $n = m + 1$. Perceba que

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, x \rangle = \left\langle a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{x} \right\rangle,$$

Daí, por hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \left\langle a_0; a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{x} \right\rangle &= \frac{\left(a_m + \frac{1}{x}\right) h_{m-1} + h_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{x}\right) k_{m-1} + k_{m-2}} \\ &= \frac{a_m h_{m-1} + \frac{1}{x} h_{m-1} + h_{m-2}}{a_m k_{m-1} + \frac{1}{x} k_{m-1} + k_{m-2}} \\ &= \frac{x a_m h_{m-1} + h_{m-1} + x h_{m-2}}{x a_m k_{m-1} + k_{m-1} + x k_{m-1}} \\ &= \frac{x\left(a_m h_{m-1} + h_{m-2}\right) + h_{m-1}}{x\left(a_m k_{m-1} + k_{m-1}\right) + k_{m-1}} \\ &= \frac{x h_m + h_{m-1}}{x k_m + k_{m-1}}. \end{aligned}$$

Logo, a sentença é válida para $n = m + 1$. Portanto é válida para todo $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. □

Proposição 1.4.2. *Se* $r_n := \langle a_0; a_1, \ldots, a_n, \rangle$ *para todo* $n \geq 0$*, então* $r_n = \frac{h_n}{k_n}$.

Demonstração. Utilizando a proposição anterior temos, para $x = a_n$:

$$r_n = \langle a_0; a_1, \ldots, a_n \rangle = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{h_n}{k_n}.$$

□

Proposição 1.4.3. *As equações*

$$h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1} \quad e \quad r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$$

são válidas para $i \geq 1$. Se $i \geq 2$ então são válidas as seguintes equações

$$h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i a_i \text{ e } r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}}.$$

A demonstração da proposição anterior será omitida, mas pode ser feita por indução sobre i.

Teorema 1.1. *A sequência $(r_n)_n$, definida na proposição 1.4.2, satisfaz*

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \cdots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

E mais, $\lim_{n\to\infty} r_n$ existe e

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \cdots < \lim_{n\to\infty} r_n < \cdots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

A demonstração do teorema anterior encontra-se em (MARQUES, 2013, p 12).

Por fim, temos a última definição que precisamos:

Definição 1.4.1. *A sequência infinita de inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ todos positivos, exceto possivelmente a_0, determina uma fração contínua simples e infinita $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots \rangle$, cujo valor é definido como*

$$\lim_{n\to\infty} \langle a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Agora, de posse de todas as informações apresentadas, podemos mostrar que uma fração contínua simples e infinita tem valor irracional:

Provaremos por absurdo. Seja $\theta = \langle a_0; a_1, a_2, \ldots \rangle$. Logo, pela Definição 1.4.1,

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \langle a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Assim, pelo Teorema 1.1, $r_{2n} < \theta < r_{2n+1}$. Daí

$$r_{2n} - r_{2n} < \theta - r_{2n} < r_{2n+1} - r_{2n}$$

o que implica em

$$0 < \theta - r_{2n} < r_{2n+1} - r_{2n}$$

logo,

$$0 < |\theta - r_{2n}| < |r_{2n+1} - r_{2n}|. \tag{1.5}$$

Utilizando a Proposição 1.4.3 temos que

$$r_{2n+1} - r_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{k_{2n} k_{2n+1}}.$$

E substituindo em (1.5), obtemos

$$0 < |\theta - r_{2n}| < \left| \frac{(-1)^{2n}}{k_{2n}k_{2n+1}} \right|$$

logo,

$$0 < |\theta - r_{2n}| < \frac{1}{k_{2n}k_{2n+1}}.$$

Agora, multiplicando a última desigualdade por k_{2n} e supondo por absurdo que $\theta = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$, temos

$$0 < k_{2n} \left| \frac{a}{b} - r_{2n} \right| < k_{2n} \frac{1}{k_{2n}k_{2n+1}}$$

logo,

$$0 < |k_{2n}a - bk_{2n}r_{2n}| < b\frac{1}{k_{2n+1}}$$

consequentemente,

$$0 < |k_{2n}a - bh_{2n}| < \frac{b}{k_{2n+1}}.$$

E Note que, se $n \to \infty$, então $k_{2n+1} \to \infty$, logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b < k_{2n_0+1}$. Daí,

$$\frac{b}{k_{2n_0+1}} < 1.$$

Logo,

$$0 < |k_{2n_0}a - h_{2n_0}b| < 1.$$

O que é um absurdo, pois não existe um número natural entre 0 e 1. Portanto, θ é irracional.

Por fim, para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, só precisamos encontrar a fração contínua simples de $\sqrt{2}$ e mostrar que ela é infinita. Para isso, note que, $x = 1 + \sqrt{2}$ é solução da equação $x^2 = 2x + 1$. Daí, $\sqrt{2} = x - 1$ e

$$x - 1 = \frac{x^2}{x} - 1 = \frac{2x+1}{x} - 1 = 2 + \frac{1}{x} - 1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \langle 1; 2, 2, \ldots \rangle.$$

Logo, $\sqrt{2} = \langle 1; 2, 2, \ldots \rangle$. Portanto $\sqrt{2}$ é um número irracional, haja vista que esse número é igual a uma fração contínua simples e infinita.

2 Irracionalidade de π

Nesse capítulo mostraremos duas demostrações sobre a irracionalidade do número π e, além disso, mostraremos uma forma diferente de expressar esse número, utilizando a chamada série de Fourier.

2.1 O método de Hermite

A demonstração da irracionalidade do número π, que será apresentada a seguir, utiliza as ideias de I. Niven,[1] o qual utilizou o metódo de Hermite[2] para desenvolver a demonstração. A demonstração está contida em (FIGUEIREDO, 2002).

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \tag{2.1}$$

para algum n pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos.

Para a demonstração do resultado principal serão utilizados os seguintes lemas:

Lema 2.1.1. *$D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Demonstração. Perceba que a função f, definida em (2.1), pode ser expressa na forma

$$f(x) = g(x)h(x),$$

onde $g(x) = \frac{x^n}{n!}$ e $h(x) = (1-x)^n$.

A regra do produto para diferenciação da função f, nos conduz à fórmula de Leibniz:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j g \cdot D^{k-j} h, \tag{2.2}$$

onde $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$.

Daí, aplicando (2.2) à função f temos

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} D^j x^n \cdot D^{k-j}(1-x)^n.$$

Agora, observe

$$D^j x^n = n \cdot (n-1) \cdots [n-(j-1)] x^{n-j}.$$

Logo,

[1] O matemático Ivan Morton Niven provou que o número π é irracional em seu artigo “A simple proof that π is irrational“ publicado no Bulletin of the American Mathematical Sociaty.

[2] Hermite é responsável por descobrir um método mais simples para provar irracionalidade. Esse método foi utilizado e aperfeiçoado por vários matemáticos e, nesse capítulo, apresentamos duas demonstrações da irracionalidade de π, desenvolvidadas por dois matemáticos diferentes, as quais utilizam o método de Hermite.

- Se $j > n$, $D^j x^n = 0$;
- Se $j < n$, $D^j x^n = n(n-1)\cdots[n-(j-1)]x^{n-j}$;
- Se $j = n$,

$$\begin{aligned} D^j x^n &= n(n-1)\cdots[n-(n-1)]x^{n-n} \\ &= n(n-1)\cdots(n-n+1)\cdot 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$

Daí,

$$D^j x^n|_{x=0} = \begin{cases} 0, & se \quad j < n \\ n!, & se \quad j = n \\ 0, & se \quad j > n \end{cases}.$$

Agora, observe que

$$D^j(1-x)^n = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(j-1)](1-x)^{n-j}(-1)^j.$$

Logo,

$$D^j(1-x)^n|_{x=0} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots[n-(j-1)](-1)^j, & se \quad j < n \\ n!(-1)^n, & se \quad j = n \\ 0, & se \quad j > n \end{cases}.$$

Consequentemente, $D^j(1-x)^n\,|_{x=0} \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{N}$.
Daí, pela definição do Binômio de Newton, $0 \leq j \leq k$, temos

1. se $k < n$ então $j < n$ e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} D^j x^n\,|_{x=0} \cdot D^{k-j}(1-x)^n\,|_{x=0} = 0;$$

2. se $k \geq n$ então

$$\begin{aligned} D^k f(0) &= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} D^j x^n|_{x=0} D^{k-j}(1-x)^n|_{x=0} \\ &= \frac{1}{n!}\binom{k}{n} D^n x^n\,|_{x=0}\, D^{k-n}(1-x)^n\,|_{x=0} \\ &= \frac{1}{n!}\binom{k}{n} n! D^{k-n}(1-x)^n\,|_{x=0} \\ &= \binom{k}{n} D^{k-n}(1-x)^n\,|_{x=0}. \end{aligned}$$

Assim, como $\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$ e $D^{k-n}(1-x)^n|_{x=0} \in \mathbb{Z}$, $\forall k,n \in \mathbb{N}$, segue que

$$D^k f(0) = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} D^{k-n}(1-x)^n \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $D^k f(0) \in \mathbb{Z}$, para todo $k = 0,1,2,\ldots$. □

Lema 2.1.2. *$D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0,1,2,\ldots$.*

Demonstração. Note que,

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n[1-(1-x)]^n}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x).$$

Logo,

$$D^k f(x) = D^k f(1-x).$$

Daí, para $x = 0$,

$$D^k f(0) = D^k f(1-0) \Rightarrow D^k f(0) = D^k f(1),$$

e já provamos, no lema anterior, que $D^k f(0)$ é inteiro. Portanto, $D^k f(1)$ é inteiro para todo $k = 0,1,2,\ldots$. □

Lema 2.1.3. *Dado $m \in \mathbb{Z}$, não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m < n < m+1$.*

Demonstração. Note que,

$$m < n < m+1 \Leftrightarrow m-m < n-m < m+1-m \Leftrightarrow 0 < n-m < 1$$

. Assim, para demonstrar o teorema, devemos mostrar que não existe número inteiro positivo (natural) entre 0 e 1. Vamos mostrar esse fato por absurdo. Suponha que existe um número natural entre 0 e 1. Logo, o conjunto $A := \{n \in \mathbb{N} : 0 < n < 1\}$ é não vazio. Portanto, pelo Princípio da Boa Ordenação, $\exists n_0 \in A$ tal que n_0 é o menor elemento de A. Assim $0 < n_0 < 1$, e, multiplicando essa desigualdade por n_0, obtemos

$$0 < n_0^2 < n_0 < 1,$$

logo $n_0^2 \in A$ e $n_0^2 < n_0$, o que contraria o fato de n_0 ser o menor elemento de A. □

O lema anterior está contido em (MARQUES, 2013, p 8). Agora, suponha que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, em que $p,q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p,q) = 1$. Se conseguirmos provar que essa suposição é um absurdo, ou seja, se provarmos que π^2 não é racional, então conseguiremos provar que o número π é irracional, pois o quadrado de um racional também é racional.

Para isso, defina a seguinte função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = q^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\right]. \tag{2.3}$$

Substituindo $\pi^2 = \frac{p}{q}$ em (2.3), temos

$$\begin{aligned}
F(x) &= q^n\left[\left(\frac{p}{q}\right)^n f(x) - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\right] \\
&= q^n\left[\frac{p^n}{q^n} f(x) - \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\right] \\
&= p^n f(x) - qp^{n-1} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n q^n D^{2n} f(x). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Logo,

$$F(0) = p^n f(0) - qp^{n-1} D^2 f(0) + \cdots + (-1)^n q^n D^{2n} f(0)$$

e

$$F(1) = p^n f(1) - qp^{n-1} D^2 f(1) + \cdots + (-1)^n q^n D^{2n} f(1).$$

Daí, como consequência dos lemas 2.1.1 e 2.1.2, $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros.

A seguir, representando a derivada de F por F', observe que

$$\begin{aligned}
&(F'(x)\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x))' \\
= \; & F''(x)\mathrm{sen}(\pi x) + F'(x)\pi\cos(\pi x) - (\pi F'(x)\cos(\pi x) - \pi F(x)\pi\mathrm{sen}(\pi x)) \\
= \; & F''(x)\mathrm{sen}(\pi x) + F'(x)\pi\cos(\pi x) - \pi F'(x)\cos(\pi x) + \pi^2 F(x)\mathrm{sen}(\pi x) \\
= \; & F''(x)\mathrm{sen}(\pi x) + \pi^2 F(x)\mathrm{sen}(\pi x) \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Calculando $F''(x)$, temos

$$\begin{aligned}
F''(x) &= (F'(x))' \\
&= [q^n(\pi^{2n} D^1 f(x) - \pi^{2n-2} D^3 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n+1} f(x))]' \\
&= q^n[\pi^{2n} D^2 f(x) - \pi^{2n-2} D^4 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n+2} f(x)].
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (2.3) e o valor de $F''(x)$ em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
(F'(x)\mathrm{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x))' &= q^n[\pi^{2n} D^2 f(x) - \pi^{2n-2} D^4 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n+2} f(x)]\mathrm{sen}(\pi x) \\
&+ \pi^2\{q^n[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)]\}\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= [q^n\pi^{2n} D^2 f(x) - q^n\pi^{2n-2} D^4 f(x) + \cdots + (-1)^n q^n D^{2n+2} f(x)]\mathrm{sen}(\pi x) \\
&+ [q^n\pi^{2n+2} f(x) - q^n\pi^{2n} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n q^n \pi^2 D^{2n} f(x)]\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= q^n\pi^{2n+2} f(x)\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= q^n\pi^2\pi^{2n} f(x)\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= q^n\pi^2\frac{p^n}{q^n} f(x)\mathrm{sen}(\pi x) \\
&= p^n\pi^2 f(x)\mathrm{sen}(\pi x) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

No que segue, será utilizado o Teorema Fundamental do Cálculo, que pode ser encontrado, por exemplo, em (LIMA, 1976).

Logo, para a função $G(x) = F'(x)\text{sen}(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)$, obtemos por (2.6) que

$$\int_0^1 G'(x)dx = G(1) - G(0)$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} p^n\pi^2 \int_0^1 f(x)\text{sen}(\pi x)dx &= F'(1)\text{sen}(\pi\cdot 1) - \pi F(1)\cos(\pi\cdot 1) - F'(0)\text{sen}(\pi\cdot 0) + \pi F(0)\cos(\pi\cdot 0) \\ &= \pi F(1) + \pi F(0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen}(\pi x)dx = F(1) + F(0).$$

Como foi provado anteriormente, $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros. Logo, o lado direito da igualdade em (2.7) é um número inteiro. Daí, se provarmos que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)\text{sen}(\pi x)dx < 1$$

teremos o absurdo, de acordo com o lema 2.1.3.

Agora, note que, para $0 < x < 1$, temos $1 - x > 0$. Logo,

$$0^n < x^n < 1^n$$

consequentemente,

$$0 < x^n(1-x)^n < (1-x)^n$$

o que implica que,

$$0 < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{(1-x)^n}{n!} < \frac{1^n}{n!}$$

portanto,

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \tag{2.7}$$

Utilizando (2.7) em (2.7) temos

$$\begin{aligned} 0 &< \pi p^n \int_0^1 f(x)sen(\pi x)dx \\ &< \pi p^n \int_0^1 \frac{1}{n!}\text{sen}(\pi x)dx \\ &= \pi\frac{p^n}{n!}\int_0^1 \text{sen}(\pi x)dx \\ &= \pi\frac{p^n}{n!}\left(-\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{\cos(0)}{\pi}\right) \\ &= \frac{p^n}{n!} + \frac{p^n}{n!} \\ &= 2\frac{p^n}{n!}. \end{aligned}$$

A seguir, como p é fixo e um número positivo, considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n_0}{p} > 2$. Daí, tomando $x = \frac{n_0!}{p_0^n}$, teremos, para todo $n > n_0$,

$$\frac{n!}{p^n} = x \cdot \frac{n_0+1}{p} \cdot \frac{n_0+2}{p} \cdots \frac{n}{p} > x \cdot (2)^{n-n_0}.$$

Portanto, para todo $x \cdot (2)^{n-n_0} > 0$ dado, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$\frac{n!}{p^n} > x \cdot (2)^{n-n_0}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{p^n} = +\infty$$

ou melhor,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0.$$

Daí, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$, o que é um absurdo. Portanto, o número π é irracional.

2.2 Uma outra forma de provar a irracionalidade de π

A seguir mostraremos uma forma de demonstração da irracionalidade do número π, a qual foi desenvolvida por Yu. V. Nesterenko utilizando o método devido à Hermite. Nessa demonstração utilizaremos algumas definições associadas aos números complexos e outra relacionada a polinômios. Por causa disso, a priori, enunciaremos essas definições, necessárias para o bom entendimento da demonstração e que podem ser encontradas, por exemplo, em (MARQUES, 2013) e em (ZANI, 2001).

Definição 2.2.1. *Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Definimos o disco aberto D de centro z_0 e raio r como sendo o conjunto:*

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}.$$

Definição 2.2.2. *Seja $z_0 \in X$, em que X é subconjunto de $\mathbb{C}$. Se existe $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset X$, então z_0 é ponto interior de X.*

Definição 2.2.3. *Um conjunto Ω é dito aberto quando todos os $\omega \in \Omega$ são interiores a Ω, em símbolos, $\Omega = int\Omega$.*

Definição 2.2.4. *Um conjunto é dito conexo quando não pode ser expresso como união de dois conjuntos A e B, abertos e não vazios, tais que $A \cap B = \emptyset$.*

Exemplo 2.1. *O disco*

$$D(z, 1) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$$

é aberto e conexo.

Definição 2.2.5. *Considere uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, em que $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto. Dizemos que f é derivável em um ponto $z_0 \in \Omega$ se existir*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

ou, equivalentemente, se existir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Exemplo 2.2. *Note que, a funçãof $: \Omega \to \mathbb{C}$, tal que $f(z) = az$, onde $a \in \mathbb{C}$, é derivável para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, pois*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{az-az_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{a(z-z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} a = a.$$

Definição 2.2.6. *Seja Ω um conjunto aberto. Uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é dita analítica no ponto $z_0 \in \Omega$ se é derivável em todos os pontos de um disco aberto de centro em z_0. Se f é analítica em todos os pontos de um conjunto aberto Ω, então é anatítica em Ω.*

Exemplo 2.3. *Uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita polinomial se existem números $a_0, a_1, \dots, a_n$ tais que*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. As funções polinomiais são analíticas, pois são deriváveis em todo ponto $z \in \mathbb{C}$.

Observação 2.2.1. *Se uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é analítica em um ponto $z_0 \in \Omega$, então existe $r > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall |z-z_0| < r, \tag{2.8}$$

onde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ é a sequência formada pelos coeficientes da série.

A série em (2.8) é denominada a expansão de Taylor de f em torno de z_0.

Exemplo 2.4. *Seja Ω um conjunto aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$, em que $z \in \Omega$. Vamos construir a expansão de Taylor de f em torno da origem. Para isso, note que*

$$f^0(z) = f^1(z) = \cdots = f^n(z) = \cdots = e^z,$$

isto é, $f^{(n)}(z) = e^z, \forall n = 0,1,2,\dots$.

Logo,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0 z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Definição 2.2.7. *Seja Ω um conjunto aberto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica numa vizinhança de um ponto $z_0 \in \Omega$, se z_0 é uma raiz de f tal que*

$$f'(z_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0, \qquad (n \geq 1),$$

diremos que f tem em z_0 uma raiz de multiplicidade n.

Definição 2.2.8. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica em um conjunto aberto e conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, com $0 \in \Omega$. Dizemos que $f(z)$ é bem aproximada pela função racional $\frac{A(z)}{B(z)}$, onde A,B são polinômios de grau n, se $B(z)f(z) - A(z)$ tem uma raiz de multiplicidade $2n+1$ na origem.*

Agora, sabendo de todas essas definições, provaremos que o número π é irracional, seguindo as ideias de Marques (2013).

Inicialmente, devemos construir uma função analítica que seja bem aproximada por uma função racional $\frac{A(z)}{B(z)}$. Para isso, utilizaremos o operador diferencial $\delta(f) = zD(f)$, onde $D(f) = \frac{d(f)}{dz}$ é definido da seguinte forma:

$$D^2(f) = (D \circ D)(f) \text{ e } D^m(f) = (D^{m-1} \circ D)(f).$$

Após isso, apresentaremos alguns fatos relacionados ao operador diferencial definido anteriormente e, paralelamente, será mostrado que o primeiro fato implica no segundo fato, e que o segundo fato implica no terceiro fato:

(F1) Para $k \geq 0$ e $f(z) = z^k$, $\delta(z^k) = kz^k$, pois

$$\delta(z^k) = zD(z^k) = zkz^{k-1} = kz^k;$$

(F2) Para todo k e m não negativos, $\delta^m(z^k) = k^m z^k$, pois

$$\begin{aligned}
\delta^m z^k &= \delta^{m-1}[\delta(z^k)] = \delta^{m-1}(kz^k) \\
&= \delta^{m-2}[\delta(kz^k)] = \delta^{m-2}(k^2 z^k) \\
&= \cdots = \delta^{m-m}(k^m z^k) = \delta^0(k^m z^k) \\
&= k^m z^k;
\end{aligned}$$

(F3) Se $T(z) \in \mathbb{C}[z]$, então $T(\delta)z^k = T(k)z^k$, pois, se $T(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, onde $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
T(\delta(z^k)) &= a_n[\delta(z^k)]^n + \cdots + a_1[\delta(z^k)] + a_0 z^k \\
&= a_n[\delta^n(z^k)] + \cdots + a_1[\delta(z^k)] + a_0 z^k \\
&= a_n[k^n z^k] + \cdots + a_1[kz^k] + a_0 z^k \\
&= (a_n k^n + \cdots + a_1 k + a_0) z^k \\
&= T(k) z^k.
\end{aligned}$$

Agora, seja

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

a expansão de Taylor de uma função analítica f em torno da origem. Assim, temos

$$T(\delta f(z)) = T\left(\delta\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\right).$$

Daí, como a função f é derivável, então podemos utilizar a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. *Sejam $D \subset C$ um aberto, $z_0 \in D$ e f, $g : D \to C$. Se f e g são deriváveis em z_0 então*

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0), \text{onde} \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Uma demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (ZANI, 2001).

Logo, utilizando **(F3)**, temos

$$T(\delta f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(\delta(z^k)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(k) z^k.$$

Para atingir o nosso objetivo, tomemos $T_n(k) = (k-n-1)\cdots(k-2n)$ e $f(z) = e^z$. Daí, se $k \in \{n+1,\ldots,2n\}$, $T_n(k) = 0$, pois $n+1,\ldots,2n$ são as raízes do polinômio $T_n(k)$, e, como $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ é a expansão de Taylor de e^z em torno da origem, então

$$\begin{aligned}
T_n(\delta(e^z)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_n(k)}{k!} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n(k)}{k!} z^k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{T_n(k)}{k!} z^k}_{0} + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{T_n(k)}{k!} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n(k)}{k!} z^k + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{T_n(k)}{k!} z^k \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

A seguir, note que

- Se $k \leq n$ então

$$\begin{aligned}
T_n(k) &= (k-n-1)\cdots(k-2n) \\
&= (-1)(n+1-k)(-1)(n+2-k)\cdots(-1)(n+n-k) \\
&= (-1)^n[(n+1-k)(n+2-k)\cdots(n+n-k)] \\
&= (-1)^n(2n-k)\cdots(n+2-k)(n+1-k) \\
&= (-1)^n \frac{(2n-k)\cdots(n+2-k)(n+1-k)(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= (-1)^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!};
\end{aligned}$$

- Se $k \geq 2n+1$, então

$$\begin{aligned}
T_n(k) &= (k-n-1)\cdots(k-2n) \\
&= \frac{(k-n-1)\cdots(k-2n)(k-2n-1)!}{(k-2n-1)!} \\
&= \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!}
\end{aligned}$$

Daí, substituindo em (2.9), obtemos

$$T_n(\delta(e^z)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} z^k + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)k!} z^k.$$

Agora, como $\delta(e^z) = ze^z$, segue, por **(F3)**, que

$$T_n(\delta)e^z = T_n(z)e^z = B_n(z)e^z,$$

em que $T_n(z) = (z-n-1)\cdots(z-2n) = B_n(z)$. Logo, $B_n(z)$ é um polinômio de grau n com coeficientes inteiros.

Em assim sendo, definindo

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!}z^k \quad \text{e} \quad R_n(z) = \sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)k!}z^k \tag{2.10}$$

obtemos:

$$B_n(z)e^z = A_n(z) + R_n(z). \tag{2.11}$$

Logo, $A_n(z)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, pois $(-1)^n\frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} \in \mathbb{Z}$ e, por conseguinte, $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$ é uma função racional. E mais, $R_n(z)$ tem um zero de multiplicidade $2n+1$ na origem pois, fazendo $k = l+2n+1$, temos:

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)k!}z^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+n)!}{l!(l+2n+1)!}z^{l+2n+1} \\ &= z^{2n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+n)!}{(l+2n+1)!}\frac{z^l}{l!}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Assim, por 2.12:

$$R_n'(0) = 0, R_n''(0) = 0, \ldots, R_n^{2n+1}(0) \neq 0,$$

logo $R_n(z)$, pela definição (2.2.7), tem multiplicidade $2n+1$ na origem.

Daí, pela definição (2.2.8), e^z é bem aproximada pela função racional $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$, pois, por (2.11)

$$B_n(z)e^z - A_n(z) = R_n(z). \tag{2.13}$$

Para terminar essa etapa da demonstração vamos mostrar um resultado importante:

Lema 2.2.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, então*

$$|R_n(z)| \leq \frac{|z|^{2n+1}}{(n+1)!}e^{|z|},$$

em que R_n é definido em (2.10).

Demonstração. Por (2.12), temos que

$$|R_n(z)| = \left| z^{2n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+n)!}{(l+2n+1)!}\frac{z^l}{l!}\right|.$$

E note que

$$\begin{aligned}
\frac{(l+2n+1)!}{(l+n)!} &= \frac{(l+2n+1)(l+2n)\cdots[l+2n-(n-1)](l+2n-n)!}{(l+n)!}\\
&= (l+2n+1)(l+2n)!\cdots(l+n+1)!\\
&\geq (n+1)!.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{(l+n)!}{(l+2n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!},$$

consequentemente,

$$\left| z^{2n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+n!)}{(l+2n+1)!}\frac{z^l}{l!}\right| \leq \left| z^{2n+1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\frac{z^l}{l!}\right|$$

o que implica que

$$|R_n(z)| \leq \left|\frac{z^{2n+1}}{(n+1)!}\right| \left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}\right|$$

portanto,

$$|R_n(z)| \leq \frac{|z|^{2n+1}}{(n+1)!}e^{|z|}.$$

□

Definição 2.2.9. *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente se* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente.*

Pelo Lema 2.2.1, $R_n(z)$ é uma série absolutamente convergente.

Agora, após atingir o nosso objetivo inicial, vamos para a segunda e última etapa da demonstração, na qual iremos provar por absurdo que o número π é irracional.

Suponha que $\pi = \frac{a}{b}$ é um número racional. Então,

$$b\pi = a \Rightarrow ib\pi = ia.$$

Pela Identidade de Euler: $e^{i\pi} = -1$. Logo, substituindo na igualdade anterior o valor de π, obtemos:

$$e^{i\frac{a}{b}} = -1 \Rightarrow e^{ia} = (-1)^b. \tag{2.14}$$

Daí, tomando o número complexo $z = ia$ e utilizando (2.14) em (2.13), obtemos

$$B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = R_n(ia).$$

Por (2.13), e omitindo, por simplicidade, o argumento z, temos

$$R_n = B_n e^z - A_n \Rightarrow -B_{n+1}R_n = -B_{n+1}B_n e^z + B_{n+1}A_n$$

e

$$R_{n+1} = B_{n+1}e^z - A_{n+1} \Rightarrow R_{n+1}B_n = B_{n+1}e^z B_n - A_{n+1}B_n.$$

Somando os membros das expressões obtidas anteriormente, temos

$$-R_nB_{n+1} + R_{n+1}B_n = \Delta_n(z) = B_{n+1}A_n - B_nA_{n+1}. \tag{2.15}$$

Como A_n tem grau n e coeficiente líder $(-1)^n$, e B_n tem coeficiente líder igual a 1 e grau n, pois $B_n(z) = (z-n-1)\dots(z-2n)$, segue que

- B_{n+1} tem grau $n+1$ e coeficiente líder igual a 1;
- A_{n+1} tem grau $n+1$ e coeficiente líder igual a $(-1)^{n+1}$.

Logo, como $R_n(z)$, em 2.12, pode ser escrito da forma:

$$R_n(z) = z^{2n+1}g_n(z),$$

com $g_n(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+n)!}{(l+2n+1)!}\frac{z^l}{l!}$, então, pelo lado direito da igualdade em (2.15), temos que $\Delta_n(z)$ tem grau $2n+1$, com coeficiente líder $2(-1)^n$, e

$$\Delta_n(z) = z^{2n+1}(-g_nB_{n+1} + z^2g_{n+1}B_n). \tag{2.16}$$

Daí, como o grau de $\Delta_n(z)$ é igual $2n+1$, temos que $-g_nB_{n+1} + z^2g_{n+1}B_n$ é constante e consequentemente é o coeficiente do termo em z^{2n+1}. Logo,

$$\Delta_n(z) = 2(-1)^n z^{2n+1}.$$

Assim, se $z \neq 0$, então, pelo lado esquerdo de (2.15), temos que $R_n(z) \neq 0$ ou $R_{n+1} \neq 0$. Logo, como $ia \neq 0$ e utilizando o lema 2.2.1 temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < |R_{n_0}(ia)|^2 < 1,$$

ou melhor,

$$0 < \left|B_{n_0}(ia)(-1)^b - A_n(ia)\right|^2 < 1,$$

o que é um absurdo, pois $B_{n_0}(ia)(-1)^b - A_n(ia) \in \mathbb{Z}[i]$; consequentemente seu módulo é igual a um número inteiro; e, como sabemos, não existe número inteiro menor que 1 e maior que 0. Portanto, o número π é irracional.

2.3 O número π e a série de Fourier

Nessa seção mostraremos uma forma de expressar o número π por meio de uma série númerica. Como pode ser encontrado em Figueiredo (1977, p. 22), é possível obter uma expressão em série para o número π utilizando a chamada série de Fourier. Sendo assim, nessa seção nosso objetivo será obter essa expressão. Por isso, à priori, conheceremos um pouco sobre a série de Fourier.

Definição 2.3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Podemos escrever*

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L} \right), \tag{2.17}$$

em que a expressão do lado direito é a série de Fourier de f, onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geq 0, \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geq 1,$$

são chamados de coeficientes de Fourier.

Observação 2.3.1. *(a) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita periódica de período T se*

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

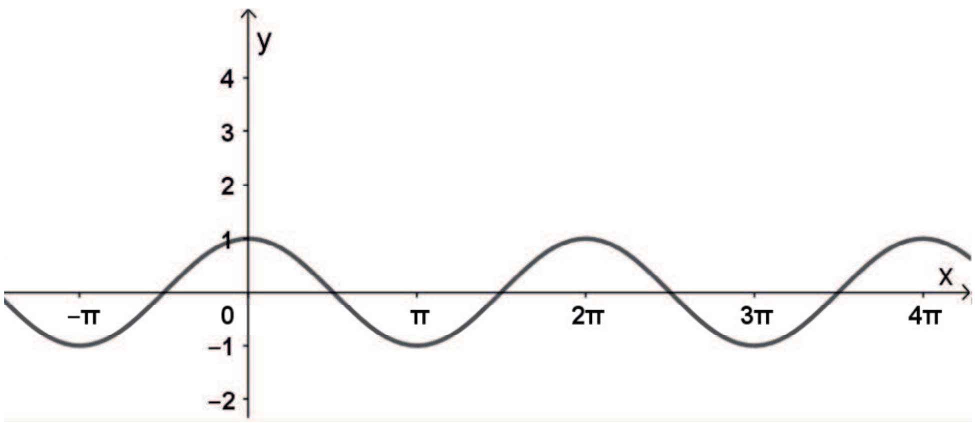
(b) Se T é um período para função f, então kT também é um período, para todo $k \in \mathbb{Z}$, pois

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \cdots = f(x+kT).$$

Por causa disso, em geral, consideramos T como sendo o menor período positivo, chamado de período fundamental.

Exemplo 2.5 (Função períodica)**.** *Um exemplo de função periódica é a função $f(x) = \cos x$ de período 2π. A Figura 1 representa o gráfico dessa função periódica.* [3]

Figura 1 – $f(x) = \cos x$



Observação 2.3.2. *Como encontrado em Sodré (2003):*

(a) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável sobre um intervalo da reta $[a,b]$ se:

$$\int_a^b f(u)du < \infty.$$

[3] A representação gráfica dessa função foi criada no GeoGeobra pela autora.

(b) Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo da reta $[a,b]$ se:

$$\int_a^b |f(u)du| < \infty.$$

A função f e sua série de Fourier nem sempre são iguais, inclusive, a série de Fourier de uma função pode até divergir. Por isso, apresentaremos a seguir o chamado Teorema de Fourier que nos fornece condições para que a série de Fourier de uma função f seja convergente.

Teorema 2.1. *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Então a série de Fourier da função f, dada em (2.17), converge, em cada ponto x, para*

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que $f(x+0)$ representa o limite lateral a direita da função f e $f(x-0)$ representa o limite lateral a esquerda da função f.

Observação 2.3.3. *(a) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função. Se f e sua derivada f' forem seccionalmente contínuas, então a função f será seccionalmente diferenciável.*

(b) Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita secccionalmente contínua se tiver uma quantidade finita de descontinuidades de primeira espécie em um intervalo limitado qualquer.

(c) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ possui uma descontinuidade de primeira espécie num ponto $a\in\mathbb{R}$ quando f é descontínua no ponto a e os limites laterais da função f no ponto a existem.

Agora utilizaremos esses conhecimentos para obter uma expressão em série de Fourier para o número π.

Considere a seguinte função[4]:

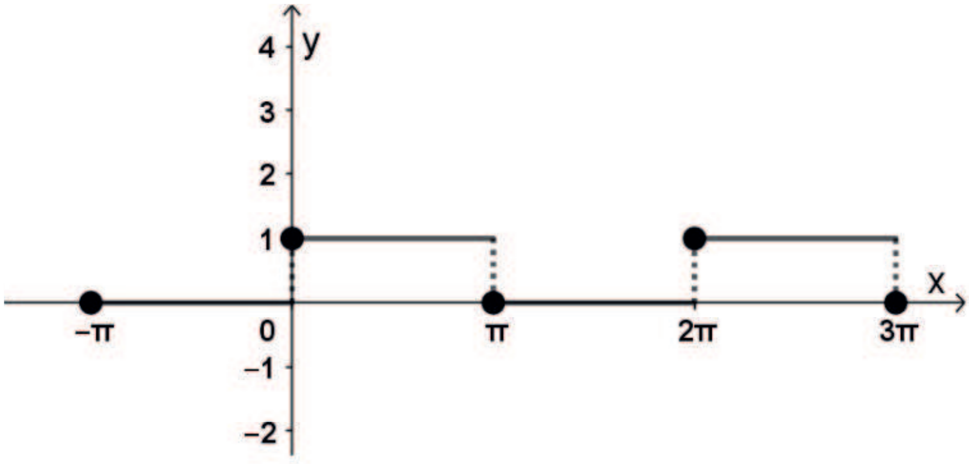
$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad 0\le x<\pi; \\ 0 & , \quad -\pi\le x<0; \\ e & \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$$

Note que a função f é períodica de período 2π e é seccionalmente diferenciável, pois, ela não é contínua e a sua derivada não está definida nos pontos de descontinuidade da função, ou seja, nos pontos em que f não é contínua; logo, a função f e sua derivada são seccionalmente contínuas. Daí, podemos escrever essa função como uma série de Fourier, convergente em cada ponto de f. Para isso, vamos calcular os coeficientes da série utilizando :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{0\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 0dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos 0dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot 1dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot 1dx\right) = \frac{1}{\pi}(\pi) = 1 \end{aligned}$$

4 Uma representação gráfica dessa função pode ser encontrada na página seguinte e foi criada no GeoGebra.

Figura 2 – Representação gráfica da função f



e se $n \neq 0$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\pi}dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = 0
\end{aligned}
$$

$$
b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{n} - \frac{-\cos n0}{n}\right) = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)
$$

Daí, se $n = 2k$

$$
b_{2k} = \frac{1}{2k\pi}(1-\cos 2k\pi) = \frac{1}{n\pi}(1-1) = 0,
$$

e se $n = 2k+1$

$$
b_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)\pi}\{1-\cos[(2k+1)\pi]\} = \frac{2}{(2k+1)\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.
$$

Logo, substituindo os valores dos coeficientes de Fourier em (2.17) obtemos a série de Fourier:

$$
f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}[(2k+1)x]\right\}. \tag{2.18}
$$

Agora, como f é seccionalmente derivável e de período 2π, podemos utilizar o Teorema de Fourier no ponto $x = \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$
\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}[(2k+1)x]\right\}.
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1+1) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\
1-\frac{1}{2} &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2k+1}\operatorname{sen}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\right\} \\
\frac{1}{2} &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2k+1}\operatorname{sen}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

E multiplicando por 2π ambos os membros da equação em (2.19), obtemos:

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen}\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right] \right\}. \tag{2.20}$$

Logo, atingimos o nosso objetivo, pois a série em (2.20) é a série procurada.

A série (2.20) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \right) = 4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

A série acima é a *série de Leibniz*.

Considerações Finais

Inicialmente, esse trabalho teria como tema principal a Irracionalidade e Transcendência do número π. Entretanto, para tratar desse tema, seria necessário um estudo sobre a Teoria dos Números Transcendentes que, por sua vez, utiliza alguns conceitos das disciplicas Estruturas Algébricas I e Estruturas Algébricas II, as quais ainda não haviam sido cursadas. Além disso, seria necessário estudar sobre a irracionalidade dos números, uma vez que a irracionalidade de um número é uma das condições para que o mesmo seja um número transcendente. Assim, teria muito conteúdo a ser estudado e um prazo de entrega a ser cumprido. Por causa disso, resolvemos reduzir o tema e, tratar apenas da irracionalidade dos números. Essa mudança não empobreceu o trabalho, apenas possibilitou uma delimitação maior do tema.

Embora não incluída nesse trabalho, a prova da transcendência do número π, além de resolver o problema da quadratura do círculo, também é uma das formas de demonstração da irracionalidade do π. Ora um número é dito transcendente quando não é algébrico, ou seja, quando esse número não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. Sendo assim, todo número racional, $a = \frac{p}{q}$, não é transcendente, pois, é raiz do polinômio $P(x) = qx - p$. Logo, se um número é transcendente , então ele é irracional. Portanto, como π é transcendente, então π é irracional.

Os estudos sobre a Teoria dos Números Transcendentes serão aproveitados em trabalhos futuros.

Referências

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1977.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1976. v. 1.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MENDES, I. A. *Números*. São Paulo: Livraria de Física, 2006.

OLIVEIRA, J. M. de. *A Irracionalidade e Transcendência do Número* π. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2013.

SODRÉ, U. *Séries de Fourier*. Londrina, 2003. Disponível em: ⟨http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/sfourier.pdf⟩. Acesso em: 20 nov. 2018.

SPOLAOR, S. de L. G. *Números irracionais:* π *e e*. Dissertação (Mestrado) — USP, São Carlos, ago. 2013.

STEWART, I. *Os Maiores Problemas Matemáticos de Todos os Tempos*. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2014.

VIEIRA, V. L. *Álgebra Abstrata para Licenciatura*. Campina Grande: EDUEPB, 2013.

ZANI, S. L. *Funções de Uma Variável Complexa*. São Carlos, 2001. Disponível em: ⟨http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/szani/complexa.pdf⟩. Acesso em: 28 ago. 2018.