UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII - GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

PEDRO MOREIRA DANTAS NETO

SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DE MODIFICAÇÕES DA FUNÇÃO DE THOMAE

PATOS - PB
2019

PEDRO MOREIRA DANTAS NETO

SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DE MODIFICAÇÕES DA FUNÇÃO DE THOMAE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

Patos - PB
2019

D192s Dantas Neto, Pedro Moreira.
Sobre a diferenciabilidade de modificações da função de Thomae [manuscrito] / Pedro Moreira Dantas Neto. - 2019.
34 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Função de Thomae. 2. Diferenciabilidade. 3. Aproximações diofantinas. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Lyedja A. M. de Oliveira - CRB - 15/881 BSC7/UEPB

PEDRO MOREIRA DANTAS NETO

SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DE MODIFICAÇÕES DA FUNÇÃO DE THOMAE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 04/06/2019.

BANCA EXAMINADORA

Arlandson Matheus Silva Oliveira

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Ginaldo de Souza Farias

Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Marciel Medeiros de Oliveira

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho a Deus e aos meus avós Pedro Moreira Dantas (In memoriam) e Maria Diniz Moreira, João Gomes Pedrosa e Maria Expedita da Conceição.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela imensa bondade e por permitir estar concluindo este curso de graduação.

Aos meus pais por estarem presentes e me motivando a seguir com meus estudos todos os dias. Aos meus irmãos pelo apoio e pela bondade em seus conselhos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira, por toda a paciência e calma durante o ano de PICME e a orientação deste trabalho.

A todos os meus professores do curso, em especial ao Prof. Me. Vilmar Vaz, por todo o incentivo a carreira acadêmica e os valiosos conselhos.

Aos meu colegas de curso, especialmente Andreza Campos e Crystiane da Silva, colegas desde o primeiro período e cuja amizade e companheirismo me estimularam diversas vezes.

E a todos os amigos que ajudaram de alguma forma em minha formação, em especial à Josias Ferreira, pelo apoio na produção deste trabalho.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."
Galileu Galilei

SUMÁRIO

SOBRE A DIFERENCIABILIDADE DE MODIFICAÇÕES DA FUNÇÃO DE THOMAE

Pedro Moreira Dantas Neto*

RESUMO

Neste artigo, usamos aproximações diofantinas para investigar a diferenciabilidade de funções definidas a partir de modificações da função de Thomae, que é a função $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $t(x) = 1$ se $x = 0$, $t(x) = 1$ se $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, M.D.C.$\{p, q\} = 1$, $q > 0$ e $t(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Estas modificações substituem a imagem $t(x)$, quando $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, ou por $1/n^a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, ou por a_n, em que $(a_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência que decresce para zero. A primeira substituição foi proposta e estudada por J. E. Nymann [9], cujos resultados apresentamos. No segundo caso, tratamos dos resultados obtidos por K. Beanland, J. W. Roberts and C. Stevenson [2].
Palavras-chave: Função de Thomae. Diferenciabilidade. Aproximações diofantinas.

ABSTRACT

In this article, we employ diophantine approximations to investigate the differenciability of certain modifications of the Thomae's funtion, which is the function $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by: $t(x) = 1$ if $x = 0$, $t(x) = 1$ if $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, G.C.D.$\{p, q\} = 1$, $q > 0$ and $t(x) = 0$ if $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. These modifications replace the image $t(x)$, for $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, with either $1/n^a$, where $a \in \mathbb{R}$, or a_n, where $(a_n) \subset \mathbb{R}$ is a sequence decreasing to zero. The first modification was proposed and studied by J. E. Nymann [9], whose results we present. In the second case, we treat the results due to K. Beanland, J. W. Roberts and C. Stevenson [2].
Keywords: Thomae's function. Differenciability. Diophantine approximation.

*Aluno de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: neti-sb@hotmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação do Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

1 INTRODUÇÃO

Os cursos de Cálculo nos deixam com a impressão de que só existem funções contínuas, pois neles, em geral, só são trabalhadas as funções elementares e composições destas. Mesmo nos cursos de Análise, poucas funções "patológicas" nos são apresentadas, a mais comum e simples delas sendo, provavelmente, a função de Dirichlet, dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ são ambos conjuntos densos em $\mathbb{R}$, segue-se que esta função g é descontínua em todo ponto da reta.

Se modificamos esta função e consideramos agora a função

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

o que acontece em termos de continuidade? Ora, dado $c \in \mathbb{R}$, tomando uma sequência de racionais $x_n \to c$ e uma sequência de irracionais $y_n \to c$, temos que $\lim h(x_n) = c$ e $\lim y_n = 0$. Consequentemente, esta nova função é descontínua em todo ponto $c \neq 0$. Se $c = 0$, a impressão que temos é de que, não importa qual a sequência (z_n) escolhida para nos aproximarmos de 0, sempre teremos $\lim h(z_n) = 0$. Isso sugere um elo entre os conceitos de continuidade e de sequência convergente, sobre o qual falaremos mais adiante.

Em 1875, K. J. Thomae concebeu outro exemplo de função "patológica", a qual hoje leva seu nome e é definida por

$$t(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ \frac{1}{q}, & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ M.D.C.}\{p, q\} = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

Se $c \in \mathbb{Q}$, então, aproximando-nos de c por uma sequêcia de irracionais (x_n), temos que $\lim t(x_n) = 0 < t(c)$, o que prova que t é descontínua em todo ponto racional. O que acontece nos pontos irracionais? Um argumento envolvendo ϵ's e δ's mostra que, nestes pontos, t é contínua. Assim, em suma, a função de Thomae tem a estranha propriedade de ser descontínua em $\mathbb{Q}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Apesar de ser "tão" descontínua, sabemos que, restrita, digamos, a qualquer intervalo limitado e fechado $[a, b]$, esta função é integrável no sentido de Riemann, com $\int_a^b t(x)dx = 0$.[1]

[1]Isso se deve ao fato, conhecido como *critério de Lesbegue*, de que uma função é integrável no sentido

O que acontece com a função de Thomae em termos de diferenciabilidade? Esta é uma pergunta natural, já que derivada e integral são os conceitos centrais da Análise. Mas também porque, assim como no caso da integração, a continuidade se relaciona com a diferenciabilidade, uma vez que, em conjunto abertos, ser derivável implica ser contínua. Veremos de três diferentes maneiras, que a função de Thomae não é derivável em $\mathbb{R}$.

Resta, então, perguntar se podemos modificar de alguma forma a definição de $t(x)$ dada em (1), de maneira a obter uma função derivável.

O presente artigo está organizado como segue. Na Seção 2, apresentamos os conceitos resultados de Análise Real e de Aproximações diofantinas indispensáveis para a compreensão dos resultados principais e estudamos a função de Thomae (1) no tocante à continuidade e diferenciabilidade. Na Seção 3, seguindo J. E. Nymann [9], estudamos a diferenciabilidade da função t^a, definida por

$$t^a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ \frac{1}{q^a}, & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ M.D.C.}\{p, q\} = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{2}$$

em que $a \in \mathbb{R}$; e da função

$$t_{(a_i)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ a_n, & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ M.D.C.}\{p, q\} = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{3}$$

em que (a_n) é uma sequência que descresce para zero, com relação à qual apresentamos os resultados de K. Beanland, J. W. Roberts e C. Stevenson [2].

---

de Riemann se, e somente se, seu conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula. Tal é o caso, por exemplo, do conjunto dos números racionais. Como este resultado foge ao escopo do nosso artigo, remetemos o leitor interessado a [6].

2 PRELIMINARES E ESTUDO DA FUNÇÃO DE THOMAE

2.1 Elementos de Análise Real

Nesta subseção, apresentamos os conceitos de Análise Real que são indispensáveis para a compreensão dos resultados principais deste artigo.

2.1.1 Números reais

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto de todos os números naturais. Fixado $n \in \mathbb{N}$, definimos $I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definição 2.1. *Dizemos que um conjunto A é* finito *se $A = \emptyset$ ou se existem uma bijeção $\varphi : A \to I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. No segundo caso, dizemos que uma tal φ é uma* contagem *dos elementos de A e escrevemos $A = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Dizemos que A é* enumerável *quando A é finito ou quando existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to A$. Neste caso, dizemos que uma tal φ é uma* enumeração *dos elementos de A. Um conjunto é dito* não enumerável *quando não é enumerável, isto é, quando não é finito e seus elementos não podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais.*

Exemplo 1. *Cada conjunto I_n é obviamente finito. Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são enumeráveis: para o primeiro, tomamos $\varphi = \mathrm{Id}$ (função identidade); para o segundo, considere $\varphi(n) = \frac{-n\cdot(-1)^n - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.(-1)^n)}{2}$.*

Exemplo 2. *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Como consequência disso, podemos mostrar que, se B é enumerável e existe uma função injetiva $f : A \to B$, então A também é enumerável.

Por outro lado, se existe uma função sobrejetiva $f : A \to B$ e A é enumerável, então também B o é. Logo:

- *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável. De fato, se $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$ são sobrejeções, então $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$, também o é. Assim, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, e isto segue-se do fato de que, pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ é um função injetiva $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*
- *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Com efeito, dados $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ enumeráveis, existem, em particular, sobrejeções $f_i : \mathbb{N} \to X_i$. Fazendo $X = \cup X_n$, definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ por $f(m, n) = f_n(m)$. O caso de uma união finita é um caso particular.*

(Para mais detalhes sobre conjuntos enumeráveis veja [6].)

Exemplo 3. *O conjunto* $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{M.D.C.}\{m, n\} = 1\}$ *de todos os números racionais é enumerável.*

Com efeito, definimos $\varphi(1) = 1$ *e*

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_r^{2\alpha_r} q_1^{2\beta_1 - 1} \cdots q_s^{2\beta_s - 1},$$

em que $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ *e* $n = q_1^{2\beta_1} \cdots q_s^{2\beta_s}$ *são as decomposições primárias de* m *e* n*. Segue-se da unicidade destas decomposições que* φ *é uma bijeção entre* $\mathbb{Q}_+$ *(racionais positivos) e* $\mathbb{N}$*, donde* $\mathbb{Q}_+$ *é enumerável. Como a função* $\mathbb{Q}_+ \ni \frac{m}{n} \mapsto -\frac{m}{n}$ *também é bijetiva, temos que* $\mathbb{Q}_-$ *(racionais negativos) é enumerável. Por fim, basta observarmos que* $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$.[2]

O conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$ é ou não enumerável? Antes de respondermos esta pergunta, relembremos um pouco da estrutura algébrica de $\mathbb{R}$. Dizer que $\mathbb{R}$ é um *corpo* significa dizer seus elementos podem ser somados e multplicados e que estas duas operações gozam de todas as boas propriedades que se espera de uma soma e de produto, isto é, a soma de números reais é associativa e comutativa, existe um elemento neutro e cada número real possui um simétrico aditivo; o produto de números reais é associativo e comutativa, existe um elemento neutro e cada número real não nulo possui um inverso. Dizer que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado* significa dizer é existe um subconjunto $\mathbb{R}_+$ (números reais positivos) que é fechado para a soma e para o produto e que particiona $\mathbb{R}$ em três parte: dado $x \in \mathbb{R}$, ou $x = 0$, ou $x \in \mathbb{R}_+$ ou $-x \in \mathbb{R}_+$. Detalhes podem ser encontrados em [6].

No entanto, $\mathbb{Q}$ também é um corpo ordenado. Qual, então, a diferença entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, e por que escolhemos este último como conjunto base do Cálculo? A resposta está na existência de certas cotas inferiores ou superiores para subconjuntos!

Definição 2.2. *Um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *é dito* limitado inferiormente *quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \geq c$ *para todo* $x \in X$*. Dizemos, neste caso, que* c *é uma* cota inferior *de* X*. Analogamente, definimos* cota superior *de* X *como todo* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $b \geq x$ *para todo* $x \in X$ *e dizemos que* X *é* limitado superiormente *se possui algum cota superior.*

Dado $X \subset \mathbb{R}$ *limitado superiormente e não vazio, dizemos que um número* $b \in \mathbb{R}$ *é o supremo de* X *quando é a menor das cotas superiores.*

Analogamente, o ínfimo *de um subconjunto limitado inferiormente e não vazio* $X \subset \mathbb{R}$ *é um número* $a \in \mathbb{R}$ *que é a maior da cotas inferiores de* X*.*

[2] Esta demonstração da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ é devida a Y. Sagher [12].

Dizer que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo* significa dizer que todo subconjunto não vazio limitado superiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$. O axioma fundamental da Análise Real consiste na existência do corpo ordenado completo $\mathbb{R}$.

É evidente também que todo subconjunto não vazio limitado inferiormente $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $a = \inf X \in \mathbb{R}$. Com efeito, neste caso, o conjunto $Y : \{-x : x \in X\}$ é limitado superiormente e não vazio, logo possui supremo $b \in \mathbb{R}$. O número $a = -b$ é o ínfimo de X.

Como consequência da completude de $\mathbb{R}$, temos o seguinte

Proposição 2.1 (Teorema dos intervalos encaixados)**.** *Dada uma sequência decrescente*

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots \tag{4}$$

de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Podemos escrever as inclusões $I_n \supset I_{n+1}$ em (4) como

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$

donde segue-se que o conjunto $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ é limitado inferiormente e não vazio. Seja $c = \inf A$. É claro que $a_n \leq c$ para todo n (pois c é, em particular, cota superior de A). Como cada b_n também é cota superior de A, temos que $c \leq b_n$ para todo n (pois c é a menor das cotas superiores de A). Logo, $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 2.3. *$\mathbb{R}$ é não enumerável.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Tomemos $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$. Suponhamos definidos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n$ tais que $f(j) \notin I_j$. Escolhemos $I_{n+1} = I_n$ se $f(n+1) \notin I_n$. Caso contrário, digamos que seja $a_n \neq f(n+1)$; logo, $a_n < f(n+1)$. Então, escolhemos $I_{n+1} = [a_n, (a_n + f(n+1))/2]$ (se for $b_n \neq f(n+1)$, o raciocínio é análogo). Pela proposição anterior, existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ comum a todos estes intervalos I_j que acabamos de construir. Este c não pode pertencer à imagem de f. □

Um número real é dito *irracional* quando não é racional. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue-se do Corolário 2.3 que existem números irracionais — e que, na verdade, uma vez que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, os irracionais formam um conjunto não enumerável (portanto, a maioria dos números reais).

2.1.2 Sequências e topologia

Os conceitos fundamentais da Análise dizem respeito a limites e convergências e podem ser apresentados a partir do importante conceito de sequência convergente.

Definição 2.4. *Uma* sequência (de números reais) *é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural n faz corresponder um número real $x_n := x(x)$, chamado o n*-ésimo termo da sequência. *Denotamos a sequência x por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n).*

Dizemos que o número real L é limite da sequência (x_n), quando, para todo número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - L| < \epsilon$. Escrevemos, então, $L = \lim x_n$ ou $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite é dita convergente. *Caso contrário, ela se chama* divergente.

Observação 2.1. *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Com efeito, sejam L e M limites de (x_n). Dado $\epsilon > 0$, tomemos um termo x_n da sequência tal que $|L - x_n| < \epsilon/2$ e $|M - x_n| < \epsilon/2$. Daí, temos que

$$|L - M| \leq |L - x_n| + |M - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como isto acontece para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $L = M$.

Exemplo 4. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

É claro que uma sequência convergente é limitada (no sentido de que o conjunto de seus termos é um conjunto limitado). Com efeito, seja $x_n \to L$. Então, escolhendo $\epsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (L-1, L+1)$ para todo índice $n > n_0$. Sejam α e β, respectivamente, o mínimo e o máximo do conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, L-1, L+1\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para todo n. A recíproca, contudo, não é verdadeira, como ilustra a sequência (x_n) em que $x_{2n-1} = -1/n$ e $x_{2n} = 1 + 1/n$. Formalmente, temos o seguinte

Definição 2.5. *Seja (x_n) uma sequência limitada, digamos com $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pomos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Temos que $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$. Logo, fazendo $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, vem que*

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Existe, pois, os limites $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$. Escrevemos $a = \liminf x_n$ e $b = \limsup x_n$ e dizemos que a e b são, respectivamente, o limite inferior *e o* limite superior *da sequência (x_n).*

Exemplo 5. *Seja* $x_{2n-1} = -1/n$ *e* $x_{2n} = 1 + 1/n$. *É possível verificar que* $\inf X_{2n-2} = \inf X_{2n-1} = -1/n$ *e que* $\sup X_{2n-1} \sup X_{2n} = 1+1/n$. *Logo,* $\liminf x_n = 0$ *e* $\limsup x_n = 1$. *(Para detalhes, veja [5].)*

Proposição 2.2. *Uma sequência limitada de números reais* (x_n) *é convergente se, e somente se,* $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Demonstração. Com a notação da Definição 2.5, suponhamos que $\lim a_n = \lim b_n = L$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n, b_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ para todo $n > n_0$. Como $a_n \leq x_n \leq b_n$, também devemos ter $x_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ para todo $n > n_0$, o que mostra que $\lim x_n = L$. Reciprocamente, mostremos que $\lim x_n = L$ implica $\lim a_n = L$ (a prova de que $\lim b_n = L$ é similar). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$ para todo $n > n_0$. Assim, $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$ são, nesta ordem, cotas inferior e superior para $\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots\}$. Segue-se que $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ para todo $n > n_0$, donde $L - \epsilon < \liminf x_n < L + \epsilon$. Como estas desigualdades valem para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $L = \liminf x_n = \lim a_n$. □

Definição 2.6. *Dizemos que um ponto* $a \in \mathbb{R}$ *é* aderente *ao conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *quando* a *é limite de alguma sequência de pontos* $x_n \in X$.

Chamamos fecho *de um conjunto* X *ao conjunto* $\overline{X}$ *formado por todos os pontos aderentes a* X.

Dizemos que X *é denso em* Y *quando* $Y \subset \overline{X}$, *isto é, quando todo* $b \in Y$ *é aderente a* X.

Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ *é um* ponto de acumulação *do conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *quando* a *é limite de alguma sequência de pontos* $x_n \in X \setminus \{a\}$. *Indicamos com* X' *o conjunto de todos os pontos de acumulação de* X. *Um ponto* $a \in X$ *que não é de acumulação é chamado de* ponto isolado *de* X.

Observação 2.2. *Para todo* $X \subset \mathbb{R}$, *temos* $\overline{X} = X \cup X'$.

Proposição 2.3. *Um ponto* a *é aderente ao conjunto* X *se, e somente se, todo intervalo aberto contendo* a *contém algum ponto de* X.

Demonstração. Sejam a aderente a X e I um intervalo aberto contendo a. Existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset I$. Existe também uma sequência de pontos $x_n \in X$ tal que $x_n \to a$. Por definição de limite, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ para todo índice $n > n_0$. Reciprocamente, se todo intervalo aberto contendo a contém algum ponto de X, tomando em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$, obtemos uma sequência de pontos de X tal que $|x_n - a| < 1/n$; logo $x_n \to a$, e a é aderente a X. □

Exemplo 6. *Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Isso significa que, para todo $a \in \mathbb{R}$, existem tanto uma sequência de racionais quanto uma sequência de irracionais que convergem para a.*

Mostremos que, dados quaisquer dois números reais a e b com $a < b$, existe um número racional r satisfazendo $a < r < b$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $0 \leq a < b$. Desejamos obter $m, n \in \mathbb{N}$ tais que

$$a < \frac{m}{n} < b. \tag{5}$$

Pelo Exemplo 4, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < b - a. \tag{6}$$

Multiplicando as desigualdades em (5) *por n, encontramos $na < m < nb$. Com o n já escolhido, a ideia é escolher m como o menor número natural maior do que na, isto é, $m - 1 \leq na < m$: esta última desigualdade já nos dá $a < m/n$; a primeira desigualdade, junto com* (6)*, nos dá*

$$\begin{aligned} m &\leq na + 1 \\ &< n\left(b - \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= nb. \end{aligned}$$

Como $m < nb$ implica $m/n < b$, temos que $a < m/n < b$, como desejado.

Agora, dados a e b reais com $a < b$, pela primeira parte existe um número racional r tal que $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, e, assim, $r + \sqrt{2}$ é um número irracional entre a e b.

2.1.3 Limite e continuidade

Definição 2.7. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X. Dizemos que o número real L é* limite *de $f(x)$ quando x tende para a, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;.\equiv.\; \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0\,; x \in X,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esta definição admite a seguinte caracterização sequencial.

Proposição 2.4. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que tenhamos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenhamos $\lim f(x_n) = L$.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Seja $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x-a| < \delta$ implicam $|f(x) - L| < \epsilon$. Existe também um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $0 < |x_n - a| < \delta$. Assim, $n > n_0$ implica $|f(x_n) - L| < \epsilon$, donde $\lim f(x_n) = L$.

Reciprocamente, suponhamos que, para toda sequência $x_n \in X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenhamos $\lim f(x_n) = L$. Porém, se não fosse $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então existiria $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo índice $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n \in X$, com $0 < |x_n - a| < 1/n$, mas $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Construiríamos, assim, uma sequência de pontos x_n de $X \setminus \{a\}$ que converge para a, mas tal que a sequência de imagens $f(x_n)$ não converge para L. Contradição! □

Corolário 2.8. *Sejam* $f : X \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X'$. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = M$, *então* $L = M$.

Definição 2.9. *Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$, *definida no conjunto* $X \subset \mathbb{R}$, *é dita* contínua no ponto $a \in X$ *quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado arbitrariamente, podemos obter* $\delta > 0$ *tal que* $x \in X$ *e* $|x - a| < \delta$ *implicam* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. *Em símbolos,* f *contínua no ponto* a *significa:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ x \in X, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ *é* contínua *quando* f *é contínua em todos os pontos* $a \in X$.

É claro que, se $a \in X \cap X'$, i.e., se a é um ponto de acumulação de X, então f é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 2.4, podemos estabelecer a seguinte

Proposição 2.5. *Uma função* $f : X \subset \mathbb{R}$ *é contínua em um ponto* $a \in X$ *se, e somente se, para toda sequência de pontos* $(x_n) \subset X$ *com* $\lim x_n = a$, *temos* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exemplo 7 (A função de Thomae só é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)**.** *Consideremos a função de Thomae definida em* (1). *Conforme dissemos na Introdução deste artigo, se* $c \in \mathbb{Q}$, *então, aproximando-nos de* c *por uma sequêcia de irracionais* (x_n) *(o que é possível, dado que* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *são densos em* $\mathbb{R}$*), temos que* $\lim t(x_n) = 0 < t(c)$, *o que prova que* t *é descontínua em todo ponto racional.*

Mostremos que ela é contínua em todo número irracional. A ideia é mostrar que, na verdade, para todo número real c *dado arbitrariamente temos* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. *Uma vez que a imagem todo número irracional é* 0, *isso prova o que queremos.*

Seja c um ponto real arbitrário. Tendo em vista a Definição 2.9, dado $\epsilon > 0$, precisamos garantir a existência de $\delta > 0$ com a seguinte propriedade:

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$$

como $f(c)$ supomos ser 0, e $f(x)$ é positivo

$$0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow 0 \leq f(x) < \epsilon. \tag{7}$$

Definimos $X_{c,\epsilon} := \{x \in \mathbb{R} : x \neq c \;\; e \;\; f(x) \geq \epsilon\}$. Analisemos algumas possibilidades para ϵ. Para $\epsilon > 1$, como $t(x) \in [0, 1]$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $X_{c,\epsilon} = \emptyset$. Assim, neste caso, qualquer $\delta > 0$ atende a condição (7).

Para $1/2 \leq \epsilon \leq 1$, temos que

$$X_{c,\epsilon} \subseteq \mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{k}{2} : k \in \mathbb{Z} \;\; \textit{é ímpar} \right\},$$

que é um conjunto de todos pontos isolados. Escolhemos, então, δ tal que

$$0 < \delta < \min\{|x - c| : x \in X_{c,\epsilon}\}$$

.

Seja, por fim, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Temos que $X_\epsilon := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \epsilon\}$ é finito, uma vez que $f(x) \geq \epsilon$ só ocorre em pontos $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $\mathrm{M.D.C.}\{p, q\} = 1$ e $0 < q \leq \frac{1}{\epsilon}$; logo, a interseção de X_ϵ e $V_1(c) := \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < 1\}$ é finita, o mesmo valendo para

$$S_{c,\epsilon} := \{x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \epsilon\} \cap (V_1(c) \setminus \{c\}).$$

Algumas manipulações algébricas a partir das expressões $\left|\frac{p}{q} - c\right| < 1$ e $0 < q \leq \frac{1}{\epsilon} > 2$ nos fazem concluir que $S_{c,\epsilon} \neq \emptyset$. Tomamos

$$0 < \delta < \min\{\min\{|x - c| : x \in S_{c,\epsilon}\}, 1\}.$$

Então, $0 < |x - c| < \delta$ implica $x \notin S_{c,\epsilon}$ e $x \in V_1(c) \setminus \{c\}$; logo, $0 \leq t(x) < \epsilon$.

2.1.4 Diferenciabilidade

Definição 2.10. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \tag{8}$$

Se o limite (8) existir, dizemos que f é derivável no ponto a. *Quando este limite existe para todo ponto $a \in X \cap X'$ de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que a função é* derivável *no conjunto A. Neste caso, fica definida uma aplicação $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$.*

Observação 2.3. *Segue-se da Proposição 2.4 que $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a se, e somente se, dada qualquer sequência $(x_n) \subset X \setminus \{a\}$ com $\lim x_n = a$, temos que*

$$\lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a).$$

Mais geralmente, seja dada uma função $g : Y \to X$ tal que $\lim_{y \to b} g(y) = a$, com $b \in Y'$. Se $y \neq b \Rightarrow g(y) \neq a$, então temos

$$\lim_{y \to b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} = f'(a).$$

Exemplo 8. *Sejam $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, e $c \in \mathbb{R}$. Usando a identidade algébrica*

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2x^{n-3} + \cdots + c^{n-1}),$$

obtemos a fórmula apresentada em qualquer curso de Cálculo:

$$\begin{aligned} f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{x^n - c^n}{x - c} &= \lim_{x \to c}(x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2x^{n-3} + \cdots + c^{n-1}) \\ &= c^{n-1} + c^{n-1} + \cdots + c^{n-1} = nc^{n-1}. \end{aligned}$$

Exemplo 9. *Se $g(x) = |x|$, vemos que o valor de*

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

é $+1$ ou -1, conforme nos aproximemos de 0 pela direita (por valores positivos) ou pela esquerda (por valores negativos); logo, esta função não é derivável em $a = 0$.

O exemplo anterior nos mostra que continuidade não assegura diferenciabilidade. A recíproca, contudo, é sempre verdadeira.

Proposição 2.6. *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in X$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Estamos supondo que existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e queremos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ora, notemos que, pelas propriedades algébricas do limite de funções (veja [6]), temos que

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(x)) = \lim_{x \to a} \left[\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) (x - a) \right] = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

donde segue-se o resultado desejado. $\square$

Exemplo 10 (A função de Thomae não é derivável; primeira demonstração)**.** *Como mostramos no Exemplo 7, a função de Thomae* (1) *é contínua em todo número irracional e descontínua em todo número racional. Em vista disso, a função de Thomae só pode ser derivável nos números irracionais. Mas, como veremos a seguir, esse não é o caso. Seguiremos as ideias de W. Dunham [3] para mostrar que* (1) *não é diferenciável no intervalo* $[0, 1]$*, pois, uma vez que* $f(x) = f(x + 1)$*, é suficiente considerarmos* x *neste intervalo.*

Suponhamos que (1) *seja derivável em algum irracional* $a \in [0, 1]$*, i.e., existe o limite*

$$t'(a) = \lim_{x\to a} \frac{t(x) - t(a)}{x - a}.$$

Se nos aproximamos de a *por uma sequência de irracionais em* $[0, 1] \setminus \{a\}$*, digamos que seja* $x_n \in ((0, 1) \setminus \{a\}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ *com* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$*, então temos*

$$t'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{t(x_n) - t(a)}{x_n - a} = 0.$$

Portanto, escolhendo $\epsilon = 1$ *temos que existe* $\delta > 0$ *tal que* $x \in (0, 1)$, $0 < |x - a| < \delta$ *implicam*

$$\left|\frac{t(x) - t(a)}{x - a}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{t(x)}{|x - a|} < 1,$$

ou seja,

$$t(x) < |x - a| \tag{9}$$

Agora, para um certo número primo p*, construiremos um racional* $\frac{k}{p}$*, com a propriedade* $0 < |k/p - a| < \delta$*, que, junto com* (9)*, nos levará a uma contradição.*

Como $0 < a < 1$*,* $\frac{1}{a} > 0$ *e* $\frac{1}{1-a} > 0$*. Ademais,* $\frac{1}{\delta} > 0$*. Escolhemos um primo* $p > \max\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{a}, \frac{1}{1-a}\}$*. (Esta escolha pode ser feita devido ao fato, provado originalmente por Euclides, de não existir um maior número primo. A demonstração deste resultado foge ao escopo deste trabalho e pode ser encontrada, por exemplo, em [7].) Como este* p *é, em particular, maior do que* $\frac{1}{a}$ *e* $\frac{1}{1-a}$*, temos que* $\frac{1}{P}$ *é menor do que* a *e* $1 - a$*, o que nos garante que o intervalo* $(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p})$ *esteja contido em* $(0, 1)$*. Além disso, como* $(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p})$ *tem comprimento* $\frac{2}{p}$*, existe um número inteiro* k *com* $1 \leq k < p$ *para o qual o racional* $\frac{k}{p}$ *(fração irredutível, pois* k *é menor do que o primo* p*) pertence ao intervalo* $(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p})$*. Além disso,* $\frac{k}{p} \neq a$*, pois* a *é irracional. Segue-se que* $0 < |\frac{k}{p} - a| < \frac{1}{p} < \delta$*. Logo, por* (9)*,*

$$\frac{1}{p} = r\left(\frac{k}{p}\right) < \left|\frac{k}{p} - a\right| < \frac{1}{p},$$

uma contradição.

2.2 Aproximações diofantinas

Quando estudamos Análise, vemos que o conjunto dos números reais pode ser dividido em racionais e irracionais, sendo o primeiro o conjunto de todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, e o segundo, o conjunto de todos aqueles números que não podem ser representados desta forma.

Outro jeito dizer isso é o seguinte: os números que possuem representação decimal finita, como 2 ou $\frac{1}{2}$, ou decimal infinita periódica, como $\frac{1}{3} = 0, \overline{3}$, são racionais. Já os irracionais são aqueles que possuem representação decimal infinita não periódica.

A existência dessas representação decimais nos permitem oferecer uma outra abordagem à questão da diferenciabilidade da função de Thomae (1). Com efeito, já sabemos que esta função não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{Q}$. Sabemos também que podemos investigar a diferenciabilidade de $t(x)$ para valores irracionais de x restritos ao invervalo $(0, 1)$. Dado $x \in (0, 1)$ irracional, se $h \neq 0$, então

$$\frac{t(x+h) - t(x)}{h} = \frac{t(x+h)}{h}.$$

Seja (h_i) um sequência de números reais mão nulos que converge para 0 e tal que $x + h_i$ é irracional para cada i. Então

$$\lim \frac{t(x+h_i)}{h_i} = 0.$$

Seja $x = 0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ a representação decimal de x. Escolhemos $h_i := 0, a_1a_2 \ldots a_i - x$. Daí, $f(x+h_i) = f(0, a_1a_2 \ldots a_i) \geq 10^{-i}$ para $i \geq i_0$ e $|h_i| \leq 10^{-i}$ (onde i_0 é o menor índice i tal que o dígito $a_i \neq 0$). Segue-se que, para todo $i \geq i_0$,

$$\left| \frac{t(x+h_i)}{h_i} \right| \geq 1.$$

Portanto, $\lim_{h \to 0} t(x+h)/h$ não existe, e t não é diferenciável.[3]

Nesta seção, gostaríamos de olhar mais de perto para os números racionais próximos de um número irracional dado que podemos ser obtidos a partir da representação deste irracional.

Exemplo 11. *O número irracional mais conhecido é, provavelmente,* $\sqrt{2} = 1,414213\ldots$.[4] $\sqrt{2}$*, pode ser aproximado pelos números racionais* 1*;* 2*;* $1,4 = \frac{14}{10}$*;* $\frac{141}{100}$ *etc.*

Estas aproximações para $\sqrt{2}$ são simples de encontrar e têm erro baseado no denominador das frações provientes da expansão $1,414213\ldots$. Este denominador é da forma

[3] Esta demonstração é devida a G. J. Porter [10].

[4] Para uma discussão a respeito da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e da relação disto com a completude de $\mathbb{R}$, veja [1] e [5].

10^n. E se pudéssemos encontrar outros números racionais com erro de aproximação menor do que isso e com garantia de termos racionais em forma de fração irredutível? Esses questionamentos são estudados na parte da Teoria dos Números chamada de Aproximações Diofantinas.

Antes de falarmos de aproximações, veremos uma outra forma útil e interessantes de dividir os números reais.

2.2.1 Números algébricos e transcendetes

Além da divisão em racionais e irracionais, os número reais podem ser divididos com base em equações polinomiais de coeficiente inteiros, sendo dito *algébrico* todo número real que é raiz de pelo menos uma equação polinomial de coeficientes inteiros, e *transcendente* qualquer número real que não é raiz de nenhum equação dessa forma.

Todo número racional $\frac{m}{n}$ é algébrico, pois é solução da equação

$$nx - m = 0.$$

Para os números irracionais, temos que parte deles é algébrica e parte é trasncendente. Por exemplo, o radical $\sqrt[a]{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$, é raiz da equação

$$x^a - b = 0$$

e é, portanto, algébrico.

Provar que um número real é transcendente exige um pouco mais de trabalho. Um exemplo de número transcendente, conhecido como *número de Liouville*, é $\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, ou seja,

$$\alpha = 0,110001000000000000000001\ldots \tag{10}$$

onde cada um dos 1's aparece na casa decimal após a vírgula correspondente ao fatorial de um número natural. Uma prova de que este α é, de fato, transcendente pode ser feita supondo que α seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros $f(x) = 0$. Olhamos para o número $f(\alpha) - f(\beta)$ ou para $-f(\beta)$ (já que $f(\alpha) = 0$), em que $\beta = \sum_{i=1}^{j} 10^{-i!}$ é uma aproximação racional de α. Visto como polinômio em β com coeficientes inteiros, $-f(\beta)$ é racional (pois β o é) e, portanto, possui valor absoluto relativamente grande. Por outro lado, $f(\alpha) - f(\beta)$ é uma diferença de polinômios que possui a mesma ordem de grandeza de $\alpha - \beta$, a qual é relativamente pequena. Esta contradição nos dá o resultado desejado. Detalhes podem ser encontrados em [7] e [4].

Outros exemplos de números transcendentes são o chamado número de Euler e e π. A irracionalidade desses dois números, assim como sua transcendência, é provada em [4].

2.2.2 Aproximações de irracionais por inteiros e por racionais

Como vimos no Exemplo 11, $\sqrt{2}$ pode ser aproximado por 1 e por 2, que são os inteiros mais próximos de $\sqrt{2}$. Mais geralmente, todo $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pertence a um intervalo de números inteiros consecutivos, digamos (p, q). Ademais, ξ não pode estar no meio, pois do contrário seria $\xi = p + \frac{1}{2}$ que é um número racional. Portanto, ξ está mais próximo de p ou q. Assim, o intervalo $(\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$ contém apenas um número inteiro, sem perda de generalidade, digamos que seja q. Então

$$-\frac{1}{2} < \xi - q < \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$|\xi - q| < \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Agora, considere o número $m\xi$, com $n \in \mathbb{Z}$. Esse número é irracional, pois caso contrário $n\xi = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \xi = \frac{p}{nq} \in \mathbb{Q}$, o que não acontece. Aplicando o raciocínio anterior, por (11) temos que existe um inteiro m a um distância de $n\xi$ menor do que $1/2$, i.e.,

$$-\frac{1}{2} < n\xi - m < \frac{1}{2},$$

ou, em outras palavras,

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{2n}. \tag{12}$$

2.2.3 Aproximações com erro menor do que $\frac{1}{n^2}$

A aproximação em (12) pode ser melhorada, no sentido de um erro menor? Uma primeira resposta a esta indagação é dada no seguinte

Teorema 2.11. *Para qualquer número irracional ξ e qualquer inteiro positivo p, existe um número $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $n \leq p$, tal que*

$$-\frac{1}{np} < \xi - \frac{m}{n} < \frac{1}{np}.$$

Demonstração. Sejam a um número irracional e p um número inteiro positivo. Escrevemos:

$$\begin{aligned}
1\xi = z_1 + b_1 \quad &\Rightarrow \quad p\xi - z_1 = b_1 \\
2\xi = z_2 + b_2 \quad &\Rightarrow \quad p\xi - z_2 = b_2 \\
3\xi = z_3 + b_3 \quad &\Rightarrow \quad p\xi - z_3 = b_3 \\
&\vdots \\
p\xi = z_p + b_p \quad &\Rightarrow \quad p\xi - z_p = b_p
\end{aligned}$$

em que cada z_i representa a parte inteira de $i \cdot \xi$ e b_i, a parte decimal. Agora divida o intervalo $[0, 1]$ em p partes $I_1, I_2, I_3, \dots, I_p$, cada uma com comprimento $\frac{1}{p}$. Assim, $I_i = (\frac{i-1}{p}, \frac{i}{p})$.

Repare que cada b_i, $1 \leq i \leq p$, é um número irracional e, portanto, não pode ser igual a nenhum dos racionais $\frac{j}{p}$, $j = 0, 1, \dots, p$. Logo, cada b_i pertence a exatamente um dos intervalos $I_1, I_2, I_3, \dots, I_p$.

Há duas possibilidades para o intervalo I_1: ou ele contém pelo menos um dos b_i's ou não contém nenhum deles.

Caso 1. O intervalo I_1, contém um ou mais b_i's. Seja $b_n \in I_1$, em que n é um dos inteiros $1, 2, 3, \dots, p$; logo, $b_n = n\xi - z_n$ e, daí,

$$0 < n\xi - z_n < \frac{1}{p} \Longrightarrow -\frac{1}{p} < n\xi - z_n < \frac{1}{p} \Longrightarrow -\frac{1}{np} < \xi - \frac{z_n}{n} < \frac{1}{np}.$$

Definimos $m := z_n$.

Caso 2. Nenhum b_i está contido em I_1. Assim, temos p números distribuídos nos $p-1$ intervalos $I_2, I_3, \dots, I_p$. Pelo princípio da casa dos pombos, temos pelo menos dois b_i's num mesmo intervalo I_j de comprimento $\frac{1}{p}$, digamos b_d e b_e, onde $1 \leq e < d \leq p$. Logo,

$$-\frac{1}{p} < b_d - b_e < \frac{1}{p}.$$

Mas $b_d = d\xi - z_d$ e $b_e = e\xi - z_e$, donde

$$-\frac{1}{p} < (d\xi - z_d) - (e\xi - z_e) < \frac{1}{p}$$

ou

$$-\frac{1}{p} < (d - e)\xi - (z_d - z_e) < \frac{1}{p}.$$

Fazendo $n := d - e$ e $m := z_d - z_e$, e sendo $n < p$, obtemos

$$-\frac{1}{p} < n\xi - m < \frac{1}{p} \Longrightarrow -\frac{1}{np} < \xi - \frac{m}{n} < \frac{1}{np},$$

e o teorema está demonstrado. $\square$

Exemplo 12. *Como aplicação do Teorema 2.11, apresentamos uma terceira prova, devida a K. Beanland, J. W. Roberts and C. Stevenson [2], de que a função de Thomae* (1) *não é derivável.*

Seja ξ um número irracional. Pelo Teorema 2.11, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in \mathbb{Z}$, com $x_n \leq n$, tal que

$$\left| \frac{x_n}{n} - a \right| < \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Por definição, $t(x_n/n) \geq 1/n$. Assim, para todo n,

$$\frac{|t(\frac{x_n}{n}) - t(\xi)|}{|\frac{x_n}{n} - \xi|} \underbrace{=}_{\text{pois } t(\xi)=0<t(x_n/n)} \frac{t(\frac{x_n}{n})}{|\frac{x_n}{n} - \xi|} \geq 1.$$

Como $x_n/n \to a$ quando $n \to \infty$, para esta aproximação racional de ξ o valor da derivada é $\neq 0$. Entretanto, qualquer aproximação irracional de ξ nos dá que o valor da derivada é zero.

Teorema 2.12 (Teorema de Lagrange)**.** *Para todo número irracional ξ, existem infinitos números racionais $\frac{m}{n}$, em forma irredutível, tais que*

$$\left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2} \tag{14}$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que

$$n \leq p \Longrightarrow n^2 \leq np \Longrightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{np}.$$

Logo, todo número $\frac{m}{n}$ satisfazendo a desigualdade do Teorema 2.11 satisfaz também

$$\left|a - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{np} \leq \frac{1}{n^2},$$

ou seja, $\frac{m}{n}$ também satisfaz a desigualdade (14). Para mostrar que a fração irredutível $\frac{M}{N}$ equivalente a $\frac{m}{n}$ também satisfaz (14), basta observar que

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N} \qquad \text{e} \qquad 0 < N < n,$$

donde

$$\left|\xi - \frac{M}{N}\right| < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2}.$$

Agora, mostraremos que existem infinitos $\frac{m}{n}$ em forma irredutível, satisfazendo (14). Por contradição, vamos supor que exista um número finito de racionais em forma irredutível, digamos

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_i}{n_i},$$

para um certo $i \in \mathbb{N}$. Observe que cada um dos números

$$\xi - \frac{m_1}{n_1}, \xi - \frac{m_2}{n_2}, \xi - \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \xi - \frac{m_i}{n_i} \tag{15}$$

é irracional, logo diferente de zero. Tome $p \in \mathbb{N}$ grande o bastante para que $\frac{1}{p}$ esteja mais próximo de 0 do que todos os números em (15). Pelo Teorema 2.11, existe, para este valor de p que formamos, um racional $\frac{m}{n}$ tal que

$$-\frac{1}{np} < \xi - \frac{m}{n} < \frac{1}{np}.$$

Conforme argumentamos no início desta demonstração, a forma irredutível de $\frac{m}{n}$ satisfaz (14) e, por construção, é diferente de todos os $\frac{m_j}{n_j}$, $1 \leq j \leq i$, em (15). Assim, supor que existam apenas finitos racionais satisfazendo a desigualdade do teorema levou a uma contradição. $\square$

2.2.4 Limitações para aproximações diofantinas

O Teorema 2.12 mostra que, para todo número irracional ξ, existem infinitos racionais $\frac{q}{q}$ com $\text{M.D.C.}\{p, q\} = 1$, a uma distância de ξ menor do que $\frac{1}{q^2}$. O teorema a seguir refina este resultado.

Teorema 2.13 (Teorema de Hurwitz)**.** *Para qualquer número irracional ξ existem infinitos números racionais $\frac{h}{k}$, na forma irredutível, tais que*

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}k^2} < \frac{1}{k^2} \tag{16}$$

A demonstração desse teorema, por ser muito longa, será omitida, podendo ser encontrada em [8].

Se, por acaso, para um dado irracional ξ, trocarmos o expoente 2 em $1/k^2$ no Teorema de Hurwitz 2.13 (ou no Teorema de Lagrange 2.12) por um expoente maior, não temos garantia de infinitos racionais satisfazendo a conclusão do teorema pra ξ. De fato, para um irracional algébrico, $\frac{1}{k^2}$ é o melhor erro para aproximações, como afirma o seguinte resultado, que é o teorema fundamental para aproximações diofantinas de irracionais algébricos.

Teorema 2.14 (Roth [11])**.** *Se ξ é um número irracional algébrico e $\delta > 0$, então para todos, à exceção de uma quantidade finita, os números racionais $\frac{h}{k}$ temos*

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| \geq \frac{1}{k^{2+\delta}} \tag{17}$$

Para irracionais transcendentes, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.15. *Seja a um número real qualquer. Então existem números transcendentes ξ para os quais a desigualdade*

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{k^a} \tag{18}$$

tem infinitas soluções racionais $\frac{h}{k}$.

Os dois teoremas precedentes motivam a seguinte

Definição 2.16. *Para um número irracional ξ, seja*

$$M(\xi) := \{\mu > 0 : \left|\xi - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^\mu} \text{ tem no máximo finitas soluções } m \text{ e } n\}.$$

Definimos a medida da irracionalidade de ξ *como*

$$\mu(\xi) = \inf M(\xi).$$

Caso $M(\xi) = \emptyset$, definimos $\mu(\xi) = \infty$.

Exemplo 13. *Para o número de Liouville α, definido em* (10)*, temos $\mu(\alpha) = \infty$. Isso significa que podemos encontrar infinitas aproximações racionas para α, com a margem de erro que desejarmos. Em geral, números irracionais para os quais $\mu(\xi) = \infty$ são chamados números de Liouville. Pelo Teorema de Roth 2.14, todo número irracional algébrico ξ tem medida de irracionalidade $\mu(\xi) = 2$.*

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

3.1 Uma aplicação das aproximações diofantinas

Teorema 3.1. *Seja t^a definida como em* (2)*.*

(i) Se $a \leq 2$, então t^a não é diferenciável em $\mathbb{R}$.

(ii) Se $a > 2$, t^a, então é diferenciável em qualquer número irracional algébrico.

(iii) Para todo a existem números transcendentes nos quais t^a não é diferenciável.

Demonstração. (i) Assim como a função de Thomae (1), a função t^a é descontínua (e, portanto, não derivável) nos racionais. Seja $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Considere o quociente

$$\Delta(h) := \frac{t^a(\xi + h) - t^a(\xi)}{h}.$$

Nos casos em que h tende para 0 por números racionais, o numerador de $\Delta(h)$ se torna

$$\Delta(h) = \frac{t^a(\xi + h) - t^a(\xi)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

pois, nestes casos, $\xi + h$ é irracional. Logo, se t^a for diferenciável em ξ, sua derivada deve ser zero.

Agora, pelo Teorema de Hurwitz 2.13, podemos escolher uma sequência de irracionais definida por $\lambda_n = \frac{h_n}{k_n} - \xi$, com $\frac{h_n}{k_n} \in \mathbb{Q}$ satisfazendo (16) para $n = 1, 2, 3 \ldots$. Então

$$\begin{aligned}
|\Delta(\lambda_n)| &= \left| \frac{t^a(\xi + \lambda_n) - t^a(\xi)}{\lambda_n} \right| = \left| \frac{t^a(\xi + \lambda_n)}{\lambda_n} \right| = \left| \frac{t^a(\xi + \frac{h_n}{k_n} - \xi)}{\frac{h_n}{k_n} - \xi} \right| = \left| \frac{t^a(\frac{h_n}{k_n})}{\frac{h_n}{k_n} - \xi} \right| \\
&= \left| \frac{\frac{1}{k_n^a}}{\frac{h_n}{k_n} - \xi} \right| = \left| \frac{1}{k_n^a(\frac{h_n}{k_n} - \xi)} \right| \\
&\geq \frac{1}{k_n^a \cdot \frac{1}{k_n^2}} = \frac{k_n^2}{k_n^a} = k_n^{2-a} \\
&\geq 1,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade $k_n^{2-a} \geq 1$ vem do fato de ser $2 - a \geq 0$ e k_n ser inteiro. Assim, para esta sequência de irracionais, encontramos uma sequência de Δ's limitada longe de zero, o que conflita com o valor encontrado anteriormente para h racional. Portanto, a função t^a não é diferenciável em nenhum ponto.

(ii) Seja ξ um número irracional algébrico. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $2 + \delta < a$. Pelo Teorema de Roth 2.14, existe, se muito, uma quantidade finita de racionais m/n tais que $|\xi - m/n| < 1/n^{2+\delta}$. Tomamos $h \neq 0$ tão pequeno que $\xi + h$ não coincide com nenhum destes racionais. Seja $\Delta(h)$ como na parte (i). Então $|\Delta(h)| = 0$ se $\xi + h$ é irracional e, se $\xi + h = m/n$ é racional,

$$|\Delta(h)| = \left|\frac{1}{n^a(m/n - \xi)}\right| \leq \frac{n^{2+\delta}}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2-\delta}}.$$

Esta última fração pode ser feita arbitrariamente pequena se escolhemos n grande o bastante. Quando n cresce, h se torna pequeno, e, assim, temos que $\Delta(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Segue-se que t^a é derivável em ξ, com derivada igual a zero.

(iii) Procedemos de maneira similar à demonstração da parte (i) deste teorema. Dado $a \in \mathbb{R}$, seja ξ um número transcendente para o qual vale o Teorema 2.15. Por um lado, o quociente $\Delta(h)$ é igual a zero, quando $h \neq 0$ é racional. Por outro lado, tomando uma sequência $\lambda_n = \frac{h_n}{k_n} - \xi$, em que os racionais $\frac{h_n}{k_n}$ satisfazem (18), temos

$$\begin{aligned}
|\Delta(\lambda_n)| &= \left|\frac{t^a(\xi + \lambda_n) - f^a(\xi)}{\lambda_n}\right| = \left|\frac{t^a(\frac{h_n}{k_n})}{(\frac{h_n}{k_n}) - \xi}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{1}{k_n^a}}{(\frac{h_n}{k_n}) - \xi}\right| = \left|\frac{1}{k_n^a((\frac{h_n}{k_n}) - \xi)}\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{k_n^a(\frac{1}{k_n^a})}\right| = \left|\frac{1}{k_n^a(\frac{1}{k_n^a})}\right| \\
&= \frac{k_n^a}{k_n^a} = 1.
\end{aligned}$$

A sequência $(\Delta(\lambda_n))$ não pode convergir para zero, o que impede a função t^a de ser diferenciável em ξ. □

3.2 Função de Thomae modificada a partir de uma sequência

Seja λ uma função positiva definida no conjunto de todos os inteiros ≥ 0. Definimos a seguinte modificação da função de Thomae:

$$t_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ \frac{1}{\lambda(n)}, & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ M.D.C.}\{p, q\} = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{19}$$

Poder-se-ia conjecturar que, para alguma função $\lambda(n)$ que cresça muito rapidamente, como $\lambda(n) = n^n$, a função t_λ é diferenciável nos irracionais. Este, contudo, não é o caso. Na verdade, o Teorema 7 de [9] estabelece o seguinte: *Com t_λ definida como em* (19)*, existe um conjunto não enumerável de números transcendentes no qual t_λ falha em ser derivável, não importa como λ é escolhida.* Infelizmente, a demonstração deste resultado repousa numa generalização do Teorema 2.15, a que não tivemos acesso.

Nem tudo, entretanto, está perdido! Pois este resultado sugere investigarmos o problema da diferenciabilidade da função $t_{(a_i)}$ definida como em (3) para uma sequência (a_i) que decresce para zero. Neste contexto, podemos provar o seguinte

Teorema 3.2. *Seja (a_i) uma sequência de reais que decresce para zero. Então existe um subconjunto denso não enumerável $A_{(a_i)} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no qual a função $t_{(a_i)}$ definida com em* (3) *não é diferenciável.*

O Teorema 3.2 é consequência imediata do lema a seguir, que estabelece, na verdade, um resultado mais geral.

Lema 3.1. *Seja f uma função em $\mathbb{R}$ que é positiva nos racionais e zero nos irracionais. Então existe um conjunto de irracionais denso e não enumerável no qual f não é diferenciável.*

Demonstração do Lema 3.1. Seja dada uma função $f(x)$ em $\mathbb{R}$, positiva nos racionais e 0 nos irracionais. Seja (r_i) uma enumerção dos racionais. Vamos definir recursivamente uma sequência convergente de racionais. Tome $x_1 \in \mathbb{Q}$. Podemos obter um intervalo fechado I_1 tal que, para todo $x \in I_1$, temos

$$f(x_1) \geq |x_1 - x|.$$

Escolhemos, agora, $x_2 \in \mathbb{Q} \cap I_1$ tal que $x_2 \neq r_1, r_2$. Para este x_2, selecionamos um intervalo fechado $I_2 \subset I_1$, contendo x_2 e com $\text{comprimento}(I_2) < \{f(x_2), 1/2, |r_1 - x_2|, |r_2 - x_2|\}$. Continuando com este processo, tendo definido I_n e x_n, definimos x_{n+1} e I_{n+1} com as seguintes propriedades:

1. I_{n+1} é um intervalo fechado;

2. $I_{n+1} \subset I_n$;

3. $\text{Comprimento}(I_{n+1}) < \frac{1}{n}$;

4. $x_{n+1} \in I_{n+1} \cap \mathbb{Q}$ e, para todo $x \in I_{n+1}$,

$$f(x_{n+1}) \geq |x_{n+1} - x|;$$

5. $r_i \notin I_{n+1}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Pela construção acima, os intervalos I_j constituem uma sequência descrescente de intervalos fechados e não vazios, com comprimento convergindo para zero. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados (Proposição 2.1), existe $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. É claro que $|x_i - a| \leq 1/i$, donde $x_i \to a$. Ademais, pelo critério 5 da condição anterior, garantimos que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Agora, para testar a diferenciabilidade da função, suponhamos que f que seja diferenciável em a. Sendo este o caso, por um lado, a derivada em a deve ser 0 (como vemos usando qualquer aproximação irracional de a). Por outro lado, tomando a aproximação racional x_i de a construída anteriormente, olhemos para o quociente

$$\frac{|f(x_i) - f(a)|}{|x_i - a|}.$$

Pela definição de f e por termos $a \in I_i$ para todo i, vem

$$\frac{|f(x_i) - f(a)|}{|x_i - a|} = \frac{f(x_i) - 0}{|x_i - a|} = \frac{f(x_i)}{|x_i - a|} \geq \frac{|x_i - a|}{|x_i - a|} = 1.$$

Assim, f não é diferenciável em a.

Seja A o conjunto de todos os irracionais a nos quais f não é diferenciável. A construção que fizemos acima assegura que A é denso. Com efeito, dada um intervalo aberto qualquer $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$, tomando um racional $x_1 \in I$, podemos selecionar um intervalo fechado I_1, contendo x_1 e no qual $|x - x_1| \leq f(x_1)$. A partir daí, empreendemos a construção precedente para produzir um ponto irracional a no qual f não é derivável, i.e., $a \in A \cap I$, o que mostra a densidade de A.

Supondo que (b_i) é uma enumeração de A, incluímos, na construção precedente, a restrição $b_i \notin I_{n+1}$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$, e obtemos, dessa maneira, um ponto $a \notin A$ no qual f não é diferenciável, contradizendo o fato de A ser o conjunto de todos tais pontos. Logo, A é não enumerável. $\square$

Fixando a priori um conjunto enumerável, podemos construir uma função positiva nos racionais, 0 nos irracionais e diferenciável no conjunto fixado, conforme garante o seguinte

Teorema 3.3. *Seja (a_i) uma sequência de irracionais. Então existe uma função que é positiva nos racionais, 0 nos irracionais e diferenciável no conjunto $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstração. Seja dada $(a_i) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, veja que, uma vez fixado $n \in \mathbb{Z}$, o conjunto $G_{i,n} := \{|m/n - a_i| : \text{M.D.C.}\{m, n\} = 1, \text{ e } m/n \text{ satifaz (14)}\}$ é finito. Assim, faz sentido definirmos $g_i(n) := \min G_{i,n}$ e, para $i \leq n$, $g(n) := \min g_i(n)$.

Definimos, agora, a função

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = 0, \\ (g(n))^2, & \text{se} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ M.D.C.}\{p, q\} = 1,\ q > 0, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Afirmamos que esta f é diferenciável em $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. Para mostrar isso, fixe $i \in \mathbb{N}$. Para m e n primos entre si, com $n \geq i$, perceba que $f(a_i) = 0$, $f(\frac{m}{n}) = (g(n))^2$ e que, por definição,

$$g(n) \leq g_i(n) \leq \left| \frac{m}{n} - a_i \right|.$$

Daí, temos

$$\frac{|f(\frac{m}{n}) - f(a_i)|}{|\frac{m}{n} - a_i|} = \frac{f(\frac{m}{n})}{|\frac{m}{n} - a_i|} \leq \frac{(g(n))^2}{g_i(n)} \leq \frac{(g_i(n))^2}{g_i(n)} = g_i(n).$$

Como, pelo Teorema 2.12, $g_i(n) \to 0$ à medida que $n \to \infty$, temos que a f definida acima é diferenciável em a_i, com derivada $f'(a_i) = 0$.

Para encerrar a prova, observe que claramente f é positiva nos racionais e 0 nos irracionais. $\square$

Prosseguindo, obtemos o seguinte

Teorema 3.4. *Seja (a_i) uma sequência de reais decrescendo para 0, tal que $\liminf a_n n^2 > 0$. Então $t_{(a_i)}$ definida em (3) não é diferenciável em nenhum ponto.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pelo Teorema 2.12,

$$\Delta_n := \frac{|t_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - t_{(a_i)}(a)|}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{|t_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - 0|}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{t_{(a_i)}(\frac{m}{n})}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{a_n}{|\frac{m}{n} - a|} > n^2 a_n$$

vale para infinitos racionais irredutíveis m/n.

Como $\liminf a_n n^2 > 0$, existe uma sequência de racionais se aproximando de a que garante que $t'_{(a_i)}(a)$ não é zero (pois $\Delta_n \to \liminf a_n n^2 > 0$). Isso contraria o fato de dever ser $t'_{(a_i)}(a) = 0$ ao longo de aproximações irracionais. Portanto, $t_{(a_i)}$ não é diferenciável em nenhum ponto. $\square$

Definição 3.5. *Seja (a_i) uma sequência de reais que decresce para zero. Definimos:*

$$\begin{aligned} E(a_i) &:= \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 1 \text{ e } \lim a_n n^\alpha = 0\}, \ \alpha(a_i) := \sup E(a_i), \\ F(a_i) &:= \{\beta \in \mathbb{R} : \beta \geq 1 \text{ e } \liminf a_n n^\beta = 0\}, \ \beta(a_i) := \sup F(a_i). \end{aligned}$$

Usamos a convenção $\sup \emptyset = -\infty$. *Observe que $E(a_i) \subset F(a_i)$ e, portanto, $\alpha(a_i) \leq \beta(a_i)$.*

Exemplo 14. *Temos $\alpha(e^{-n}) = \beta(e^{-n}) = \infty$. Para $k > 1$, vale $\alpha(n^{-k}) = \beta(n^{-k}) = k$. Para a sequência (a_i) por $a_1 = a_2 = 1$ e*

$$a_n = \frac{1}{2^{2^{k+1}}} \text{ para } k \text{ tal que } 2^{2^{k-1}} + 1 \leq n \leq 2^{2^k},$$

temos $\beta(a_i) = 4$ e $\alpha(a_i) = 2$.

A Definição 3.5 permite relacionar a diferenciabilidade de $t_{(a_i)}$ num irracional a com a medida de irracionalidade deste número (veja a Definição 2.16).

Teorema 3.6. *Sejam (a_i) uma sequência de reais que decresce para zero e $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(i) Se $\mu(a) < \alpha(a_i)$, então $t_{(a_i)}$ é diferenciável em a.

(ii) Se $\mu(a) > \beta(a_i)$, então $t_{(a_i)}$ não é diferenciável em a.

Demonstração. (i) Suponhamos que $\mu(a) < \alpha(a_i)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(a) + \varepsilon < \alpha(a_i)$. A seguinte desigualdade vale para todos os racionais irredutíveis m/n:

$$\frac{|f_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - f_{(a_i)}(a)|}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{f_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - 0}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{a_n}{|\frac{m}{n} - a|} \leq n^{\mu(a)+\varepsilon} a_n.$$

Agora, como $\mu(a) + \varepsilon < \alpha(a_i)$, então $\lim_n n^{\mu(a)+\varepsilon} a_n = 0$. É claro que

$$[t_{(a_i)}(x) - t_{(a_i)}(a)]/[x - a] = 0$$

quando x é irracional. Segue-se que $t_{(a_i)}$ é derivável em a, com $t'_{(a_i)}(a) = 0$.

(ii) Suponhamos que $\mu(a) > \beta(a_i)$. Seja então $\varepsilon > 0$ tal que $\mu(a) > \beta(a_i) + \varepsilon$; daí, $n^{\mu(a)} > n^{\beta(a_i)+\varepsilon}$. Assim, temos:

$$\frac{|t_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - t_{(a_i)}(a)|}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{t_{(a_i)}(\frac{m}{n}) - 0}{|\frac{m}{n} - a|} = \frac{a_n}{|\frac{m}{n} - a|} > n^{\beta(a_i)+\varepsilon} a_n,$$

para infinitos inteiros m e n primos entre si. Por definição de $\beta(a_i)$, temos também que $\liminf_n n^{\beta(a_i)+\varepsilon} a_n > 0$. Argumentando como na prova do Teorema 3.4, concluímos que $t_{(a_i)}$ não é derivável em a. $\square$

4 Conclusão

Neste trabalho, relacionamos, através do estudo da função de Thomae e de algumas de suas modificações, as aproximações diofantinas vistas em Teoria dos Números com os conceitos de continuidade e diferenciabilidade da Análise na reta (dentre outros importantes conceitos analíticos).

Como vimos, o fato de uma função real de uma variável real ser contínua em determinado número real admite uma formulação em termos de sequência convergentes. O mesmo vale para a diferenciabilidade. Isso faz com que as sequências convergentes desempenhem uma papel fundamental na Análise. Ora, uma sequência que converge para dado número real é uma maneira de aproximar este número. O problema de aproximações é particularmente relevante quando o número em questão é irracional. Neste caso, o problema é tratado pelas aproximações diofantinas. Assim, a relação entre Análise e aproximações diofantinas é bastante natural e, como vimos, bastante profícua para abordar a diferenciabilidade das funções (1), (2) e (3).

Em suma, a investigação de todos estes fatos constituiu um rico itinerário pela Análise e pela Teoria dos Números. Esperamos poder continuar os estudos iniciados neste trabalho em um curso de pós graduação.

Referências

[1] ABBOTT, S. *Understanding Analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2010.

[2] BEANLAND, K.; ROBERTS, J.W.; STEVENSON, C. Modifications of Thomae's Function and Differentiability. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 116, No. 6 (Jun. - Jul., 2009), pp. 531-535.

[3] DUNHAM, W. Nondifferentiability of the Ruler Function. *Mathematics Magazine*, Vol. 76, No. 2. (Apr., 2003), pp. 140-142.

[4] FIGUEIREDO. D.G. *Números Irracionais e Transcendentes.* 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[5] LIMA, E.L. *Curso de Análise*. Volume 1. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

[6] __________. *Análise Real*. Volume 1 – Funções de uma variável. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] NIVEN, I. *Numbers: Rational and Irrational.* New Mathematical Library. New York: Random House, 1961.

[8] ________. *Diophantine Approximations.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Number 14. New York: John Wiley & Sons, 1963.

[9] NYMANN, J.E. An Application of Diophantine Approximation. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 76, No. 6 (Jun. - Jul., 1969), pp. 668-671.

[10] PORTER, G.J. On the Differentiability of a Certain Well-Known Function. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 69, No. 2 (Feb., 1962), p. 142.

[11] ROTH, K.F. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2 (1955) 1-20.

[12] SAGHER, Y. Counting the Rationals. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 96, No. 9 (Nov., 1989), p. 823.