UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTUDANDO OS FATORES INTEGRANTES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL EXATA

AYLTON BELO DA SILVA

CAMPINA GRANDE
2019

AYLTON BELO DA SILVA

ESTUDANDO OS FATORES INTEGRANTES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL EXATA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE
2019

S586e Silva, Aylton Belo da.

Estudando os fatores integrantes de uma equação diferencial exata [manuscrito] / Aylton Belo da Silva. - 2019.

38 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Equação diferencial. 2. Fatores integrantes. 3. Espaços métricos. I. Título

21. ed. CDD 515.35

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

AYLTON BELO DA SILVA

ESTUDANDO OS FATORES INTEGRANTES DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL EXATA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 02/07/2019

BANCA EXAMINADORA

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Israel Buriti Galvão

Prof. Dr. Israel Buriti Galvão
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Onildo dos Reis Freire

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedicatória

À minha querida família e
amigos, DEDICO.

“A matemática é o alfabeto
com o qual Deus escreveu o
Universo”
Galileu Galilei

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que concedeu em minha vida, e por estar me ajudando na realização de tal conquista. Agradeço aos meus familiares, em especial à minha mãe Susana Belo e meu pai Severino do Ramo que sempre batalharam para me dar a melhor educação e me deram apoio para ir em busca do meu sonho. A meus avós Dione Correia, Manuel Correia e Maria Daluz por tudo que fizeram durante esse tempo por mim. Aos meus irmãos, Alison Belo, Amanda Belo, meu sobrinho Miguel, meus tios e padrinhos, por todo o apoio.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas da turma matemática 2014.2 e aqueles que encontrei durante a caminhada, os quais estiveram presentes no decorrer da minha graduação e tiveram sua parcela de contribuição na realização desta conquista, em especial a meus amigos Talhaine Tomaz, Camila Nunes, Elisiane Santana, Viviane Lúcia, Bruno Mizael, Eduardo Júnior, Gerlândia Marinho e Bianca Silvinio, por todos os momentos incríveis que vivemos juntos, e que em todo esses anos me ajudaram, em todos os momentos possíveis.

Agradeço a toda equipe do departamento e da coordenação de matemática da UEPB, a todos os professores em que tive o privilegio de ser aluno, pois foram muito importantes para a minha formação, e me fizeram evoluir como profissional e pessoa, em especial a minha querida orientadora Profa. Dra. Emanuela Régia por todo o apoio e por ter dedicado seu tempo para me ajudar na realização deste trabalho de conclusão de curso.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo acerca dos fatores integrantes de uma Equação Diferencial Exata. Especificamente, apresentando condições para que uma determinada função seja um fator integrante de uma equação exata. Para isso utilizou-se alguns conceitos e resultados da Análise Matemática, das Equações Diferencias Ordinárias, Espaços Métricos e alguns resultados do Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Equação diferencial exata. Fatores integrantes. Espaços Métricos.

Abstract

The present work has as objective to carry out a study on the factors integrating for an exact differential equation. More specifically, the training conditions to a function cam be integrated from an exact equation. For this purpose, some materials and results of the Mathematical Analysis, of Ordinary Differences Equations, Metric Spaces and Calculus results are used.

Keywords: Exact differential equation. Integrating factors. Metric Spaces.

Sumário

Introdução

Uma Equação Algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto que uma Equação Diferencial - ED é uma equação em que as incógnitas são funções e, ao invés de potências numéricas, os elementos da equação envolvem derivadas e expressões das funções procuradas, mais geralmente:

$$f(y^n, ..., y, x) = c. \tag{1}$$

O Estudo das Equações Diferenciais começou no século XVII com o estudo do Cálculo por Newton e Leibniz, sabe-se ainda que as primeiras aplicações foram nas Ciências Físicas, mas posteriormente várias aplicações foram feitas em outras áreas.

As Equações Diferenciais, em geral, são classificadas como Ordinárias (quando as derivadas que aparecem são ordinárias, ou seja, de uma variável apenas) ou Parciais (quando aparecem derivadas parciais envolvendo mais de uma variável na equação). Além disso, as ED's podem ser classificadas quanto a ordem, que corresponde a ordem da maior derivada que aparece na equação.

Dentre as Equações Diferenciais de Primeira Ordem, podemos encontrar as Equações Exatas, que são equações do tipo

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2}$$

em que M, N são funções de classe C^1 em algum subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e satisfazem alguma condição pedida. Embora essa equação envolva funções de duas variáveis, podemos ver a variável y como uma função de x e a solução é dada implicitamente. Há algumas funções que, quando multiplicadas por uma equação da forma acima, a transforma (ou permanece) em uma equação exata, à estas funções damos o nome de Fator Integrante.

No presente trabalho, vamos apresentar resultados acerca dos fatores integrantes de uma Equação Diferencial Exata e condições para que uma determinada função da forma $g \circ f$, seja um fator integrante da mesma; que é o principal Teorema do nosso trabalho. Para provar tal Teorema seguiu-se o que foi feito por Mowaffaq Hajja, no artigo The Integrating Factors of an Exact Differential Equation, conforme a referência [10].

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentamos um pouco da história das Equações Diferencias; No Capítulo 2, apresentamos conceitos e resultados que nos ajudarão a compreender as provas dos dois teoremas principais deste trabalho. Tratamos das equações diferencias exatas, diferencial total, diferencial exato, curvas de nível de uma equação diferencial exata, pontos singulares, conjuntos enumeráveis, a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, conjuntos densos, a densidade de $\mathbb{Q}$, e espaços métricos. No Capítulo 3 e último, apresentaremos alguns resultados presentes no artigo base para nosso trabalho conforme a referência [10] e a prova dos dois teoremas citados anteriormente.

Capítulo 1

Uma Breve história Acerca das Equações Diferenciais

Para uma abordagem histórica, vamos utilizar o livro Equações Diferenciais com Aplicações, cujo os autores do mesmo são Rodney Carlos e Wilson Castro, conforme a referência [1].

O Cálculo Diferencial e Integral e as Equações Diferencias nasceram juntos e os dois Teoremas básicos do Cálculo estão intimamente ligados à solução das Equações Diferencias mais simples, por exemplo

$$x'(t) = f(t), \tag{1.1}$$

ou seja, obter a função incógnita $x(t)$, uma vez conhecendo a sua derivada $f(t)$. O Teorema Fundamental do Cálculo nos fornece uma solução

$$x(t) = \int_a^t f(z)dz \tag{1.2}$$

(se f for contínua), e o Teorema do Valor Médio assegura que todas as suas soluções podem ser escritos na forma

$$x_c(t) = c + \int_a^t f(z)dz, \tag{1.3}$$

onde c é uma constante real.

Segundo Rodney e Wilson, conforme a referência [1], a grande motivação inicial para o estudo da Equações Diferencias veio da Mecânica Clássica.

Com o aparecimento do Cálculo no final do século XVII por obra de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), inúmeros problemas mecânicos, puderam ser então modelados matematicamente na forma de Equações Diferenciais.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo encontram-se definições e resultados, os quais darão base para a compreensão dos Teoremas presentes no capitulo 3.

2.1 Equações Diferencias Exatas

Nesta seção estuda-se as equações diferencias exatas, as quais são o objeto de estudo principal do nosso trabalho. Para isso vamos fazer uso das definições e resultados presentes no livro de Kleber Daum Machado, Equações Diferenciais, e no livro do Boyce e Diprima, Equacões Diferencias Elementares, conforme as referências [9] e [2], respectivamente.

Sejam $M, N : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1, em que D é um aberto de $\mathbb{R}^2$, a equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.1}$$

é um tipo de equação diferencial de primeira ordem. Considerando uma equação escrita na forma 2.1, se

$$\frac{dM}{dy}(x,y) = \frac{dN}{dx}(x,y), \tag{2.2}$$

então a equação dada recebe o nome de Equação Diferencial Exata.

Para entender o porquê do nome "Equação Diferencial Exata" considere as seguintes definições:

Definição 2.1 (Diferencial Total)**.** *Seja f uma função de duas variáveis reais, definida num subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, de forma que f tenha derivadas parciais primeiras* *contínuas. A diferencial total Df da função f é definida por*

$$Df(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y)dx + \frac{df}{dy}(x,y)dy, \text{ para todo } (x,y) \in D.$$

Exemplo 2.1. Considere a função

$$f(x,y) = 3x^2y^3 - 2x^2y^4, \tag{2.3}$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Usando a Definição 2.1,

$$Df(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y)dx + \frac{df}{dy}(x,y)dy, \tag{2.4}$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(x,y) &= 3.2xy^3 - 2.2xy^4 && (2.5)\\ &= 6xy^3 - 4xy^3, && (2.6) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{df}{dy}(x,y) &= 3x^2.3y^2 - 2x^2.4y^3 && (2.7)\\ &= 9x^2y^2 - 8x^2y^3. && (2.8) \end{aligned}$$

Daí, substituindo em 2.4, tem-se

$$\begin{aligned} Df(x,y) &= \frac{df}{dx}(x,y)dx + \frac{df}{dy}(x,y)dy && (2.9)\\ &= (6xy^3 - 4xy^3)dx + (9x^2y^2 - 8x^2y^3)dy. && (2.10) \end{aligned}$$

Definição 2.2 (Diferencial Exata)**.** *Sejam M, N funções contínuas em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. A expressão*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{2.11}$$

é chamada Diferencial Exata se existe uma função f*, tal que*

$$\frac{df}{dy}(x,y) = M(x,y), \frac{df}{dx}(x,y) = N(x,y). \tag{2.12}$$

Comparando as expressões das Definições 2.1 e 2.2, tem-se que uma expressão que seja uma Diferencial Exata corresponde à Diferencial Total de uma dada função sobre uma curva de nível, isto é, sobre os pontos (x, y) *que satisfazem*

$$f(x,y) = k \tag{2.13}$$

com $k \in \mathbb{R}$*, constante. Por exemplo, considere* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *na circunferência de raio* $R > 0$*. Isto é*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = R^2. \tag{2.14}$$

Sua Diferencial Total , nesse conjunto, é igual a zero, pois f é constante, ou seja,

$$Df(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y)dx + \frac{df}{dy}(x,y)dy = 0. \tag{2.15}$$

Como,

$$\frac{df}{dx}(x,y) = 2x \text{ e } \frac{df}{dy}(x,y) = 2y, \tag{2.16}$$

temos,

$$Df(x,y) = 2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0. \tag{2.17}$$

De modo geral, se f é tal que $f(x,y) = k$, com k constante, então

$$Df(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y)dx + \frac{df}{dy}(x,y)dy = 0, \tag{2.18}$$

que é uma expressão que pode ser escrita na forma de uma Diferencial Exata,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{2.19}$$

A partir das considerações acima, tem-se a seguinte definição

Definição 2.3. *(Equação Diferencial Exata) Sejam f, M, N funções definidas no mesmo conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, de classe C^1. Se*

$$\frac{df}{dy}(x,y) = M(x,y) \ e \ \frac{df}{dx}(x,y) = N(x,y) \tag{2.20}$$

e

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.21}$$

Então essa equação é chamada de Equação Diferencial Exata.

O teorema a seguir mostra a equivalência entre as duas definições.

Teorema 2.1. *Sejam M, N, M_y, N_x funções continuas em uma região $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}; a < x < b \ e \ c < y < d\}$. A equação*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.22}$$

é exata se

$$M_y = N_x \tag{2.23}$$

ou existe uma função f satisfazendo

$$f_x = M \ e \ f_y = N. \tag{2.24}$$

Ou seja, se os elementos da equação satisfazem uma das condições, então satisfazem ambas.

Prova. Considere inicialmente que a equação diferencial 2.22 seja exata, ou seja,

$$f_x(x,y) = M(x,y) \text{ e } f_y(x,y) = N(x,y), \tag{2.25}$$

em R. Derivando a primeira destas equações com respeito a y e a outra com respeito a x, obtendo

$$f_{xy}(x,y) = M_y(x,y) \text{ e } f_{yx}(x,y) = N_x(x,y), \tag{2.26}$$

para todo $(x, y) \in R$. No entanto, graças a regularidade das funções, a ordem das derivadas pode ser invertida, ou seja,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y). \tag{2.27}$$

Assim,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \tag{2.28}$$

para $(x, y) \in R$,ou seja, se M, N satisfazem (2.24), então satisfazem (2.23).

Reciprocamente, inicia-se com a hipótese de que a condição

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \tag{2.29}$$

é satisfeita para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, deve-se provar que existe uma função f tal que as equações

$$f_x(x, y) = M(x, y), f_y(x, y) = N(x, y), \tag{2.30}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$.

Suponha que

$$f_x(x, y) = M(x, y), \tag{2.31}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$, seja satisfeita, pode-se integrar essa equação em x, obtendo

$$\int f_x(x, y)dx = \int M(x, y)dx, \tag{2.32}$$

ou, ainda,

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + g_1(y), \tag{2.33}$$

para todo $(x, y) \in R$. Assim, obtem-se

$$f(x, y) = Q(x, y) + g(y), \tag{2.34}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$, onde Q é uma primitiva para M.

A função $g(y)$ na equação 2.34 é uma função diferencial arbitrária, fazendo o papel de constante de integração. Agora, derivando 2.34 com respeito a y e igualando o resultado a N, obtemos

$$f_y(x, y) = Q_y(x, y) + g'(y) = N(x, y),$$

para todo $(x, y) \in R$. Então, resolvendo para $g'(y)$,temos:

$$g'(y) = N(x, y) - Q_y(x, y). \tag{2.35}$$

Para determinar g da equação (2.34), a expressão à direita do sinal de igualdade na equação (2.12), apesar de sua aparência, tem que ser uma função só de y. Para verificar que isso é verdade, derivando-a com respeito a variável x, obtendo assim,

$$0 = N_x(x, y) - \frac{dQ_y}{dx}(x, y). \tag{2.36}$$

Trocando a ordem das derivadas do segundo termo da equação acima, temos:

$$0 = N_x(x, y) - \frac{dQ_x}{dy}(x, y), \tag{2.37}$$

como $Q_x(x, y) = M(x, y)$, tem-se

$$0 = N_x(x, y) - M_y(x, y). \tag{2.38}$$

Logo, de sua forma aparente, a expressão à direita da equação (2.34) não depende de fato de x. Assim, encontramos g integrando a equação (2.12)

$$g(y) = \int g'(y)dy = \int (N(x, y) - Q_y(x, y))dy. \tag{2.39}$$

Daí substituindo (2.39) em (2.34), obtemos a função f.

$$f(x, y) = Q(x, y) + \int (N(x, y) - Q_y(x, y))dy. \tag{2.40}$$

2.2 Tópicos de Análise Matemática

As definições e resultados presentes nesta seção, podem ser encontrados nos livros Curso de Análise vol.1 de Elon Lages lima, Análise Matemática para Licenciatura de Geraldo Ávila e no livro Introdução à Análise Real de Aldo Bezerra e Osmundo Alves, conforme as referências [6], [5] e [8].

Os resultados apresentados aqui, em sua maioria, não contém as respectivas demonstrações, para que não fujamos da proposta do trabalho, mas elas podem ser encontradas nas referências citadas acima.

Teorema 2.2. *(Teorema da Função Implícita) Seja f uma função com derivadas parciais contínuas num conjunto aberto U contido em $\mathbb{R}^2$. Seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Se*

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0,$$

então existem intervalos abertos I e J com $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, tais que, para cada $x \in I$, existe um único $y = h(x) \in J$, que satisfaz $f(x, h(x)) = 0$. A função $h : I \longrightarrow J$ é diferenciável e, para qualquer $x \in I$, sua derivada pode ser obtida pela

$$\frac{dh}{dx} = \frac{-\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dy}}.$$

Definição 2.4. *(Conjuntos Enumeráveis) Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Exemplo 2.2. O conjunto $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dos números pares é enumerável. Neste caso, a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

Exemplo 2.3. O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Proposição 2.1. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ uma sequência de conjuntos enumeráveis, então $\cup_{i=1}^{\infty} X_i$ é enumerável.*

Proposição 2.2. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e I é enumerável, então $I = [a, a]$, para algum $a \in \mathbb{R}$, isto é, I contém um único ponto.*

Proposição 2.3. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Prova. Se X e Y são enumeráveis, então existem bijeções

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X,$$

e

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow Y,$$

logo

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y,$$

dada por $h(m, n) = (f(m), g(n))$ é bijetora. Portanto, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para isso considere a aplicação

$$\tilde{h} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

dada por $\tilde{h}(m, n) = 2^m 2^n$. Pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, $\tilde{h}$ é injetiva. Logo $\tilde{h} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow Im(\tilde{h})$ é bijeção. Como $Im(\tilde{h}) \subset \mathbb{N}$, da Proposição 2.3, conclui-se $Im(\tilde{h})$ enumerável e, portanto, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Exemplo 2.4. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável.

De fato, pela Proposição anterior que nos diz que o produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis, também é enumerável, e do Exemplo 2.3, segue que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ é enumerável

Definição 2.5. *Seja $D \subset \mathbb{R}$. Dize-se que D é denso em $\mathbb{R}$ se para todo intervalo aberto (a, b) de $\mathbb{R}$ temos $D \cap (a, b) \neq \varnothing$.*

Exemplo 2.5. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$.

Definição 2.6 (Vizinhança)**.** *Chama-se vizinhança de um ponto, qualquer conjunto que contenha um ponto a interiormente. Dado $\varepsilon > 0$, o intervalo $V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

Teorema 2.3. *Sejam f uma função contínua definida num conjunto aberto e conexo $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f' = 0$ em D. Então, f é constante.*

2.3 Tópicos de Espaços Métricos

O exposto nessa seção irá ajudar a compreender o segundo teorema do próximo capítulo. As definições e resultados podem ser encontrados no livro Espaços Métricos de Elon Lima conforme referência [7].

Definição 2.7. *Seja X um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *,para todo $x, y \in X$*
2. $d(x, y) = 0$ *se, e somente se,* $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *para todo* $x, y \in X$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *para todo* $x, y, z \in X$ *(Desigualdade Triangular).*

Exemplo 2.6. Como $x-y \geq 0$, então $d(x, y) \geq 0$. Por outro lado $|x-y| = 0 \iff x = y$, logo $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

Definição 2.8. *Um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Quando não houver confusão, identifica-se o Espaço Métrico (M, d) apenas pelo conjunto M.

Exemplo 2.7. O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é o exemplo mais comum de espaço métrico, considerando a métrica

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.9 (Conjunto Conexo)**.** *Diz-se que um conjunto E em um espaço métrico X é conexo se não existem em X dois subconjuntos A e B abertos e disjuntos tais que $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$ e $E \subset A \cup B$.*

Exemplo 2.8. Os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são desconexos.

Definição 2.10 (Conjunto Aberto)**.** *Sejam um espaço métrico M e um subconjunto $A \subset M$, dizemos que A é aberto em M se todos seus pontos forem pontos interiores. Assim, A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$, podemos obter um raio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.*

Definição 2.11 (Conjunto Fechado)**.** *Dizemos que um conjunto F contido no espaço métrico M é fechado em M, se seu complementar $M - F$ for aberto em M.*

Exemplo 2.9. A Bola fechada de centro a e raio r que é o conjunto $B[a, r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a, ou seja

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) < r\}$$

é um conjunto fechado.

Definição 2.12. *Sejam* $(M, d), (N, d')$ *espaços métricos. Diz-se que a aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é contínua no ponto* $a \in M$ *quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Dizemos que f *é contínua, quando* f *é contínua em todo ponto* $a \in M$.

Proposição 2.4. *Sejam* (M, d) *um espaço métrico. A métrica* $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua.*

Capítulo 3

Os Fatores Integrantes de Uma Equação Diferencial Exata

Tudo o que foi feito até o presente momento no nosso estudo teve como propósito nos dar base para compreender melhor este capítulo que se inicia. Vamos fazer uma abordagem didática do artigo intitulado The Integrating Factors of an Exact Differential Equation conforme referência [3].

Em todo este capítulo, a menos de menção contrária, D é um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^2$. As aplicações M, N, F, μ são funções a valores reais definidas em D de classe C^1, ou seja, elas tem as derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D. Vamos fazer uso da notação F_x para a derivada de F com respeito a x e F_y para a derivada parcial de F com respeito a variável y.

Definição 3.1 (Fator integrante)**.** *Um fator integrante μ é uma função que multiplicada pela equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{3.1}$$

a transforma numa equação exata, ou seja, na equação

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0, \tag{3.2}$$

em que existe uma função f satisfazendo.

$$\frac{df}{dx}(x,y) \;=\; \mu(x,y)M(x,y) \;\; e \;\; \frac{df}{dy}(x,y) = \mu(x,y)N(x,y), \tag{3.3}$$

para todo $(x, y) \in D$.

A função f, por ser definida por uma integral, é única a menos de uma constante aditiva, e é conhecida por potencial de 3.1. A solução geral de 3.1, conforme a teoria clássica que pode ser encontrada em Boyce e Diprima [2] e Machado [9] , é dada implicitamente pela condição $f(x, y) = c$, em que c é uma constante arbitrária.

Observemos que uma equação diferencial exata permanece exata quando multiplicamos uma constante arbitrária pela equação, em outras palavras todas a contantes são fatores integrantes de uma equação diferencial exata. Podemos pensar que apenas as constantes são fatores integrantes de uma equação diferencial exata. Mas observemos que, se uma equação diferencial exata tem potencial f, então podemos escrever 3.1 como

$$f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = 0. \tag{3.4}$$

Assim, ao multiplicar a equação acima por f encontramos outra equação diferencial exata,

$$f(x, y)f_x(x, y)dx + f(x, y)f_y(x, y)dy = 0, \tag{3.5}$$

que é dada pela função potencial $\frac{f^2}{2}$.

De fato, temos, para $(x, y) \in D$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f^2}{2}\right)(x, y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(f^2)(x, y) = \frac{1}{2}2f(x, y)f_x(x, y) = f(x, y)f_x(x, y) \tag{3.6}$$

e, analogamente,

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{f^2}{2}\right)(x, y) = f(x, y)f_y(x, y). \tag{3.7}$$

De modo geral,

$$f^n(x, y), \tag{3.8}$$

são fatores integrantes de 3.1. O mesmo vale para qualquer função $g \circ f$ onde g é uma função de valor real que é continuamente diferenciável na imagem de f.

Isso pode levantar a possibilidade de que todos os fatores integrantes de 3.1 são da forma $g \circ f$. No exemplo a seguir mostraremos que isso não é necessariamente verdade. Ademais, podemos impor condições sobre f a fim de tornar essa ideia verdadeira. Essas condições tornam-se um Teorema na seção que segue.

Exemplo 3.1. Considere a seguinte equação diferencial

$$4x(x^2 + y^2 - 1)dx + 4y(x^2 + y^2 - 1)dy = 0. \tag{3.9}$$

Tem-se

$$M(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 1) \text{ e } N(x, y) = 4y(x^2 + y^2 - 1). \tag{3.10}$$

Derivando M e N com respeito a y e x respectivamente, tem-se

$$M_y(x, y) = 4x \cdot 2y = 8xy \text{ e } N_x(x, y) = 4y \cdot 2x = 8xy. \tag{3.11}$$

Assim,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y). \tag{3.12}$$

Logo a equação é exata. Agora, integrando M em relação a x, a fim de encontrarmos a função potencial f, tem-se

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \int M(x, y)dx && (3.13)\\
&= \int 4x(x^2 + y^2 - 1)dx && (3.14)\\
&= \int (4x^3 3 + 4xy^2 - 4x)dx && (3.15)\\
&= \int 4x^3 dx + \int 4xy^2 dx - \int 4xdx + \int 4xy^2 dx - \int 4xdx && (3.16)\\
&= 4\int x\ 3dx + 4y^2 \int xdx - 4\int xdx && (3.17)\\
&= 4x^4/4 + 4y^2x^2/2 - 4x^2/2 + h(y) && (3.18)\\
&= x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + h(y). && (3.19)
\end{aligned}$$

Agora, derivando f em relação a y, tem-se

$$f_y(x,y) = 4x^2y + h'(y). \tag{3.20}$$

Daí, igualando $f_y = N$, temos:

$$4x^2 + h'(y) = 4yx^2 + 4y^3 - 4y \tag{3.21}$$

se, e somente se, $h'(y) = 4y^3 - 4y$. Assim,

$$\begin{aligned} h(y) &= \int h'(y)dy && (3.22)\\ &= \int (4y^3 - 4y)dy && (3.23)\\ &= 4\int y^3dy - 4\int ydy && (3.24)\\ &= 4y^4/4 - 4y^2/2 + c && (3.25)\\ &= y^4 - 2y^2 + c. && (3.26) \end{aligned}$$

Substituindo h na expressão de f, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 && (3.27)\\ &= x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + y^4 - 2y^2 && (3.28)\\ &= x^2(x^2 + y^2 - 2) + y^2(y^2 + x^2 - 2) && (3.29)\\ &= (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2). && (3.30) \end{aligned}$$

Logo, a função potencial para a equação dada é

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2). \tag{3.31}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Vamos verificar que a função

$$\mu(x,y) = x^2 + y^2 \tag{3.32}$$

é um fator integrante de (3.9), mas não é da forma $g \circ f$.

Para mostrar isso, considere os seguintes pontos $A = (1, \frac{1}{3})$ e $B = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Assim aplicando na função potencial f, tem-se

$$
\begin{aligned}
f\left(1, \frac{1}{3}\right) &= \left(1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\right)\left(1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{9} - 2\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right) \\
&= \left(\frac{1-9}{9}\right)\frac{10}{9} \\
&= \frac{-80}{81},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{4+4}{9} - 2\right)\left(\frac{4+4}{9}\right) \\
&= \left(\frac{8}{9} - 2\right)\frac{8}{9} \\
&= \left(\frac{-10}{9}\right)\frac{8}{9} \\
&= \frac{-80}{81}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$f\left(1, \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Agora, vamos verificar se $\mu\left(1, \frac{1}{3}\right) = \mu\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Tem-se,

$$
\begin{aligned}
\mu\left(1, \frac{1}{3}\right) &= 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{1}{9} \\
&= \frac{9+1}{9} \\
&= \frac{10}{9},
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\mu\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\\ &= \frac{4}{9}+\frac{4}{9}\\ &= \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Logo, $\mu\left(1,\frac{1}{3}\right) \neq \mu\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Como

$$\mu\left(1,\frac{1}{3}\right) \neq \mu\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right),$$

então devido aos pontos dados, μ não pode ser composição de f.

Vamos apresentar o problema através da análise das curvas de nível de f. Seja $k \in \mathbb{R}$, qualquer. Tem-se ,

$$f(x,y) = k \tag{3.33}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2) = k \tag{3.34}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2) = k \tag{3.35}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-k = 0 \tag{3.36}$$

Considere $W = x^2+y^2$. A expressão 3.36 em termos de W, tem-se:

$$W^2-2W-k = 0. \tag{3.37}$$

Daí,

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k). \tag{3.38}$$

donde,

$$\Delta = 4 + 4k. \tag{3.39}$$

Logo,

$$W = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + k}. \tag{3.40}$$

Assim, temos $W_1 = 1 + \sqrt{1 + k}$ ou $W_2 = 1 - \sqrt{k + 1}$. Como consideramos $W = x^2 + y^2$, então

$$x^2 + y^2 = 1 \pm \sqrt{k + 1}. \tag{3.41}$$

Assim,

1. Quando $k = -1$, a curva de nível $f(x, y) = -1$ de f consiste em um circulo único

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{3.42}$$

   de raio 1.

2. Quando $-1 < k < 0$, consiste em dois círculos obtidos pelas seguintes equações:

$$x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{k + 1} \text{ e } x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{k + 1} \tag{3.43}$$

3. Quando $k > 0$, a curva de nível $f(x, y) = k$ de f, consiste em um círculo único

$$x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{1 + k}, \tag{3.44}$$

   de raio $r > 1$, uma vez que $x^2 + y^2$ não assume valores negativos.

No segundo caso acima, a função f é constante na união dos dois círculos, μ é constante em cada um desses círculos separadamente, mas não em sua união. Ou seja, este μ não é uma função de f.

3.1 Um resultado Interessante

Observe que a função potencial f no Exemplo 3.1, possui curvas de nível desconexas e possui muitos pontos singulares, a saber o ponto $(0,0)$ e todo os pontos que pertencem ao círculo $x^2+y^2=1$. O teorema que veremos a seguir mostra que se uma função potencial f possui curvas de nível conexas e não possui muitos pontos singulares, então μ seria de fato uma função da forma $g \circ f$. Para ajudar na sua prova vamos usar o Teorema da Função Implícita para funções de valor real de duas variáveis (Teorema 2.2). Esse Teorema afirma que se uma determinada função G é de classe C^1, em uma vizinhança de ponto $P=(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, e se a função G aplicada no ponto $P=(x_0,y_0)$ é igual a zero e a derivada parcial de G com relação a y, é diferente de zero, então existe um retângulo $I \times J$ centrado no ponto P e uma função continuamente diferencial $f: I \to J$, de tal modo que $y_0 = f(x_0)$ e para cada $x \in I$,

$$G(x,f(x)) = 0 \text{ e } G_y(x,f(x)) \neq 0.$$

A prova também usa o fato de que todo subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ tem um subconjunto denso enumerável. Isso vem dos fatos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, conforme Proposição 2.5.

Teorema 3.1. *Suponha que a equação diferenciável* 3.1 *seja exata no conjunto D com potencial f e μ é um fator integrante de* 3.1.

(i) se Γ é um componente conexo de uma curva de nível $f(x,y)=c$ de f, e se o conjunto de pontos singulares de f em Γ é enumerável, então a função μ é constante em Γ.

(ii) Em particular, se as curvas de nível de f são conexas, e se o conjunto de pontos singulares de f em cada uma dessas curvas de nível é enumerável, então μ é uma função de f, isto é, existe uma função de valor real g, tal que, $\mu(x,y) = g(f(x,y))$ para todo $(x,y) \in D$.

Prova. (i) Suponha que Γ seja um conjunto conexo de curvas de nível $f(x,y)=c$ de f, e suponha que o conjunto S de pontos singulares de f em Γ é enumerável. Fixando $\Gamma_0 = \Gamma - S$, queremos mostrar que μ é constante em Γ_0. Tomemos um certo ponto $P=(x_0,y_0) \in \Gamma_0$. Como o ponto P não é um ponto singular de f, podemos supor $f_y(x_0,y_0)$ diferente de zero. Daí, sabendo que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.45}$$

e

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{3.46}$$

são exatas em D, podemos concluir que

$$M_y = N_x, \text{ e } \mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x \tag{3.47}$$

em D. Consequentemente,

$$M\mu_y = N\mu_x. \tag{3.48}$$

Como $f_x = M$ e $f_y = N$, tem-se

$$f_x\mu_y = f_y\mu_x \tag{3.49}$$

em D. Do Teorema da Função Implícita, existem I e $J \subset \mathbb{R}$ e $h : I \to J$ satisfazendo

$$f(x,h(x)) = 0, \text{ para todo } x \in I. \tag{3.50}$$

Diferenciando a relação $f(x,h(x)) = 0$ em I, obtemos

$$f_x(x,h(x)) + f_y(x,h(x))h'(x) = 0, \tag{3.51}$$

para todo $x \in I$. Multiplicando por $\mu_y(x,h(x))$, obtemos

$$\mu_y(x,h(x))f_x(x,h(x)) + \mu_y(x,h(x))f_y(x,h(x))h'(x) = 0. \tag{3.52}$$

Usando o fato de $f_x\mu_y = f_y\mu_x$, isso reduz a

$$\mu_x(x,h(x))f_y(x,h(x)) + \mu_y(x,f(x))f_y(x,h(x))h'(x) = 0 \tag{3.53}$$

se, e somente se,

$$f_y(x,h(x))(\mu_x(x,h(x)) + \mu_y(x,h(x))h'(x)) = 0, \tag{3.54}$$

para $x \in I$. Como $f_y(x, h(x))$ é diferente de zero em I, segue-se

$$\mu_x(x, h(x)) + \mu_y(x, h(x))h'(x) = 0. \tag{3.55}$$

Em outros termos, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\mu(x, h(x))) = 0, \tag{3.56}$$

para $x \in I$, e portanto $\mu(x, f(x))$ é constante em I, pela Proposição 2.3, um vez que I é conexo.

Provamos que se $P \in \Gamma_0$, então existe uma vizinhança T de P (ou seja, o retângulo $I \times J$) de tal modo que μ é constante em $T \cap \Gamma_0$. Seja O_p a união de todas as vizinhanças do ponto p. Logo O_p é a maior vizinhança aberta de P de tal modo que μ é constante em $O_p \cap \Gamma_0$. E se $Q \in \Gamma_0$ é outro ponto, então fica claro que $O_p \cap \Gamma_0$ e $O_q \cap \Gamma_0$ são iguais ou disjuntos.

Considere Γ_{00} contido em Γ_0 um conjunto de representantes dos pontos de Γ_0 no sentido que, para cada $P \in \Gamma_0$, existe um único $Q \in \Gamma_{00}$ de tal modo que $O_P \cap \Gamma_0 = O_q \cap \Gamma_0$. Vamos mostrar que Γ_{00} é unitário, ou seja, possui um único ponto. Onde f não tem pontos singulares em Γ, ou seja, o conjunto S dos pontos singulares é vazio e $\Gamma_0 = \Gamma$. Nesse caso $\{O_P : P \in \Gamma_{00}\}$ é uma família de pares disjuntos, ou seja, não tem pontos em comum, no conjunto aberto que cobre Γ. Desde que Γ é conexo, segue-se que Γ_{00} consiste em um único elemento, ou seja, o ponto Q e assim μ é constante em Γ.

Agora voltamos para o caso geral. Desde que Γ_0, sendo um conjunto do $\mathbb{R}^2$, tem um subconjunto denso enumerável T e desde que cada $O_p \cap \Gamma_0$, $P \in \Gamma_{00}$, deve interceptar T, segue que Γ_{00} é enumerável. Portanto $\mu(\Gamma_0)$ sendo igual a $\mu(\Gamma_{00})$, é enumerável. Mas $\mu(S)$ é enumerável, uma vez que S é. Consequentemente $\mu(\Gamma) = \mu(\Gamma_0) \bigcup \mu(S)$ é enumerável. Além disso, Γ é conexo e μ é continuo. Portanto $\mu(\Gamma)$ é um intervalo. Como os únicos intervalos enumeráveis são os formados por um único ponto, pela Proposição 2.2, segue-se $\mu(\Gamma)$ é formado por um único ponto. Portanto μ é constante em Γ, como afirmado

(ii) Por (i), μ é constante em cada curva de nível de f. Para qualquer c no intervalo $f(D)$ definimos, $g(c) = \mu(P)$, onde P é um ponto arbitrário na curva de nível $f = c$. Isso então garante que $\mu = g \circ f$, como desejado.

No exemplo a seguir, ilustra-se o Teorema 3.1 com um exemplo. Neste exemplo, algumas curvas de nível de f de fato contém infinitos pontos singulares de f.

Exemplo 3.2. Considere o conjunto $D = \mathbb{R}^2$ e uma função $f : D \longrightarrow R$ definida por $f(x,y) = y^3 - \cos x$. Fazendo $f(x,y) = c$ e a derivada com relação a x e y respectivamente, tem-se

$$f_x(x,y) = \sin x, \text{ e } f_y(x,y) = 3y^2,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, a equação diferencial exata associada é

$$\sin x dx + 3y^2 dy = 0.$$

A curva de nível $f(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$, onde c é uma constante arbitraria é o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^3 - \cos x = c\}$. Esta na imagem de $\mathbb{R}$ sob a função continua $f_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f_c(x) = (x, \sqrt{3}\cos x + c)$, onde $y = \sqrt{3}\cos x + c$. Logo, ela é conexa. Portanto, todos as curvas de nível de f são conexas. E mais, o conjunto dos pontos singulares de f consiste nas soluções de $\sin x = 0$ e $3y^2 = 0$ em outras palavras em todos os pontos para os quais $\sin x = 0$ e $3y^2 = 0$, ou seja, o conjunto enumerável $B(n\pi, 0), n \in \mathbb{Z}$ Note que os pontos singulares $(n\pi$,0), com n par, situam-se na curva de nível $f(x,y) = -1$ e que os pontos singulares $(n\pi$,0), n ímpar, situam-se na curva de nível $f(x,y) = 1$. Não há pontos singulares de f nas demais curvas de nível

3.2 Equações não-exatas

A seção anterior é um caso especial da questão sobre como dois fatores integrantes μ e v da mesma equação diferencial estão relacionados.

No caso em que a equação diferencial é exata, a questão se resume a μ, se pode tomar v como a função constante 1. No caso geral, o problema é sobre a função $\frac{\mu}{v}$ que é um fator integrante da equação diferencial exata

$$vM(x,y)dx + vN(x,y)dy = 0. \tag{3.57}$$

Neste caso, a solução geral é obtida de $\frac{\mu}{v} = c$, onde c é uma constante arbitraria. Além disso, μ e v são fatores integrantes da mesma equação diferencial se, e somente se, $\mu = g \circ f$, para alguma função g. Os detalhes da prova dessa afirmação fogem ao nosso domínio, uma vez que usa argumentos mais avançados, mas podem ser encontrados em

E. L. Ince, Integration of Ordinary Differential Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1952, conforme a referência [3].

3.3 Observando os conjuntos de Pontos Singulares

O teorema 3.1 também levanta questões de como seria o conjunto de pontos singulares de uma função de classe C^1, já que um ponto singular de f é uma solução de $F_x = F_y = 0$, então, buscamos uma caraterização de conjuntos que possa servir como conjunto zero de funções contínuas de uma ou mais variáveis, em que o conjunto dos zeros de f é definido a seguir. Definimos Conjunto dos Zeros de uma função de valor real como sendo o conjunto de todos os pontos p no domínio de f para os quais $f(p) = 0$. Será denotado por $Z(f)$.

Teorema 3.2.

(i) Cada subconjunto fechado de um espaço métrico M é o conjunto zero de uma função contínua f de M em $\mathbb{R}$.

(ii) Sejam A e B subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Então existe uma função de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, cujo conjunto de pontos singulares é produto $A \times B$.

Para provarmos este teorema vamos seguir a Definição 2.2 e os passos feitos por Mowaffaq Hajja em seu artigo conforme a referencia [10].

Prova. (i) Queremos mostrar que dado qualquer conjunto fechado de um espaço métrico M, o mesmo é um conjunto de zeros de uma função contínua f de M em $\mathbb{R}$. Para isso, considere d a métrica em M e A um subconjunto fechado de M.

Se o subconjunto A for vazio, tome f de M em $\mathbb{R}$ para ser uma função constante diferente de zero, ou seja, $f(p) = c \neq 0$, onde c é uma constante arbitrária.

Se o subconjunto A não for vazio, então defina f por

$$f(p) = d(p, A) = inf\{d(p, q); q \in A\},$$

ou seja,

$$f(p) = 0,$$

para todo $p \in A$. f é contínua, pois a métrica d pela Proposição 2.4 é uma função contínua, e o conjunto zero $Z(f)$ de f é o subconjunto A. Como A é arbitrário, segue que qualquer subconjunto fechado de uma espaço métrico é o conjunto zero de uma função contínua.

(ii) Queremos mostrar que dados dois subconjuntos fechados de $\mathbb{R}$, existe uma função de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, cujo conjunto de pontos singulares é o produto $A \times B$. Assim, seja A, B subconjunto fechados de $\mathbb{R}$. Por (i) cada subconjunto fechado de um espaço métrico é o conjunto de zeros de uma função contínua, reescreva g, h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ funções não negativas, tais que $Z(g) = A$ e $Z(h) = B$. Se a, b são pontos quaisquer dos subconjuntos fechados A e B, respectivamente, então podemos definir

$$G(x) = \int_a^x g(t)dt$$

e

$$H(y) = \int_b^y h(t)dt.$$

Fazendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = G(x) \cdot H(y).$$

E derivando f com respeito a variável x, temos:

$$f_x(x, y) = G_x \cdot H(y) + G(x) \cdot H_x(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $G_x = g$ e $H_x(y) = 0$. Daí,

$$f_x(x, y) = g(x) \cdot H(y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f_y(x, y) = G_x(x) \cdot H(y) + G(x) \cdot H_x(y).$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente $H'(y) = h(y)$ e $G'(x) = 0$, assim

$$f_y(x, y) = G(x) \cdot h(y),$$

para todo (x, y). Logo,

$$f_x(x, y) = g(x) \cdot H(y) \text{ e } f_y(x, y) = G(x) \cdot h(y).$$

Tem-se f_x e f_y contínuas e, portanto f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Além disso, o conjunto S de pontos singulares de f é o conjunto de soluções de

$$g(x) \cdot H(y) = 0 \text{ e } G(x) \cdot h(y) = 0.$$

Assim,

$$g(x) = 0 \text{ ou } H(y) = 0$$

e

$$G(x) = 0 \text{ ou } h(y) = 0.$$

Se $H(y) = 0$, então $h(y) = 0$, para todo $t \in [b, y]$ (ou$[y, b]$) e portanto $y \in B$. Assim, $Z(H) \subset B$. Reciprocamente $Z(G) \subset A$. Desde que $Z(g) = A$ e $Z(h) = B$, segue que $S = A \times B$. Assim, f satisfaz as propriedades desejadas.

Considerações Finais

O artigo base para este trabalho trouxe uma forma interessante de construir as condições necessárias para que um função da forma $g \circ f$, ser um fator integrante de uma Equação Diferencial Exata, partindo de coisas básicas, até chegar em algo mais sofisticado. O teorema principal deste trabalho é muito importante, pois ele nos dá condições sob uma determinada função f, para garantir que uma função da forma $g \circ f$, seja um fator integrante de uma Equação Diferencial Exata. E mais, o estudo dos fatores integrantes de uma equação diferencial exata nos propiciou um rico itinerário que englobou desde os conceitos de cálculo diferencial e integral 1 até alguns conceitos de Análise na Reta e Espaços Métricos. Muitos dos conteúdos vistos neste trabalho não são novos no curso de matemática. Os teoremas vistos neste trabalho de conclusão de curso não são vistos no componente curricular no qual os conteúdos vistos aqui são ministrados e seria grandioso e interessante que tais teoremas fossem incorporados na estrutura curricular, ou ao menos comentados durante as aulas de tal componente.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, RODNEY, CARLOS; CASTRO, WILSON.Equações Diferencial e Integral com Aplicações. Sao Pulo, SP. HARBRA,1988.

[2] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[3] E.L.Ince, Integration of Ordinary Differential Equations, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1952.

[4] FLEMMING, DIVA M. e GONÇALVES, MIRIAN B., Cálculo A e B, Ed. Pearson, Prentice Hall, São Paulo 2006.

[5] GERALDO ÁVILA. Análise Matemática para Licenciatura. Edgard Blucher Ltda, 3 edition, 2006.

[6] LIMA, ELON LAGES. Curso de Análise,vol.1, 14.ed. IMPA, 2012.

[7] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

[8] MACIEL, ALDO BEZERRA; LIMA, OSMUNDO ALVES. Introdução à Análise real. Campina Grande. EDUEP, 2005.

[9] MACHADO, KLEBER DAUM. Equações diferencial aplicadas,VOL.1.Ponta Grossa,PR:TODA PALAVRA,2012;

[10] MOWAFFAQ HAJAR. The Integrating Factors of an Exact Differential Equation.College Mathematics Journal,2013.