UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

WALISSON FERREIRA SOARES DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA INTERESSANTE

CAMPINA GRANDE - PB
2019

WALISSON FERREIRA SOARES DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA INTERESSANTE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

CAMPINA GRANDE - PB

2019

O48a Oliveira, Walisson Ferreira Soares de.
Análise de uma sequência interessante [manuscrito] / Walisson Ferreira Soares de Oliveira. - 2019.
25 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Sequências numéricas. 2. Séries. 3. Soma de Riemann. I. Título

21. ed. CDD 515.5

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

WALISSON FERREIRA SOARES DE OLIVEIRA

ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA INTERESSANTE

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 04/07/2019.

BANCA EXAMINADORA:

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Orientador

Arlandson Matheus Silva Oliveira

Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB - Campus VII)
Examinador

Vilmar Vaz da Silva

Prof. Me. Vilmar Vaz da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Examinador

À professora Emanuela pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste artigo. Dedico também a minha esposa Inácia que sempre esteve ao meu lado e a minha filha Lídia, um presente que Deus enviou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, que sempre esteve ao meu lado, que apesar de não vê-lo, posso senti-lo. A minha família, em especial a minha esposa, Inácia, mesmo com as dificuldades estava sempre me apoiando em todos os momentos da vida e por todo amor e carinho. Ao meu pai, Damião (in memoriam), que não pode compartilhar comigo esses momentos, mas se estivesse aqui estaria torcendo por mim. A minha professora orientadora, Emanuela, por toda paciência e dedicação, por todos os dias e horas dedicados a esse trabalho. Ao meu pastor, Pr. Elier Silva de Alcântara que sempre foi aquela pessoa que me incentivou a não desistir do curso, apesar de ter pensado nisso várias vezes, ele sempre tinha uma palavra de ânimo para mim. Aos meus colegas, em especial Cícero, por ter me ajudado várias vezes nesse trabalho. Aos meus amigos, em especial Aline, Roberto e Carol, por toda resenha e amizade sincera. Enfim, a todos que de alguma maneira contribuíram para minha formação.

SUMÁRIO

1 Introdução **7**

2 Preliminares **8**

2.1 Sequência 8

2.2 Séries 13

2.3 Soma de Riemann 16

3 Resultados Principais **17**

4 Conclusão **24**

Referências **24**

ANÁLISE DE UMA SEQUÊNCIA INTERESSANTE

Walisson Ferreira Soares de Oliveira*

RESUMO

Neste artigo, estudamos algumas propriedades da sequência $\{x_n\}$ dada por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Essas propriedades estão relacionadas a convergência, valor do limite, associação com integrais de funções conhecidas e com séries numéricas. O texto aqui apresentado é uma abordagem didática da primeira seção do artigo "One Sequence, Many Interesting Ideas in Analysis"de Russell A. Gordon, Charles Kicey and Sudhir Goel.

Palavras-chave: Sequências Numéricas. Propriedades de Sequências. Séries.

ABSTRACT

In this article, we studied some properties of the sequence $\{x_n\}$ given by

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

These properties até related to convergence, limit value, association with integrals of known functions and whith numerical series. The text presented is a didactic approach of the first section of the article "A sequence, many interesting ideas in analysis"by Russell A. Gordon, Charles Kicey and Sudhir Goel.

Keywords: Numeric Sequences. Sequence Properties. Series.

1 INTRODUÇÃO

A palavra sequência é usualmente empregada para representar uma sucessão de objetos ou fatos em uma ordem determinada. Essa ordem pode ser de tamanho, de lógica, de ordem

* Aluno de graduação do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: ferreirawalisson15@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação da Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho.

cronológica, entre outros. Em matemática é utilizada comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função que é chamada de termo geral. Neste artigo trataremos da sequência $\{x_n\}$, dada por

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}$$

que nos traz algumas relações em análise através de cinco propriedades interessantes encontradas no artigo intitulado "One Sequence, Many Interesting Ideas in Analysis"de Russell A. Gordon, Charles Kicey and Sudhir Goel conforme referência [3].

Tais propriedades se referem a convergência, monotonicidade, valor do limite e a associação com séries numéricas. Dito isto, na próxima seção apresentamos os conteúdos preliminares de Análise Real, exigidos para o entendimento das propriedades analisadas e, em seguida, apresentamos tais propriedades.

2 PRELIMINARES

Nesta seção abordaremos alguns conceitos e definições sobre sequência, bem como sequências crescentes e decrescentes, o limite de uma sequência, convergência e divergência. Veremos também conceitos e definições de séries e alguns teoremas que serão utilizados para o desenvolvimento desse trabalho.

2.1 Sequência

Definição 2.1 (Sequência)**.** *Uma sequência de números reais é uma função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *defi- nida no conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ *dos números naturais e tomando valores no conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. O valor* $f(n)$ *será representado por* a_n*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1. *Da Definição 2.1, temos*
(1,2,3,4,5,6,...) sequência dos números inteiros positivos ou naturais;
(2,3,5,7,11,13,...) sequência dos números primos positivos;
(1,3,5,7,9,11,...) sequência dos números ímpares positivos.

Notação: Denotaremos uma sequência por $\{a_n\}$.

Definição 2.2. *Dizemos que uma sequência* $\{a_n\}$*é*
(i) crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo n. Ou seja,* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$.
(ii) decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo n. Ou seja,* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$

Definição 2.3. *A sequência é dita monótona se ela for crescente ou decrescente.*

Exemplo 2.2. *Verifique se as sequências são crescentes ou decrescentes:*

(a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$

Os elementos da sequência são

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \ldots$$

Note que a_{n+1} *de* a_n*, é obtido substituindo* n *por* $n+1$*. Logo, como* $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$*,*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{2(n+1)+1} \\ &= \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

Se verifica, sem dificuldades que os quatro primeiros elementos da sequência estão em ordem crescente,

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

A desigualdade (1) pode ser comprovada se encontrarmos uma desigualdade equivalente que sabemos ser válida. Multiplicando cada membro de (1) por $(2n+1)(2n+3)$*, obtemos a desigualdade equivalente:*

$$n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1)$$

ou ainda,

$$2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + 1. \tag{2}$$

A desigualdade (2) é obviamente, verdadeira, pois o segundo membro é 1 unidade maior do que o primeiro. Logo, a desigualdade (1) é verificada e, portanto, a sequência dada é crescente.

(b) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

Os elementos da sequência podem ser escritos da seguinte maneira

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Como

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

para todo n, a sequência é decrescente.

(c) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

Os elementos da sequência são

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \ldots$$

Como $a_1 = 1$ *e* $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 > a_2$. *Porém* $a_3 = \frac{1}{3}$; *assim* $a_2 < a_3$. *De modo geral, consideremos três elementos consecutivos da sequência:*

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+3}}{n+2}$$

Se n for ímpar, então $a_n > a_{n+1}$ *e* $a_{n+1} < a_{n+2}$; *Se n for par, então* $a_n < a_{n+1}$ *e* $a_{n+1} > a_{n+2}$; *Dessa forma, a sequência não é nem crescente nem decrescente, ou seja, é não monótona.*

Definição 2.4. *Uma sequência* $\{a_n\}$ *é dita limitada superiormente, se existe um número* $M \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq M$ *para todo n. O número M é dito um limitante superior para* $\{a_n\}$.

Definição 2.5. *Uma sequência* $\{a_n\}$ *é limitada inferiormente se existe um número* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \geq m$ *para todo n. O número m é um limitante inferior para* $\{a_n\}$.

Definição 2.6. *Dizemos que uma sequência* $\{a_n\}$ *é limitada se ela tiver limitante superior e inferior.*

Exemplo 2.3. *O número zero é um limitante inferior da sequência* $\left\{\frac{n}{(2n+1)}\right\}$ *cujos elementos são*

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots, \frac{n}{2n+1}, \ldots$$

Observe que $\frac{1}{3}$ é outro limitante inferior da sequência. Na verdade, todo número menor ou igual a $\frac{1}{3}$ é um limitante inferior da sequência.

Definição 2.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ é dito supremo de X, se valem:*
i) Para qualquer $x \in X$, tem-se $x \leq b$.
ii) Se $c \in \mathbb{R}$ e $x \leq c$, para todo $x \in X$, então $b \leq c$.
Denotamos: $b = supX$.

Definição 2.8. *Seja $Y \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é dito ínfimo de Y, se:*
i) Para qualquer $y \in Y$, tem-se $a \leq y$.
ii) Se $c \in \mathbb{R}$ e $c \leq y$, para todo $y \in Y$, então $c \leq a$.
Denotamos: $a = \inf Y$.

Exemplo 2.4. *Seja $X = \{2, 5, 7, 9\}$.*
Temos,

$$supX = 9 \ e \ \inf X = 2.$$

Definição 2.9. *Diz-se que uma sequência $\{a_n\}$ converge para o número real L, ou tem limite L, se dado qualquer número $s > 0$, é sempre possível encontrar um número n_0 tal que*

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < s$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\, s > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < s.$$

Se a sequência não for convergente, dizemos que ela diverge.

Exemplo 2.5. *A sequêcia $\{a_n\}$, dada por*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N},$$

converge para $L = 1$.

De fato, seja $\varepsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$, então, se $n \geq n_0$,

$$\left|1 + \frac{1}{2n} - 1\right| = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n_0} < \varepsilon.$$

Axioma 2.1 (O axioma da completude)**.** *Todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante inferior, possui um limitante inferior máximo. Da mesma forma, todo conjunto não-vazio de números reais que tenha um limitante superior possui um limitante superior mínimo.*

Teorema 2.1 (Teorema da sequência monótona)**.** *Se uma sequência* $\{a_n\}$ *é limitada e monótona, então a sequência converge.*

Prova: Demonstraremos o teorema para o caso das sequências monótonas crescentes. O outro caso é análogo.

Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Como $\{a_n\}$ é limitada, existe um limitante superior para a sequência. Pelo axioma do complemento, $\{a_n\}$ tem um limitante superior mínimo que chamaremos de B. Então, se s for um número positivo, $B - s$ não poderá ser um limitante superior para a sequência, pois $B - s < B$ e B é o limitante superior mínimo dela. Assim sendo, para algum número inteiro positivo N,

$$B - s < a_N \tag{3}$$

Como B é o limitante superior mínimo de $\{a_n\}$, pela Definição 2.7 segue que

$$a_n \leq B, \quad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo.} \tag{4}$$

como $\{a_n\}$ é uma sequencia crescente, pela Definição 2.3(i) segue que $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n inteiro positivo e assim se $n \geq N$ temos $a_N \leq a_n$

Dessa afirmação e de 3 e 4 segue que se

$$n \geq N$$

então

$$B - s < a_N \leq a_n \leq B < B + s$$

de onde concluímos que, para $n \geq N$

$$B - s < a_n < B + s \Leftrightarrow -s < a_n - B < s \Leftrightarrow |a_n - B| < s.$$

Mas , pela Definição 2.9, essa afirmação é a condição para que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

Logo, a sequência $\{a_n\}$ é convergente. ■

Teorema 2.2. *Seja* $\{x_n\}$ *uma sequência satisfazendo.*

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = a = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Prova: *Sejam* $y_n = x_{2n}$ *e* $z_n = x_{2n-1}$ *como temos* $\lim y_n = \lim z_n = a$*, para qualquer* $s > 0$ *existem* n_0 *e* n_1 *tais que para* $n > n_0$ *vale* $y_n \in (a - s, a + s)$ *e* $n > n_1$ *vale* $z_n \in (a-s, a+s)$*, escolhendo* $n_2 = \max n_0, n_1$ *temos simultaneamente* $z_n, y_n \in (a-s, a+s)$*,* $x_{2n-1}, x_{2n} \in (a - s, a + s)$*, então para* $n > 2n_2 - 1$ *temos* $x_n \in (a - s, a + s)$ *logo vale* $\lim x_n = a$*.* ■

Teorema 2.3. *Sejam* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sequências. Se*
a) As somas parciais de A_n *de* $\sum a_n$ *formam uma sequência limitada;*
b) $b_0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots$*;*
c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
Então $\sum a_n b_n$ *converge.*

Prova: Ver Rudin [8],p.70. ■

2.2 Séries

Definição 2.10. *Dada uma sequência* $\{a_n\}$ *chamamos de série a partir de* a_n*, o somatório,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Chamamos de n-ésima soma parcial S_n *de* $\{a_n\}$ *a soma dos n primeiros termos da sequência, isto é,*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Assim, a série $\sum a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

Definição 2.11. *Uma série é dita convergente se a sequência das somas parciais* $\{S_n\}$ *converge.Qualquer série que não é convergente é chamada de divergente.*

Exemplo 2.6. *(a)Vejamos a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Solução: *Compararemos a série dada com outra de comportamento conhecido. Para tanto vamos reescrever a série harmônica e agrupar seus termos da seguinte maneira:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

onde no primeiro grupo ficam dois termos, no segundo ficam quatro termos, no terceiro ficam oito termos e assim por diante. Em seguida, substituindo todos os termos de cada grupo pelo menor termo do grupo, obteremos o seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Substituindo-se cada grupo pela soma dos seus termos, teremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Como o segundo termo desta igualdade cresce ilimitadamente, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente.

(b) Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Sabendo que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

podemos escrever a sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} \\
&\;\;. \\
S_n &= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&\;\;.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$*, a série é convergente e a sua soma é 1.*

Definição 2.12. *Uma série* $\sum a_n$ *converge absolutamente se a série correspondente de valores absolutos,* $\sum |a_n|$*, converge.*

Definição 2.13. *Se uma série converge, mas não converge absolutamente, dizemos que ela converge condicionalmente.*

Proposição 2.1. *Considere a série*

$$\sum_{k=1} d_k$$

Com

$$\lim_{i\to\infty} d_i = 0$$

e $\{t_n\}$ *a sequência de somas parciais desta série, e seja* j *um inteiro fixo. Se a sequência* $\{t_{jn}\}$ *converge para* t*, então* $\{t_n\}$ *converge para* t*.*

Como

$$\lim_{k\to\infty} d_k$$

então dado $s > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|d_k - 0| < \frac{s}{2j} \text{ para todo }, k \geq n_1$$

ou seja,

$$|d_k| < \frac{s}{2j}, \forall\ k \geq n_1.$$

Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} t_{jn} = t.$$

então, para $s > 0$ dado acima existe $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 > n_1$ tal que

$$|t_{jn} - t| < \frac{s}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2.$$

Nesse caso, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$mj \leq n \leq (m+1)j.$$

daí,

$$
\begin{aligned}
|t_n - t| &= |t_n - t_{jm} + t_{jm} - t| \\
&\leq |t_n - t_{jm}| + |t_{jm} - t| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} d(k) - \sum_{k=1}^{jm} d(k) \right| + |t_{jm} - t| \\
&= \left| \sum_{k=jm+1}^{n} d(k) \right| + |t_{jm} - t| \\
&\leq \sum_{k=jm+1}^{n} |d(k)| + |t_{jm} - t| \\
&\leq \sum_{k=jm+1}^{j(m+1)} |d(k)| + |t_{jm} - t| \\
&\leq \sum_{k=jm+1}^{j(m+1)} \frac{s}{2j} + |t_{jm} - t| \\
&= \frac{js}{2j} + |t_{jm} - t| \\
&= \frac{s}{2} + \frac{s}{2} \\
&= s, \ \forall\, n \geq j n_2
\end{aligned}
$$

ou seja, dado $s > 0$, existe $n_0 = jn_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_n - t| < s, \text{ para } n \geq n_0$$

logo,

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t$$

2.3 Soma de Riemann

Definição 2.14. *Chama-se partição π do intervalo $[a, b]$ a qualquer decomposição de [a,b] em subintervalos da forma $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ onde $n \in \mathbb{N}$ e os números x_i são tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.*

Definição 2.15. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$, a qual supomos limitada.*

Dada uma função f e uma partição P, definimos as chamadas somas de Darboux-Riemann (a soma superior $S(f,\pi)$ e a soma inferior $s(f,\pi)$), pelas expressões:

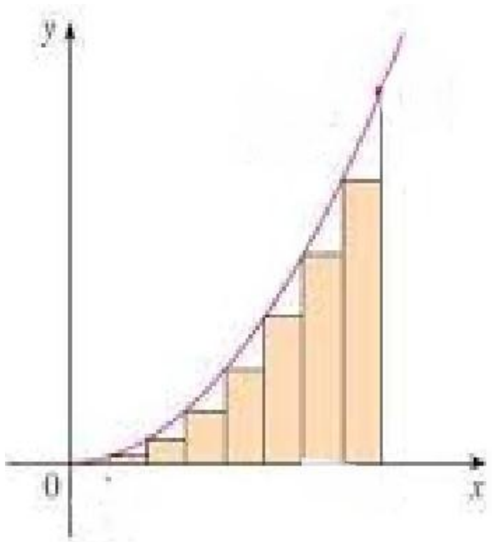
$$S(f,\pi) = \sum_{j=1} M_j(x_j - x_{j-1}) \tag{5}$$

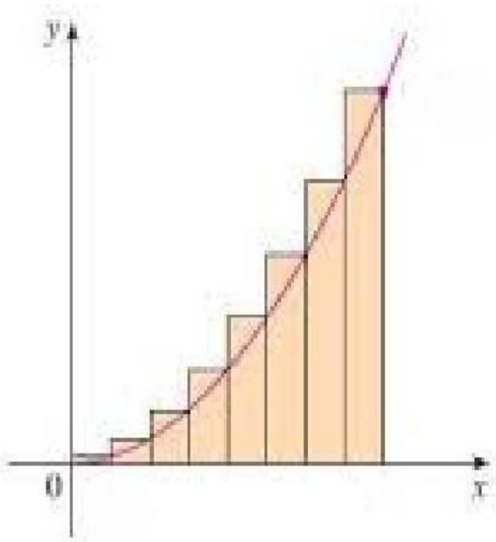
$$s(f,\pi) = \sum_{j=1} m_j(x_j - x_{j-1}) \tag{6}$$

onde $M_j = sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$.
Esses sup's e inf's são finitos, uma vez que a função f é limitada. De fato, $m \leq m_j \leq M_j \leq M$. Em que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall$ n. É claro que para qualquer partição π, tem-se

$$s(f,\ \pi) \leq S(f,\ \pi). \tag{7}$$

Veja a primeira figura, onde a área pintada representa a soma inferior, e na segunda figura, onde a área indicada representa a soma superior.





3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo trataremos de cinco propriedades de uma sequência onde utilizaremos os conceitos apresentados no capítulo acima para o desenvolvimento das mesmas de maneira didática, e também faremos o uso da análise real para demonstrarmos essas propriedades.

Considere a seguinte sequência $\{x_n\}$

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

para cada inteiro positivo n.

Afirmamos que essa sequência converge. De fato, pelo Teorema 2.1, basta mostrar que $\{x_n\}$ é monótona e limitada.

Vamos provar que a sequência $\{x_n\}$ é crescente, ou seja

$$x_n < x_{n+1},$$

ou ainda, $x_{n+1} - x_n > 0$. $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Como,

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

e

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+2)+1} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}, \end{aligned}$$

então,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}. \tag{8}$$

Agora, afirmamos que

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{n+1}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} &= \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + n + 1 + 2n^2 + 2n + 2n + 2 - 4n^2 - 2n - 4n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{4n^2 + 6n + n + 3 - 4n^2 - 6n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Logo, a sequência é crescente. Agora, vejamos se a sequência $\{x_n\}$ é limitada, ou seja, existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha < x_n < \beta, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Note que,

$$|x_n| \le 1, \forall n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

pois,

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right|.$$

dai,

$$n + k > n, \ \forall\ k = 1, 2, 3, \dots, n$$

logo,

$$\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}, \ \forall\ k = 1, 2, 3, \dots, n$$

portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1,$$

donde,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \le n\frac{1}{n} = 1.$$

Como $|x_n| = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que $\{x_n\}$ é limitada por 1.

Da sequência $\{x_n\}$ temos algumas propriedades:

(1) A sequência é crescente e todos os seus termos estão no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

De fato,

Observe que $\{x_n\}$ é crescente como feito em (8) e de (9) temos que $x_n \le 1$, agora temos que provar que

$$\frac{1}{2} \le x_n.$$

Como a sequência é crescente então, $x_n \le x_{n+1}$, logo

$$\frac{1}{2} = x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \le \dots$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \leq x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Para cada inteiro positivo n, x_n é igual à aproximação do ponto final direito

$$\int_1^2 x^{-1} dx$$

usando n subintervalos de igual comprimento. Segue-se que a sequência $\{x_n\}$ converge para $ln2$

De fato, particionando o intervalo [1,2] em n subintervalos de mesmo comprimento, significa que cada intervalo tem comprimento $\frac{1}{n}$ assim, se

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n = 2,$$

então

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \\
a_2 &= \frac{n+1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n} \\
a_3 &= \frac{n+2}{n} + \frac{1}{n} = \frac{n+3}{n} \\
&\cdot \\
a_k &= \frac{n+k}{n} \\
a_n &= 2
\end{aligned}$$

Pela Definição de Soma de Riemann, temos

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta a_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{n}{n+i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$
$$= x_n$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

mas,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^2 \frac{1}{x} = ln2 - ln1 = ln2$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = ln2$$

(3) Seja $\{h_n\}$a sequência de somas parciais para a série harmônica alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad (10)$$

então $x_n = h_{2n}$ para cada inteiro positivo n, logo, esta série converge para $ln2$.

De fato, temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Observe que,

$$h_{2n} = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{1} + \frac{(-1)^4}{1} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n}$$

Por indução, vamos provar o resultado.

Para $n = 1$,

$$h_2 = \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = x_1$$

Suponhamos que para K seja verdade.

Agora, para $n = k + 1$, temos

$$h_{2(k+1)} = h_{2k} + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+3}}{2k+2}$$

$$= h_{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$$

$$= h_{2k} + \frac{2k+2-(2k+1)}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= h_{2k} + \frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= h_{2k} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= x_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}. \tag{11}$$

Por (8) temos que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{2n^2 + 2n + n + 1 + 2n^2 + 2n + 2n + 2 - (4n)^2 - 2n - 4n - 2}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}
\end{aligned}$$

Portanto é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

(4). Verifiquemos se a série

$$S = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \cdots \text{ converge.}$$

Seja $\{s_n\}$ a sequência de somas parciais de S e consideremos as seguintes subsequências de $\{s_n\}$: $\{s_{2n}\}$e $\{s_{2n-1}\}$. Temos, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0 \\
s_{2n-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0 = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Portanto, do Teorema 2.2, podemos concluir que $\{s_n\}$ converge e

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

ou seja, S = 0.

Agora vamos avaliar a convergência absoluta da série, ou seja, estamos avaliando a convergência de

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

mas,

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pelo exemplo 2.6 temos que a série harmônica diverge.

Então $S = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$, pela Definição 2.13 a série converge condicionalmente.

Agora considere o rearranjo desta série S que consiste de dois termos positivos seguidos de um negativo na mesma ordem que a série original, ou seja,

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \dots$$

Se $\{t_n\}$ é a sequência de somas parciais para esta série, então $x_n = t_{3n}$ para cada inteiro positivo n. Sendo,

$$t_{3n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$$

devemos mostrar que,

$$t_{3n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

De fato, veja

$$\begin{aligned} t_{3n} &= \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = x_n. \end{aligned}$$

(5). Se a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ limitada de somas parciais e a sequência $\{b_i\}$ converge para 0, então a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ converge. Aplicando $a_i = -1^{i+1}$ e $b_i = \frac{1}{i}$ para cada inteiro positivo i. Seja $\{y_n\}$ a sequência de somas parciais para $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, que isso garante a convergência. Isso tem que ser aplicado nas condições do teorema 2.3.

Esta propriedade ficará a cargo do leitor.

4 CONCLUSÃO

A realização deste trabalho de conclusão de curso proporcionou-me um amplo aprendizado nas áreas que envolvem o estudo de sequências, pois durante a graduação sempre vemos cada conteúdo de maneira separada e por isso não é possível ver nenhuma ligação entre outros conteúdos de integrais, derivadas, análise, entre outros. E depois deste artigo vi ligações entre vários assuntos que outrora não era possível.Foi deixado a cargo do leitor o desenvolvimento da quinta propriedade, como também a generalização da sequência $\{x_n\}$.

No artigo tratado, os autores ainda fazem uma generalização das propriedades estudadas para sequências do tipo $\{X_n^{pq}\}$ em que

$$X_n^{pq} = \frac{1}{qn+1} + \frac{1}{qn+2} + \ldots + \frac{1}{pn}, \; n \in \mathbb{N},$$

com $p, q \in N$, mas estas não serão abordadas aqui, uma vez que pensamos esse trabalho como aplicação de conteúdos vistos em disciplinas cursadas no Curso de Licenciatura em Matemática da UEPB e a abordagem desta generalização, por vezes, foge a esta proposta.

REFERÊNCIAS

[1] ABBOTT, S. *Understanding Analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2010.

[2] FIGUEIREDO, Djairo G. Análise 1-L.T.C,Rio de Janeiro-1996.

[3] GORDON, Russell A., KICEY, Charles and GOEL, Sudhir. One Sequence, Many Interesting Ideas in Analysis. Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 1 (Feb., 2002), pp. 32-38.

[4] LEITHOLD, Louis. Cálculo com geometria analítica. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

[5] LIMA, Elon Lages, Anáise Real , vol. 1, 8a. edição, Coleção matemática Universitáia, IMPA, 2004.

[6] THOMAS, George B. Cálculo - Volume 1. Tradução: Paulo Boschcov. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002.

[7] SWOKOWSKI, Earl W. Cálculo com Geometria Analítica. Tradução Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 1994.

[8] RUDIN, W., Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976