



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ONDAS
RASAS

Ednaldo Amorim Ferreira

CAMPINA GRANDE

Junho de 2019

Ednaldo Amorim Ferreira

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ONDAS RASAS

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE

Junho 2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F383m Ferreira, Ednaldo Amorim.
Modelagem matemática para ondas rasas [manuscrito] /
Ednaldo Amorim Ferreira. - 2019.
58 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de
Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo ,
Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
1. Ondas. 2. Sólitos. 3. Equações diferenciais parciais. 4.
Hidrodinâmica. I. Título
21. ed. CDD 510

Ednaldo Amorim Ferreira

**MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ONDAS
RASAS**

Aprovado em: 09 / 07 / 2019

COMISSÃO EXAMINADORA

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
ORIENTADOR

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADOR

Manuel Antolino Milla Miranda

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADOR

Dedicatória

Este trabalho é dedicado à minha família e em especial aos meus pais, Jose Ferreira e Almerinda Amorim, por todo apoio, incentivo, direcionamento e educação a mim oferecidos. Dedico ainda à minha esposa, Sandra Regina Chaves, por toda ajuda e incentivo na luta por mais este objetivo.

Resumo

O presente trabalho pretende apresentar o conceito de ondas que se propagam em meios fluidos, suas diversas caracterizações naturais como formas e uma modelagem matemática adequada para equacionar seu comportamento no decorrer do tempo, pois é de grande interesse nas diversas áreas das ciências aplicadas e na indústria de tecnologias modernas. Apresentaremos uma revisão bibliográfica sobre o comportamento de duas equações de onda em meio fluido: ondas rasas em um canal e os sólitons. Ambas requerem tratamentos matemáticos diferenciados, pois as equações diferenciais parciais que as descrevem são distintas, e requerem uma análise especial para sua compreensão, pois devemos levar em consideração as leis gerais que governam esse fenômeno como a conservação da massa, conservação da quantidade de movimento, e a conservação da energia, além disso essas EDP's apresentam diferenças quanto a sua linearidade e dispersão. Nossa abordagem inicial partiu de um PIBIC, onde trabalhamos com soluções clássicas em EDP's e um dos problemas propostos era o de ondas rasas oscilantes bidimensionais em um canal o que nos interessou em tratar ondas unidimensionais com o estudo dos sólitons. Temos duas equações modelos para este estudo, a equação de D'Alembert para ondas rasas em canal e a equação de Korteweg-de-Vries (KdV) para sólitons, ambas são EDP's convenientes para modelar soluções para o fenômeno de ondas rasas em canal. O objetivo principal deste trabalho de conclusão de curso é compreender como equações diferenciais parciais distintas podem modelar o mesmo fenômeno. Para isto fizemos uma revisão bibliográfica das seguintes referências Mezala [3], Evans [2], Ulysses Sodré [4], Zachmanoglou and Dale W Thoe [1] e artigos [8].

Palavras-chave: Ondas, Sólitons, equações diferenciais parciais, Hidrodinâmica.

Abstract

The present work intends to present the concept of waves that propagate in fluid media, their diverse natural characterizations as forms and a mathematical modeling adequate to equate their behavior over time, since it is of great interest in the various areas of applied sciences and industry modern technologies. We will present a bibliographical review on the behavior of two wave equations in fluid medium: shallow waves in a channel and the solitons. Both require differential mathematical treatments, since the partial differential equations that describe them are distinct, and require a special analysis for their understanding, since we must take into account the general laws that govern this phenomenon as the conservation of mass, conservation of the amount of movement, and energy conservation, in addition these EDPs present differences as to their linearity and dispersion. Our initial approach was based on a PIBIC, where we worked with classical solutions in EDP's and one of the problems proposed was that of two-way oscillating shallow waves in a channel that interested us in treating unidimensional waves with the study of solitons. We have two model equations for this study, the D'Alembert equation for shallow channel waves and the Korteweg-de-Vries (KdV) equation for solitons, both of which are convenient EDP's for modeling solutions for the channel shallow phenomenon. The main objective of this work is to understand how different partial differential equations can model the same phenomenon. For this we have done a bibliographical review of the following references Mezala [3], Evans [2], Ulysses Sodré [4], Zachmanoglou and Dale W Thoe [1] and articles [8].

Keywords: Waves, Solitons, partial differential equations, Hydrodynamics

Sumário

Lista de Símbolos	9
Introdução	10
1 Introdução à Teoria das ondas	12
1.1 Conceitos básicos da equação da onda	13
1.1.1 Quanto a natureza	13
1.1.2 Quanto a direção	14
1.1.3 Comprimento de onda e frequência	14
1.1.4 Comprimento e número de onda.	15
2 Introdução Matemática à dinâmica dos fluidos Geofísicos	16
2.1 Mecânica de um sistema de partículas	18
2.1.1 Mecânica Newtoniana	18
2.1.2 Equações do movimento	18
2.2 Leis da conservação	22
2.2.1 Conservação de Massa	24
3 Equações Diferenciais Parciais.	28
3.1 Operadores diferenciais parciais lineares e suas Curvas e Superfícies Características	28
3.2 Tipos de EDP'S	29
3.2.1 Exemplos de equações diferenciais	32
3.2.2 Equações características e mudança de variáveis.	33
3.2.3 Métodos para encontrar curvas e superfícies características.	34
3.2.4 A importância das superfícies, curvas características	35

3.2.5	A fórmula de D'Alembert	38
4	Equação da onda rasa em canal	40
4.1	Solução da Equação de Onda Rasa em um Canal.	40
4.1.1	Equação do movimento	42
4.1.2	Conservação da massa	45
4.1.3	Equação de EULER	47
5	Equação de Korteweg-de-Vries	51
5.0.1	Solução da equação de Korteweg-de-Vries (KdV)	51
6	Conclusão	56

Lista de Símbolos

\mathbb{N}	O conjunto dos números naturais.
\mathbb{N}_0	O conjunto dos números inteiros não-negativos: $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
\mathbb{Z}	O conjunto dos números inteiros.
\mathbb{Q}	O conjunto dos números racionais.
\mathbb{R}	O conjunto dos números reais.
\mathbb{R}_+	O conjunto dos números reais não negativos.
\mathbb{R}^n	Espaço vetorial das n -uplas ordenadas.
t	tempo.
s	segundo.
$massa$	quilograma (kg).
m	metro.
\vec{V}	velocidade ($\frac{m}{s}$).
\vec{a}	aceleração ($\frac{m}{s^2}$).
\vec{F}	Força (Newton).
\vec{P}	Força de pressão ($\frac{N}{m}$).
ρ	densidade ($\frac{kg}{m^3}$).
$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$	operador gradiente.
$\text{div}.\vec{F} = \nabla.\vec{F}$	divergente.
$\text{div} \times \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$	rotacional.
l	Comprimento de onda.
$u(x, t) = a$	Amplitude de onda.
$d = h$	Profundidade do meio não perturbado.
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação.
ENIC	Encontro de Iniciação Científica

Introdução

O PIBIC (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica) possui, dentre vários objetivos, estimular o desenvolvimento do pensar científico e da criatividade, decorrentes das condições criadas pelo confronto direto com os problemas, assim como promover a aprendizagem de técnicas e métodos de pesquisa. Dessa forma, um trabalho desenvolvido através desse programa, pode gerar inúmeros questionamentos e ideias, culminando em pesquisas, que não se restringem ao programa em si, mas até mesmo em um trabalho de conclusão de curso, que é o nosso caso.

As equações diferenciais parciais são um ramo da matemática muito importante para descrever fenômenos físicos, químicos e biológicos, com o recurso de equações com uma ou mais variáveis e suas derivadas. Elas se dividem em: Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP). Daremos ênfase as EDP's e em particular as equações diferenciais parciais hiperbólicas e dispersivas, pois nosso intuito é trabalhar com a equação de **D'Alembert** para uma equação diferencial parcial linear e a equação de **Korteweg-de-Vries** (KdV) que é uma equação diferencial parcial não-linear e dispersiva.

Os fenômenos não-lineares são muito comuns na natureza, e uma parte mais importante das pesquisas atuais em vários campos da física e da matemática, são as ondas solitárias, também conhecidas como solitons, que regem certos fenômenos físicos. Elas aparecem, por exemplo, em fluidos, mecânica, óptica, mas veremos aqui somente solitons hidrodinâmicos que se propagam na superfície de fluido sob ação de um campo gravitacional.

O reconhecimento das equações diferenciais parciais (EDP'S) e os métodos de solução se fazem necessários para uma melhor compreensão do fenômeno, e a apreciação dos resultados destas equações, que serão apresentados de forma direta.

Um das aplicações apresentadas no livro que foi trabalhado no PIBIC, "Ondas de

água em um canal”, foi escolhida como ponto de partida para este trabalho, após vislumbrar a possibilidade de expor e de trabalhar soluções clássicas de equações diferenciais parciais, apresentando os principais resultados do livro Introdução às Equações Diferenciais Parciais do professor Dr Gustavo Perlla Menzala, com foco nas equações hiperbólicas de ondas. Como existem várias formas de obter soluções para equações de ondas, vamos apresentar a solução clássica de D’Alambert para uma onda oscilante bidimensional em líquido invíscido e incompressível, e a equação de Korteweg-de-Vries para uma porção de massa líquida não-viscosa e incompressível, que se desloca como um pulso de onda unidimensional.

Este trabalho de conclusão de curso constitui-se em uma pesquisa bibliográfica tendo por principal objetivo um estudo sobre modelagem Matemática para ondas rasas.

Capítulo 1

Introdução à Teoria das ondas

Neste capítulo, faremos uma abordagem do conceito físico de onda e suas principais características, e usaremos como base para esta revisão as seguintes referências: Halyday [5] e Pawel Klimas [8] .

No mundo natural, é por meio das ondas que ocorrem o transporte de energia sem transporte de matéria, tanto em meios sólidos, líquidos e gasosos, quanto no vácuo. Muito nos interessam as ondas que se propagam em meios fluidos.

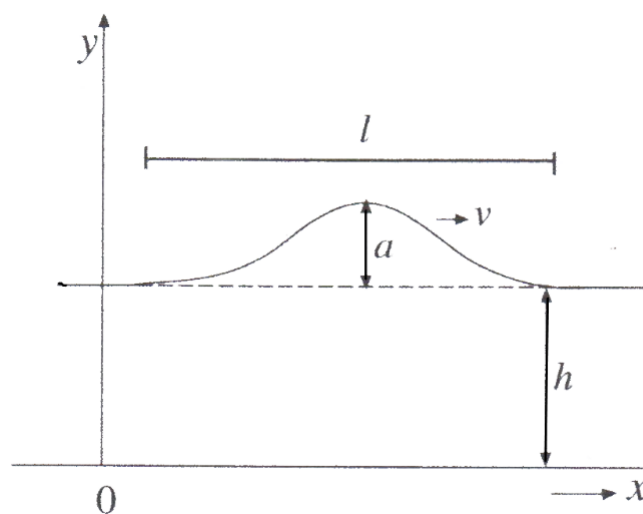
Vamos distinguir dois tipos de ondas de acordo com sua extensão e duração: O primeiro tipo é o pulso, uma onda que ocupa uma região limitada do espaço, é o segundo tipo e a onda periódica, que pode ser vista como uma sequência de pulsos, que viajam com a mesma velocidade, igualmente espaçadas entre si. A onda produz locais de pressão que são consequência do movimento oscilatório molecular. Um pulso é chamado de Soliton quando ele se propaga sem mudar de forma e sem diminuir sua velocidade de propagação, esta característica pode ser observada mesmo quando as ondas solitárias colidem umas com as outras. Este tipo de comportamento é possível graças a um número infinito de quantidades conservadas associadas com este sistema dinâmico. Modelos com estas propriedades são chamadas integráveis, ou seja, podemos apresentar uma solução explícita da equação do movimento de uma partícula. Os sólitons existem também em vários outros modelos físicos, como por exemplo o modelo de Sine-Gordon[12], cadeias de DNA ou modelos efetivos para interações fortes, experimentalmente foram observados em fibras ópticas, condensado de Bose-Einstein[14], cristais líquidos, materiais magnéticos e vários outros sistemas físicos.

Devemos estabelecer alguns critérios e conceitos sobre o meio, o comportamento

do movimento, e as equações que governam este evento no qual o fenômeno acontece, requerendo assim uma revisão sobre as propriedades elementares do meio, que será a água nas condições normais de temperatura e pressão, e do comportamento ondulatório do movimento, sobre a modelagem matemática que será dada por uma equação diferencial parcial.

O perfil de onda que vamos analisar e deduzir as equações que modelam o fenômeno será:

Figura 1.1: Perfil Inicial de onda



Tendo como referência a Figura 1.1, vamos estabelecer alguns parâmetros de natureza física para obter uma modelagem matemática adequada e encontrar uma solução satisfatória.

1.1 Conceitos básicos da equação da onda

Para a Física, onda é uma perturbação que se propaga no espaço ou em qualquer outro meio. Elas são classificadas em relação a sua natureza, direção e energia de propagação.

1.1.1 Quanto a natureza

As ondas podem ser de três tipos fundamentais:

- **Ondas mecânicas:** Ondas que se propagam em meios físicos.

- **Ondas eletromagneticas:** Ondas que se propagam no vácuo, sempre com a mesma velocidade de $c = 299.729.458m/s$. Esta onda é representada por c , como a velocidade da luz.
- **Ondas de matéria:** Ondas que estão associados a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo em átomos e moléculas.

1.1.2 Quanto a direção

As ondas podem ser de dois tipos fundamentais:

- **Ondas transversais:** Ondas onde o deslocamento do elemento de onda é sempre perpendicular a direção da onda.
- **Ondas longitudinais:** Ondas onde o deslocamento de onda é paralelo à direção do movimento da onda.

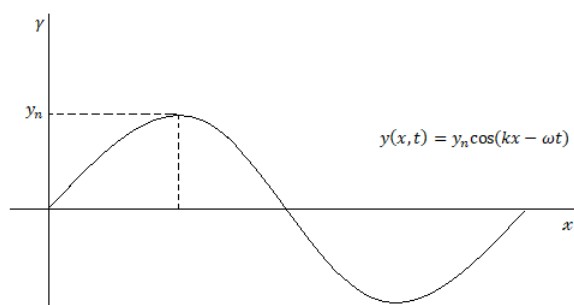
Tanto ondas transversais, quanto as ondas longitudinais são chamadas de ondas progressivas quando se propagam de um lugar para outro.

1.1.3 Comprimento de onda e frequência

Para descrever perfeitamente a curva de uma onda, precisamos de uma função que forneça a forma da onda num dado instante e de sua posição. Isto significa que necessitamos de uma relação da forma $y = h(x, t)$, onde y é o deslocamento transversal de um elemento da onda e h é uma função que depende de t , variável temporal, e x variável de posição.

Observe a figura:

Figura 1.2: perfil de onda



Quando a onda passa por elementos sucessivos do meio, estes elementos, oscilam paralelamente ao eixo y . Em um certo instante t o deslocamento y do elemento de onda na posição x é dado por:

$$y(x, t) = y_n \cos(kx - \omega t),$$

onde: y_n é a amplitude, isto é, o módulo do deslocamento máximo do elemento de onda a partir da posição de equilíbrio. A fase da onda é o argumento $(kx - \omega t)$, onde k indica o número de ondas e ω indica a velocidade angular.

1.1.4 Comprimento e número de onda.

O comprimento de onda λ é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre duas das repetições da forma da onda. Definimos o período (T) de uma onda como o tempo que um elemento de onda leva para realizar uma oscilação completa. O parâmetro k é o número de ondas dado por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que no SI (Sistema Internacional de Unidades), é radiano por metro ($\text{rad } m^{-1}$) e ω é a velocidade angular dado por, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, que no SI é radiano por segundo ($\text{rad } s^{-1}$). Relacionando as grandezas de velocidade angular e do período, definimos a frequência f como $f = \frac{\omega}{T}$, isto é, o número de repetições que um elemento da onda realiza num determinado tempo.

Capítulo 2

Introdução Matemática à dinâmica dos fluidos Geofísicos

Neste capítulo abordaremos os conceitos básicos sobre fluidos, pois nossa abordagem requer argumentos sólidos para uma modelagem adequada do comportamento de um elemento infinitesimal de onda, e daremos uma ênfase especial aos movimentos dos fluidos geofísicos. Neste contexto, a teoria ondulatória será bastante explorada do ponto de vista linear. Interessados em aprofundar esses conceitos podem consultar Potter-David [9], McGraw-Hill [10], Fox [7], Breno Raphaldini [11].

Abordaremos alguns tópicos matemáticos em dinâmica de fluidos geofísicos onde as estrutura do meios como, da composição, das propriedades físicas e dos processos dinâmicos da Terra. Levantamentos conduzidos no mar, rios, lagos ou em barragens são conhecidos como levantamentos marinhos ou Geofísica Marinha. Primeiramente, vamos esclarecer o que é a dinâmica de fluidos geofísicos. Rotulamos por fluidos geofísicos tanto os diversos tipos de meios que compõem o planetas, tais como a atmosfera e o oceano na Terra, como também o fluido ionizado que compõe o núcleo interno da Terra, embora este último também seja classificado como um plasma, ou seja, um fluido cuja dinâmica também está fortemente acoplada com efeitos eletromagnéticos. Com isso, além dos fluidos geofísicos serem governados pelas leis da hidrodinâmica, que partem do princípio básico da hipótese do contínuo e descrevem a dinâmica de uma parcela elementar deste meio contínuo com base nas leis de conservação de momento, massa e energia, um aspecto peculiar dos fluidos geofísicos é que sua dinâmica sofre grande influência dos efeitos da rotação do planeta.

A matemática está, obviamente, fortemente presente na construção dos modelos que descrevem esses movimentos, tais como os modelos atmosféricos de previsão de tempo e clima.

Isto porque uma das etapas do processo de modelagem consiste em expressar as leis físicas que governam a dinâmica dos movimentos do fluido em termos de equações matemáticas, neste caso representadas basicamente por equações diferenciais parciais.

A matemática também está presente na busca por soluções dessas equações, que no caso das equações completas só é possível através de métodos de aproximação numérica, dada a complexidade do sistema de equações de derivadas parciais (EDP's) que descreve a dinâmica dos fluidos em geral. De fato, as chamadas equações de Navier-Stokes que governam a dinâmica dos fluidos (fluidos newtonianos) constituem talvez o principal desafio matemático do milênio, que consiste em demonstrar a existência de uma solução forte dessas equações. Abordaremos a construção dos modelos matemáticos da dinâmica de fluidos geofísicos utilizando a formulação **Euleriana**.

Um exemplo de método matemático assintótico empregado para obter soluções simplificadas das equações completas é a teoria ondulatória (ou seja, a busca dos chamados modos normais de um sistema físico). A teoria ondulatória, como veremos, consiste em analisar a dinâmica do sistema num regime particular válido nas proximidades de certas soluções de equilíbrio do sistema. Neste caso, as pequenas amplitudes dessas perturbações permitem que estes distúrbios sejam descritos, numa primeira aproximação, pela versão linearizada das equações governantes.

As EDP's e sistemas de EDP's lineares têm sido estudados durante vários séculos, soluções analíticas são possíveis via métodos de separação de variáveis, somados a expansões em séries de potências, expansão em séries de funções ortogonais, etc. Neste caso, as chamadas ondas são determinadas por soluções características das equações linearizadas.

Além da destacada importância da teoria ondulatória em constituir um modelo na elucidação de mecanismos físicos, a relevância da teoria ondulatória reside também no fato de que as equações governantes dos modelos da dinâmica de fluidos geofísicos têm natureza hiperbólica, permitindo, portanto, que qualquer distúrbio inicial se propague.

2.1 Mecânica de um sistema de partículas

2.1.1 Mecânica Newtoniana

Consideremos um sistema de N partículas descritas por suas posições $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, N$.

Definição 2.1.1 A velocidade v_i de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ é uma curva $\gamma(t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.1.2 A velocidade v_i de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ e tempo $t = t_0$ é um vetor tangente à trajetória desta partícula, dada por:

$$\vec{v}_i(t_0) = \frac{d}{dt}q_i(t)_{(t=t_0)} = \dot{q}(t)_{(t=t_0)} \quad (2.1)$$

Definição 2.1.3 A aceleração a_i de uma partícula indexada por i na posição $q_i(t) \in \mathbb{R}^3$ e velocidade v_i , no tempo $t = t_0$, é um vetor que mede a taxa de variação da velocidade neste dado tempo

$$\vec{a}_i(t_0) = \frac{d}{dt}(v_i)_{(t=t_0)} = \ddot{q}_i(t)_{(t=t_0)} \quad (2.2)$$

Vamos admitir aqui válida a segunda lei de **Newton**: sob a ação de uma dada força $\vec{F}(x, t)$ uma partícula de massa m é acelerada de acordo com $m\ddot{q}_i^i = \vec{F}(q, \dot{q})$. Note que restringimos a função força às dependências apenas nas posições e velocidades.

- A energia cinética é definida por $T = \sum_{i=1}^N M_i |v_i|^2$.
- O momento da partícula indexada por i é dado por $\vec{P}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$
- Uma força $\vec{F}(x)$ dependente apenas das posições é dita conservativa se existe $U(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x) = -\nabla U$. Neste caso U é chamada energia potencial.

2.1.2 Equações do movimento

Um fluido é um corpo cujo formato pode ser alterado quando uma força lhe é aplicada, mais especificamente, fluidos não resistem a forças de cisalhamento. Consideremos um fluido como um contínuo de massa que no tempo $t = 0$ ocupa uma região simplesmente

conexa de \mathbb{R}^3 , Ω_0 , onde cada ponto com posição inicial $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0) = (x(0), y(0), z(0))$ evolui temporalmente de forma a ocupar no tempo t a posição $\mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t))$. O domínio Ω_0 é mapeado no tempo t a Ω_t . Chamaremos de $\phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação que leva o domínio Ω_0 , em $t = 0$, a Ω_t no tempo t , ou seja,

$$\phi_t(\mathbf{a}) = \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (2.3)$$

$$\phi(\Omega_0) = \Omega_t \quad (2.4)$$

Neste contexto, faremos algumas suposições sobre a transformação ϕ_t :

- ϕ_t é bijetora, $\forall t$
- ϕ_t é de classe \mathbf{C}^∞ em todo ponto $x(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \Omega_t, \forall t$.
- A família de transformações ϕ é suave (de classe \mathbf{C}^∞) em t .

Observação 2.1.1 *Tais suposições vem de imposições físicas de que partículas materiais do fluido não podem se fundir, e de que as trajetórias das partículas em um fluido são suaves. Esta última suposição pode ser eventualmente violada, e neste caso as equações de movimento do fluido tem que ser consideradas em sua forma integral. Este caso é particularmente relevante nos fenômenos chamados de choque, que não serão considerados neste texto.*

Definição 2.1.4 *A velocidade $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t), w(t)) \in \mathbb{R}^3$ da partícula inicialmente no ponto $\mathbf{x}(0) = (x(0), y(0), z(0))$ é dada pela equação diferencial*

$$\mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{a})}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Note que podemos descrever de duas formas o campo de velocidades. A primeira descreve, a cada tempo t , a velocidade da partícula inicialmente na posição \mathbf{a} . Já a segunda forma, dada uma posição $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, consiste em descrever a cada tempo t a velocidade da partícula que passa neste ponto. A primeira abordagem é conhecida como descrição lagrangeana, enquanto a segunda abordagem é chamada de descrição euleriana de um fluido.

Descrição Lagrangeana: Dada a posição inicial de uma partícula $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, encontrar a trajetória desta partícula.

Observação 2.1.2 *Método de Lagrange [Joseph L. Lagrange (1736 a 1813)]: Consiste em acompanhar a partícula ao longo da sua trajetória, de uma posição inicial A , em cada instante, encontrar o valor da grandeza $G = GL(x_A, y_A, z_A, t)$. Note que o ponto (x_A, y_A, z_A) define o ponto inicial - o nome - de cada partícula. Este método aplicado à mecânica dos fluidos resulta em acompanhar muitas partículas, o que torna esta tarefa extremamente difícil. Porém, há algumas situações práticas onde o método de Lagrange é útil, tais como, a descrição do movimento de boias oceânicas, balões meteorológicos, migração de passaros, rastreamento de veículos por satélite.*

Descrição Euleriana: Consiste em proporcionar, a cada momento, o campo de velocidades do fluido.

Observação 2.1.3 *Método de Euler [Leonhard Euler (1707 a 1783)]: Consiste em se fixar um ponto geométrico $P(x_P, y_P, z_P)$ para se detectar aí a grandeza física associada às partículas que, em diferentes instantes, passam por P . Assim, $G = GE(x_P, y_P, z_P, t)$. Neste caso as grandezas passam a ser funções tanto do espaço como do tempo. A região física do escoamento quando estudada por esse método recebe o nome de campo de escoamento.*

Geralmente, o método de Euler é mais utilizado:

- *Na maioria dos casos práticos as partículas não conservam sua individualidade física (seja por difusão, seja por turbulência), o que prejudica a descrição da trajetória (se fosse, então, utilizado o método lagrangiano);*
- *as leis físicas obtidas pelo método euleriano são mais fáceis de aplicar em situações reais;*
- *a dimensão das partículas num escoamento resulta proibitivo o uso de instrumentos que possam ser utilizados durante sua trajetória.*

Assim, a trajetória de uma partícula pode ser determinada resolvendo o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \end{cases} \quad (2.6)$$

Frequentemente, quando descrevemos o movimento do fluido em uma dessas duas formas, utilizaremos as expressões em coordenadas lagrangeanas e em coordenadas euleriana para especificar a descrição utilizada. Consideramos agora uma função arbitrária

$g(\mathbf{a}, t)$, definida em coordenadas lagrangeanas, expressa em coordenadas eulerianas pela expressão

$$g(\mathbf{a}, t) = h(\phi(\mathbf{a}, t)) = h(x(t), t), \quad \phi(\mathbf{a}, t) = x(t) \quad (2.7)$$

Proposição 2.1.1 *A derivada temporal de $g(\mathbf{a}, t)$ é dada por: .*

$$\frac{\partial g(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h \quad (2.8)$$

Demonstração: Pela regra da cadeia

$$\frac{\partial g(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h \phi_t(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h \quad (2.9)$$

Observação 2.1.4 Física

Uma das mais importantes aplicações do cálculo à Física (senão a mais importante), é o conceito de "derivada temporal-- a taxa de mudança ao longo do tempo – que é necessário para a definição precisa de vários importantes conceitos. Em particular, as derivadas temporais da posição de um objecto são importantes na física newtoniana.

Definição 2.1.5 *A derivada material de uma função diferenciável $h(x, t)$ é definida por*

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h \quad (2.10)$$

Observação 2.1.5 Derivada Material

A taxa de variação de uma determinada propriedade de um fluido em um escoamento pode ser medida de maneiras diferentes: A primeira delas, obtém a taxa de variação em um ponto fixo do espaço, isto é, a variação pode ser obtida em função das propriedades das partículas do fluido que passam por este ponto fixo no espaço. A outra maneira, obtém a taxa de variação seguindo uma partícula ao longo do escoamento. A derivada de uma variável com relação a um ponto fixo do espaço é chamada de derivada espacial, enquanto a derivada seguindo uma partícula é chamada de derivada material.

Agora demonstraremos um lema bastante utilizado neste capítulo, que se refere à derivada do determinante de uma matriz cujos elementos são funções do tempo.

Lema 2.1.1 *Seja $M(t)$ uma matriz quadrada e inversível cujos elementos são funções diferenciáveis do tempo, então .*

$$\frac{d}{dt} \det(M(t)) = \det(M(t)) \cdot \text{Tr}\left(\frac{dM(t)}{dt} \cdot M^{-1}(t)\right) \quad (2.11)$$

Demonstração: Consideremos uma matriz $X(t) = I$ a matriz identidade para dado t . O determinante é uma função multi-linear dos vetores linha da matriz $X(t)$, denotados por $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Chamemos de $D(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ esta função. Pela regra do produto da derivação, vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) &= D(\dot{x}_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) + \\ &+ D(x_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, x_n(t)) + \dots + D(x_1(t), x_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \end{aligned}$$

Para este valor t em particular, vale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} D(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) &= D(\dot{x}_1(t), e_2, \dots, e_n) + \\ &+ D(e_1, \dot{x}_2(t), \dots, e_n) + \dots + D(e_1, e_2, \dots, \dot{x}_n(t)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde os vetores e_j são os versores na direção j . Vale então para este t :

$$\frac{d}{dt} \det(X(t)) = \text{Tr}\left(\frac{dX(t)}{dt}\right) \quad (2.13)$$

Tomamos agora $X(t) = M(t)^{-1}M(t+h)$. Então, $\det X(t) = \det M(t)^{-1} \det M(t+h)$ e, consequentemente:

$$\frac{d}{dh} \det(M(t+h))|_{h=0} = \frac{d}{dt} \det(M(t)) = \det(M(t)) \cdot \text{Tr}\left(\frac{dM(t)}{dt} \cdot M^{-1}(t)\right) \quad (2.14)$$

2.2 Leis da conservação

As equações de Navier-Stokes são obtidas de três princípios físicos muito familiares:

- Conservação da Massa.
- Conservação de Momento (segunda lei de Newton).
- Conservação da Energia (segunda lei da Termodinâmica).

O Teorema de Transporte de Reynolds é o teorema fundamental utilizado na formulação das leis básicas da dinâmica dos fluidos, que são a equação de conservação da massa (ou equação da continuidade), conservação do momento, e conservação da energia.

O Teorema de Transporte de Reynolds estabelece uma relação integral, determinando as mudanças de qualquer propriedade P , definidas sobre um volume de controle V , como a soma entre fluxos dessa propriedade sobre sua superfície S (saída e entrada dessa propriedade no volume), e o que é criado ou consumido dentro do volume de controle.

A seguir enunciaremos um resultado fundamental da mecânica do contínuo: o Teorema do Transporte de Reynolds.

Teorema 2.2.1 *Sejam $f(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u}(x, t)$ funções de classe C^1 , para $x \in \Omega_t$ no tempo t . Então, vale:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{u}) dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega_t} f\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.15)$$

onde $\partial\Omega_t$ é o bordo da região Ω_t com vetor normal unitário \mathbf{n}

Demonstração: Note que o domínio sobre o qual a integral está sendo efetuada não é constante com o tempo. Portanto, não podemos simplesmente comutar a derivação com a integração sobre o domínio Ω_t . O que faremos é uma mudança de variáveis dependente do tempo de forma que o domínio fique fixo e possamos passar a derivada para dentro do sinal de integração e, em seguida, aplicaremos a transformação inversa para voltarmos ao domínio inicial de integração. Lembremos que a função ϕ_t é uma bijeção para cada t e $\phi_t(\Omega_0) = \Omega_t$. Logo, $(\phi_t)^{-1}(\Omega_t) = \Omega_0$, e então ϕ_t pode ser utilizada para tanto.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\phi_t(\mathbf{a}, t), t) J(t) d\mathbf{a} \quad (2.16)$$

onde

$$J(t) = \det \left[\frac{\partial(\phi_t)_i}{\partial a_j} \right] \quad (2.17)$$

Agora, com o domínio fixo, podemos finalmente passar a derivada para dentro do sinal de integração:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} f(\phi_t(\mathbf{a}, t), t) \cdot J(t) d\mathbf{a} = \int_{\Omega_0} \left[\frac{Df}{Dt} \cdot J(t) + f \frac{d}{dt} J(t) \right] d\mathbf{a} \quad (2.18)$$

Aplicando agora o lema (2.2.1)

$$\frac{dJ(t)}{dt} = J \text{div} \mathbf{u} \quad (2.19)$$

e voltando para o domínio original Ω_t , temos:

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{Df}{Dt} J(t) + f \frac{d}{dt} J(t) \right) d\mathbf{a} = \int_{\Omega_t} \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

2.2.1 Conservação de Massa

A massa de um fluido é uma propriedade de um conjunto de partículas do mesmo. Faremos a hipótese que existe uma medida de massa μ_t que é carregada pela aplicação ϕ_t . Assumiremos ainda que esta medida de massa é regular (com relação à medida de Lebesgue), de forma que exista uma densidade associada à esta medida (Teorema de Radon-Nikodym).

$$d\mu_t = \rho(x, t) d\mathbf{x}. \quad (2.21)$$

$$d\mu_t = \rho((\phi_t)^{-1}(x, 0)) d\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Observação 2.2.1 *Em matemática, a medida de Lebesgue é a generalização padrão do conceito de comprimento na reta, área no plano e volume no espaço.*

Definição 2.2.1 *A massa total do sistema é dada pela integral*

$$m = \int_{\Omega_t} d\mu_t = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) d\mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Teorema 2.2.2 *Considerando um sistema sob as hipóteses acima, vale para todo tempo t :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.24)$$

Demonstração: Pelas hipóteses acima, m é carregada pela aplicação ϕ . Portanto

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} d\mu_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (2.25)$$

Pelo Teorema (2.1.1), concluímos que vale:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x} = 0 \quad (2.26)$$

Como este raciocínio vale para qualquer subconjunto aberto de Ω_t , então deve também valer localmente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.27)$$

A equação acima é chamada equação de Liouville. Esta equação define como medidas são transportadas por grupos de transformações a um parâmetro.

Definição 2.2.2 Dado um campo de velocidades \mathbf{u} , dizemos que este campo é incompressível se vale

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0.$$

Neste caso, a equação de Liouville pode ser escrita com

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla(\rho) = 0 \quad (2.28)$$

Observação 2.2.2 Se considerarmos ρ como uma densidade de medida qualquer definida num espaço de fase de uma equação diferencial, o Teorema (2.2.2) diz como esta medida é transportada pelo fluxo da equação diferencial e, ainda, que se o campo vetorial for conservativo, a medida é conservada pelo sistema.

Observação 2.2.3 Para obter uma equação que possibilite descrever o comportamento futuro de um sistema dinâmico os cientistas estudam o comportamento do sistema para pequenos intervalos de tempo, constroem as equações diferenciais, utilizam métodos para integrar essas equações e chegam a uma solução, impondo as devidas condições de contorno. Espaço de fase é a representação das variáveis dinâmicas relevantes de um sistema. Uma trajetória no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema, através da evolução temporal de suas variáveis relevantes. O espaço de fase é uma ferramenta útil na compreensão do comportamento dos sistemas.

Definição 2.2.3 O volume específico α é definido por:

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \quad (2.29)$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} J(t) \quad (2.30)$$

Teorema 2.2.3 Para qualquer função diferenciável de ρ , $H(\rho)$, vale:

$$\frac{\partial H(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(H(\rho)\mathbf{u}) = 0 \quad (2.31)$$

Demonstração: Pela regra da cadeia, vale

$$\frac{\partial H(\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(H(\rho)\mathbf{u}) = H'(\rho) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) \right) = 0 \quad (2.32)$$

Observação 2.2.4 Com $H(\rho)\mathbf{u} = (H(\rho)u_1, H(\rho)u_2, H(\rho)u_3)$

Corolário 2.2.1 *A seguinte equação é válida para o volume específico α :*

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \alpha \operatorname{div}(\mathbf{u}) \quad (2.33)$$

Balço de Momento: A conservação de momento, ou mais precisamente o balanço de momento em um fluido, decorre da segunda lei de Newton aplicada ao fluido. A segunda lei de *Newton* afirma que:

A taxa de variação de momento numa porção do fluido é igual à soma das forças a ele aplicadas.

Em outras palavras, é válida a chamada **equação balanço de momento**:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.34)$$

Suponhamos que $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ seja um campo de forças suave de forma que exista uma densidade do campo de forças

$$\int_{\Omega_t} f d\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.35)$$

Neste caso, a **equação balanço de momento** na forma local pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + \rho \mathbf{u} \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (2.36)$$

Usando a equação de conservação de massa, podemos reescrever a equação acima como:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} \quad (2.37)$$

As forças que atuam em um fluido podem ser de dois tipos: As forças de stress são internas e decorrem da interação de porções distintas do fluido, como por exemplo dois volumes adjacentes no fluido que interagem. Neste caso, a força de interação entre eles atuam na superfície que separa estes volumes adjacentes; As forças externas, por outro lado, são devidas a um agente externo ao fluido, por exemplo a força gravitacional, ou a força magnética no caso de fluidos magnetizados. Estas duas forças atuam sobre volumes do fluido.

Definição 2.2.4 *Um fluido ideal é aquele no qual para qualquer movimento existe uma função $p(\mathbf{x}, t)$, chamada pressão, tal que, sendo σ uma superfície material do fluido com normal \mathbf{n} , então a força por unidade de área exercida nesta superfície no ponto \mathbf{x} e no tempo t é dada por $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$.*

A força de stress \mathbf{F}_{in} , exercida numa região Ω_t do fluido, é dada por:

$$\mathbf{F}_{in} = - \int_{\partial\Omega_t} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} dS = - \int_{\Omega_t} \nabla p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.38)$$

onde a última igualdade decorre do teorema da divergência de Gauss. Por outro lado, forças externas \mathbf{F}_{ex} geradas por um campo externo \mathbf{b} são dadas, por unidade de massa, da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{ex} = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b} d\mathbf{x}. \quad (2.39)$$

Tomando a força total atuando sobre uma região do fluido como $\mathbf{F}_{total} = \mathbf{F}_{ex} + \mathbf{F}_{int}$, temos:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b} d\mathbf{x} - \int_{\Omega_t} \nabla p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

Como o raciocínio acima vale para qualquer subconjunto aberto de Ω_t , vale a seguinte equação também na forma local:

Equação de Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b} - \nabla p(\mathbf{x}, t). \quad (2.41)$$

Capítulo 3

Equações Diferenciais Parciais.

O objetivo principal deste capítulo é apresentar o conceito de equação diferencial parcial (EDP), e estudar algumas de suas principais propriedades. Como a equação da onda é uma Equação Diferencial Parcial (EDP), veremos alguns métodos de como obter a solução da equação de onda, assim como a dedução do modelo. Nesta capítulo, definiremos e discutimos alguns conceitos gerais associados com equações diferenciais parciais lineares.

3.1 Operadores diferenciais parciais lineares e suas Curvas e Superfícies Características

Definição 3.1.1 *Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve uma função de duas ou mais variáveis e suas derivadas. Podemos escrever simbolicamente uma típica EDP do seguinte modo: Fixemos um inteiro $k \geq 1$ e seja U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Seja u uma aplicação $u : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.*

Uma expressão da forma:

$$F(D^n u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad (3.1)$$

é chamada de equação diferencial parcial de k^n - ordem.

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

onde F é uma função .

3.2 Tipos de EDP'S

Ordem e grau de uma Equação Diferencial Parcial

A ordem de uma equação diferencial parcial é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação, e o grau é o expoente da derivada mais alta quando a equação está escrita em uma forma semelhante a uma função polinomial, em que as potências fazem o papel das derivadas da ordem respectiva.

Exemplo 3.2.1 A EDP $u_x = x + y$ é de primeira ordem, e do primeiro grau.

Exemplo 3.2.2 A EDP $u_{xx} + u_{yy} = 0$ é de segunda ordem, e do primeiro grau.

Exemplo 3.2.3 A EDP $u_{xxx} + 2yu_{xx} + xu_xu_y + (u_x)^2 = \text{sen}(xy)$ é de terceira ordem e do primeiro grau.

Noções iniciais:

Vamos estabelecer a seguinte notação: sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde x é multi-índice que denota um ponto em \mathbb{R}^n , e seja D_j o operador de diferenciação parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$. Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que denota uma n-upla de inteiros não negativos.

Então definimos:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Seja $|a|$ denotando a soma dos componentes de α , então $|a| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ então x^α é um monômio de ordem $|a|$ nas coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n e D^α é um operador de diferenciação parcial de ordem $|a|$. Na notação antiga

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Exemplo 3.2.4 Se $n = 3$ e $\alpha = (2, 1, 3)$, então $|a| = 6$, $x^\alpha = x_1^2 x_2^1 x_3^3$ é um monômio de ordem 6, então

$$D^\alpha = D_1^2 D_2^1 D_3^3 = \frac{\partial^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^1 \partial x_3^3}.$$

Uma equação diferencial parcial linear de ordem m em \mathbb{R}^n é uma equação da forma:

$$\sum_{|a| \leq m} a^\alpha D^\alpha u = f \quad (3.3)$$

onde a^α e f são funções de $x \in \mathbb{R}^n$. A função a^α é chamada de coeficiente do termo $a^\alpha D^\alpha u$ e f é chamado o lado direito da equação. O somatório à esquerda é tomado sobre todos os valores possíveis do vetor indexado α com $|\alpha| \leq m$. Assim, m é a ordem das derivadas de maior ordem aparecendo na equação. O operador diferencial parcial linear no lado esquerdo da equação (4.3) será denotado por $P(x, D)$,

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a^\alpha(x) D^\alpha. \quad (3.4)$$

Se os coeficientes a são constantes, escrevemos $P(D)$ ao invés de $P(x, D)$.

Exemplo 3.2.5 Em \mathbb{R}^2 , a equação:

$$D_1^2 u + \sin(x_1 x_2) D_2^2 u - x_2^2 D_1 D_2 u + x_1 D_2 u + e^{x_2} u = \cos(x_1 + x_2) \quad (3.5)$$

é uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem. Os coeficientes são

$$\alpha^{(2,0)}(x) = 1, \quad \alpha^{(0,2)}(x) = \sin(x_1 x_2), \quad \alpha^{(1,1)}(x) = -x_2^2,$$

$$\alpha^{(1,0)}(x) = 0, \quad \alpha^{(0,1)}(x) = x_1, \quad \alpha^{(0,0)}(x) = e^{x_2}.$$

$$f(x) = \cos(x_1 + x_2).$$

O operador na equação (3.5) é

$$P(x, D) = D_1^2 + \sin(x_1 x_2) D_2^2 - x_2^2 D_1 D_2 + x_1 D_2 + e^{x_2}. \quad (3.6)$$

Exemplo 3.2.6 O operador diferencial parcial linear de primeira ordem em \mathbb{R}^n tem a forma:

$$P(x, D) = a^{(1,0,\dots,0)}(x) D_1 + a^{(0,1,0,\dots,0)}(x) D_2 + \dots + a^{(0,0,\dots,1)}(x) D_n + a^{(0,0,0,\dots,0)}(x).$$

Claro que podemos preferir usar uma notação mais simples. Por exemplo, o operador linear geral de primeira ordem em \mathbb{R}^2 é

$$P(x, D) = a_1(x) D_1 + a_2(x) D_2 + c(x). \quad (3.7)$$

Exemplo 3.2.7 O operador diferencial parcial linear de segunda ordem em \mathbb{R}^2 tem a forma:

$$P(x, D) = a^{(2,0)}(x) D_1^2 + a^{(1,1)}(x) D_1 D_2 + a^{(0,2)}(x) D_2^2 + a^{(1,0)}(x) D_1 + a^{(0,1)}(x) D_2 + a^{(0,0)}(x).$$

Alguns exemplos importantes com coeficientes constantes são o Laplaciano operador em duas variáveis:

$$P(D) = D_1^2 + D_2^2.$$

- O operador de onda em uma variável espacial

$$P(D) = D_1^2 - D_2^2, \quad (3.8)$$

- O operador de calor em uma variável espacial

$$P(D) = D_1^2 - D_2, \quad (3.9)$$

$$P(x, D) = x_2 D_1^2 - D_2^2, \quad (3.10)$$

Em (3.9) e (3.10), x_1 uma variável de espaço e x_2 é uma variável de tempo. Outro exemplo é o Operador Tricomi que aparece em hidrodinâmica,

$$P(x, D) = x_2 D_1^2 - D_2^2, \quad (3.11)$$

Exemplo 3.2.8 O operador diferencial parcial linear de segunda ordem em \mathbb{R}^3 tem a forma:

$$\begin{aligned} P(x, D) = & a^{(2,0,0)}(x)D_1^2 + a^{(1,1,0)}(x)D_1D_2 + a^{(1,0,1)}(x)D_1D_3 + \\ & + a^{(0,1,1)}(x)D_2D_3 + a^{(0,2,0)}D_2^2 + a^{(0,0,2)}(x)D_3^2 + \\ & + a^{(1,0,0)}(x)D_1 + a^{(0,1,0)}(x)D_2 + a^{(0,0,1)}(x)D_3 + a^{(0,0,0)}(x) \end{aligned}$$

Casos especiais importantes com coeficientes constantes é o Laplaciano em três variáveis de espaço:

$$P(D) = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2.$$

- O operador de onda em duas variáveis de espaço

$$P(D) = D_1^2 + D_2^2 - D_3^2, \quad (3.12)$$

- O operador de calor em duas variáveis de espaço

$$P(D) = D_1^2 + D_2^2 - D_3, \quad (3.13)$$

Em (3.12) e (3.13), x_1 e x_2 são variáveis de espaço e x_3 é uma variável de tempo.

Uma das conclusões principais da teoria de equações diferenciais parciais é que a maioria das propriedades importantes de soluções de uma equação diferencial parcial linear, depende apenas da forma dos termos de maior ordem que aparecem na equação. Esses termos formam o que é conhecido como parte principal da equação. A parte principal do operador diferencial parcial linear geral (3.4) é:

$$P_m(x, D) = \sum_{|a|=m} a^\alpha(x) D^\alpha. \quad (3.14)$$

A parte principal do operador diferencial parcial (3.5) é

$$P_2(x, D) = D_1^2 + \text{sen}(x_1 x_2) D_2^2 - x_2^2 D_1 D_2$$

e a parte principal de (3.6) é:

$$P(x, D) = a_1(x) D_1 + a_2(x) D_2. \quad (3.15)$$

As partes principais dos operadores laplacianos e de ondas são iguais aos operadores, enquanto a parte principal do operador de aquecimento (3.8) é:

$$P(D) = D_1^2. \quad (3.16)$$

3.2.1 Exemplos de equações diferenciais

Exemplo 3.2.9 Equação do calor:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (\text{unidimensional}).$$

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (\text{bidimensional}).$$

Exemplo 3.2.10 Equações da onda:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (\text{unidimensional}).$$

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (\text{bidimensional}).$$

Exemplo 3.2.11 Equação de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (\text{bidimensional}).$$

Exemplo 3.2.12 Equação Korteweg-de-Vries:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (\text{unidimensional}).$$

3.2.2 Equações características e mudança de variáveis.

Equação Característica

Seja a equação diferencial parcial:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + G(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (3.17)$$

Definimos a equação diferencial característica associada a (3.17) como:

$$A(x, y)(dx)^2 + B(x, y)(dx)(dy) + C(x, y)(dy)^2 = 0$$

As curvas características associadas são as soluções da equação diferencial (ordinária) característica.

Um vetor diferente de zero, ou seja, não-nulo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ define uma direção em \mathbb{R}^n . Note que para qualquer número real $\lambda \neq 0$ os vetores ξ e $\lambda\xi$ definem a mesma direção. Uma direção definida pelo vetor não-nulo $\xi \in \mathbb{R}^n$ é chamado característica no ponto $x \in \mathbb{R}^n$ em relação ao operador diferencial parcial $P(x, D)$ dado por (3.4), se

$$P_m(x, \xi) = 0 \quad (3.18)$$

onde $P_m(x, D)$ dado por (3.4) é a parte principal de $P(x, D)$. A equação (4.12) é chamada de equação característica de $P(x, D)$ e seu lado esquerdo é obtido a partir de (4.4) substituindo $D = (D_1, \dots, D_n)$ e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ assim tem-se

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|a|=m} a^\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Como exemplo, a equação característica do operador (4.5) é

$$\xi_1^2 + \text{sen}(x_1 x_2) \xi_2^2 - x_2^2 \xi_1 \xi_2 = 0,$$

portanto, a direção $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1)$ é uma característica do ponto $(x_1, x_2) = (2, \frac{\pi}{2})$ com relação a este operador. A equação característica do operador de onda (4.13) é

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0,$$

e a direção $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 1, \sqrt{2})$ é característica em cada ponto (x_1, x_2, x_3) de \mathbb{R}^3 . Geralmente, se os coeficientes da parte principal de um operador são constantes, então, obviamente, as direções características também são independente do ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Seja S uma superfície suave $\subset \mathbb{R}^n$ e x^0 um ponto de S , a superfície S é dito ser uma característica em x^0 em relação a $P(x, D)$ se um vetor normal a S em x^0 define uma direção

que é característica em relação a $P(x, D)$ em x^0 . Se a superfície S é característica em relação a $P(x, D)$ em cada um de seus pontos, então S é chamado de uma superfície característica. Naturalmente, em \mathbb{R}^2 uma superfície característica é uma curva chamada de curva característica.

3.2.3 Métodos para encontrar curvas e superfícies características.

O primeiro passo para tentar encontrar as curvas ou superfícies características de um operador diferencial parcial linear, está em escrever sua equação característica. Se os coeficientes da parte principal do operador forem constantes, então a equação característica é um polinômio homogêneo em ξ_1, \dots, ξ_n com coeficientes constantes. Pode ser possível reconhecer as direções características e determinar as superfícies características por simples raciocínio geométrico. Os seguintes exemplos em \mathbb{R}^2 ilustram esse método.

$$P(x, D) = D_1 + c(x).$$

Aqui a ordem $m = 1$ é a parte principal é:

$$P_1(x, D) = D_1.$$

a equação característica é

$$\xi_1 = 0,$$

de modo que a direção $(0, 1)$ é a única direção característica a cada ponto em \mathbb{R}^2 . As curvas características são as linhas $x_2 = \text{const}$.

Exemplo 3.2.13 Em \mathbb{R}^2 , considere o operador de Laplace:

$$P(D) = D_1^2 + D_2^2.$$

A equação característica é:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

que está satisfeito $\xi_2 = \pm \xi_1$. As curvas características são linhas retas fazendo 45° de ângulo com os eixos; isto é, as linhas $x_2 = x_1 + c_1$ e $x_2 = -x_1 + c_2$. Note que através de cada ponto (x_1^0, x_2^0) passe exatamente duas curvas características.

Exemplo 3.2.14 Em \mathbb{R}^2 seja:

$$P(x, D) = a_1(x)D_1 + a_2(x)D_2 + c(x).$$

A ordem m é 1, e a parte principal é:

$$P_1(x, D) = a_1(x)D_1 + a_2(x)D_2,$$

onde a equação característica é

$$a_1(x)\xi_1 + a_2(x)\xi_2 = 0.$$

Seja C uma curva característica dada parametricamente por:

$$x_1 = f_1(t) \quad \text{e} \quad x_2 = f_2(t).$$

A tangente desta curva é dada por $(dx_1/dt, dx_2/dt)$ e, portanto, $(dx_2/dt, -dx_1/dt)$ é normal para C . Conseqüentemente:

$$a_1(x_1, x_2) \frac{dx_2}{dt} - a_2(x_1, x_2) \frac{dx_1}{dt} = 0.$$

Assim, as curvas características podem ser obtidas resolvendo o diferencial da equação:

$$a_1 dx_2 - a_2 dx_1 = 0.$$

Por exemplo, as curvas características de $D_1 + D_2$ são soluções da equação:

$$dx_2 - dx_1 = 0.$$

que são as retas: $x_2 = x_1 + c$.

As curvas características de $D_1 + x_1 D_2$ são soluções de:

$$dx_2 - x_1 dx_1 = 0,$$

que são as parábolas: $x_2 = \frac{x_1^2}{2} + c$.

3.2.4 A importância das superfícies, curvas características

Exemplo Muito simples

Nesta seção, ilustraremos a importância das superfícies, curvas características, discutindo o operador diferencial parcial mais simples possível, o operador $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ no plano (x, y) . Como vimos na seção anterior, $(0,1)$ é a única direção característica, e as curvas características são as retas $y = \text{cons}$.

Prova do modelo matemático para mudança de variáveis de uma equação de onda unidimensional

Faremos uma prova analítica que a mudança de variável proposta para simplificar a solução da equação de onda está coerente.

As retas ($\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$) tem significado especial no estudo da equação:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (3.19)$$

elas são chamadas as retas características para a (3.19). Com o objetivo de encontrar a mudança de variável conveniente, considera-se a aplicação linear

$$(x, t) \longrightarrow (\xi, \eta)$$

do \mathbb{R}^2 no \mathbb{R}^2 dado por:

$$\xi = \xi(x, t) = \alpha x + \beta t \text{ e } \eta = \eta(x, t) = \gamma x + \delta t.$$

onde supomos $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, para que tal mudança seja invertível.

Seja $u(\xi, \eta)$ solução de (4.21) então:

$$u(\xi, \eta) = \xi(\alpha x + \beta t) + \eta(\gamma x + \delta t)$$

•Cálculo da primeira derivada:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

•Cálculo da segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, \eta) &= \alpha' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)' + \gamma' \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \gamma \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)' \\ &= \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \alpha \cdot \gamma \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \gamma \cdot \alpha \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \\ &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \gamma^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \eta) &= \beta' \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)' + \delta' \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)' \\
&= \beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial u \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \\
&= \beta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \beta \cdot \delta \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \delta \cdot \beta \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} \\
&= \beta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Note que: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Então, substituindo na Eq(3.19) e reorganizando os termos obtemos:

$$\begin{aligned}
&\left(\beta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \beta^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) - c^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + \right. \\
&\quad \left. + \gamma^2 \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right) = 0 \\
(\beta^2 - c^2 \alpha^2) \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + 2(\beta\delta - c^2 \alpha\gamma) \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta \partial \xi} + (\delta^2 - c^2 \gamma^2) \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} &= 0. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Observe que depois das simplificações acima a equação foi reduzida a:

$$(\beta^2 - c^2 \alpha^2) u_{\xi\xi} + 2(\beta\delta - c^2 \alpha\gamma) u_{\xi\eta} + (\delta^2 - c^2 \gamma^2) u_{\eta\eta} = 0.$$

Logo, para reduzir a forma canônica desejada, impomos que

$$\beta^2 - c^2 \alpha^2 = \delta^2 - c^2 \gamma^2 = 0$$

e portando, se $\beta = c\alpha$ e $\delta = -c\gamma$, então $\beta\delta - c^2 \alpha\gamma \neq 0$, isso implica que $-c^2 \alpha\gamma - c^2 \alpha\gamma = -2c^2 \alpha\gamma \neq 0$. Dessa forma, uma boa mudança de variáveis é dada por:

$$\xi = \alpha(x + ct) \text{ e } \eta = \gamma(x - ct), \tag{3.23}$$

sendo α e γ escolhidos arbitrariamente como sendo $\alpha = \gamma = 1$, então $\beta = c$ e $\delta = -c$. Logo, obtemos que $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial t} = c$ e $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -c$. Assim podemos reescrever (3.23) na forma:

$$\xi = x + ct \text{ e } \eta = x - ct.$$

e obtemos ainda a seguinte equação transformada:

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \text{ ou seja, } -4c^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

Integrando em relação a η e depois em relação a ξ obtemos:

$$\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = h(\xi) \Rightarrow u(\xi, \eta) = \int_0^\xi h(\xi) d\xi + g(\eta) \Rightarrow u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

onde f, g são funções de classe C^2 sobre \mathbb{R} . De modo que a solução de D'Alembert é dado por:

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

3.2.5 A fórmula de D'Alembert

Vamos usar a fórmula de D'Alembert para provar a identidade $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Para isso precisamos supor que u_0 é de classe C^2 e u_1 é de classe C^1 em \mathbb{R} . Com isso obtemos o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty \\ u_1(x, 0) = u_1(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (3.24)$$

Seja $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, uma solução geral para a EDP. Para obtermos uma solução única para o PVI, basta impor as seguintes condições iniciais dadas anteriormente. Com isso obtemos:

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = u_0(x).$$

Calculando a derivada de u em relação a t e aplicando a condição de $t = 0$ obtemos:

$$u_1(x, 0) = cf'(x) - cg'(x) = u_1(x).$$

Integrando u_1 temos:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= u_0(x). \\ f(x) - g(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s) ds + C_1. \end{aligned}$$

Combinando as equações acima obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + C_1. \\ g(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + C_1. \end{aligned}$$

o que implica em:

$$f(x+ct) = \frac{u_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(s) ds + C_1.$$
$$g(x-ct) = \frac{u_0(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} u_1(s) ds + C_1.$$

Portanto, a solução de D'Alembert do PVI é dada por :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds.$$

Fórmula obtida em 1747. Assim, provou-se a existência e também a unicidade, já que se existir uma outra solução $v(x,t)$ do PVI com as mesmas condições iniciais, então pela própria fórmula obtém-se que $u = v$.

Capítulo 4

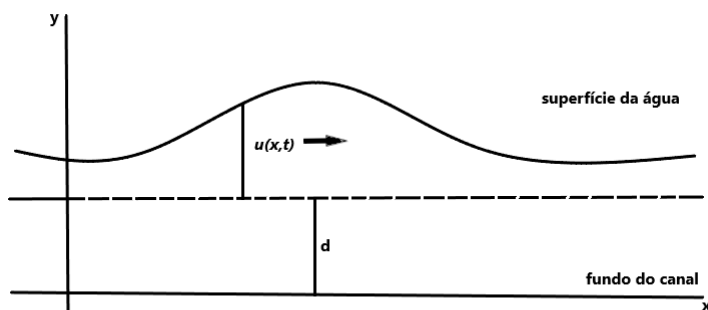
Equação da onda rasa em canal

Nesta capítulo, estudaremos a equação da onda rasa em um canal, trataremos a água como fluido não viscoso e incompressível e de densidade constante, e o movimento será uni-dimensional, propagando-se somente pela ação da força gravitacional, pois as equações que regem esse comportamento oscilatório, requerem certas características para esse fenômeno e para modelagem da equação de onda.

4.1 Solução da Equação de Onda Rasa em um Canal.

Suponhamos que a água está se deslocando num "longo" canal reto, cuja seção transversal é retangular. Escolhemos os eixos coordenados como na figura 4.1 denotando por $d > 0$ a profundidade da água a partir do nível não perturbado.

Figura 4.1: perfil de onda



Vamos agora estabelecer alguns critérios e parâmetros de natureza física e Matemática para nossa modelagem.

(i) $\frac{u(x,t)}{d} \ll 1$, isto é, a razão entre a amplitude máxima da onda e a profundidade não-perturbada do água seja muito pequeno;

(ii) $\frac{l}{d} \ll 1$, isto é, a razão entre o comprimento de onda e a profundidade não-perturbada do água seja muito pequeno.

Seja $u(x,t) = \mu$ a altura da onda e denotaremos a pressão atmosférica por p_0 que sempre será perpendicular a qualquer seção, ou porção do fluido que considerarmos em cada ponto, e a pressão do líquido por P_l e seja ρ a densidade da água. Neste caso, iremos supor ρ constante. O produto da densidade pela gravidade representado por $\rho.g$ é chamado de peso específico do fluido. A diferença entre as pressões, P_l do líquido e a pressão atmosférica p_0 será $P_l - p_0$, que é chamada de pressão estática. Assim a pressão estática é igual ao produto do peso específico do volume fundamental dado por $\rho.g$ vezes a altura da onda $u(x,t) + d = \mu + d$. Assim temos,

$$P_l - p_0 = \rho .g(\mu + d) \Rightarrow P_l = p_0 + \rho .g(\mu + d). \quad (4.1)$$

Derivando a (5.1) na direção do movimento sobre o eixo-x, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_l}{\partial x} &= \frac{\partial p_0}{\partial x} + \rho .g \frac{\partial(\mu + d)}{\partial x} \Rightarrow \\ \frac{\partial P_l}{\partial x} &= \rho .g \frac{\partial \mu}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Esta equação (4.2) independe de "d", pois "d" está na direção do eixo-y, assim a derivada de "d" que tem a mesma direção de "y" é igual a zero. Como não há movimento da direção do eixo y então, a aceleração da gravidade é a mesma para todos as partículas em um plano perpendicular a x , então $P_l = P = const$ para todos os pontos. Isto mostra que a velocidade horizontal \vec{V} é uma função de x e z somente.

Seja $\vec{V}(x, y, z)$ a velocidade do volume fundamental num ponto (x, y, z) , assim a velocidade do volume fundamental será determinada por :

$$\vec{V}(x, y, z, t) = V_x(x, y, z, t)\vec{i} + V_y(x, y, z, t)\vec{j} + V_z(x, y, z, t)\vec{k}.$$

Os V_x, V_y, V_z são escalares e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são vetores unitários na direção dos eixos coordenados x, y, z respectivamente. Vamos considerar a seguinte definição de base ortonormal no \mathbb{R}^3 . Dado uma base $(e_i, e_j, e_k) \in \mathbb{R}^3$ então:

$$e_m . e_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Como não há movimento na direção dos eixos y , a curva não varia sua amplitude, neste caso temos que $V_y = \vec{0}$ (velocidade nula), e como a onda não translada na direção do eixo- z a velocidade de $V_z = \vec{0}$ (velocidade nula), então a velocidade do volume fundamental terá dependência explícita de $x(t)$ e implícita de t , determinada apenas por :

$$\vec{V}(x, t) = V_x(x, t)\vec{i}.$$

4.1.1 Equação do movimento

Como o movimento do fluido é descrito por um vetor velocidade definido por

$$\vec{V}(x, y, z, t) = V_x(x, y, z, t)\vec{i} + V_y(x, y, z, t)\vec{j} + V_z(x, y, z, t)\vec{k}$$

e o escoamento é bidimensional segue que

$$\vec{V}(x, y, t) = V_x(x, y, t)\vec{i} + V_y(x, y, t)\vec{j}.$$

Seja $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$ a velocidade do fluido, se o regime de escoamento é permanente, então, nem o vetor velocidade e nem suas componentes serão função do tempo, serão funções apenas do ponto. Logo;

$$\begin{cases} V_x = V_x(x, y, z) \\ V_y = V_y(x, y, z) \end{cases}$$

Assim se consideraremos o vetor velocidade como \vec{V} e calculando a derivada parcial no tempo obtemos a aceleração

$$\vec{a} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial t}$$

Como função do tempo. Logo podemos escrever

$$\vec{a} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

mas

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t}; V_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

e, portanto, a aceleração será dada por

$$\vec{a} = V_x \frac{\partial V}{\partial x} + V_y \frac{\partial V}{\partial y} \tag{4.3}$$

Como $V_y = V_z = 0$, temos que $\vec{a} = V_x \frac{\partial V}{\partial x}$.

Como na região não perturbada do fluido não há movimento nem há variação de amplitude da onda, e nem mudança na direção do fluido, podemos reescrever o vetor velocidade apenas em função da velocidade na direção do eixo- x da seguinte forma:

$$\vec{V}(x, y, z) = \vec{V}(V_x, V_y, V_z) = \vec{V}(V_x, 0, 0) = V_x(x, y, z, t)\vec{i}.$$

Definição 4.1.1 *Seja f uma função de duas variáveis. O gradiente de f é uma função vetorial da por:*

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}.$$

Então o gradiente da função escalar $V_x = V_x(x, y, z)$ é expresso na forma:

$$\nabla V_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\vec{k}.$$

Escoamentos potenciais referem-se a uma classe de escoamentos, em que o campo de velocidade é determinado pelo gradiente da função do potencial da velocidade, que aqui é dado por V_x , assim

$$\vec{V} = \nabla V_x \text{ como } \frac{\partial V_x}{\partial x} = V; \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0; \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0.$$

Para um campo de velocidade satisfazer a equação da conservação da massa, a função potencial deve satisfazer a equação de *Laplace*

$$\nabla \bullet \vec{V} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \nabla V_x = \nabla^2 V_x = 0.$$

Como $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ é de classe C^2 , então

$$\nabla(\nabla \times \vec{V}) = 0$$

Podemos concluir que:

$$\nabla \bullet V = 0, \text{ então o fluido é incompressível}$$

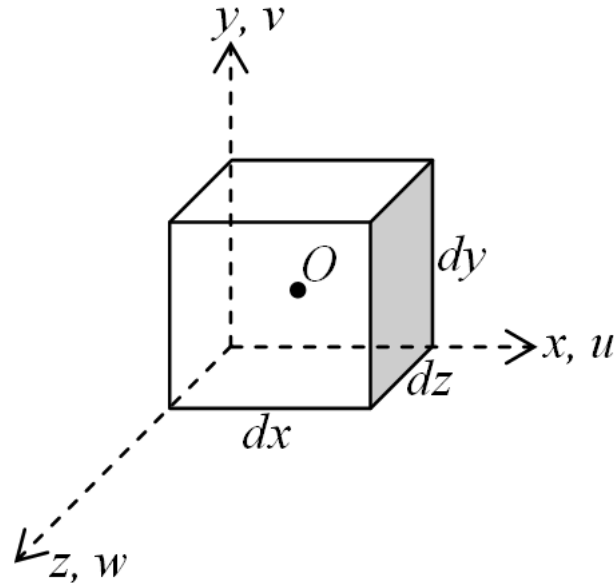
$$\nabla \times V = 0, \text{ então o fluido é irrotacional}$$

ou seja, as partículas do fluido não variam as suas distâncias umas das outras e nem giram sobre seus próprios eixos.

Em um fluido estático, nenhuma tensão de cisalhamento pode estar presente. Então, a única força de superfície é a força de pressão. A pressão é um campo escalar $p =$

$p(x, y, z)$, sabendo que a força de pressão age em cada face do elemento fundamental, atuando contra a face. Sabendo que P é uma força de pressão no centro O do elemento infinitesimal do volume fundamental. Para determinar a pressão em cada uma das seis faces do elemento, utilizaremos um desenvolvimento em série de Taylor da pressão em torno do ponto O .

Figura 4.2: elemento diferencial do fluido



A pressão na face esquerda do elemento diferencial é

$$p_l = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_l - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

Observação 4.1.1 *Termos de ordem superiores foram omitidos pois são valores irrelevantes para efeito de calculo.*

Procedendo com este mesmo raciocínio para todas as faces do elemento e tomando os vetores direcionais obtemos:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_s &= \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dx dy dz (\vec{i}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dx dy dz (-\vec{i}) + \dots \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dy dz (\vec{j}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dy dz (-\vec{j}) + \dots \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy dz (\vec{k}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy dz (-\vec{k}) \end{aligned}$$

Agrupando e cancelando os termos, obtemos

$$d\vec{F}_s = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) dx dy dz. \quad (4.4)$$

O termo entre parenteses é denominado gradiente da pressão, e pode ser escrito na forma

$$\text{grad } p = \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) p$$

O operador gradiente pode ser visto como um operador vetorial, tomando o gradiente de um campo escalar obtém-se um campo vetorial.

Usando a designação de gradiente temos que:

$$d\vec{F}_s = -\text{grad } p \, dx \, dy \, dz = -\nabla p \cdot d\vec{V},$$

portanto, o gradiente de pressão é o negativo da força de pressão por unidade de volume, devido à pressão.

4.1.2 Conservação da massa

Usaremos para demonstrar a conservação da massa o modelo de volume de controle diferencial.

O volume de controle escolhido é um cubo infinitesimal com lados de comprimento dx, dy, dz . A massa específica no centro, O , do volume de controle é admitida como sendo ρ e a velocidade aqui admitida como $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$.

Para avaliar as propriedades em cada uma das seis faces da superfície de controle, usaremos uma expansão por série de Taylor, em torno do ponto O .

A densidade ρ na face direita do elemento diferencial é:

$$\rho_{(x+\frac{dx}{2})} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{1}{2!} \left(\frac{dx}{2} \right)^2 + \dots$$

Observação 4.1.2 *Termos de ordem superiores foram omitidos pois são valores irrelevantes para efeito de cálculo.*

A densidade e a velocidade no eixo- x , à direita, são:

$$\rho_{(x+\frac{dx}{2})} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$u_{(x+\frac{dx}{2})} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

onde $\rho, u, \frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}$ são todos avaliados no ponto O . Densidade e velocidade no eixo- x , à esquerda, são:

$$\rho_{(x-\frac{dx}{2})} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(-\frac{dx}{2}\right) = u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

$$u_{(x-\frac{dx}{2})} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{dx}{2}\right) = u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

Um enunciado da conservação da massa é:

$$[\text{fluxo de massa que sai do } V_{\text{controle}}] + [\text{fluxo que entra no } V_{\text{controle}}] = 0.$$

Para determinar o primeiro termo desta equação, devemos avaliar $\int_{sc} \rho \vec{v} d\vec{A}$. Vemos que a taxa líquida de fluxo de massa para fora da superfície de controle é dada por

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

A massa dentro do volume de controle, em qualquer instante, é o produto da massa (ρ) por unidade de volume ($dx dy dz$). Assim a taxa de variação da massa dentro do volume de controle é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

a equação diferencial para a conservação da massa é:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\text{Então } \int_{sc} \rho \vec{V} d\vec{A} = \left(\left[u \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \left[v \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \left[w \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right) \cdot \text{ou}$$

$$\int_{sc} \rho \vec{V} d\vec{A} = \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Posto que o operador vetorial ∇ é dado por:

$$\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

então:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \rho \vec{V}.$$

note que o operador *del* ∇ age sobre ρ e \vec{V} . A equação da conservação da massa pode ser escrita como

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

Dois casos de escoamento para os quais a equação diferencial da continuidade pode ser simplificada:

- fluido incompressível com $\rho = \text{constante}$.

A massa específica não é função nem das coordenadas espaciais nem do tempo, logo:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V} = 0.$$

Portanto, o campo de velocidade $\vec{V}(x, y, z, t)$, para escoamentos incompressíveis deve satisfazer $\nabla \cdot \vec{V} = 0$.

- Escoamento permanente.

Todas as propriedades do fluido são independentes do tempo, assim, $\partial \rho / \partial t = 0$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0.$$

4.1.3 Equação de EULER

Em um fluido estático, a força resultante sobre o elemento de volume de controle é dado pela força de campo e pelas forças de superfície, ou de pressão. Como a densidade é constante em todo o fluido $\rho = \rho_0 = \text{constante}$, usaremos a segunda lei de **Newton** a um elemento de fluido diferencial de massa $dm = \rho dV$.

A força de campo é decorrente da gravidade dada por

$$d\vec{F}_g = \vec{g} dm = \vec{g} \rho dv = \vec{g} dx dy dz,$$

onde \vec{g} é o vetor da gravidade local, ρ é a massa específica e $dV = dx dy dz$ volume infinitesimal.

As forças de superfície ou de pressão é dada por:

$$d\vec{F}_s = -\text{grad } p dx dy dz.$$

A Segunda Lei de Newton (princípio fundamental da dinâmica) afirma que:

”A resultante das forças que agem sobre um corpo de massa constante se dá pelo produto dessa mesma massa pela aceleração resultante”.

$$d\vec{F}_{res} = \vec{a} . dm$$

Combinando as formulações desenvolvidas para as forças de pressão e campo, de modo a obter a força total atuando sobre o elemento fundamental, obtemos

$$\vec{a} \cdot dm = d\vec{F}_g + d\vec{F}_s \quad (4.6)$$

Substituindo os termos e explicitando a equação, temos:

$$\vec{a} \rho dx dy dz = (-\nabla p + \rho \vec{g}) dx dy dz \quad (4.7)$$

e usando o fato de que $\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$, podemos reescrever (4.7) da seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla p + \rho \vec{g}. \quad (4.8)$$

que é a equação do movimento de um líquido ideal de *EULER*.

Derivando a equação do movimento (4.8) na direção do movimento no eixo- x obtemos

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.9)$$

substituindo (4.2) em (4.9) obtemos que

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \cdot g \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g \frac{\partial \mu}{\partial x}. \quad (4.10)$$

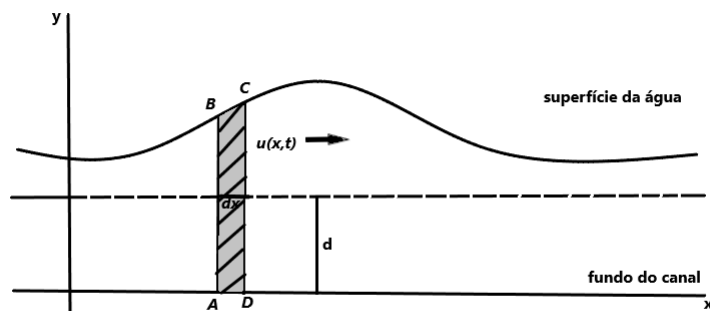
portanto de (4.10), temos que

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Vamos estudar o que acontece com a massa do volume de controle, do fluido do volume fundamental.

Seja Δx um incremento na direção do eixo x , considere o "paralelepípedo elementar" ABCD, de acordo com a figura 4.3.

Figura 4.3: elemento infinitesimal de onda



O diagrama do elemento do volume de controle infinitesimal da onda em um canal, é a área da seção transversal em $x = a$ e $(d + u(x, t))$ é a amplitude da onda, e L a largura do canal dada por $L(d + u(x, t))$. Num intervalo de tempo Δt um elemento do fluido (água) desloca-se "aproximadamente" $\Delta x = \vec{V} \cdot \Delta t$, assim, a massa do fluido Δm que atravessa a seção $L(d + u(x, t))$ no intervalo Δt é aproximadamente

$$\Delta m = \rho \cdot (\vec{V} \cdot \Delta t) L(d + u(x, t)). \quad (4.11)$$

Dividindo (4.11) por Δt , obtemos a equação do fluxo de massa por unidade de tempo:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \vec{V} L(d + u(x, t)). \quad (4.12)$$

Isto fornece o fluxo de massa do fluido no intervalo Δt , este fluxo é sempre constante. Denotaremos essa massa por Δm_1 , que pelo expansão do polinômio de Taylor afirma que na vizinhança de $x = a$ o polinômio passa pelo ponto $(a, m(a))$, então podemos aproximar e estimar o valor da m neste ponto:

$$\Delta m_1 = \Delta m + \frac{\partial \Delta m}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial^2 (\Delta m)}{\partial x^2} (x - a)^2 + \dots$$

Os termos de ordem superiores seram desconsiderados para efeito de cálculo pois são valores ínfimos, então numa primeira aproximação e admitindo que $\Delta x = (x - a)$ temos

$$\Delta m_1 = \Delta m + \frac{\partial \Delta m}{\partial x} \Delta x \longrightarrow \Delta m_1 - \Delta m = \frac{\partial \Delta m}{\partial x} \Delta x .$$

usando a regra da cadeia e derivando (4.11) em relação a variável x obtemos

$$\frac{\partial (\Delta m)}{\partial x} = \rho L(\Delta t) \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} d + \vec{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Assim obtemos:

$$\frac{\partial (\Delta m)}{\partial x} = \rho L(\Delta t) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} d + \rho L(\Delta t) \vec{V} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Multiplicando por $\Delta x = (x - a)$ temos que

$$\frac{\partial (\Delta m)}{\partial x} \Delta x = \rho L(\Delta t) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} d \Delta x + \rho L(\Delta t) \vec{V} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x.$$

Concluimos então que a massa "real" que "atravessa" ABCD no tempo Δt é aproximadamente

$$\Delta m_1 - \Delta m \equiv -\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} (\Delta t) L d (\Delta x), \quad (4.13)$$

onde o sinal negativo $(-)$ da equação indica uma saída de massa.

Finalmente, observamos que a massa m do líquido em ABCD é

$$m = \rho L(d + u(x, t))(\vec{V} \cdot \Delta t) = \rho L(d + u(x, t))(\Delta x).$$

Logo, na variação do Δt temos a equação do fluxo:

$$\frac{m}{\Delta t} = \rho L \frac{\partial u}{\partial t}(\Delta x)(\Delta t)$$

Isto deverá ser igual a quantidade obtida de massa na equação (4.13), pois nenhuma parte do fluido é criada ou destruída e portanto

$$\rho L \frac{\partial u}{\partial t}(\Delta x)(\Delta t) = -\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} L d(\Delta t)(\Delta x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -d \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$$

o qual nos permite obter por (4.2) a seguinte relação: $\frac{\partial u}{\partial t} = -d \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = -d(-g \frac{\partial u}{\partial x})$.

Sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} \text{ e } \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -g \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Calculando as derivadas mistas de \vec{V}

$$\frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -d \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x \partial t}.$$

manipulando e fazendo as adequações necessárias, pelo fato das derivadas mistas serem iguais obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -d \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x \partial t} = -d(-g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = dg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = dg u_{xx} \Rightarrow u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Portanto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, onde $d = h$ e $c^2 = gh > 0$.

Capítulo 5

Equação de Korteweg-de-Vries

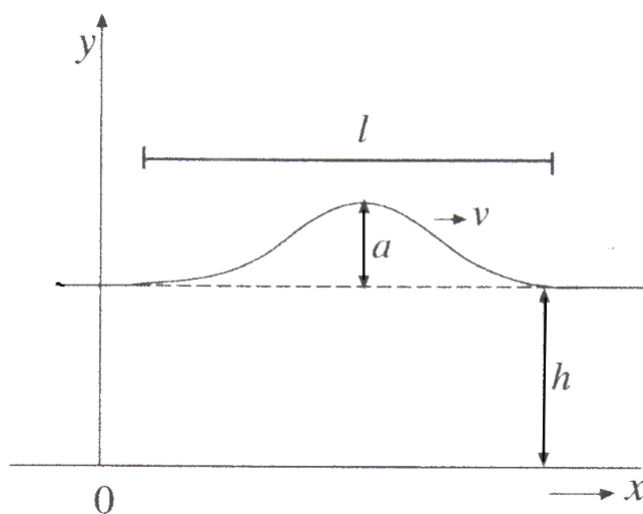
Nesta capítulo, estudaremos a solução da equação de Korteweg-de-Vries, a qual é conhecida na literatura como KdV, e é dada por $u_t + 6u \cdot u_x + u_{xxx} = 0$. O leitor interessado na dedução do modelo pode ver [13] para maiores detalhes da história e do fenômeno.

5.0.1 Solução da equação de Korteweg-de-Vries(KdV)

Dado o perfil inicial de onda, seja "l"o comprimento de onda e "a" a amplitude máxima da onda, e "h" a profundidade não perturbada do líquido, vamos estabelecer dois parâmetros de natureza física e Matemática do problema.

Observe a figura abaixo

Figura 5.1: soliton



Vamos considerar:

$$(i) \text{ (amplitude máxima)/(profundidade não perturbada)} = \frac{a}{h} \ll 1.$$

$$(ii) \text{ (Comprimento de onda)/(profundidade não perturbada)} = \frac{l}{h} \ll 1.$$

Seja uma equação específica da forma : $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Esta é uma equação diferencial parcial não linear e dispersiva. Dado um modelo genérico do tipo $u_x + auu_x + bu_{xxx} = 0$, onde os parâmetros ,”a”, representa a não-linearidade e ,”b”, a dispersão. Este método consiste num modelo para outras ondas de superfície líquida, vamos procurar soluções de onda viajante que tem a seguinte estrutura:

$$u(x, t) = v(x - \sigma t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0) \quad (5.1)$$

Então, $u(x, t)$ resolve a KdV sendo uma onda viajante solitária. No que segue $\frac{\partial v}{\partial s}$, indica a derivada de ”v” em relação a ”s” e o parâmetro σ tem unidade de velocidade ao quadrado $\frac{m^2}{s^2} = \left(\frac{m}{s}\right)^2$.

Dado $u(x, t)$ satisfazendo e sendo solução da KdV que é uma equação diferencial parcial e sendo $u(x, t) = v(x - \sigma t)$. Fazendo uma mudança de variável do tipo $s = x - \sigma t$ teremos que $u(x, t) = v(s)$. calculando as primeiras derivadas de u em relação às variáveis x e t obtemos:

- Derivada primeira e segunda de u em relação a variável x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = v' \cdot 1 = v' \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial x} = v'' \cdot 1 = v'' \quad (5.3)$$

- Derivada primeira e segunda de u em relação a variável t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = v' \cdot (-\sigma) = -\sigma \cdot v' \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \frac{\partial s}{\partial t} = v'' \cdot (\sigma^2) = \sigma^2 v'' \quad (5.5)$$

Substituindo na equação $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ obtemos: $-\sigma \cdot v' + 6v \cdot v' + v''' = 0$ e integrando esta equação, obtemos:

$$\int (-\sigma \cdot v' + 6v \cdot v' + v''') dx = 0, \quad (5.6)$$

e notando que $\frac{d}{dx}(3v^2) = 6v.v'$, temos :

$$-\sigma v + 3v^2 + v'' = a, \quad (5.7)$$

onde "a" é uma constante de integração. Multiplicando a equação (5.7) por v' , obtemos:

$$-\sigma .v v' + 3 v^2 v' + v' v'' = a v' \quad (5.8)$$

Note que $vv' = \frac{d}{dx}v^2$, integrando (6.8) em ambos os membros da equação, teremos

$$\int (-\sigma .v v' + 3 v^2 v' + v' v'') dv = \int a v' dv \quad (5.9)$$

Usando o fato que:

- $\frac{d}{dx}v^2 = v.v'$.
- $\frac{d}{dx}v^3 = 3.v^2.v'$
- $\frac{d}{dx} \frac{(v')^2}{2} = v'.v''$

podemos escrever (5.9) na forma:

$$-\sigma .\frac{v^2}{2} + v^3 + \frac{(v')^2}{2} = a v + b, \quad (5.10)$$

onde "b" é uma constante de integração. Manipulando(5.10) obtemos:

$$\left(-\sigma \frac{v^2}{2} + v^3 + \frac{(v')^2}{2}\right) = a v + b \Rightarrow \frac{(v')^2}{2} = \sigma \frac{v^2}{2} - v^3 + a v + b. \quad (5.11)$$

portanto, a partir de (5.11) podemos escrever:

$$\frac{(v')^2}{2} = \sigma \frac{v^2}{2} - v^3 + a v + b. \quad (5.12)$$

Note que a partir de (5.12) e considerando $a = b = 0$, obtemos ;

$$\frac{(v')^2}{2} = \sigma \frac{v^2}{2} - v^3. \quad (5.13)$$

Supondo que podemos efetuar os cálculos a partir de (5.13), obtemos $(v')^2 = \sigma v^2 - 2v^3 = v^2(\sigma - 2v) \Rightarrow v' = \pm \sqrt{v^2(\sigma - 2v)}$. logo

$$v' = -v(\sigma - 2v)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

isto é, $\frac{\partial v}{\partial s} = -(\sigma - 2v)^{\frac{1}{2}}$. Calculando a integral indefinida em ambos os membros com a seguinte mudança de variável $z = v(s)$.

$$\frac{dv}{ds} = -v(\sigma - 2v)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow ds = -\frac{1}{z(\sigma - 2z)^{-1/2}} dz \Rightarrow \quad (5.15)$$

temos

$$s = - \int_0^{v(s)} \frac{1}{z(\sigma - 2z)^{1/2}} dz + c \quad (5.16)$$

onde "c" é uma constante.

Usando uma substituição trigonométrica adequada do tipo $z = \frac{\sigma}{2} \operatorname{sech}^2(\theta)$, derivando em relação θ . Fazendo uma mudança de variável $\theta = \tau$ obtemos:

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{\sigma}{2} 2 \operatorname{sech}^2(\theta) \operatorname{tgh}(\theta) d\theta. \\ s &= - \int \frac{dz}{z(\sigma - 2z)^{1/2}} + c \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde substituindo na integral com $0 < \tau < \theta$.

$$s = \int_0^\theta \frac{-\frac{\sigma}{2} 2 \operatorname{sech}^2(\tau) \operatorname{tgh}(\tau) d\tau}{\frac{\sigma}{2} \operatorname{sech}^2(\tau) (\sigma - 2 \frac{\sigma}{2} \operatorname{sech}^2(\tau))^{1/2}} + c \quad (5.18)$$

Manipulando e fazendo as simplificações devidas, temos:

$$s = \int_0^\theta \frac{2 \operatorname{tgh}(\tau) d\tau}{\sigma^{1/2} (1 - \operatorname{sech}^2(\tau))^{1/2}} + c. \quad (5.19)$$

Usando a relação fundamental:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \theta - \operatorname{sech}^2 \theta &= 1 \Rightarrow 1 - \operatorname{tgh}^2 \theta = \frac{1}{\cosh^2 \theta} \\ 1 - \operatorname{tgh}^2 \theta &= \operatorname{sech}^2 \theta \Rightarrow 1 - \operatorname{sech}^2 \theta = \operatorname{tgh}^2 \theta \end{aligned}$$

Assim podemos escrever (5.17) na forma

$$s = \frac{2}{\sigma^{1/2}} \int_0^\theta \frac{\operatorname{tgh}(\tau)}{(\operatorname{tgh}^2 \tau)^{1/2}} d\tau + c \Rightarrow \quad (5.20)$$

$$s = \frac{2}{\sigma^{1/2}} \int_0^\theta \frac{\operatorname{tgh}(\tau)}{\operatorname{tgh}(\tau)} d\tau + c \Rightarrow \quad (5.21)$$

$$s = \frac{2}{\sigma^{1/2}} \int_0^\theta d\tau + c. \quad (5.22)$$

Podemos considerar $c = 0$ e integrando (5.22) obtemos:

$$s = \frac{2}{\sqrt{\sigma}}(\tau - t_0)$$

$$s = \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\theta$$

Usando os intervalos temos: $s = \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\theta$. Como θ é dado implícitamente pela relação $z = \frac{\sigma}{2}\operatorname{sech}^2\theta$, sendo $z = v(s)$. Sendo $\theta = \frac{s}{2}\sqrt{\sigma}$ substituindo na equação, obtemos a solução:

$$v(s) = \frac{\sigma}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(s - c)\right).$$

Assim a solução será:

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c) - \text{constante}\right), \quad (5.23)$$

uma solução da KdV para $x \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Esta equação é chamada de soliton. Note que a velocidade do soliton depende da altura da onda, pois o parâmetro $\sigma = \sqrt{gh}$ onde, \vec{g} é a aceleração da gravidade e h é a altura da onda.

Capítulo 6

Conclusão

As técnicas de modelagem Matemática para fenômenos físicos, possuem certas limitações por parte do observador, que deve desconsiderar várias variáveis que não podem ser controladas simultaneamente, além de ajustar certos parâmetros e valores de natureza real, para poder simular estes fenômenos em pequena escala num ambiente controlado. Nossa abordagem foi uma revisão bibliográfica sobre deslocamento de uma onda em meio fluido, cujo interesse foi modelar em equação diferencial parcial para um deslocamento de um volume de massa infinitesimal em meio líquido.

Atráves dos conceitos de ondas periódicas, compreendemos o comportamento oscilatório de uma onda do tipo $u(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ e como esta se comporta no decorrer do tempo. Pelas equações da Hidrodinâmica, estudamos as forças que agem numa porção infinitesimal do fluido e as leis que regem esse fenômeno, como conservação da massa, equação da continuidade e equação de Bernoulli, que mostraram-se coerentes e confirmam nosso modelo.

A aplicação dos modelos da Hidrodinâmica tiveram suporte com a teoria das equações diferenciais parciais (EDP's), que modelam muitos dos fenômenos naturais. Usamos o método de equação característica para simplificar a análise do deslocamento de curvas e o método de D'alambert para um problema de valor inicial.

Com essa fundamentação, conseguimos modelar um fenômeno muito comum que seria o deslocamento de água ao longo de um canal, e estudamos duas formas em que esse evento acontece: como num escoamento natural de água em um canal reto e quando uma força externa atua durante um intervalo muito pequeno, para o início do movimento. Por estas diferenças iniciais, estas equações apresentaram propriedades distintas quanto

à conservação da energia e o tempo de dispersão, caracterizadas respectivamente como uma equação de onda linear e uma equação de onda não linear e dispersiva.

Como nosso interesse foi modelar uma equação de onda para esses deslocamentos, fato bem sucedido pois mostramos que a equação de onda modelada, num escoamento permanente em um canal reto, resolve a equação de Korteweg-de-Vries(KdV).

Referências Bibliográficas

- [1] Zachmanoglou, Eleftherios C.; THOE, Dale W. **Introduction to partial differential equations with applications**. Courier Corporation, 1986.
- [2] Evans, Lawrence C. **Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. Current developments in mathematics**. 1997(1).
- [3] Menzala, Gustavo Perlla. **Introdução às equações diferenciais parciais/ Instituto de Matemática Pura e Aplicada**. 1997.
- [4] Sodré, Ulisses. **Equações Diferenciais Parciais**, Londrina, 2003.
- [5] David Hallyday, Robert Resnick, and Jearl Walker. **Fundamentos da física**, vol. 2^a/ gravitação, ondas e termodinâmica.. Rio de Janeiro: LCT, 8, 2009.
- [6] DX Andrade; Anjos PHR;and PEG Assis. **On the connection between somenon-linear physical models**; Revista Brasileira de Ensino de Física, 39(1), 2017.
- [7] W. Robert, McDonald T. Alan, and Pritchard J. Philip **Introdução à mecânica dos Fluidos**. 5^a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [8] Klimas, Pawel. *Sólitons*. 2017. Palestra - Departamento de Física, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2017.
- [9] Potter, Merle C; Wiggert, David C. **Mecânica dos Fluidos** Pioneira - Thomson Learning Ltda, 2004.
- [10] Frank M White, **mecânica dos fluidos**. McGraw Hill Brasil, 1962
- [11] B. Raphaldini, Carlos F.M. Raupp e Pedro L. da S. Dias **Introdução Matemática à Dinâmica de Fluidos Geofísicos**, 2017 - IMPA. Rio de Janeiro, RJ.

- [12] Costa, V.S; Vasconcelos, D.S; Nascimento, E.M and Filho, R.A. **Sistemas incomensuráveis e a equação de seno-gordon** *Revista Brasileira de Ensino de Física* vol, 20(3), 1998.
- [13] BA Kupershmidt. **A super korteweg-devries equation: an integrable system.** *Physics letters A*, 102(5-6): 2013-2015, 1984. Acessado em: 06/06/2019 às 09:31.
- [14] B Eiermann, Th Anker, M Albiez, M Taglieber, Philipp Treutlein, K-P Marzlin, and MK Oberthaler. **Bright bose-einstein gap solitons of atoms with repulsive interaction** . *Physical review letters* , 92(23):230401, 2004.