



UEPB

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

CINTHIA SILVA MACIEL

**O GEOPLANO COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DA GEOMETRIA
PLANA.**

**CAMPINA GRANDE/PB
2019**

CINTHIA SILVA MACIEL

**O GEOPLANO COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DA GEOMETRIA
PLANA.**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao curso de Licenciatura
Plena em Matemática da Universidade
Estadual da Paraíba, como requisito
parcial à obtenção do título de
Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

**CAMPINA GRANDE - PB
2019**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M152g Maciel, Cinthia Silva.
O geoplano como recurso didático no ensino da geometria plana [manuscrito] / Cinthia Silva Maciel. - 2019.
61 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."
1. Geometria plana. 2. Material manipulável. 3. Geoplano.
4. Recursos didáticos. I. Título

21. ed. CDD 516

CINTHIA SILVA MACIEL

O GEOPLANO COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DA GEOMETRIA PLANA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em: 14/08/2019.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me incentivaram e não mediram esforços para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por estar sempre presente em minha vida e por ter me abençoado com saúde e força, para conseguir concretizar esse objetivo.

A minha mãe, Maria do Socorro pelo seu cuidado e dedicação e ao meu pai Romero pelo seu incentivo.

A meu amado, companheiro, amigo, esposo Wellington, minha gratidão por todo apoio e carinho, sei que você está feliz tanto quanto eu por este momento, obrigado por tudo, te amo.

Aos meus filhos Cauã e Arthur, é por eles e para eles que busco sempre o melhor de mim, mamãe ama vocês.

Aos meus familiares, minha irmã, tias, primas, sobrinhos que de maneira direta ou indireta contribuíram.

A minhas amigas que conquistei durante o curso, em especial Idaliane Virginia, que foi muito importante nessa caminhada e é muito importante em minha vida.

Aos professores por terem me dado ferramentas para meu mundo profissional.

A minha orientadora Kátia Suzana, muito obrigada por me estender a mão e por não desistir de mim.

Enfim a todos que contribuíram de forma direta e indireta para que eu chegasse até aqui.

“A coisa de maior extensão no mundo é o universo, a mais rápida é o pensamento, a mais sábia é o tempo e mais cara e agradável é realizar a vontade de Deus.”
Tales de Mileto.

RESUMO

Este trabalho resulta de uma pesquisa de campo de cunho qualitativo, aplicado em uma turma do 6º ano de uma escola particular na cidade de Campina Grande, PB. O tema abordado é o ensino da Geometria Plana, com o auxílio do Geoplano. Defende-se neste trabalho, a importância de uma aprendizagem significativa da geometria, enfatizando a relevância da utilização do material concreto e manipulável. A motivação deste trabalho, surgiu da inquietude sobre o desinteresse dos alunos no estudo da geometria, onde buscou-se uma ferramenta que viesse a tornar esse estudo mais atrativo. Utilizamos o geoplano com o intuito de possibilitar uma melhor percepção visual das formas geométricas, facilitando na compreensão dos conceitos, instigando e envolvendo os alunos constantemente no processo de aprendizagem. A proposta é criar um novo cenário no ambiente escolar, privilegiando a investigação para a construção do conhecimento.

Palavras-chave: Geometria Plana; Material Manipulável; Geoplano.

ABSTRACT

This work results from a qualitative field research, applied in a 6th grade class of a private school in the city of Campina Grande, PB. The theme addressed is the teaching of Flat Geometry, with the help of Geoplane. This paper defends the importance of a significant learning of geometry, emphasizing the relevance of the use of concrete and manipulable material. The motivation of this work arose from the concern about the students' lack of interest in the study of geometry, where they sought a tool that would make this study more attractive. We use the geoplane in order to enable a better visual perception of geometric shapes, facilitating the understanding of concepts, constantly stimulating and involving students in the learning process. The proposal is to create a new scenario in the school environment, favoring research for the construction of knowledge.

Keywords: Flat Geometry; Manipulable material; Geoplane.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tales de Mileto.....	17
Figura 2 – Euclides.....	19
Figura 3 – Geoplano	23
Figura 4 – Geoplano Retilíneo quadrangular.....	23
Figura 5 – Geoplano Circular.....	24
Figura 6 – Geoplano isométrico.....	25
Figura 7 – Representação do ponto	27
Figura 8 – Representação de Reta.....	28
Figura 9 – Segmento de reta.....	28
Figura 10 – Semirreta.....	29
Figura 11 – Plano.....	29
Figura 12 – Plano Alfa	29
Figura 13 – Plano Alfa 2.....	30
Figura 14 – Retas paralelas	30
Figura 15 – Retas concorrentes	31
Figura 16 – Retas perpendiculares	31
Figura 17 – Retas oblíquas	32
Figura 18 – Ângulo	32
Figura 19 – Ângulo Suplementar Adjacente	33
Figura 20 – Ângulo reto	33
Figura 21 – Ângulo agudo	34
Figura 22 – Ângulo obtuso	34
Figura 23 – Polígono	35
Figura 24 – Triângulo	35
Figura 25 – Triângulo equilátero	36
Figura 26 – Triângulo Escaleno	36
Figura 27 – Triângulo Isósceles	37
Figura 28 – Triângulo Acutângulo	37
Figura 29 – Triângulo retângulo	38
Figura 30 – Triângulo obtusângulo	38
Figura 31 – Quadriláteros	39

Figura 32 – Trapézio	39
Figura 33 – Trapézio Isósceles	40
Figura 34 – Trapézio escaleno	40
Figura 35 – Trapézio retângulo	40
Figura 36 – Paralelogramo	41
Figura 37 – Retângulo	41
Figura 38 – Losango	41
Figura 39 – Quadrado	42
Figura 40 – Construção de ângulos	44
Figura 41 – Traçando retas paralelas com esquadros.....	44
Figura 42 – Traçando retas perpendiculares com esquadros.....	45
Figura 43 – Classificação de triângulos.....	45
Figura 44 – Classificação de quadriláteros.....	46
Figura 45 – Geoplano	47
Figura 46 – Alunos respondendo o questionário	49
Figura 47 – Construções de ângulos do Aluno 1	50
Figura 48 – Construção do ângulo de 120° do Aluno 2.....	50
Figura 49 – Construções de polígonos no quadriculado do aluno 3.....	51
Figura 50 – Construções de retas paralelas e concorrentes do Aluno 4.....	51
Figura 51 – Construções de ângulos no geoplano	52
Figura 52 – Construções de figuras no geoplano	53

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	Fundamentação Histórica	15
2.1	Aspectos históricos da Geometria plana	15
2.2	Tales de Mileto	17
2.3	Euclides	19
2.4	Reflexões acerca da utilização de materiais didáticos manipuláveis.....	20
2.5	Geoplano	22
2.5.1	Geoplano retilíneo quadrangular	23
2.5.2	Geoplano circular	24
2.5.3	Geoplano isométrico	25
3	Fundamentação Teórica	27
3.1	Ponto.....	27
3.2	Reta.....	27
3.3	Segmento de Reta	28
3.4	Semirreta	28
3.5	Plano	29
3.6	Retas Paralelas	30
3.7	Retas Concorrentes	31
3.8	Ângulos	32
3.8.1	Ângulo suplementar adjacente	33
3.8.2	Ângulos: Reto, Agudo e Obtuso	33
3.8.3	Ângulo nulo e Ângulo raso	34
3.9	Polígonos	35
3.10	Triângulos	35
3.10.1	Classificação dos triângulos quanto aos seus lados	36
3.10.2	Classificação dos triângulos quanto aos seus ângulos.....	37
3.11	Quadriláteros	38
3.11.1	Quadriláteros notáveis	39
4	Metodologia	43
4.1	Contextualizando o estudo	43
4.2	Descrição da atividade proposta	43

4.3	Apresentação do material manipulável (Geoplano).....	46
4.4	Resolução das atividades com a utilização do geoplano	47
5	Resultados e Discussões	49
5.1	Resultados sem a utilização do geoplano na resolução do questionário.....	49
5.2	Resultados com a utilização do geoplano na resolução do questionário.....	52
6	Considerações Finais	55
	Referências	56
	Apêndices	58

1 INTRODUÇÃO

A geometria pode ser vista como uma ferramenta muito importante para a correspondência do homem com o espaço em que vive, visto que pode ser considerada como a parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade. Sherard, 1981 apud Pavanello, se expressa desta forma:

Desta maneira podemos relacionar a Geometria como um canal para o desenvolvimento de habilidades e competências, como compreensão espacial e a resolução de problemas (escolares ou cotidianos), uma vez que ele oferece aos alunos “as oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair”

Tais oportunidades podem, ainda, favorecer o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo nos alunos (Pavanello, 1993). Em relação a essa mesma potencialidade da Geometria, Freudenthal (1973) se expressa da seguinte maneira:

A Geometria é uma das melhores oportunidades que existem para aprender como matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também o domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possam de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta. (p. 407).

No entanto, apesar da sua importância, podemos observar em sala de aula, que a geometria, ainda é um conteúdo pouco valorizado nas aulas de matemática e superficialmente entendido pelos alunos, muitas vezes pelo fato de ser trabalhada de forma abstrata.

Sabe-se que, o professor tem o papel fundamental na qualidade da aula de matemática e que muitas vezes não tem o conhecimento, de quanto poder possui para a formação do aluno. O professor precisa ter a consciência de que é necessário rever suas práticas pedagógicas, preocupando-se sempre em procurar meios de levar a geometria até os alunos de maneira concreta e clara, com uma abordagem diferente do que é rotina em sala de aula.

Infelizmente nos livros didático, a que o professor tanto se atenta, a geometria na sua maior parte é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes, fórmulas e formas, que se, não apresentados de maneira

significativa, causam desinteresse aos alunos, e conseqüentemente, prejudicando-os na aprendizagem.

O presente trabalho procura mostrar a importância da Geometria e objetiva mostrar a relevância da introdução do material didático manipulável (Geoplano) nas aulas, auxiliando na compreensão dos conceitos básicos de geometria, especificamente, as retas, os ângulos e os polígonos (triângulos e quadriláteros). Mas é preciso ter a percepção de que o fato de utilizarmos de materiais concretos não garantem que o ensino da geometria seja sólido, para que o trabalho com material concreto produza o conhecimento geométrico, é preciso fazer com que o aluno exerça mentalmente suas construções e que tenham prazer na manipulação dos mesmos.

Devido a observações feitas nas aulas de matemática, quanto ao desinteresse dos alunos com assuntos da geometria, despertou-se o desejo de buscar meios para atraí-los no estudo de assuntos na área de geometria, visto que, é na geometria que o aluno tem a oportunidade de experimentar, construir, explorar, descobrir, imaginar, assim tornando a aprendizagem mais atraente e significativa. A partir desse estudo examinaremos o processo de aprendizagem de conceitos da geometria por meio do uso de um material didático manipulável, o geoplano, proporcionando ao aluno uma maior compreensão, uma vez que, terão uma melhor percepção visual nas formas geométricas. Através desse material iremos analisar se haverá um avanço com relação aos assuntos, ângulos, posição relativas entre retas e polígonos.

No capítulo 2 apresentaremos uma abordagem histórica acerca da geometria plana e abordaremos um pouco do processo de ensino e aprendizagem da geometria, que é parte essencial na matemática, onde possibilita o indivíduo a desenvolver habilidades essenciais para uma visão da matemática mais concreta. Ainda neste capítulo, abordaremos, um pouco da história de dois matemáticos: Tales de Mileto e Euclides, que foram importantes geômetras da história da matemática. Faremos também reflexões acerca da utilização de materiais didáticos manipuláveis, a importância da sua utilização nas aulas de matemática, mais especificamente o geoplano, onde apresentaremos um pouco da sua história, os tipos e seu uso no processo de ensino-aprendizagem na geometria plana.

No capítulo 3 teremos uma apresentação de definições e algumas propriedades acerca dos conceitos básicos da geometria plana, os quais o presente trabalho aborda.

O capítulo 4 apresentará os aspectos metodológicos, que através de um trabalho de caráter qualitativo, teve finalidade de analisar dificuldades dos alunos na aprendizagem dos assuntos da geometria plana e apresentar os meios de tornar a compreensão destes assuntos mais fácil e significativo.

O trabalho foi aplicado nas turmas do 6º ano do ensino fundamental, em três etapas, a primeira com uma atividade escrita, abordando os assuntos: ângulos, polígonos e posição relativa de retas, na segunda etapa foram trabalhados a apresentação e reconhecimento do material didático manipulável, o geoplano. E na terceira etapa realizamos a oficina com a utilização do geoplano, que teve como objetivo verificar se haverá uma contribuição significativa na compreensão dos alunos em relação aos conceitos da geometria plana.

E finalizamos este capítulo com os resultados e discussões a respeito do que foi proposto no trabalho, afim de obter conclusões que serão alvos de uma reflexão final, quanto aos objetivos alcançados.

Por fim, apresentaremos as nossas considerações finais e referências.

2 FUNDAMENTAÇÃO HISTÓRICA

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo apresentamos um breve histórico sobre Geometria Plana, tratamos sobre o ensino aprendizagem dos conceitos de: ângulos, retas, triângulos e quadriláteros, conteúdos abordados no 6º ano do ensino fundamental.

Daremos início com a abordagem sobre a história da geometria plana, pois, esta auxilia na compreensão do desenvolvimento dos conceitos das figuras geométricas.

Geometria plana é a parte da matemática que estuda as figuras que não possuem volume, conhecida também como Geometria Euclidiana, em homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, considerado o “pai da geometria”. Uma vez que propriedades como comprimento, área, congruência, paralelismo, perpendicularidade, semelhança de figuras, colinearidade de pontos e concorrência de retas, fazem parte da Geometria métrica euclidiana plana.

O termo geometria é a união das palavras “geo” (terra) e “metria” (medida); logo, significa a “medida de terra”. Grandó afirma que:

Buscando a origem do desenvolvimento da geometria nos primórdios, com o homem primitivo, podemos imaginar que o conhecimento das configurações do espaço, formas e tamanhos tenham se originado, possivelmente, com a capacidade humana de observar e refletir sobre os deslocamentos, com a construção de estratégias de caça e colheita de alimentos, com a criação de ferramentas e utensílios, visando satisfazer suas necessidades básicas.

Ao fixar moradia, com a divisão do trabalho, outras necessidades foram surgindo e a produção do conhecimento geométrico se ampliando. A necessidade de fazer construções, delimitar a terra levou a noção de figuras e curvas e de posições como vertical, perpendicular, paralela. (GRANDÓ, 2008, p-7)

De acordo com Eves (2011), as primeiras reflexões feitas em relação à geometria teve como origem a uma simples observação e a capacidade de identificar figuras, comparar formas e tamanho. Sendo assim, um dos primeiros conceitos geométricos a serem apresentados foi a noção de distância.

Na História da Matemática, os conhecimentos em geometria estão associados com as necessidades do homem em entender e retratar o meio em que vive, bem como resolver problemas do seu dia a dia. As imagens, representadas através de desenhos foram ganhando significado matemático e com o tempo foram se

conceitualizando geometricamente, formando assim a Geometria Euclidiana que está voltada para o estudo de questões envolvendo forma, tamanho e posição relativa de figuras. Kaleff se expressa da seguinte maneira:

Foi da necessidade do Homem em compreender e descrever o seu meio ambiente (físico e mental), que as imagens, representadas através de desenhos, foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático na Geometria e uma forma, nas Artes. (KALEFF, 1994, p.19)

Boyer (1974) no livro História da Matemática, faz colocações sobre geometria, que vai de encontro com o que diz Eves (2011), onde afirma que a geometria teve sua origem no Egito e seu surgimento se deu da necessidade de fazer novas medidas de terra, que após cada inundação no Rio Nilo, faziam desaparecer os marcos fixado no ano anterior, que delimitavam as propriedades de terras, gerando bastante conflitos entre agricultores. Para demarcarem novamente os limites de terra, existiam os “puxadores de corda”, que assim foram chamados, devido ao instrumento utilizado (cordas entrelaçadas) para marcar ângulos e dividir os lotes de terra em retângulos e triângulos, para determinar as áreas de terrenos.

A evolução da geometria teve como base o povo egípcio e babilônico, mas segundo Eves (2011), as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos anos do segundo milênio a.C. reduziram o poder dessas nações, passando para os gregos os desenvolvimentos posteriores.

A geometria é parte essencial da matemática, é usada como uma ferramenta importante para compreender, descrever e interagir com o espaço em que vivemos. É na geometria que está a parte intuitiva, criativa e concreta da matemática e que possui uma ligação com a realidade.

O ensino de geometria é de grande importância, para o desenvolvimento do raciocínio lógico, contribui de forma significativa para uma melhor compreensão na resolução de problemas, pois oferece oportunidade ao aluno, de olhar, medir, comparar, descrever e abstrair. De acordo com Fainguelernt (1999):

O estudo da geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da matemática não fique distorcida. (FAINGUELERNT, 1999, p. 53).

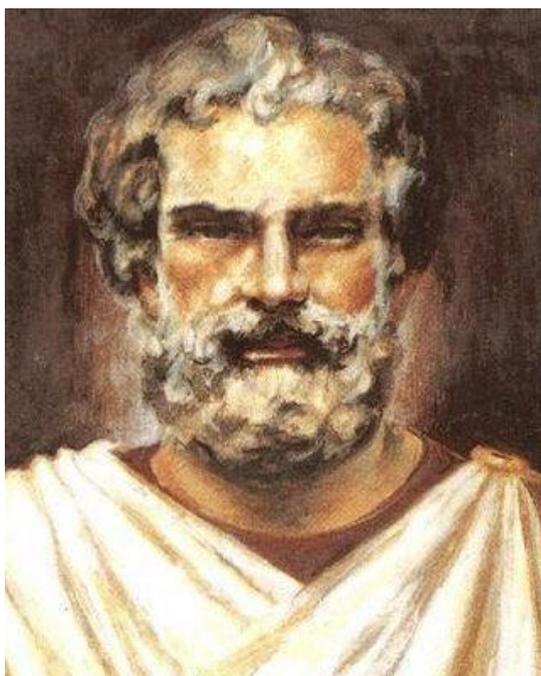
O ensino de Geometria Plana na escola deve contemplar noções primitivas de geometria, cálculo de áreas de polígonos, resolver e representar situações

problemas, utilizando semelhança de figuras, medidas de superfície, entre outros, visando sempre o desenvolvimento do pensamento geométrico, na perspectiva de alcançar melhores meios para desenvolver a capacidade de raciocínio lógico dos alunos. A seguir falaremos sobre alguns matemáticos que tiveram grande importância no princípio e desenvolvimento da geometria plana.

2.2 TALES DE MILETO

Em 600 a.C. colônias gregas podiam ser encontradas às margens do Mar Negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões que um novo impulso matemático se manifestou. As colônias na Jônia, tinham vantagens, pois além de serem ousados e de espírito imaginativo, estavam mais próximos dos dois principais vales de rio de que poderiam extrair bastante conhecimentos.

Figura 1 Tales de Mileto



FONTE: <https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/>

Tales de Mileto (624 – 548 a.C., aproximadamente) adquiriu informações de primeira mão sobre astronomia e matemática, através de viagens aos centros antigos de conhecimento. Diz-se que no Egito ele aprendeu a geometria e na Babilônia, astronomia. Diz a tradição que Tales em 585 a.C. prenunciou um eclipse solar, contudo a veracidade dessa informação é discutível.

Seu nascimento e sua morte, são datadas a partir do fato do eclipse de 585 a.C., onde provavelmente Tales teria por volta de 40 anos de idade, e diz-se que ele viveu 78 anos. Certamente, Tales iniciou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante ele resolveu dedicar a parte final da sua vida aos estudos e viagens. No período em que ele foi para o Egito, ele acabou observando algumas formas das pirâmides do Egito, o que o fez despertar afeição em calcular a altura de uma pirâmide pela sombra. Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. Hierônimos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão de Plutarco, diz que ele fincou uma vara verticalmente e fez uso da semelhança de triângulos.

Por buscar um princípio que tivesse originado toda a natureza, é considerado o primeiro filósofo ocidental, foi saudado como primeiro matemático verdadeiro, originador da organização dedutiva da geometria.

Em geometria tem a fama pelos seguintes resultados elementares:

- I. “Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado”
- II. “Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”.
- III. “Ângulos opostos pelo vértice são iguais”.
- IV. “Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais”,
- V. “Um ângulo inscrito num semicírculo é reto”.

Crer-se que Tales obteve esses resultados por meio de raciocínio lógico e não pela intuição ou experimentalmente.

Relatos afirmam que a origem da matemática grega se deu nas chamadas escolas Jônia e pitagóricas e no representante de cada uma – Tales e Pitágoras.

Foi um período de realizações extraordinárias na matemática os três primeiros séculos, que iniciou com os esforços de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminou com os notáveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C.).

2.3 EUCLIDES

Com a morte de Alexandre, o controle da parte egípcia do império ficou nas mãos de Ptolomeu I, entre seus primeiros atos está a criação de uma escola em Alexandria. Como professor ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles, Euclides, o autor do livro Os Elementos.

Figura 2 Euclides



FONTE: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides>

A vida e a personalidade de Euclides são algo tão obscuro que a data e local de seu nascimento são desconhecidos, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas, ficou conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para dar aula lá.

É chamado o pai da Geometria, foi com Euclides que a geometria do Egito ganhou importância, tornando Alexandria o centro mundial do compasso e do esquadro. Isso porque em seus cinco postulados geométricos dos Elementos, Euclides restringem o uso da régua e do compasso, assim, esses instrumentos tornaram-se conhecidos como instrumentos euclidianos.

Postulados:

P1 - É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

P2 - É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

P3 - É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

P4 - Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P5 - Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Euclides ganhou o mais alto respeito após sua obra sobre seus Elementos, que foi adotado como livro básico por romanos e gregos, que exceto a Bíblia, foi o mais usado ou estudado, e exerceu a maior influência no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos Elementos já apareceram, e por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino da Geometria. Os Elementos são divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar. Ele reuniu de forma coerente e compreensível tudo que se sabia sobre matemática em seu tempo, cinco obras de Euclides sobrevivem até hoje: Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica.

2.4 REFLEXÕES ACERCA DA UTILIZAÇÃO DE MATERIAIS DIDÁTICOS MANIPULÁVEIS.

O material didático manipulável atua como um facilitador para o ensino aprendizagem, tornando-se indispensável para o desenvolvimento matemático.

Grandes educadores defendem que a aprendizagem tem que partir do concreto para o abstrato, uma vez que, essa prática facilitará a compreensão sobre o objeto de estudo, contudo a utilização do material didático (MD) ainda é alvo de julgamentos por muitos profissionais desta área, que afirmam que a prática requer tempo e ambientes que possam favorecer a utilização, haja visto que, as salas de aulas se encontram com excesso de alunos. É necessário que estes profissionais

possam repensar sua prática pedagógica, visto que o papel do professor é de suma importância para o ensino-aprendizagem do aluno.

O professor é de fato a peça mais importante neste processo, pois a eficiência do material didático manipulável depende mais da maneira como este irá utilizá-lo no momento da atividade, do que simplesmente considerar o seu uso pelo uso.

Associando a isso Lorenzato (2006) fala que:

[...] convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipuláveis ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático. (LORENZATO, 2006, p.21)

Alguns estudos apontam que o baixo rendimento na disciplina de matemática, se dá pelo fato de que, os conteúdos estudados em sala não têm uma ligação com o cotidiano, o que leva o aluno ao desinteresse e desencantamento pela disciplina. Desse modo, o professor pode se apoiar nos recursos dos materiais didáticos, possibilitando ao aluno, uma aprendizagem mais significativa.

Em relação aos materiais didáticos, Passos (2006), afirma que:

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-lo refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos dele empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (PASSOS, 2006, p. 81)

Nesse contexto, podemos ressaltar que é de grande importância a utilização dos materiais didáticos manipuláveis, bem como seus benefícios, mas não podemos esquecer que de fato são recursos que servem como auxílio nas aulas de matemática, não podendo substituir o professor, que por sua vez, será o mediador entre o conhecimento e o aluno. De acordo com Rêgo & Rêgo (2013, p.25),

...Por meio de experiências realizadas com material concreto, o aluno desenvolve o gosto pelo prazer da descoberta, para enfrentar desafios e vencê-los, desenvolvendo hábitos e costumes que podem conduzi-lo mais tarde a ser um indivíduo autônomo e capacitado a agir.

Nós profissionais da educação com todos os desafios diários, temos que levar em consideração que nosso objetivo é proporcionar aos alunos uma aprendizagem

significativa, com aulas mais dinâmicas e atrativas, afim de que, o aluno possa ter uma visão mais ampla e otimista pelos conhecimentos matemáticos. E o uso de materiais concretos possibilita um envolvimento dos alunos com o que está construindo, com o professor, e também com os colegas, tornando-se um momento enriquecedor, por oportunizar uma troca de ideias e conhecimentos das partes envolvidas na atividade.

2.5 GEOPLANO

Em 1961 um educador egípcio chamado Calleb Gattegno do Instituto of Education, London University, criou um material pedagógico importantíssimo para o estudo da Geometria, chamado “Geoplano”, a palavra geoplano vem do francês “geoplans” onde “geo” vem de geometria e “plan” significa plano, tábua, tabuleiro ou superfície plana, ou ainda do inglês “geoboards”.

O uso do Geoplano possibilita uma compreensão em determinadas áreas da geometria, haja visto que, de uma forma mais prática e concreta podem ser feitas construções das figuras geométricas e entender melhor suas aplicações.

Smole, Diniz e Cândido apontam que:

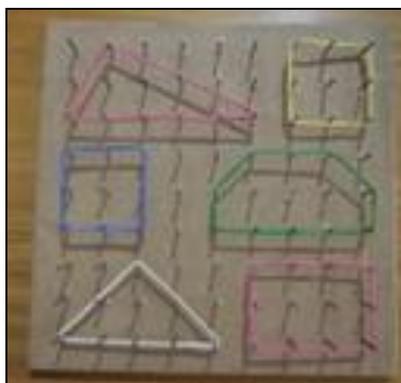
Uma das grandes vantagens do geoplano é que, ao contrário da folha de papel, ele tem mobilidade, é “dinâmico”, e a flexibilidade com que se pode fazer e desfazer construções permite que a criança habitue-se a ver a figura em diversas posições, perceber se uma determinada hipótese que fez para a solução de um problema é adequada e corrigi-la imediatamente se necessário. (2003, p.122).

O Geoplano, apesar de também ser considerado um brinquedo, é utilizado como material pedagógico, somatizando nas aulas de geometria, como um recurso dinâmico para os estudos dos conteúdos. Este material auxilia nas aulas de matemática tornando-as mais atrativas e buscando despertar o interesse e a curiosidade do aluno, além de permitir que a partir da visualização concreta, os conteúdos trabalhados através do geoplano sejam de fácil entendimento, o que muitas vezes não acontece quando vistos de forma abstrata.

Existem muitas maneiras de confeccionar o material, a criatividade não tem limites, mas uma das formas é que o material seja composto por um quadrado de madeira com aproximadamente 20 cm de lado e mais ou menos 64 pregos

encaixados com espaçamento igual entre eles, tanto na vertical, quanto na horizontal. Podendo utilizar para o desenvolvimento das construções de figuras geométricas, elásticos, barbantes coloridos, entre outros.

Figura 3 Geoplano



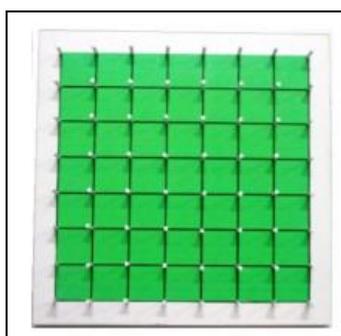
Fonte: <http://www.ufrgs.br/matematicando/materiais-1/geoplano/passo-a-passo-p-imprimir>

A denominação dada ao geoplano depende da apresentação da malha. Por exemplo, se a malha for formada por quadrados, o geoplano é denominado retilíneo quadrangular; se a malha for formada por triângulos, chama-se geoplano isométrico; se formada por circunferências concêntricas, denomina-se geoplano circular.

2.5.1 GEOPLANO RETILÍNEO QUADRANGULAR

O **geoplano retilíneo quadrangular** chama-se “geoplano $n \times n$ ” de acordo com a quantidade de pregos em cada linha “geoplano 3×3 ” àqueles onde a malha é quadrada e tem três pregos de cada lado (9 pregos no total), do mesmo modo “geoplano 8×8 ” tem uma malha quadrada de oito pregos de cada lado (figura 4); o “geoplano 10×10 ” possui uma malha quadrada de dez pregos de cada lado.

Figura 4 Geoplano retilíneo quadrangular



Fonte: <http://mat.unb.br/leamat/wp-content/uploads/2015/12/09APRESENTACAO.pdf>

Para o geoplano quadrado, 8x8, no desenho da malha quadriculada deve-se marcar oito pinos em cada linha horizontal e vertical. A distância entre dois pinos consecutivos é de 4 cm na horizontal e na vertical.

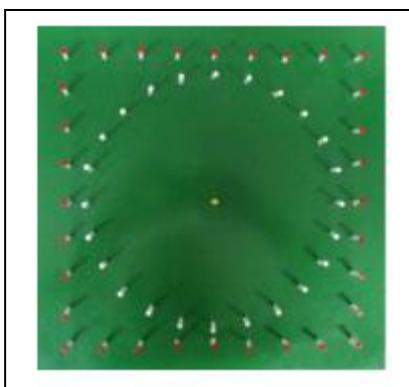
Algumas aplicações do geoplano retilíneo quadrangular

- Ângulos: Elementos, classificação, posições relativas, comparações.
- Retas; Semirretas; Posições relativas; Segmento de reta; Comparação de segmentos.
- Poligonais: Classificação, Comparação de comprimento.
- Elementos dos polígonos: lados, vértices, arestas, diagonais.
- Elementos dos triângulos: alturas, bissetrizes, medianas, mediatrizes.
- Classificação de triângulos.
- Perímetros e áreas de figuras planas.
- Simetrias das figuras poligonais.

2.5.2 GEOPLANO CIRCULAR

O **geoplano circular** tem um pino no centro, um conjunto com 12, 24 ou 36 pinos, à mesma distância, formando um círculo e outro conjunto com 20, 28 ou 32 pinos, formando o quadrado que contém o círculo (figura 5).

Figura 5 Geoplano Circular



Fonte: <http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/11APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf>

Existe uma variedade de geoplanos circulares, podem variar no tamanho, na quantidade de pinos, no número de círculos concêntricos e também o tipo de material.

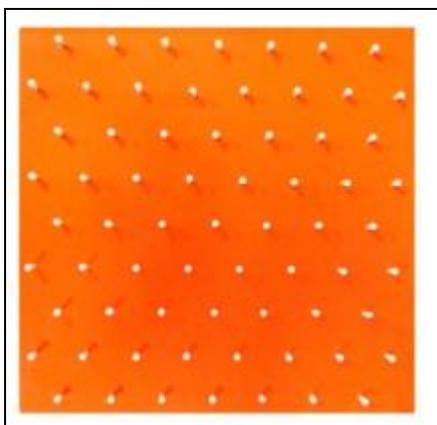
Algumas aplicações do geoplano circular

- Construção de polígonos regulares convexos.
- Estudo das propriedades dos elementos do círculo.
- Elementos do círculo: raios, diâmetros, cordas, centro.
- Ângulos em círculos: interior, central, inscrito, semi-inscrito, exterior.
- Ângulos em círculos: interior, central, inscrito, semi-inscrito, exterior.
- Somas de ângulos de um círculo.
- Arcos de círculos.
- Retas no plano; Posições relativas; Segmentos de reta.
- Elementos dos polígonos: lados, vértices, arestas, diagonais.
- Propriedades dos polígonos; Classificação; Polígonos irregulares; Polígonos inscritos; Polígonos circunscritos; Apótema de polígonos regulares.

2.5.3 GEOPLANO ISOMÉTRICO

Os **geoplanos isométricos** são tabuleiros de madeira quadrada com pinos colocados configurando uma malha triangular. Pode ser construído com uma madeira de 30 cm x 30 cm e de 2 cm de espessura, com aproximadamente 70 pinos ou pregos (figura 6).

Figura 6 Geoplano Isométrico



Fonte: <http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/10APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf>

Também há uma variedade de geoplanos isométricos, que podem variar no tamanho do tabuleiro, no número de pinos ou pregos e o material utilizado.

Algumas aplicações do geoplano isométrico

- Retas; Semirretas; Posições relativas; Segmento de reta; Comparação de segmentos.
- Poligonais: Classificação, Comparação de comprimento.
- Congruência de polígonos.
- Elementos dos triângulos: alturas, bissetrizes, medianas, mediatrizes.
- Perímetro de figuras planas.
- Área de figuras planas.
- Ângulos: Elementos, classificação, posições relativas, comparações.
- Verificação do Teorema de Pitágoras.
- Classificação dos polígonos.
- Construção de mosaico

Com o auxílio do Geoplano, podem ser ministradas aulas com conteúdo de geometria, desde os anos iniciais até o ensino médio, são muitas as possibilidades para o professor desenvolver em sala de aula, considerando as variáveis pertinentes ao processo de ensino-aprendizagem.

Toda a alternativa que possa facilitar, que chame a atenção, que fuja do comum, que traga autonomia intelectual ou desenvolva a criatividade do estudante é interessante o seu uso.

A seguir veremos algumas definições dos conteúdos que iremos trabalhar com a utilização do material didático manipulável, geoplano.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

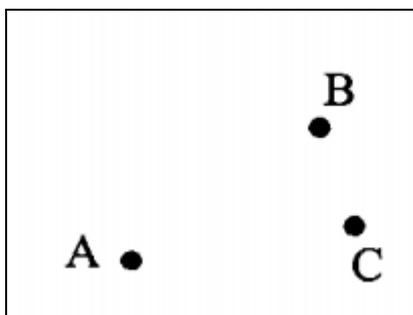
A Geometria se baseia em algumas noções para as quais não é apresentada definição e em algumas propriedades para as quais não é apresentada uma demonstração, é o caso do ponto, reta, plano e espaço. Mas o fato de serem noções primitivas da Geometria, não significa que não se possa reforçar a intuição do aluno a respeito dessas noções. Euclides nos Elementos, definiu ponto como “aquilo que não possui partes” (ou seja, é indivisível), linha é “o que possui comprimento, mas não largura” e reta é “uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os seus ponto”.

Haja visto que tais descrições não possam ser usadas como definições, porém ajudam a relacionar entidades matemáticas com imagens intuitivas.

3.1 PONTO

Definição 1: O ponto não possui dimensão. Os pontos determinam uma localização e são representados com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Figura 7 Representação do Ponto



Fonte: <http://pir2.forumeiros.com/t126677-dados-tres-pontos-nao-colineares-abc>

3.2 RETA

Definição 2: Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e só uma) reta que passa por eles.

Os pontos A e B distintos determinam a reta que indicamos por \overleftrightarrow{AB} .

$$(A \neq B, A \in r, B \in r) \rightarrow r = \overleftrightarrow{AB}$$

Figura 8 Representação de Reta



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.3)

É uma linha ilimitada unidimensional indicada por letras minúsculas no nosso alfabeto, que podem ter três posições: horizontal, vertical ou inclinada. Dependendo da posição de duas retas, podem ser classificadas de concorrentes, quando se cruzam em um ponto ou podem ser classificadas de paralelas, quando não se cruzam, ou seja, todos seus pontos estão à mesma distância.

3.3 SEGMENTO DE RETA

Definição 3: Dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X/X \text{ está entre } A \text{ e } B\}$$

Figura 9 Segmentos de Reta



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.8)

Ao contrário da reta, o segmento de reta é limitada, pois se refere a uma parte entre dois pontos distintos.

3.4 SEMIRRETA

Definição 4: Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta \overline{AB} com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por \overrightarrow{AB}).

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X / B \text{ está entre } A \text{ e } X\}$$

Figura 10 Semirreta



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.8)

Assim como o segmento de reta a semirreta é limitada, porém somente num sentido, uma vez que possui início, e não tem fim.

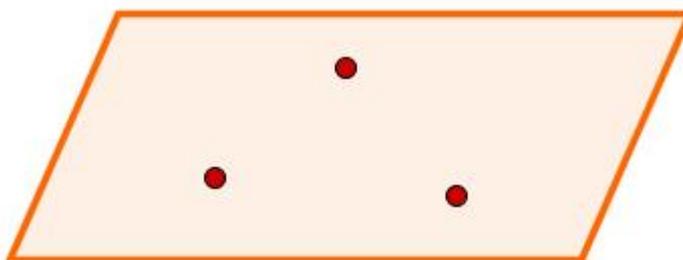
3.5 PLANO

Definição 5: Plano é um ente primitivo geométrico infinito a duas dimensões. Em uma geometria infinitesimal, é possível definir de forma genérica um plano como um conjunto infinito de retas, onde todas são perpendiculares a um mesmo vetor.

O plano é indicado por uma letra do alfabeto grego.

Graficamente, um **plano** pode ser representado da seguinte maneira:

Figura 11 Plano

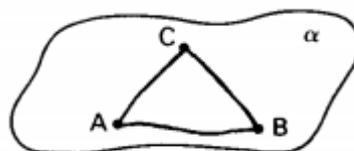


Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-plano.htm>

Postulado 1: Postulado da determinação

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Figura 12 Plano alfa



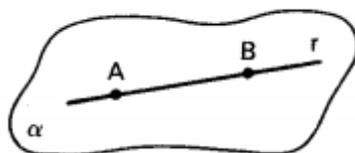
Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.4)

O plano α é o único plano que passa por A, B e C não colineares.

Postulado de existência 2:

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Figura 13 Plano alfa 2



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.4)

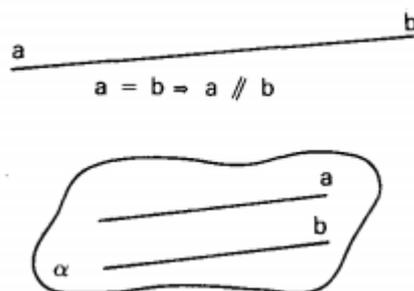
$$(A \neq B, r = \overleftrightarrow{AB}, A \in \alpha, B \in \alpha) \Rightarrow r \subset \alpha$$

Dados dois pontos distintos A e B de um plano, a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ tem todos os pontos no plano.

3.6 RETAS PARALELAS

Definição 6: Duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum.

Figura 14 Retas Paralelas



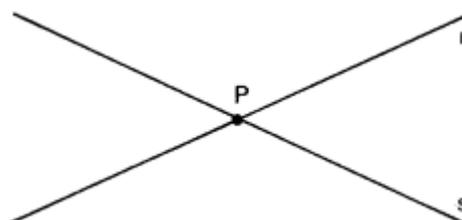
Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.61)

$$(a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = \emptyset) \Rightarrow a \parallel b$$

3.7 RETAS CONCORRENTES

Definição 7: Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto em comum.

Figura 15 Retas Concorrentes

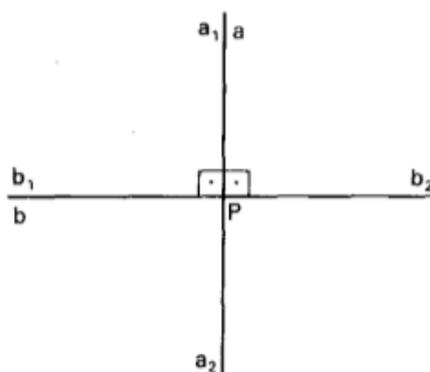


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.4)

$$r \cap s = \{P\}$$

Definição 8: Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

Figura 16 Retas Perpendiculares



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.80)

$$a \perp b \Leftrightarrow (a \cap b = \{P\} \text{ e } a_1 \hat{P} b_1 = a_1 \hat{P} b_2)$$

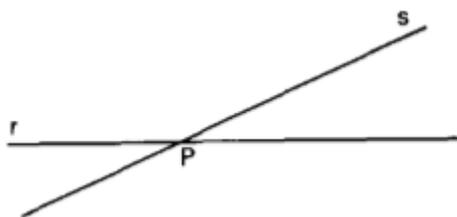
em que a_1 é uma das semirretas de a de origem P e b_1 e b_2 são semirretas opostas de b com origem em P .

Duas semirretas são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto em comum.

Dois segmentos de reta são perpendiculares se, e somente se, estão contidas em retas perpendiculares e têm um ponto em comum.

Definição 9: Retas Obíquas são duas retas concorrentes e não perpendiculares.

Figura 17 Retas Obíquas



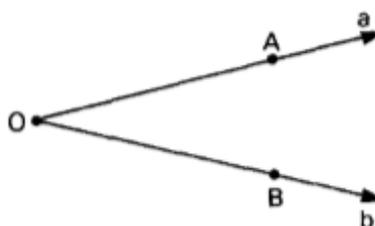
Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.81)

Se $r \cap s = \{P\}$ e r não perpendicular a s , então r e s são obíquas.

3.8 ÂNGULOS

Definição 10: Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares).

Figura 18 Ângulo



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993,p.20)

$$\widehat{AÔB} = \widehat{aÔb} = \widehat{ab}$$

$$\widehat{AÔB} = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

O ponto O é o vértice do ângulo. As semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

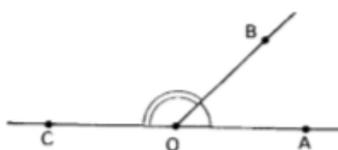
São inúmeras experiências no cotidiano dos alunos com ângulos, em várias situações do nosso dia a dia nos deparamos com a ideia de ângulo, por exemplo, nos ponteiros do relógio ao observarmos a hora, ao dobrarmos uma esquina, ao abrir uma tesoura, ao observarmos um telhado, entre outras. Apesar de aparente simplicidade, o conceito de ângulos é um dos mais complexos na Geometria, isso

porque é apresentado com diferentes ideias, entre elas estão: inclinação, giro, orientação, região e outras.

3.8.1 ÂNGULO SUPLEMENTAR ADJACENTE

Definição 11: Dado o ângulo $A\hat{O}B$, a semirreta \overrightarrow{OC} oposta \overrightarrow{OA} e a semirreta \overrightarrow{OB} determinam um ângulo $B\hat{O}C$ que se chama ângulo suplementar adjacente ou suplemento adjacente de $A\hat{O}B$.

Figura 19 Ângulo suplementar adjacente

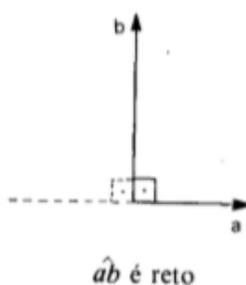


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.26)

3.8.2 ÂNGULOS: RETO, AGUDO E OBTUSO.

Definição 12: Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente.

Figura 20 Ângulo Reto

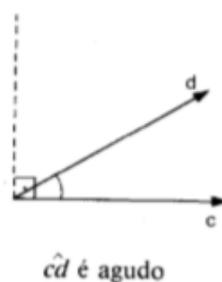


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.26)

O ângulo cuja medida é 90° .

Definição 13: Ângulo agudo é um ângulo menor que um ângulo reto.

Figura 21 Ângulo Agudo

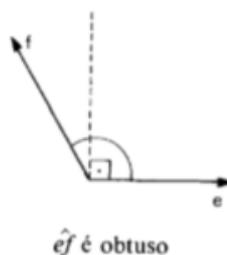


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.26)

O ângulo cuja medida está entre 0° e 90° é chamado de ângulo agudo.

Definição 14: Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto.

Figura 22 Ângulo Obtuso



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.26)

O ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180° é chamado de ângulo obtuso.

3.8.3 ÂNGULO NULO E ÂNGULO RASO

Pode-se estender o conceito de ângulo para se ter o ângulo nulo (cujos lados são coincidentes) ou o ângulo raso (cujo lados são semirretas opostas).

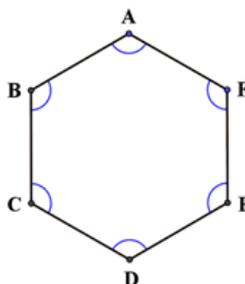
Então, a medida α de um ângulo é tal que;

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

3.9 POLÍGONOS

Definição 15: Polígonos são linhas fechadas, constituídas por três ou mais segmentos de retas que somente se encontram em suas extremidades e não são colineares, que formam figuras geométricas planas.

Figura 23 Polígono



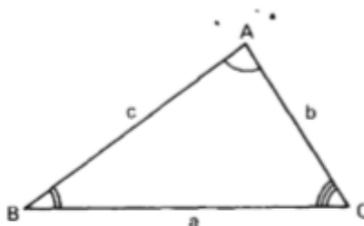
FONTE: <http://www.centralexatas.com.br/matematica/poligonos/669869>

Os elementos de um polígono são dados por lados, vértices e ângulos.

3.10 TRIÂNGULOS

Definição 16: Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} chama-se triângulo ABC.

Figura 24 Triângulo



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.36)

Indicação:

Triângulo ABC = ΔABC

$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

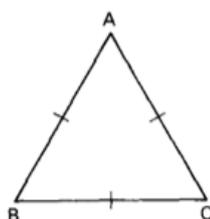
Os elementos de um triângulo são seus lados que são indicados pelos segmentos: \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} , seus vértices que são indicados pelos pontos: A, B e C, e seus ângulos, que são indicados por: \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} (ângulos internos).

3.10.1 CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS SEUS LADOS:

Definição 17: O triângulo é equilátero se, e somente se, têm os três lados congruentes.

Figura 25 Triângulo Equilátero

$\triangle ABC$ equilátero



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

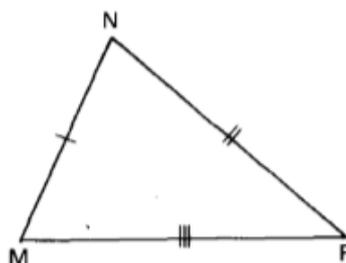
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

Todos os seus lados possuem a mesma medida.

Definição 18: O triângulo é escaleno se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes.

Figura 26 Triângulo Escaleno

$\triangle MNP$ escaleno



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

$$\overline{MN} \neq \overline{NP} \neq \overline{PM}$$

Os três lados possuem medidas diferente.

Definição 19: o triângulo é isósceles se, e somente se, têm dois lado congruentes.

Figura 27 Triângulo Isósceles

 $\triangle RST$ isósceles

Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

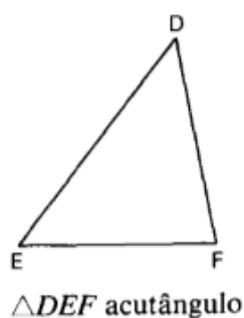
$$\overline{SR} = \overline{RT}$$

Dois de seus lados possuem a mesma medida.

3.10.2 CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS SEUS ÂNGULOS.

Definição 20: O triângulo é acutângulo se, e somente se, têm os três ângulos agudos.

Figura 28 Triângulo Acutângulo

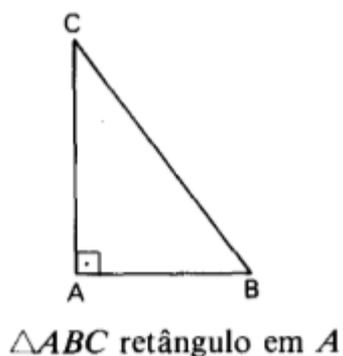


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

$$\hat{E} < 90^\circ \quad \hat{D} < 90^\circ \quad \hat{F} < 90^\circ$$

Definição 21: O triângulo é retângulo se, e somente se, têm um ângulo reto.

Figura 29 Triângulo Retângulo

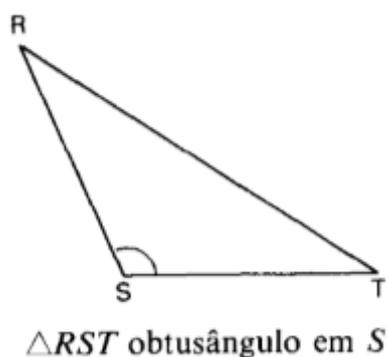


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

$$\text{med } (\hat{C}) < 90^\circ \quad \text{med } (\hat{B}) < 90^\circ \quad \text{med } (\hat{A}) = 90^\circ$$

Definição 22: O triângulo é obtusângulo se, e somente se, têm um ângulo obtuso.

Figura 30 Triângulo Obtusângulo



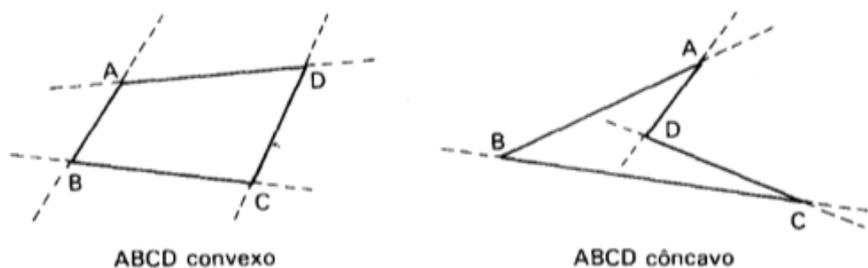
Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.38)

$$\text{med } (\hat{R}) < 90^\circ \quad \text{med } (\hat{T}) < 90^\circ \quad 90^\circ < \text{med } (\hat{S}) < 180^\circ$$

3.11 QUADRILÁTEROS

Definição 23: Sejam A , B , C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.

Figura 31 Quadriláteros



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.99)

Quadrilátero $ABCD = ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$

O quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} são os lados,

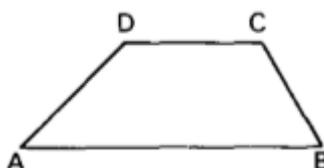
$\hat{A} = \hat{DAB}$, $\hat{B} = \hat{ABC}$, $\hat{C} = \hat{BCD}$ e $\hat{D} = \hat{CDA}$ são os ângulos e \overline{AC} e \overline{BD} são as diagonais do quadrilátero $ABCD$.

3.11.1 QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Definição 24: Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os quadrados, os retângulos e os losangos.

Definição 25: Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se, possui dois lados paralelos.

Figura 32 Trapézio



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.100)

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

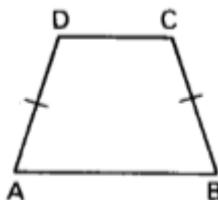
$ABCD$ é trapézio $\Leftrightarrow (\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ou $\overline{AD} \parallel \overline{BC})$.

Os lados paralelos são a base do trapézio.

De acordo com os outros dois lados não bases, temos:

- Trapézio isósceles, se os lados \overline{AD} e \overline{BC} são congruentes.

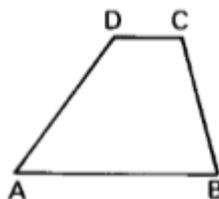
Figura 33 Trapézio Isósceles



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.100).

- Trapézio escaleno, se os lados \overline{AD} e \overline{BC} não são congruentes.

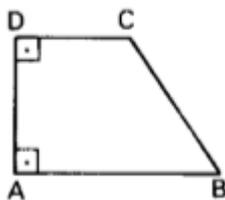
Figura 34 Trapézio Escaleno



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.100).

- Trapézio retângulo (ou bi-retângulo) é um trapézio que tem dois ângulos retos.

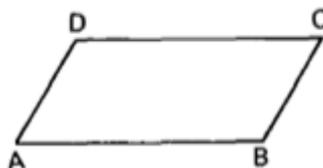
Figura 35 Trapézio Retângulo



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.100).

Definição 26: Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.

Figura 36 Paralelogramo

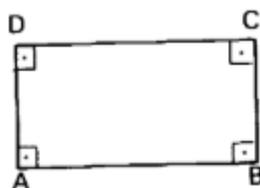


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.100).

$$ABCD \text{ é paralelogramo} \Leftrightarrow (\overline{AB} \parallel \overline{DC} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}).$$

Definição 27: Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

Figura 37 Retângulo

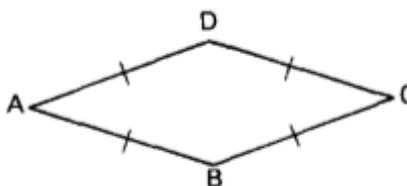


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.101).

$$ABCD \text{ é retângulo} \Leftrightarrow \hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$$

Definição 28: Um quadrilátero plano convexo é um losango se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

Figura 38 Losango

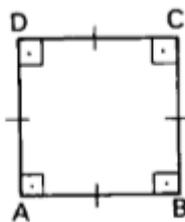


Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.101).

$$ABCD \text{ é losango} \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$

Definição 29: Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados iguais.

Figura 39 Quadrado



Fonte: (Dolce; POMPEO, 1993, p.101).

$ABCD$ é um quadrado $\Leftrightarrow (\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \text{ e } \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA})$

Veremos a seguir as metodologias utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

4 METODOLOGIA

Este trabalho tem caráter qualitativo sobre o ensino e aprendizagem de ângulos, retas e polígonos. Segundo Ludke e André (1986, p. 36) “ a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados ao se buscar o contato direto do pesquisador com a situação a ser pesquisada”.

A finalidade é associar o estudo de geometria com o objeto de estudo (Geoplano), com o propósito de mostrar as contribuições deste para o ensino e aprendizagem da geometria, mais precisamente aos assuntos citados, avaliando até que ponto o Geoplano pode ajudar na compreensão dos conceitos de tipos de ângulos, tipos de polígonos e posições de retas.

No decorrer do trabalho, houve sempre a preocupação em analisar as dificuldades dos alunos na construção de figuras geométricas e nos conceitos dos conteúdos, representando de forma prática as figuras geométricas com suas formas conforme suas classificações, possibilitando a constatação dos elementos da geometria no decorrer das construções de ângulos, retas e polígonos usando o material manipulável (Geoplano) e por fim, avaliar a compreensão dos alunos quanto as definições através dessas construções.

4.1 CONTEXTUALIZANDO O ESTUDO

O trabalho foi aplicado em duas turmas do 6º ano do ensino fundamental, em uma escola particular situada no município de Campina Grande, PB. O presente trabalho foi operacionalizado em 6 encontros de 50 minutos cada, onde iniciou-se com uma abordagem nos conceitos, definições e classificações dos conteúdos de ângulos, posições relativas entre duas retas, tipos e classificação dos polígonos: Triângulos e Quadriláteros, seguindo com uma apresentação e reconhecimento do geoplano e finalizou com a atividade prática com o uso do geoplano.

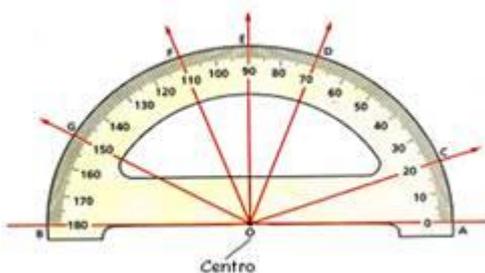
4.2 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA

Neste momento foi aplicado uma atividade (ver em Apêndice) a fim de avaliar a aprendizagem dos alunos referente aos assuntos estudados e avaliar também o

desempenho de cada um, com a utilização de materiais que eles usam habitualmente nas aulas de geometria, são eles: régua, esquadros e transferidor.

Foram abordadas atividades tais como classificação de ângulos (agudo, obtuso e reto), construções de ângulos, utilizando régua e transferidor, medição de ângulos com o auxílio do transferidor.

Figura 40 Construção de ângulos



Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/935974>

Nestas atividades foi possível avaliar a desenvoltura dos alunos no desenhos e suas habilidades com o manuseio dos objetos que tinham disponíveis (régua e transferidor). Observamos algumas dificuldades nas construções de ângulos, em alguns casos foi necessário um auxílio mais de perto para a conclusão da atividade. Ficou perceptível também a impaciência na utilização do transferidor na conclusão das atividades propostas.

Foi desenvolvido também a construção de retas paralelas e concorrentes (perpendiculares e oblíquas) com a utilização de régua e esquadros.

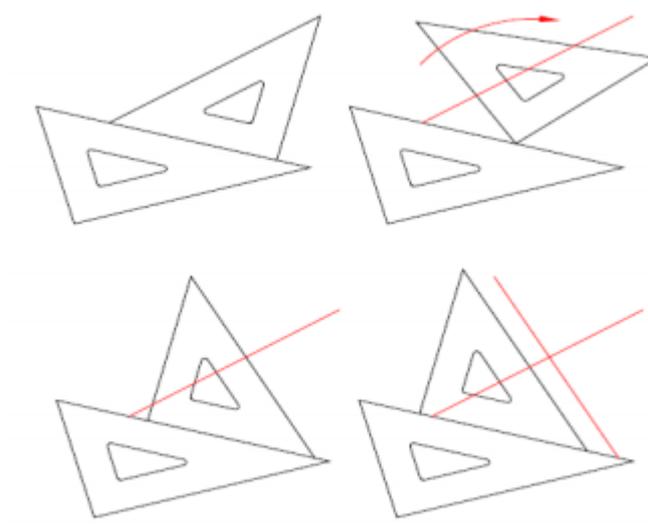
Figura 41 Traçando retas paralelas com esquadros



Fonte: http://licita.seplag.ce.gov.br/pub/173284/design_de_interiores_desenho_geometrico.pdf

Com base nas observações durante o processo, ficou bastante claro as dificuldades de domínio por parte da maioria dos alunos com os esquadros nas construções das retas.

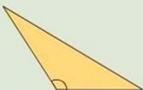
Figura 42 Traçando retas perpendiculares com esquadros



Fonte: http://licita.seplag.ce.gov.br/pub/173284/design_de_interiores_desenho_geometrico.pdf

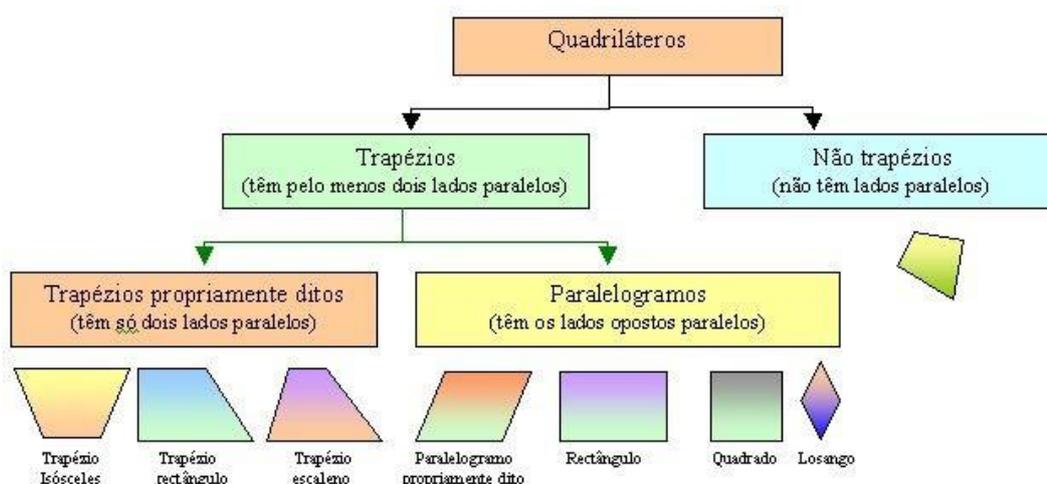
Foram trazidas ainda atividades tais como, tipos de polígonos, neste caso nos resumimos apenas aos triângulos e quadriláteros e a classificação dos mesmos, para o desenvolvimento das atividades utilizamos uma malha quadriculada e régua.

Figura 43 Classificação de triângulos

Quanto aos lados		
Escaleno (três lados diferentes) 	Isósceles (dois lados iguais) 	Equilátero (três lados iguais) 
Quanto aos ângulos		
Acutângulo (três ângulos agudos) 	Retângulo (um ângulo recto) 	Obtusângulo (um ângulo obtuso) 

Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/1234943/>

Figura 44 Classificação de quadriláteros



Fonte: <https://blogdoenem.com.br/quadrilateros-definicao-classificacao-e-propriedades/>

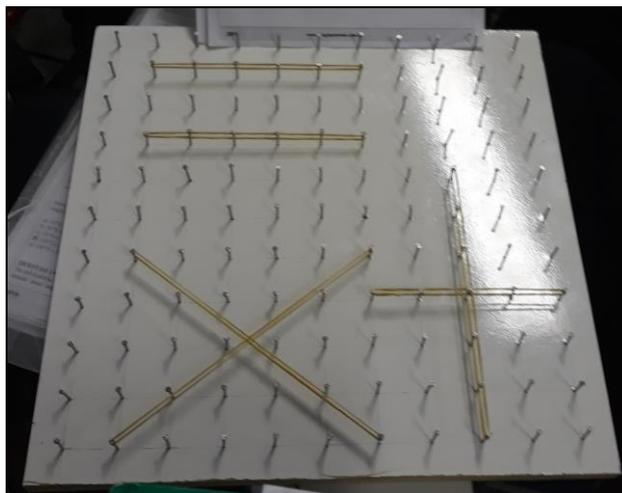
4.3 APRESENTAÇÃO DO MATERIAL MANIPULÁVEL (GEOPLANO):

Fazendo uso do conhecimento de que os materiais manipuláveis são altamente importantes e eficiente para a aprendizagem, tivemos um encontro, para uma apresentação do geoplano a turma.

Com a intenção de coletar dados sobre os conhecimentos dos alunos em relação ao geoplano, neste encontro, foram levantadas algumas questões, como: “Você conhece o geoplano? Já ouviu falar no geoplano?”, “Para que serve o geoplano? Após os resultados dos questionamentos, foi apresentado o geoplano para os alunos, através de uma aula, com o auxílio de slides, respondendo assim, as questões feitas a eles. Neste momento, foi apresentado também, como poderíamos inserir o geoplano em nossas aulas e o que iríamos trabalhar com o auxílio do geoplano.

Por fim, foram formados grupos com 5 ou 6 alunos, para que fizessem a confecção do geoplano, em casa com base nos conhecimentos obtidos na aula de apresentação do material.

Figura 45 Geoplano



Fonte: Próprio Autor

4.4 RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES COM A UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO:

Após a confecção do geoplano feita por cada grupo, tivemos um encontro com duração de 1 hora e 40 minutos para que os grupos realizassem na prática todas as atividades que fizemos no processo do trabalho.

Neste momento os questionários respondidos pelos alunos com a utilização da régua, esquadros e transferidor foram entregues para os alunos utilizar de base para uma nova etapa, ou seja, desenvolvê-lo de forma prática, com o uso do geoplano, ligas de elásticos e transferidor.

Nas atividades relacionadas a classificação, construção e medição de ângulos, foram executadas com o geoplano e com o auxílio do transferidor.

Na atividade de construção dos quadriláteros, eles utilizaram apenas o geoplano e as ligas, nesse momento usaram o conhecimento que foi passado para eles nas aulas anteriores e puderam observar melhor as características em comuns, as diferenças entre os quadriláteros notáveis, e desta forma, tiradas as conclusões das definições de cada um dos quadriláteros notáveis.

Logo em seguida, começaram as construções dos triângulos com suas seguintes classificações, neste momento foram misturadas as características das classificações quanto aos lados e quanto aos ângulos, mas logo, os alunos puderam perceber estas características e construir cada triângulo no geoplano, conforme eram pedidos nas questões.

Por fim, foram feitas as construções de retas, que segundo eles foi a parte mais fácil da atividade prática, diferentemente do que ocorreu na atividade onde utilizaram apenas régua e esquadros.

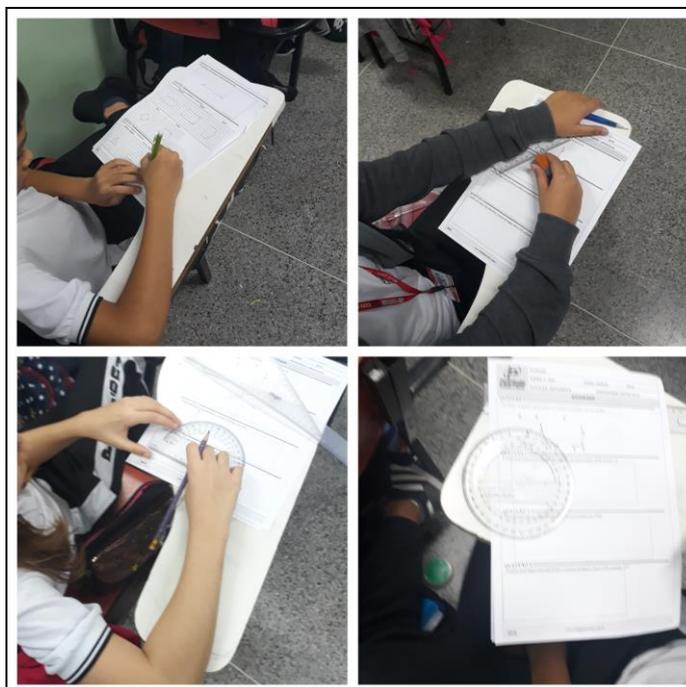
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante o trabalho os alunos responderam a um questionário referente aos conteúdos abordados na área da geometria plana, afim de avaliar os conhecimentos sobre os mesmos e na última etapa, responderam o mesmo questionário, porém, neste momento utilizando o material concreto manipulável, o geoplano. Neste capítulo, apresentaremos os resultados e discussões do processo, pela a análise do desenvolvimento nos questionários sem o uso do geoplano, e com o uso do mesmo.

5.1 RESULTADOS SEM A UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO NA RESOLUÇÃO DO QUESTIONÁRIO.

Para a realização desta proposta foi distribuída um questionário (ver em apêndice), este teve como objetivo sondar os conhecimentos prévios de geometria, junto com os adquiridos nas aulas.

Figura 46 Alunos respondendo o questionário

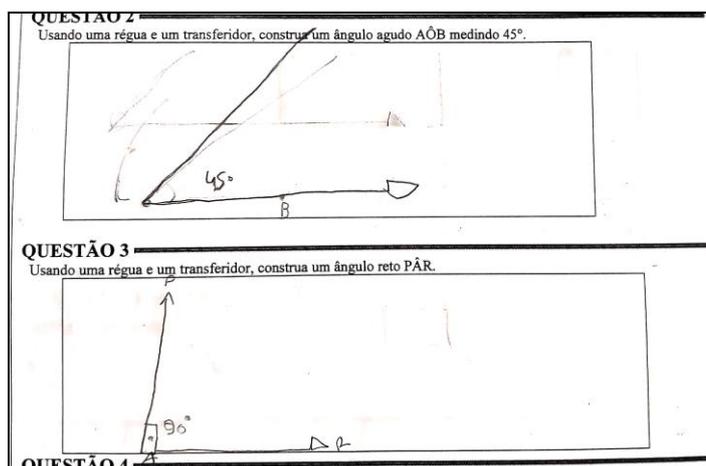


Fonte: Próprio Autor

Nas questões de 1 a 5, 9 e 10, foi trabalhado o assunto de ângulos, suas construções, classificações e medidas. Ao responderem as questões com o auxílio

de lápis, régua e quando necessário o transferidor, alguns alunos deixaram transparecer atitudes de aversão a utilização desses objetos, isso fica claro ao nos depararmos com alguns desenhos, como este da figura 48. .

Figura 47 Construções de ângulos do Aluno 1

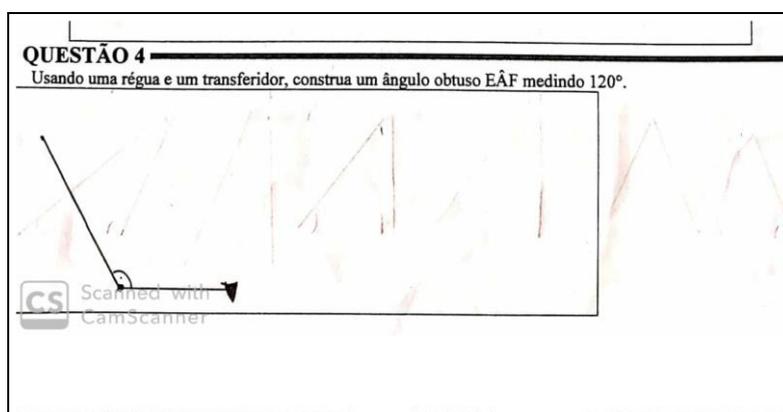


Fonte: Próprio Autor

Ao ser questionado em relação as figuras dos ângulos construídos sem a utilização da régua e transferidor, o aluno 1 respondeu: “Professora eu sei que o ângulo reto tem 90° (pela dedução dele, este teria 90°) e que 45° é metade de 90° ”.

Por outro lado, tivemos figuras satisfatórias, que deixaram claro a habilidade com a utilização dos mesmos, como mostra a figura 48.

Figura 48 Construção do ângulo de 120° do Aluno 2

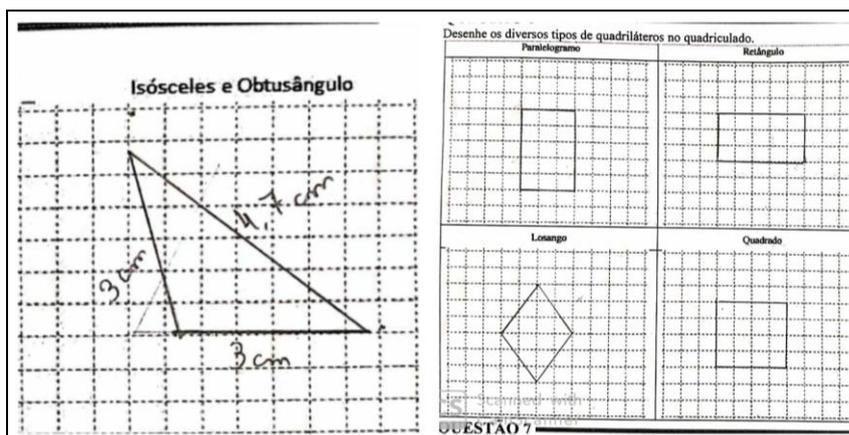


Fonte: Próprio Autor

Da questão 6 a questão 8, foi trabalhado o assuntos de polígonos, com as construções e classificações dos triângulos e quadriláteros, com auxílio da malha

quadriculada e régua. No decorrer da atividade fomos conceituando as figuras, além de levantarmos discursões do tipo: “Todo triângulo equilátero é isósceles” “Existe triângulo isósceles obtusângulo” “todo quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.”

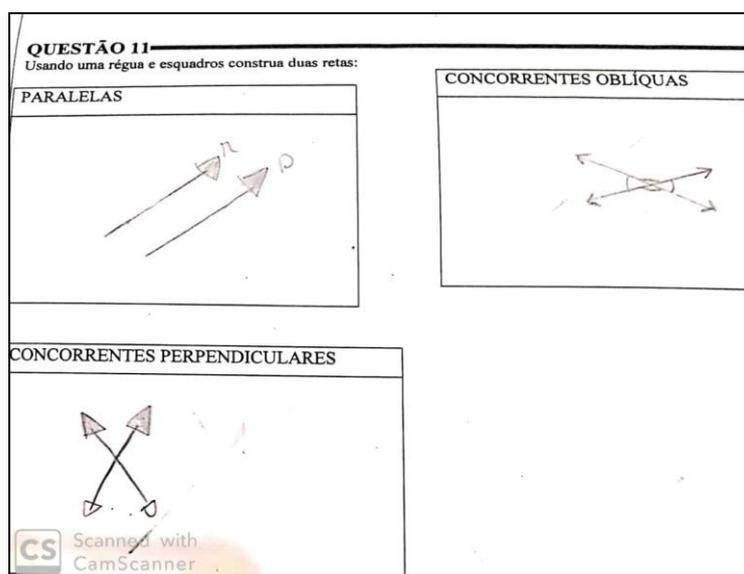
Figura 49 Construções de polígonos no quadriculado do aluno 3



Fonte: Próprio autor

Na questão 11, onde pedia para os alunos construir retas paralelas e concorrentes, ficou claro que a maior parte dos alunos compreenderam os conceitos, mas não executaram com os materiais que pediam na questão (régua e esquadro), como mostra a figura 51.

Figura 50 Construções de retas paralelas e concorrentes do Aluno 4



Fonte: Próprio Autor

Foram feitas indagações por parte deles, do tipo: “Professora, não é mais fácil usar a própria régua para desenhar as paralelas?”, “Professora, mas a própria régua não já tem os lados paralelos, simples é só usar a régua.”

Neste primeiro momento refletiu uma desmotivação dos alunos em aprender tais assuntos, apenas resolvendo o questionário, logo chegamos à conclusão que a metodologia usada poderia sim trazer resultado um resultado positivo, porém não com uma aprendizagem significativa e muito menos atrativa.

5.2 RESULTADOS COM A UTILIZAÇÃO DO GEOPLANO NA RESOLUÇÃO DO QUESTIONÁRIO.

Nos dois últimos encontros executamos uma oficina, onde os alunos reunidos com 5 ou 6 integrantes realizaram as atividades do questionário com o uso do geoplano. Esta teve como objetivo facilitar a compreensão dos alunos nos assuntos da geometria plana e investigar se o geoplano auxiliaria no desenvolvimento das atividades de construção e classificação de ângulos, polígonos e retas.

Neste momento, pudemos perceber o entusiasmo dos alunos e a curiosidade em descobrir como manusear o geoplano para desenvolver as atividades propostas, todos executaram-nas com bastante interesse, mesmo que estas, por sua vez, já tivessem sido resolvidas anteriormente, só que agora com algo novo para eles.

Figura 51 Construções de ângulos no geoplano

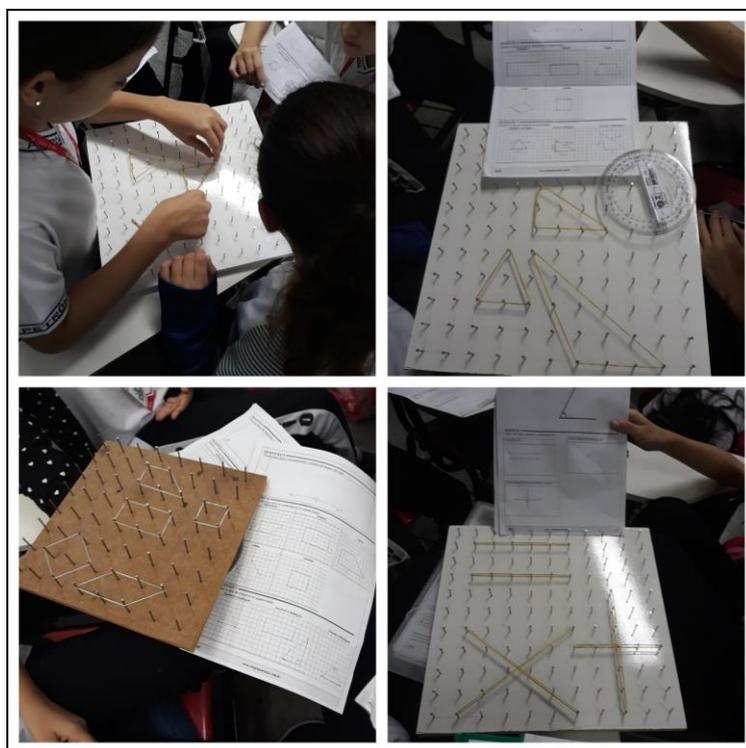


Fonte: Próprio Autor

A cada figura formada eram avaliadas e a cada acerto nas medidas dos ângulos, eles vibravam e ficavam ansiosos para construir mais e mais figuras. No decorrer do desenvolvimento do trabalho pudemos observar a interação entre os alunos e o interesse em querer formar as figuras.

Nas construções dos ângulos, boa parte dos alunos perceberam a vantagem do geoplano para se encontrar a medida exata em graus das aberturas dos ângulos, quando questionados pela rapidez da resolução o aluno 4, respondeu: “Muito fácil professora, é só começar pelo ângulo reto, que forma um quadradinho na abertura, então o de 45° é metade”.

Figura 52 Construções de figuras no geoplano



Fonte: Próprio autor

Nas questões que eram para construir os polígonos conforme suas características, os alunos sentiram um pouco de dificuldade nos triângulos, quando questionados quanto a dificuldade que estavam sentindo, o aluno 5 respondeu: “Professora não tem como fazer um triângulo obtusângulo com dois lados de mesma medida”,

E na questão de construções de retas paralelas e perpendiculares com o auxílio do geoplano os alunos não sentiram nenhuma dificuldade, uma vez que sabiam seus conceitos.

Fazendo uma análise a respeito da evolução dos conhecimentos dos alunos, a utilização deste material, proporcionou aos mesmos, resolver as questões de diferentes formas, desenvolvendo suas criatividade, percebemos a grande importância do geoplano na aprendizagem dos alunos na geometria plana, tornando a aula mais dinâmica, agradável e significativa, desta maneira, proporcionando o envolvimento do professor e o aluno na construção do conhecimento e conseqüentemente da aprendizagem.

Portanto, podemos afirmar que os resultados deste trabalho foram significativos e compensadores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma análise de como está sendo ministrado o conteúdo de geometria plana, as dificuldades encontradas ao trabalhar esse conteúdo de forma tradicional, uma reflexão acerca dos benefícios do recurso didático manipulável, o geoplano, também permitiu avaliar como este auxilia na aprendizagem do conteúdo.

De fato, a utilização de materiais manipuláveis contribuem de forma positiva no processo de ensino aprendizagem de geometria plana. No desenvolvimento do trabalho foi possível observar que no momento em que os alunos foram submetidos a resolver questões com o auxílio do geoplano, eles o fizeram de forma mais que satisfatória.

O uso do geoplano na aulas propiciou um ensino mais atraente e dinâmico e os grupos formados de maneira proposital possibilitou a socialização, a interação e motivação, o que resultou num aprendizado eficaz, além de que, permitiu uma aproximação do professor com os alunos, o que também contribuiu de forma positiva no processo de ensino aprendizagem.

É evidente que nem todo assunto matemático permite a utilização de materiais concretos, mas é importante que o professor tenha em mente a necessidade de buscar meios para abrir horizontes aos seus alunos em assuntos que tragam essa abertura, lembrando que seu papel é de extrema importância na aprendizagem dos mesmos.

Neste sentido, a utilização de recursos didáticos manipuláveis nas aulas de matemática, permitem aos professores mediar o processo de ensino-aprendizagem de maneira enriquecedora, trazendo aos alunos a motivação e contribuindo para uma aprendizagem realmente significativa.

REFERÊNCIAS

- BIANCHINI, E. Matemática. 7ª Ed. São Paulo: Moderna. 6º ano. 2011.
- BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1974.
- DOLCE, Osvaldo e POMPEO, Jose Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Volume 9. 7ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1993.
- EVES, Howard. História da geometria / Howard Eves; trad. Hygino H. Domingues - 5ª ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.
- FAINGUELERNT, Estela Kaufman. Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- FONSECA, M. C. F. R. Educação matemática de jovens e adultos: especificidades, desafios e contribuições. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- FREUDENTHAL, H. Mathematics as na educational task. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co. 1973.
- GRANDO, Cláudia Maria. Geometria: espaço e forma. Chapecó: Unochapecó; Coordenadoria de Educação a Distância, 2008.
- KALEFF, Ana Maria. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. Educação Matemática em Revista, São Paulo, Ano 1, n. 2, 1994.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006
- PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. Zetetike. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano 1, n.1, março, 1993.
- RÊGO, R. G; RÊGO. R. M. Matematicativa. 4. Ed. Rev. Campinas-SP. 2013. (Coleção Formação de Professores).
- SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; CÂNDIDO, Patrícia Terezinha. Figuras e formas. Porto Alegre: Artmed, 2003 (Coleção Matemática de 0 a 6, v.3).

SITES CONSULTADOS:

<https://www.pucsp.br/educacao/brinquedoteca/downloads/geoplano.pdf> 01/06/2019

<https://brasilecola.uol.com.br/biografia/tales-de-mileto.htm> 02/06/2019

<http://www.sbemrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC03069646433.pdf> 08/06/19

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Plano_\(geometria\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Plano_(geometria)) 13/06/19

<https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/> 15/06/19

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides> 15/06/19

<http://www.ufrgs.br/matematicando/materiais-1/geoplano/passo-a-passo-p-imprimir>
17/06/09

<http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/12/09APRESENTACAO.pdf>
17/06/19

<http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/11APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf> 17/06/19

<http://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/10APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf> 18/06/19

https://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/TRABALHO_EV065_MD1_SA4_ID630_30102016003045.pdf 22/06/19

<http://pir2.forumeiros.com/t126677-dados-tres-pontos-nao-colineares-abc> 25/06/19

<https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-plano.htm> 25/06/19

<https://slideplayer.com.br/slide/1234943/> 03/07/19

<https://blogdoenem.com.br/quadrilateros-definicao-classificacao-e-propriedades/>
03/07/19

<http://www.centralexatas.com.br/matematica/poligonos/669869> 10/07/19

<https://brainly.com.br/tarefa/935974> 13/07/19

http://licita.seplag.ce.gov.br/pub/173284/design_de_interiores_desenho_geometrico.pdf 16/07/19

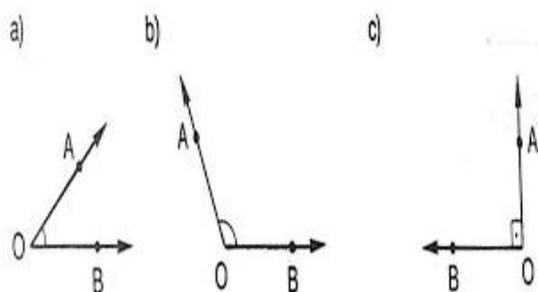
<https://blogdoenem.com.br/quadrilateros-definicao-classificacao-e-propriedades/>
17/07/19

<https://citacoes.in/autores/tales-de-mileto/> 19/07/19

APÊNDICE

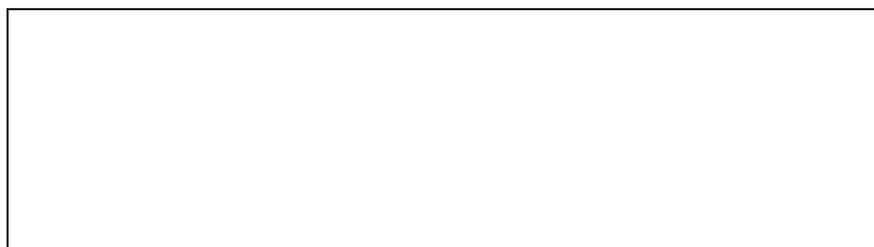
QUESTÃO 1

Classifique os ângulos apresentados nas figuras em agudos, obtusos ou reto:



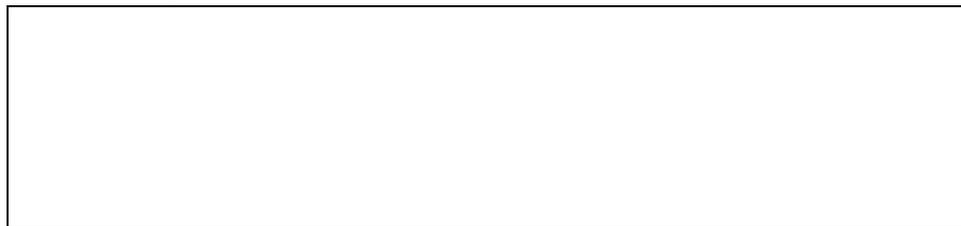
QUESTÃO 2

Usando uma régua e um transferidor, construa um ângulo agudo $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ medindo 45° .



QUESTÃO 3

Usando uma régua e um transferidor, construa um ângulo reto $\hat{P}\hat{A}\hat{R}$.



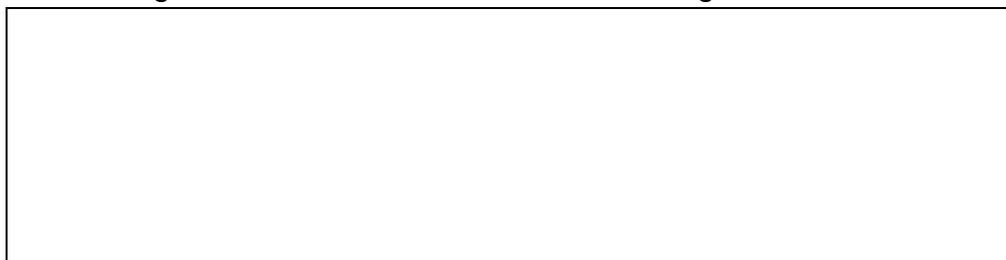
QUESTÃO 4

Usando uma régua e um transferidor, construa um ângulo obtuso $\hat{E}\hat{A}\hat{F}$ medindo 120° .



QUESTÃO 5

Usando uma régua e um transferidor, construa um ângulo raso DÊF.



QUESTÃO 6

Desenhe os diversos tipos de quadriláteros no quadriculado.

Paralelogramo	Retângulo	Trapézio
Losango	Quadrado	

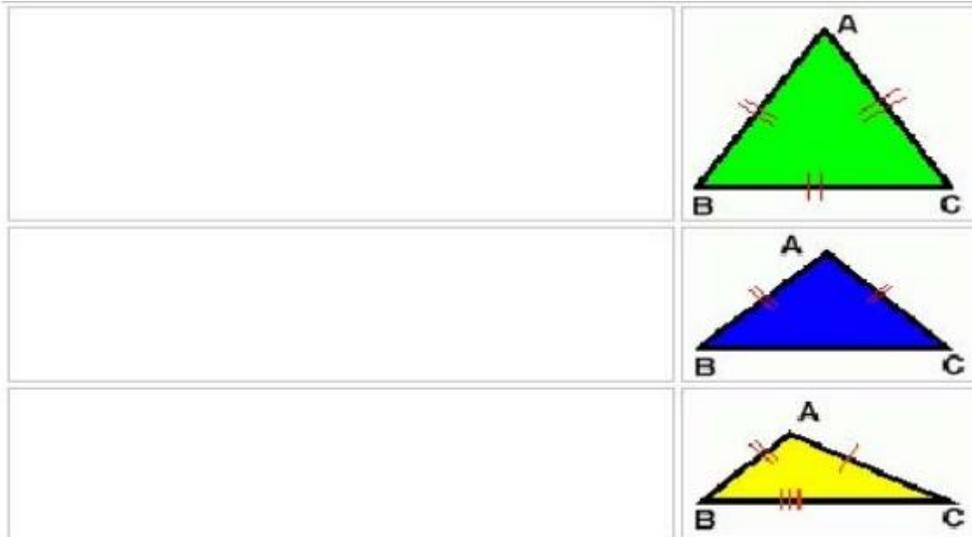
QUESTÃO 7

Desenhe os tipos de triângulos no quadriculado.

Equilátero e acutângulo	Escaleno e Retângulo	Isósceles e Obtusângulo

QUESTÃO 8

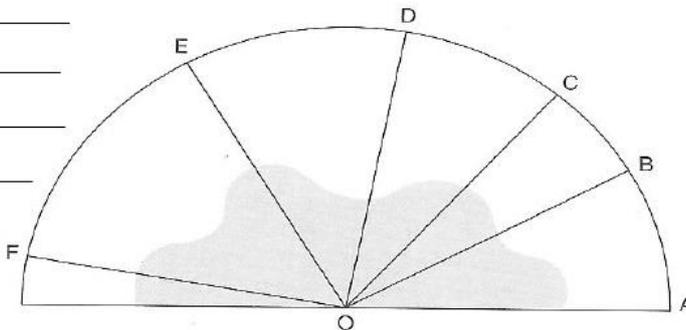
Classifique os triângulos quanto ao tamanho da medida dos seus lados e quanto à medida de seus ângulos.



QUESTÃO 9

Usando o transferidor descubra os ângulos abaixo:

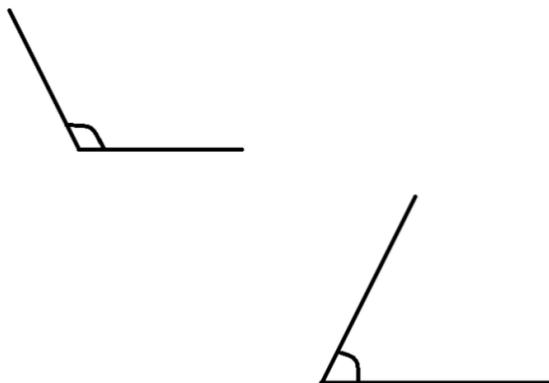
- a) $\hat{A}OB$ _____
- b) $\hat{B}OC$ _____
- c) $\hat{A}OC$ _____
- d) $\hat{C}OD$ _____
- e) $\hat{D}OE$ _____
- f) $\hat{E}OF$ _____
- g) $\hat{A}OF$ _____



QUESTÃO 10

Usando o transferidor determine a medida de cada ângulo abaixo:





QUESTÃO 11

Usando uma régua e esquadros construa duas retas:

PARALELAS

CONCORRENTES OBLÍQUAS

CONCORRENTES PERPENDICULARES