UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Juan Felipe de Azevedo Falcão

Solução fraca para a equação de vibrações de uma corda elástica

Campina Grande
2018

Juan Felipe de Azevedo Falcão

Solução fraca para a equação de vibrações de uma corda elástica

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda.

Campina Grande
2018

F181s Falcão, Juan Felipe de Azevedo.
Solução fraca para a equação de vibrações de uma corda elástica [manuscrito] / Juan Felipe de Azevedo Falcao. - 2018.
83 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Corda vibrante. 2. Solução fraca. 3. Vibrações transversais. 4. Espaços vetoriais. I. Título

21. ed. CDD 515.25

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

JUAN FELIPE DE AZEVEDO FALCÃO

SOLUÇÃO FRACA PARA A EQUAÇÃO DE VIBRAÇÕES DE UMA CORDA ELÁSTICA

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda.

APROVADO EM: 30/08/2018

Banca Examinadora:

Manuel Milla

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda (Orientador)
UEPB

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
UEPB

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo
UEPB

À minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a minha mãe Marta Célia por sua parceria, incentivo, paciência e compreensão ao longo desta caminhada, obrigado por tudo. Aos meus avós Francisca de Melo e José de Melo que sempre ensinou e inspirou a todos da família a respeitar e amar ao próximo. Vocês são minha fonte principal de inspiração.

Agradeço ao meu pai Giovanni Falcão que, por maior fosse sua distância física, sempre esteve presente no meu crescimento, garantindo que nada me faltasse. Seus ensinamentos e puxões de orelha, com certeza, tornaram-me um homem melhor. Agradeço aos meus tios Janua Coeli de Melo e Clodoaldo Melo *(in memorian)* por mostrar sempre que a educação é um caminho árduo, mas com frutos gratificantes. Pelo suporte que me foi dado quando busquei trilhar novos caminhos em direção ao estudo. Com certeza, levarei comigo os maiores ensinamentos e conselhos que vocês me deram.

Agradeço ao meu orientador Dr. Manuel Milla Miranda pela dedicação, paciência, apoio moral e compreensão ao longo desse período em minha vida. Seus conselhos levarei por toda a vida.

Aos meus tios e tias, primos e primas pelo seu apoio verdadeiro ao meu caminho como estudante, sempre perguntando e se importando com o meu desenvolvimento, em especial, Djalma Melo, Daluz Meira, Djailson Melo, Rosineide Melo, Manoel de Melo e Célia, Júnior Melo e Monalisa. Às minhas primas e primos Iânua, Ana Catarina, Pricila, Kalyne, Luana e Diego. Em especial à Joachin Azevedo e Heitor Meira que mais que primos são verdadeiros irmãos, seus ensinamento sempre foram motivos de reflexões sobre o caminho que estou trilhando.

À minha segunda família que com muito amor e carinho me acolheram como um filho. Seu apoio, incentivo e conselhos me fortaleceram perante todas as dificuldades enfrentadas. Em especial a André Monteiro, Simone Amorim, Rafaelle Amorim e à minha namorada Tayná Maria que passou por todos os momentos, felizes ou não, desta caminhada e sempre me incentivando e apoiando em todas minhas decisões. Seu carinho e amor sempre deixaram meus dias mais felizes.

Aos professores Dr. Aldo Trajano, Dr. Gustavo da Silva Araújo e Dr. Vandenberg Lopes por aceitarem em participar da banca deste trabalho e, principalmente, por todas suas sugestões visando sempre meu crescimento e aprendizado.

A UEPB por proporcionar um ambiente criativo e amigável para os estudos. Sou grato por todas as oportunidades que tive perante esta instituição que sempre me apoiou quando precisei. Aos professores do Departamento de Matemática que sempre proporcionaram um conhecimento tanto acadêmico como de mundo, contribuindo assim para minha formação profissional. Em especial a Aldo Trajano por seu caráter que sempre me inspirou. A Conceição Fernandes e Michelly Azevedo por seres minhas orientadoras e amigas no PIBID, à Sibério Albuquerque que foi meu orientador e conselheiro no PIBIC, meu muito obrigado pelas oportunidades.

Aos amigos Josué, Nehemias, Pedro, Renan, Daniel, Newton, Lucas e Alison que se puseram a me ajudar e aconselhar quando precisei e por todos nossos momentos de descontração. A todos os amigos que a graduação me trouxe. Ao grupo *Sons of Sossego*, são mais que amigos são verdadeiros irmãos. Em especial à Anderson Silva e Jefferson Queiroz. Obrigado por tudo.

"A álgebra é generosa: frequentemente ela dá
mais do que se lhe pediu.".
Jean Le Rond d'Alembert

Resumo

Nesta Monografia obtém-se a forma da solução fraca de um modelo matemático a qual descreve as pequenas vibrações transversais de uma corda. Para chegarmos ao nosso resultado estuda-se inicialmente de forma sucinta os espaços de Banach, os espaços de Hilbert, a integral de Lebesgue e os espaços de Sobolev.

Palavras-chave: Corda Vibrante, Solução Fraca, Pequenas Vibrações.

Abstract

In this Monograph is obtained the form of the solution of a mathematical model which describes the small transverse vibrations of a string. In order to obtain our result, first we introduce in suscint form the Banach spaces, the Hilbert spaces, the Lebesgue integral and the Sobolev spaces.

Key words: Vibrant String, Weak Solution, Small Vibrations.

Sumário

Introdução

A Análise Funcional é uma das maiores vertentes modernas da Matemática e desempenha um papel fundamental nas aplicações. Ela ocupa-se do estudo do espaço de funções. Por sua relação com a Álgebra, alguns autores da literatura matemática, costumam definir a Análise Funcional como o estudo da Álgebra Linear em espaços de dimensão infinita. Isto porque, ambas trata-se de espaços vetoriais e transformações lineares, em que sua diferença está na continuidade das transformações.

Na Álgebra Linear, por tratar-se de espaços vetoriais de dimensão finita, as transformações lineares são contínuas, enquanto que em espaços de dimensão infinita isto nem sempre é verdade.

Por isso, a Análise funcional está interessada no estudo das transformações lineares em espaços de dimensão infinita, que sejam contínuas. Este estudo tem suas raízes em problemas históricos como os de equações diferenciais e equações integrais, pois muitos desses problemas possuem como solução não mais números ou figuras geométricas e sim funções. Portanto, devem-se procurar estas soluções em espaços de funções. Um dos problemas mais antigos e famosos é o problema da corda vibrante com extremos fixos.

Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) foi um matemático, filósofo e físico francês, que em 1747, concluiu que toda solução u do problema da corda vibrante satisfaz necessariamente a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

onde $u(x,t)$ representa o deslocamento vertical em relação à posição de repouso, sofrido pelo ponto de abscissa x no instante t. Além disso, concluiu também que funções do tipo

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t),$$

são soluções da equação diferencial e então são candidatas a solução do problema original.

Outros matemáticos dedicaram-se a este problema, por exemplo, os primeiros resultados sobre este são datados por Brook Taylor (1685-1731), além de Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Bernoulli (1667 - 1748).

O objetivo desta monografia é obter a forma da solução fraca do modelo matemático que descreve as pequenas vibrações transversais de uma corda elástica flexível a qual esta presa nos seus extremos.

De início, usando o princípio de Hamilton, deduz-se o modelo matemático do fenômeno físico descrito acima. A solução deste modelo é denominada solução fraca do problema.

Para proporcionar um embasamento teórico a nosso estudo, se introduz de forma sucinta a teoria dos espaços de Banach, dos espaços de Hilbert, da integral de Lebesgue e dos espaços de Sobolev. Nestes espaços é que habitam as soluções fracas das equações diferenciais parciais.

No final obtém-se a solução como uma série de termos, onde cada soma finita é uma solução do problema num espaço de dimensão finita.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, iremos considerar tópicos básicos relacionados ao estudos dos Espaços Vetoriais, tendo como foco resultados que servirão para um melhor entendimento aos Espaços de Hilbert e suas aplicações. Os tópicos que nos referenciamos serão métrica em um espaço vetorial bem como conceitos de base, dimensão e norma. Ao leitor interessado em mais detalhes sobre o estudo dos espaços vetoriais, indicamos as referências [5] e [6].

1.1 Espaços Vetoriais

Definição 1.1.1 (**Espaço Vetorial**). *Considere um conjunto não vazio V munido com duas operações algébricas, uma de adição $(+)$ e outra de multiplicação por um escalar $(\cdot)$,*

$$+ : V \times V \to V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

e

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

$$(\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u$$

*em que o corpo $\mathbb{K}$ é o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. O conjunto V definido acima chama-se **espaço vetorial** sobre $\mathbb{R}$ quando para todo $u, v, w \in V$ e todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, satisfaz as seguintes condições:*

(i) $u + v = v + u$ *(Adição Comutativa);*

(ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(Adição Associativa);*

(iii) $\exists\, 0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$ *(Vetor Nulo);*

(iv) $\exists\, (-u) \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$ *(Inverso Aditivo);*

(v) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ *(Multiplicação Associativa);*

(vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ *(Distributiva sob a adição de escalares);*

(vii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(Distributiva sob a adição de vetores);*

(viii) $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$ *tal que* $1 \cdot u = u$ *(Identidade Multiplicativa do corpo* $\mathbb{R}$*).*

Como já foi supracitado na introdução deste trabalho, o corpo $\mathbb{K}$ que iremos trabalhar é o corpo dos números reais, ou seja, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e seus elementos são números reais. O vetor nulo, e o inverso aditivo de um vetor $u \in V$, expostos nas propriedades (iii) e (iv) acima, são únicos. Vamos demonstrar o primeiro caso e o outro segue em raciocínio análogo. De fato, suponhamos que existem 0_1 e 0_2 em V. Por definição temos,

$$u + 0_1 = 0_1 + u = u \ \text{ e } \ u + 0_2 = 0_2 + u = u$$

o que implica $u + 0_1 = u + 0_2$ e $0_1 = 0_2$. Portanto, é único o vetor nulo do espaço vetorial V.

Proposição 1.1.1. *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo real* $\mathbb{R}$*. Então são satisfeitas as seguintes propriedades:*

(i) $\alpha 0 = 0$, $0 \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*;*

(ii) $(-\alpha)u = -(\alpha u)$, $\forall u \in V$ *e* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*.*

Solução: De fato, $\forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos,
(i) Usando o fato de que a soma é associativa, temos

$$\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0 \Rightarrow -(\alpha 0) + \alpha 0 = -(\alpha 0) + [\alpha 0 + \alpha 0] \Rightarrow 0 = \alpha 0.$$

(ii) Por fim,

$$(-\alpha + \alpha)u = 0 \Rightarrow (-\alpha)u + \alpha u = 0 \Rightarrow (-\alpha)u = -(\alpha u)$$

como queríamos demonstrar.

■

Exemplo 1.1.1. *Considere o* ***Espaço Euclidiano*** $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ *em que cada elemento é uma sequência finita de números reais munido das operações:*

$$u + v = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

O espaço apresentado munido com as duas operações algébricas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$*.*

Exemplo 1.1.2. *Considere um conjunto V não vazio, definido por*

$$V = \Big\{(x_1, x_2, ...); x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\Big\}.$$

Este conjunto é um espaço vetorial chamado de ***espaço das sequências de quadrado somável****, denotado por ℓ^2. Vamos mostrar que as operações algébricas de adição e multiplicação por um escalar estão bem definidas neste espaço.*

Solução: Consideremos dois elementos arbitrários de ℓ^2, digamos, $u, v \in \ell^2$ com $u = (x_1, x_2, ...)$ e $v = (y_1, y_2, ...)$. Por definição temos $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ e $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$. Devemos provar que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 < \infty. \tag{1.1}$$

De fato, sabendo que $|x_i y_i| = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$, mostra-se

$$|x_i + y_i|^2 = x_i^2 + 2|x_i y_i| + y_i^2 \leq x_i^2 + x_i^2 + y_i^2 + y_i^2 = 2(x_1^2 + y_i^2).$$

Daí, obtemos $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^2 + y_i^2| < \infty$. Portanto, segue que (1.1) é verdadeira em ℓ^2.

Por fim, vamos verificar que $V = \ell^2$ é fechado em relação à multiplicação por um escalar do corpo $\mathbb{R}$. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \ell^2$, assim

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda||x_i|^2 = |\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

como queríamos provar.

■

Exemplo 1.1.3. *Considere espaço formado por todos os* ***polinômios com entradas reais de grau menor ou igual a n****, denotado por $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Sejam $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ com $\alpha \in \mathbb{R}$. As operações de adição e multiplicação por um escalar são definidas como segue*

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

e

$$\alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + \cdots + (\alpha a_n)x^n.$$

Além disso, o vetor nulo é definido como: $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$. Este conjunto, munido das operações de adição e multiplicação por um escalar, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.2. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um* ***subespaço vetorial*** *de V é um subconjunto W não vazio, no qual para quaisquer dois vetores w_1 e w_2 de W e todo escalar $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ é verdade que $\lambda w_1 + \alpha w_2 \in W$. Dois subespaços vetoriais especiais de qualquer espaço vetorial V é o subespaço próprio, $W = V$, e o subespaço $W = \varnothing$.*

1.2 Soma Direta

Nesta seção, trataremos o conceito de soma direta e também caracterizamos quando um espaço vetorial V pode ser escrito como soma direta de n subespaços.

Definição 1.2.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e U e W subespaços de V. Diremos que V é* ***soma direta*** *de U e W, se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $V = U + W$;

(ii) $U \cap W = 0$.

Denotamos a soma direta por: $V = U \oplus W$.

Exemplo 1.2.1. *Considera-se $V = \mathbb{R}^2$ e $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ dois subespaços de V. Então $V = U \oplus W$.*

Solução: Inicialmente é preciso provar que os conjuntos U e W são, de fato, subespaços de V. Este resultado fica como exercício. Sobre às condições da Definição 1.2.1 tem-se,
(i) Deve-se notar que a soma entre U e W é dada por:

$$U + W = \{u + w : u \in U \text{ e } w \in W\}$$

e, sendo assim, $U + W \subset \mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. É suficiente provar que $\mathbb{R}^2 \subset U + W$. De fato, seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in U + W$$

o que implica $\mathbb{R}^2 \subset U + W$. Portanto, como as inclusões são satisfeitas, concluímos que $\mathbb{R}^2 = U + W$.
(ii) Para provar que $U \cap W = \{0\}$, considera-se $(x, y) \in U + W$ então $(x, y) \in U$ e $(x, y) \in W$. De $(x, y) \in U$ temos $y = 0$ e de $(x, y) \in W$ temos $x = 0$. Logo $(x, y) = (0, 0)$ e, portanto, $U \cap W = \{(0, 0)\}$. Concluímos então que $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

■

Proposição 1.2.1 (Caracterização da soma direta de dois subespaços). *Considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e U, W subespaços de V. Então, $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo elemento de $v \in V$ se escreve de modo único como uma soma $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração: De fato, suponha que $V = U \oplus W$. Por definição, $v \in V$ pode ser escrito como $v = u+w$, onde $u \in U$ e $w \in W$. Considera-se $v = u_1+w_1$ em que $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$, logo a igualdade $u + w = u_1 + w_1$ implica $u - u_1 = w - w_1$. Daí, $u - u_1 \in U \cap W = \{0\}$, ou seja, $u = u_1$. Raciocínio análogo para $w = w_1$. Portanto, $v \in V$ se escreve de modo único como uma soma $u + w$.

Reciprocamente, suponha que cada $v \in V$ se escreve de maneira única como uma soma de $u + w$ em que $u \in U$ e $w \in W$, ou seja, $V = U + W$. Agora, e suficiente mostrar que $U \cap W = \{0\}$. De fato, por contradição, suponha que $U \cap W \neq \{0\}$ e seja $c \in U \cap W$, com $c \neq 0$.Consequentemente, $c \in V$ e então podemos escrever $c = c + 0$ de modo que $0 \in W$. Entretanto, este fato contradiz a hipótese de que $U \cap W \neq \{0\}$, portanto $U \cap W = \{0\}$ e $V = U \oplus W$.

■

O conceito de soma direta pode ser generalizado para n subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita. A caracterização da soma direta é válida para n subespaços de V, ou seja, se $W_1, ..., W_n$ são subespaços de V, então V é soma direta de $W_1, ..., W_n$ se, e somente se, cada $v \in V$ for escrito de maneira única como uma soma $w_1 + w_2 + \cdots + w_i$ com $w_i \in W_i$ em que $i = 1, 2, ...$ Ao leitor interessado, indicamos a referência [5].

1.3 Base e Dimensão

O conceito de base e dimensão de um espaço vetorial são, sem dúvidas, fundamentais para o estudo dos espaços vetoriais. Nesta seção, apresentamos os conceitos de espaços de dimensão infinita e finita. Estes, por sua vez, dependem de outro conceito, o de conjuntos linearmente dependentes o que nos garantem certa liberdade de interpretação geométrica e nos apresenta subconjuntos que contém elementos geradores de todo o espaço estudado.

Definição 1.3.1. *Considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $v_1, \cdots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \tag{1.2}$$

*é um elemento que pertence a V ao qual chamamos **combinação linear** de $v_1, \cdots, v_n$.*

Exemplo 1.3.1. *Considere $V = M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais. Então, o vetor*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

é combinação linear dos vetores

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ e \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pois $A = -2A_1 + 3A_2$.

Proposição 1.3.1. *Sejam* $v_1, ..., v_n$ *vetores fixos do espaço vetorial* V. *Considere* B *o conjunto denotado por*

$$B = [v_1, ..., v_n] = \{v \in V : v = \lambda_1 v_1, ..., \lambda_n v_n : \lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

que é formado pela combinação linear dos vetores fixos $v_1, ..., v_n$, *é um subespaço de* V. *Além disso,* B *é chamado de* ***subespaço gerado*** *por* $v_1, ..., v_n$.

Demonstração: Por definição de subespaço, deve-se provar que dado $u, v \in B$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, então $\lambda u + \beta v \in B$. De fato, sejam $u = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$ e $v = b_1 v_1 + ... b_n v_n$ então considere

$$\lambda u + \beta v = \lambda(a_1 v_i + ... + a_n v_n) + \beta(b_1 v_1, ..., b_n v_n) = \lambda(a_1 v_1) + \cdots + \lambda(a_n v_n) + \beta(b_1 v_1) + \cdots + \beta(b_n v_n)$$

da última igualdade, temos

$$(\lambda a_1)v_1 + \cdots + (\lambda a_n)v_n + (\beta b_1)v_1 + \cdots + (\beta b_n)v_n = (\lambda a_1 + \beta b_1)v_1 + \cdots + (\lambda a_n + \beta b_n)v_n$$

como $(\lambda a_i + \beta b_i) \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$. concluímos que $\lambda u + \beta v \in B$ como queríamos mostrar. Portanto B, denotado acima, é um subespaço de V.

■

Definição 1.3.2 (**Dependência e Independência Linear**). *Sendo* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $W = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$. *Considere* v *de* (1.2) *igual ao vetor nulo, ou seja,*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0. \tag{1.3}$$

O conjunto W *é dito* ***Linearmente Independente (LI)*** *ou que os vetores* $v_1, ..., v_n$ *são* ***LI*** *caso* (1.3) *admita apenas a solução trivial, ou seja,*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \tag{1.4}$$

Se existir $\lambda_i \neq 0$, *para algum* $i = 1, ..., n$, *então o conjunto* W *é dito* ***Linearmente Dependente (LD)***.

A motivação das terminologias de Dependência e Independência Linear decorre do fato que se $W = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto LD então ao menos um vetor de W pode ser escrito como uma combinação linear dos outros. Também, utiliza desses conceitos para definir um importante objeto de estudo: a dimensão de um espaço vetorial.

Definição 1.3.3 (**Dimensão Finita e Infinita de um Espaço Vetorial**). *Um espaço vetorial V é dito de **dimensão finita** se existe um número $n > 0$ tal que V contém um subconjunto LI de n vetores. O número n é chamado de dimensão de V, e escrevemos $dimV = n$. Por outro lado, se V não é de dimensão finita então dizemos que V tem **dimensão infinita**.*

Definição 1.3.4 (**Base de Hamel**). *Um subconjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é uma **base de Hamel** ou **base** do espaço vetorial V quando*

(i) $\mathcal{B}$ é LI;

(ii) $\mathcal{B}$ deve gerar V.

Como podemos ver na Definição 1.3.3, se $V = \varnothing$ então V é de dimensão finita e denotamos por: $dimV = 0$. Na Definição 1.3.4, se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base de V, então todo elemento de V pode ser escrito, de forma única, como uma combinação linear dos vetores da base. Ou seja, dado $v \in V$ um elemento genérico tem-se

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, \qquad \text{com } \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

Exemplo 1.3.2. *O espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ derivado do produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$ em que seus elementos são sequências de números reais, possui uma base definida por: $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$, que têm uma única coordenada não-nula, constituem uma base para $\mathbb{R}^n$ e, ainda, esta é chamada de base canônica de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.3.3. *Seja l^2 o espaço das sequências de quadrado somável definida no Exemplo* 1.1.2. *Mostremos uma base para este espaço.*

Solução: Uma possível base para este espaço, seria considerar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ em que $e_1 = (1, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...)$ e etc. De fato, é suficiente provar que $\mathcal{B}$ é LI e gera ℓ^2. Considere um subconjunto A de $\mathcal{B}$ com um número finito de elementos, ou seja, $A = \{e_1, ..., e_n\}$, e depois uma combinação linear nula com os elementos de A,

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, ..., n$. Assim,

$$\alpha_1(1, 0, ..., 0, ...) + \cdots + \alpha_n(0, ..., 1, ...) = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, 0, ..., 0, ...) = 0$$

o que implica, pela igualdade de vetores, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto, A é LI, generalizando esse processo para um índice $n+1$ à k com $k > n$ em $\mathcal{B}$, podemos verificar que todo subconjunto de $\mathcal{B}$ com um número finito de índices é LI. Então, por definição segue que $\mathcal{B}$ é LI.

Mostra-se que $\mathcal{B}$ gera ℓ^2. Para isto, escolheremos um elemento genérico do espaço ℓ^2 e verificamos que ele é combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$. Seja $u \in \ell^2$, então $u = (x_1, x_2, ...)$ em que $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, ...$, além disso $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ portanto temos, $(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = x_1(1, 0, ...) + x_2(0, 1, 0, ...) + \cdots + x_n(0, 0, ..., 1, 0, ...) + \cdots$, donde conclui-se $x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_ie_i$. Como u é um elemento genérico de ℓ^2, para qualquer $u \in \ell^2$ não nulo tem-se que u é gerado por $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ...\}$.

■

1.4 Norma em um Espaço Vetorial

Nesta seção, trataremos conceitos básicos sobre a função norma definida em um espaço vetorial. A norma é o conceito que relaciona propriedades *algébricas* e *geométricas* e, por isso, é de grande importância no estudos dos espaços de Hilbert.

Definição 1.4.1 (Norma em um espaço vetorial). *Seja V um espaço vetorial. Uma norma em V é uma aplicação $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ a qual satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\|u\| \geq 0$ *e* $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \quad \forall u \in V$;

(ii) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u \in V$;

(iii) $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$, $\forall u, w \in V$. *(Desigualdade triangular)*

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente, *espaço normado* o qual denotamos este por $(V, \|\cdot\|)$. Mencionamos também que, em particular, todo espaço normado é um espaço métrico com a métrica induzida por: $d(u, w) = \|u - w\|$.

Exemplo 1.4.1. *Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ apresentado anteriormente. Definimos as seguintes aplicações neste espaço:*

(i) $\|u\|_2 = \left(\sum_{i}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;

(ii) $\|u\|_1 = \sum_{i}^{n} |x_i|$;

(iii) $\|u\|_\infty = max\,\{|x_i|;\ 1 \leq i \leq n\}$.

Cada uma das aplicações anteriores é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Estas são descritas como: ***norma euclidiana, norma da soma*** *e* ***norma do máximo****, respectivamente.*

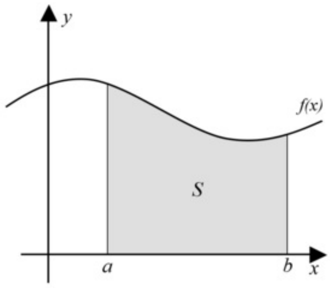
Exemplo 1.4.2. *Seja $I = [a, b]$. Considere o espaço vetorial $V = C(I, \mathbb{R})$ das funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas munidas com a soma de funções e o produto de um escalar por uma função. Então cada uma das aplicações*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx,$$

$$\|f\|_2 = \Big(\int_a^b f^2(x)dx\Big)^{1/2},$$

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

define uma norma em $C(I, \mathbb{R})$. Em particular, podemos associar cada função $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ao número $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f|$, que é igual a área S da figura abaixo ou ao número $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_a^b f^2\right)^{1/2}, \forall f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.



Mostremos que a aplicação $\|u\|_2$ definida em $\mathbb{R}^n$ é uma norma.

Lema 1.4.1. *A aplicação*

$$\|u\| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: É necessário verificar as propriedades $(i), (ii)$ e (iii) da Definição 1.4.1.
(i) $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$;
Tem-se $\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, como $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$, temos naturalmente $\|u\| \geq 0$. Além disso,

$$\|u\| = 0 \Longrightarrow \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = 0 \Longrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^n = 0 \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

Ou seja, $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
$(ii)\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$;
Logo,

$$\begin{aligned}\|\alpha u\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \cdots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \cdots + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)} = |\alpha|\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = |\alpha|\|u\|.\end{aligned}$$

(iii) $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$.
Para demonstrar este item utilizaremos uma desigualdade que será apresentada e demonstrada mais adiante - a *desigualdade de Cauchy-Schwarzs*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Para quaisquer $u, w \in \mathbb{R}^n$, elevando o termo $\|u + w\|$ ao quadrado, obtemos,

$$\|u + w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \|u\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|w\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|w\| + \|w\|^2.$$

Podemos escrever esta ultima desigualdade como $(\|u\| + \|w\|)^2$, de modo que $\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|$. Portanto, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

■

Proposição 1.4.1. *Seja $\|\cdot\|$ uma norma qualquer em um espaço vetorial V. Então, para todo $u, w \in V$, temos*

$$|\|u\| - \|w\|| \leq \|u - w\|.$$

Demonstração: Com efeito, considere

$$\|u\| = \|(u - w) + w\| \leq \|u - w\| + \|w\| \Longrightarrow \|u\| - \|w\| \leq \|u - w\|.$$

Analogamente

$$\|w\| = \|(w - u) + u\| \leq \|w - u\| + \|u\| \Longrightarrow \|w\| - \|u\| \leq \|w - u\|$$

donde

$$-\|u - w\| \leq \|u\| - \|w\|.$$

Assim,

$$-\|u - w\| \leq \|u\| - \|w\| \leq \|u\| - \|w\| \Longrightarrow |\|u\| - \|w\|| \leq \|u - w\|.$$

Como queríamos demonstrar.

■

Definição 1.4.2. *Uma função $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** no conjunto V quando, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (onde δ depende apenas de ε) tal que $u, w \in V$, $\|u - w\| < \delta$ implica $\|f(u) - f(w)\| < \varepsilon$.*

Proposição 1.4.2. *Toda norma em um espaço vetorial V é uma função uniformemente contínua.*

Demonstração: Para todo $\varepsilon > 0$, exite $\delta = \varepsilon > 0$ tal que $\|u - w\| < \delta$ para todo $u, w \in V$. Assim, pela Proposição anterior,

$$|\|u\| - \|w\|| \leq \|u - w\| < \delta = \varepsilon.$$

■

Definição 1.4.3. *Seja V um espaço vetorial munido de uma norma e (u_n) uma sequência em V. Dizemos que a sequência (u_n) converge para $u \in V$, ou que u é o limite da sequência (u_n), denotado por $u_n \to u$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $n \geq n_0$ implica $\|u_n - u\| < \varepsilon$.*

Definição 1.4.4. *Uma sequência (u_n) em um espaço normado V é dita **sequência de Cauchy** se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \|u_m - u_n\| < \varepsilon.$$

Definição 1.4.5. *Um espaço normado V é denominado um **espaço de Banach** se ele é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy (u_n) de V converge para um vetor de V.*

Definição 1.4.6 (Normas equivalentes). *Uma norma $\|\cdot\|_0$ de um espaço vetorial V é equivalente a norma $\|\cdot\|_1$ de V se existem constantes positivas α, β tais que*

$$\alpha\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_0 \leq \beta\|\cdot\|_1.$$

Teorema 1.4.1. *Em um espaço vetorial normado de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Demonstração: Com efeito, mostra-se que toda norma é equivalente a norma da soma. Sendo assim, seja V um espaço vetorial normado $n-$dimensional e considere $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V. Assim, para cada $u \in V$ exitem únicos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que u pode ser escrito como

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Logo, vamos mostrar que qualquer norma $\|\cdot\|_0$ em V é equivalente a norma $\|u\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

Com efeito,

$$\|u\|_0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|e_i\| \leq \max_{0\leq i\leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \beta \|u\|_1,$$

em que $\beta = \max_{0\leq i \leq n} \|x_i\|$. Portanto, $\|u\|_0 \leq \beta\|u\|_1$.

Para outra desigualdade, suponha que não existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|u\|_1 \leq \|u\|_0$, para todo $u \in V$. Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $u_n \in V$ em que $\|u_n\|_1 > n\|u_n\|_0$. Defina uma sequência $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_1}$, de modo que $\|w_n\|_1 = 1$. Agora considere a bola $B(0,1)$ de centro zero e raio um de $(V, \|\cdot\|_1)$, o qual é um conjunto compacto (vamos definir conjuntos compactos e esfera mais adiante). Logo, por definição, existe uma subsequência (w_{n_j}) de (w_n) que converge para um ponto w em $(V, \|\cdot\|_1)$.

Pela continuidade da norma, definida na Proposição 1.4.2, temos $\|w\|_1 = 1$. Utilizando a desigualdade acima, obtemos

$$\|w\|_0 = \|w - w_{n_j} + w_{n_j}\|_0 \leq \|w - w_{n_j}\|_0 + \|w_{n_j}\|_0 \leq \beta\|w - w_{n_j}\|_1 + \frac{1}{n_j}.$$

Quando $j \longrightarrow \infty$ temos $\|w\|_0 \longrightarrow 0$, logo $w = 0$. Mas isto é uma contradição, pois $\|w\|_1 = 1$. Portanto, $\alpha\|u\|_1 \leq \|u\|_0, \alpha > 0$. Como a primeira norma é arbitrária, o resultado é válido por transitividade.

■

Exemplo 1.4.3. *As normas usuais definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ apresentadas no Exemplo 1.4.1 são equivalentes pelo teorema anterior.*

Teorema 1.4.2 (Critério de Cauchy)**.** *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Considera-se uma sequência (u_n) de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Sendo ela limitada, possui uma subsequência convergente $(u_{k'})_{k'\in\mathbb{N}'}$. Seja $\lim\limits_{k'\in\mathbb{N}'} u_{k'} = a$. Então $\lim\limits_{k'\in\mathbb{N}'} |u_{k'} - a| = 0$ e $\lim\limits_{k\in\mathbb{N},k'\in\mathbb{N}'} |u_k - x_{k'}| = 0$. Portanto, $|u_k - a| \leq |u_k - u_{k'}| + |u_{k'} - a|$ resulta $\lim\limits_{kin\mathbb{N}} |u_k - a| = 0$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = a$.

Reciprocamente, se (u_k) é convergente, digamos $\lim_{k\to\infty} u_k = a$, então de $|u_k - u_{k'}| \leq |u_k - a| + |u_{k'} - a|$, conclui-se que $\lim\limits_{k,k'\to\infty} |u_k - u_{k'}| = 0$, como queríamos mostrar.

■

,

Capítulo 2

Espaços de Hilbert

Em um espaço normado podemos adicionar e multiplicar vetores como feito na álgebra de vetores elementar. A norma generaliza o conceito de comprimento de um vetor, o que possibilita trabalharmos conceitos geométricos dos espaços vetoriais. No entanto, o que precisa-se em um espaço normado é um produto que se assemelha ao produto escalar estudado em um curso de geometria analítica. Este produto chama-se *produto interno* e o representaremos por $(\cdot,\cdot)$. É por meio do *produto interno* que definimos o conceito de ortogonalidade e os Espaços de Hilbert.

Quando consideramos espaços com produto interno, estamos nos aproximando do espaço euclidiano, pois estes espaços são a generalização mais natural dos espaços euclidianos. Sua teoria é inicialmente estudada por David Hilbert em 1912, quando estudou sobre equações integrais. Suas terminologias se assemelham muito aquelas vistas no espaço euclidiano por isso não se deve haver muita dificuldade na notação.

Neste capítulo, estudaremos os espaços vetoriais que possuem definidos um produto interno, assim como suas características e aplicações.

2.1 Espaços com Produto Interno

Definição 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um produto interno em V é uma aplicação $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ o qual associa um par de elementos $u, v \in V$ ao produto interno $(\cdot,\cdot)$ onde, para quaisquer $u, v, w \in V$, as condições são satisfeitas:*

(i) $(u, v) = (v, u)$;

(ii) $(u + \alpha v, w) = (u,\, w) + \alpha(v, w)$ *com* $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $(u,\, u) \geq 0$ *e* $(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

A propriedade (i) é conhecida como propriedade simétrica. Nela, se V é um espaço vetorial complexo (ou espaço hermitiano) o produto interno em (i) (ou produto hermitiano) é dado por:

$$(u, v) = \overline{(u, v)}.$$

Segue das propriedades (i) à (iii) que o produto interno é linear no primeiro fator

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$$

para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

O par $(E, (\cdot, \cdot))$ é chamado de **espaço com produto interno**. Neste caso, dizemos que a função

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}, \|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{2.1}$$

é a *norma induzida pelo produto interno* $(\cdot, \cdot)$. Além disso, a métrica em E é definida por:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)}.$$

Consequentemente, espaços de produto interno são espaços normados.

Proposição 2.1.1 (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**). *Seja E um espaço vetorial real munido de um produto interno. Então*

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

para quaisquer $u, v \in E$.

Demonstração: Se $u = 0$ ou $v = 0$ então o resultado é imediato. Suponhamos então que $u \neq 0$ e $v \neq 0$. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ é verdade que $\|u + \lambda v\|^2 \geq 0$ e, sendo assim,

$$0 \leq \|u + \lambda v\|^2 = (u + \lambda v, u + \lambda v) = (u, u) + \lambda(u, v) + \lambda(v, u) + \lambda^2(v, v)$$

esta ultima igualdade pode ser escrita como $\lambda^2\|v\|^2 + 2(u, v)\lambda + \|u\|^2$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerando o trinômio $f(\lambda) = \lambda^2\|v\|^2 + 2(u, v)\lambda + \|u\|^2$, tem-se $f(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Agora, note que $\|v\| \neq 0$ e isto ocorre apenas quando $\Delta \leq 0$, o que implica

$$4(u, v)^2 - 4\|v\|^2\|u\|^2 \leq 0 \Longleftrightarrow (u, v)^2 \leq \|v\|^2\|u\|^2.$$

Por fim, considerando a raiz quadrada positiva de $(u, v)^2 \leq (\|v\|\|u\|)^2$, obtemos

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|, \qquad \forall u, v \in E$$

■

Proposição 2.1.2. *Seja E um espaço vetorial munido com um produto interno. Então, para quaisquer $u, v \in E$, tem-se:*

(i) (Lei do Paralelogramo)

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(ii) (Identidade de Polarização, caso real)

$$(u,v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

Demonstração:
(i) Com efeito,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = (u+v, u+v) + (u-v, u-v) = 2(u,u) + 2(v,v) = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(ii) Caso análogo ao anterior. No primeiro caso nós somamos, para o segundo caso, é suficiente realizar a diferença.

■

O nome *lei do paralelogramo* é sugerido da geometria elementar, basta lembrarmos que a norma generaliza o conceito de comprimento de um vetor. Podemos concluir também, que se a norma não satisfaz a lei do paralelogramo então não pode ser obtida a partir de um produto interno. Ou seja, um espaço normado que não satisfazer a lei do paralelogramo não é um espaço de produto interno.

Concluímos também que todo espaço de produto interno é um espaço normado, contudo, nem todo espaço normado é um espaço de produto interno. Um caso interessante sobre a *identidade de Polarização* é que com ela podemos "redescobrir" um produto interno a partir da norma correspondente.

Proposição 2.1.3. *Seja E um espaço de produto interno. Então,um produto interno sobre E define uma norma, para todo $u \in E$, tal que*

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Demonstração: Com efeito, basta provar a desigualdade triangular da definição de norma. Assim, temos

$$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v)$$

$$= \|u\|^2 + (u,v) + (v,u) + \|v\|^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|(u,v)| = |(v,u)| \leq \|u\|\|v\|,$$

então,

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2.\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Portanto, a norma está bem definida. ■

Definição 2.1.2 (**Espaços de Hilbert**). *Um* ***espaço de Hilbert*** $\mathcal{H}$ *é um espaço de produto interno completo (completo na norma proveniente do produto interno).*

Exemplo 2.1.1. *O espaço* ***euclidiano*** $n-$***dimensional*** $\mathbb{R}^n$ *é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$(u,v) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \tag{$*$}$$

onde $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$*. Também, definimos a norma proveniente do produto interno como*

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

a partir disso, definimos também a métrica euclidiana por

$$d(u,v) = \|u-v\| = (u-v, u-v)^{1/2} = \Big[(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2\Big]^{1/2},$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$*. Vamos mostrar que* $\mathbb{R}^n$ *é um espaço de Hilbert. Com efeito, seja* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então*

(i) $(u,v) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = (v,u)$;

(ii) Desenvolvendo $(u + \alpha v, w)$ *deve-se obter:*

$$\begin{aligned}(x+\alpha y, z) &= (x_1 + \alpha y_1)z_1 + (x_2 + \alpha y_2)z_2 + \cdots + (x_n + \alpha y_n)z_n \\ &= x_1z_1 + \alpha y_1z_1 + x_2z_2 + \alpha y_2z_2 + \cdots + x_nz_n + \alpha y_nz_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha y_iz_i = \sum_{i=1}^{n} x_iz_i + \alpha\sum_{i=1}^{n} y_iz_i\end{aligned}$$

da ultima igualdade, obtemos $(u + \alpha v, w) = (u,w) + \alpha(v,w)$.

(iii) Deve-se provar que $(u,u) \geq 0$ *e* $(u,u) = 0 \iff u = 0$*. Ora,* $(u,u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$. *Além disso,*

$$(u,u) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Portanto, a aplicação (u,v) *definida por* $(*)$ *é um produto interno. A segunda parte da demonstração é garantida pelo Teorema 1.4.1. Concluí-se então que o espaço* $\mathbb{R}^n$ *é um espaço de Hilbert.*

Antes de apresentarmos o próximo exemplo é importante conhecer uma desigualdade muito utilizada na Análise Funcional e Teoria da Medida - *a desigualdade de Hölder*. Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, então para todo $u = (\xi_i) \in \ell^p$ e $v = (\eta_i) \in \ell^2$ a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i|$ é absolutamente convergente e tem-se a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^p \right)^{1/q}.$$

Esta desigualdade é chamada de *desigualdade de Hölder*. Em particular quando $p = 2$, esta desigualdade é denominada *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

Exemplo 2.1.2. *Seja ℓ^2 o **espaço das sequências de Hilbert**. Este espaço, como seu nome nos diz, é um espaço de Hilbert com produto interno definido por*

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \eta_j \tag{2.2}$$

em que $u = (\xi_1, \xi_2, ...)$ e $v = (\eta_1, \eta_2, ...)$ e sua norma é definida por

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2}.$$

A convergência da série dada em (2.2) é garantida pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. De fato, sendo $u, v \in \ell^2$ então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \infty \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2 < \infty$$

logo, pelas desigualdades citadas,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

Portanto, ℓ^2 é um espaço de Hilbert.

Este espaço é um espaço particular do espaço das sequências p-somáveis definidas anteriormente ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$. Contudo, para $p \neq 2$ este espaço não de Hilbert, pois não verifica a lei do paralelogramo. Com efeito, seja $u = (1, 1, 0, 0...)$ e $v = (1, -1, 0, 0, ...) \in \ell^2$, então

$$\|u\| = (u, u)^{1/p} = 2^{1/p} = (v, v)^{1/p} = \|v\|$$

e

$$\|u + v\| = \|u - v\| = 2$$

ou seja,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \neq 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Portanto, para $p \neq 2$ o espaço ℓ^2 não é um espaço de Hilbert.

Exemplo 2.1.3. *Considere $L^2(a,b)$ como a classe de todas as funções reais mensuráveis u, definidas em (a,b), tal que a integral de Lebesgue de $|u|^2$ sobre (a,b) existe e é finito. Neste espaço, definimos a norma por*

$$\|u\| = \left(\int_a^b u(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

o qual é obtido a partir do produto interno

$$(u,v) = \int_a^b u(t)v(t)dt.$$

Os elementos deste espaço são classes de equivalência, onde u é equivalente a v se a integral de Lebesgue de $|u-v|^2$ sobre (a,b) é zero. Este espaço com o produto interno definido acima é um espaço de Hilbert e vamos estudá-lo com maior clareza no próximo capítulo.

Proposição 2.1.4. *Sejam E um espaço de produto interno com (u_n) e (v_n) duas sequências em E. Se $u_n \longrightarrow u$ e $(v_n) \longrightarrow v \in E$, então $(u_n, v_n) \longrightarrow (u,v)$.*

Demonstração: Com efeito, inicialmente temos

$$|(u_n,v_n) - (u,v)| = |(u_n,v_n) - (u_n,v) + (u_n,v) - (u,v)|.$$

Utilizando a desigualdade triangular na equação acima, obtemos

$$|(u_n,v_n) - (u,v)| \leq |(u_n,v_n) - (u_n,v)| + |(u_n,v) - (u,v)|.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$0 \leq |(u_n,v_n) - (u,v)| \leq \|u_n\|\|v_n - v\| + \|u_n - u\|\|v\|.$$

Como, por hipótese, $u_n \longrightarrow u$ e $v_n \longrightarrow v$, então $(u_n - u) \longrightarrow 0$ e $(v_n - v) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, logo pelo Teorema do Confronto, tem-se

$$(u_n,v_n) - (u,v)| \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Assim, $(u_n,v_n) \longrightarrow (u,v)$. Portanto, o produto interno é contínuo.

∎

Definição 2.1.3. *Um **isomorfismo** T de um espaço de produto interno E em um espaço de produto interno $\hat{E}$ sobre o mesmo corpo é uma transformação linear bijetora $T : E \longrightarrow \hat{E}$ que preserva o produto interno. Ou seja, para todo $u, v \in E$, temos*

$$(T(u), T(v))_{\hat{E}} = (u,v)_E.$$

Quando isto acontece, dizemos que os espaços E e $\hat{E}$ são isomorfos e denotamos por $E \cong \hat{E}$.

Teorema 2.1.1 (**Completamento**). *Seja E um espaço de produto interno qualquer. Então, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um isomorfismo T de E em um subespaço denso $W \subset \mathcal{H}$. O espaço $\mathcal{H}$ é único exceto por isomorfismo.*

Demonstração: Ver [6].

■

Definição 2.1.4. *Um **subespaço** F de um espaço de produto interno E é definido como sendo um subespaço vetorial de E considerando o produto interno de E restrito ao cartesiano $F \times F$.*

2.2 Ortogonalidade

Dizemos que o produto interno é a ferramenta para "geometrizar"os espaços vetoriais pois é por meio dele que relacionam-se o comprimento de um vetor e define a ortogonalidade entre vetores. Ao cursarmos um primeiro curso de Álgebra Linear, nos deparamos com a situação de dois vetores, $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$, com

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 0$$

e, por isso, os vetores u e v são ortogonais. A recíproca também é válida, se u e v são ortogonais, o produto interno entre eles é igual a 0. Nesta seção, iremos apresentar resultados sobre a ortogonalidade e suas aplicações aos espaços de Hilbert, bem como o principal resultado desta seção: o Teorema da Projeção Ortogonal.

Definição 2.2.1 (**Ortogonalidade**). *Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno. Diremos que dois vetores u e v em E são ortogonais quando $(u, v) = 0$. Para denotar que dois vetores são ortogonais, escrevemos $u \perp v$.*

Analogamente, para subconjuntos $A, B \subset E$, nós escrevemos $u \perp A$ se $u \perp a$, $\forall a \in A$, e $A \perp B$ se $a \perp b$, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Para introduzirmos o leitor a ideia geométrica, por exemplo, vamos demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Teorema 2.2.1 (**Teorema de Pitágoras**). *Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Dado dois vetores u e v em E ortogonais, então*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \tag{2.3}$$

Demonstração: Usando a hipótese de que os vetores u e v são ortogonais, é suficiente desenvolver o lado esquerdo da equação (2.3). Temos,

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + (v, u) + (u, v) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Portanto,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

■

Suponhamos um espaço vetorial V e um subconjunto não vazio $M \subset V$. Dado $u \in V$, digamos que queremos saber a distância de u a M. Definimos esta distância por

$$dist(u, |x|) = \inf\{\|u - \hat{v}\|; \hat{v} \in M\} \tag{2.4}$$

em que $\hat{v} \in M$ e a ultima igualdade só é válida em espaços normados. Note que este é um problema de existência e unicidade pois devemos analisar se há um $\hat{v} \in M$ que seja o mais próximo de u, como existe é único. Este é um problema importante e bem complexo em determinados espaços.

Definição 2.2.2. *Seja V um espaço normado e F um subconjunto de V. Diz-se que F é fechado se qualquer sequência convergente (u_n) de F possuir seu limite em F.*

Exemplo 2.2.1. *Seja $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o conjunto dos pontos que formam o círculo unitário do plano.*

Demonstração: Como $0 \in \mathbb{R}^2$, temos

$$dist(0, S_1) = \inf\{\|\hat{y}; \hat{y} \in S_1\} = 1.$$

Ou seja, para todo $\hat{y} \in S_1$ temos $\delta = \inf d(0, S_1) = 1$. Note que estes são infinitos.

■

A partir do exemplo, nosso trabalho é encontrar um $v_0 \in M$, que é o vetor que minimiza a distância entre $u \in V$ e M, que satisfaça (2.4). Para isso vamos precisar da definição de complemento ortogonal. Neste sentido, definamos

Definição 2.2.3. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com $u, v \in V$. O segmento de u a v em V é definido como o conjunto de todos $w \in V$ tal que*

$$w = \alpha u + (1 - \alpha)v \quad (\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq \alpha \leq 1)$$

Definição 2.2.4. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $M \subset V$, dizemos que M é convexo quando, para todo $u, v \in M$, o segmento de u a v esteja contido em M.*

Estamos em condições de apresentar o teorema da melhor aproximação de $u \in E$ por vetores de M comentado anteriormente.

Teorema 2.2.2. *Seja E um espaço com produto interno e $M \neq \varnothing$ um subconjunto convexo completo. Então para todo $u \in E$ existe um único $p \in M$ de modo que*

$$\delta = \|u - p\| = \inf \|u - v\| \tag{2.5}$$

Neste caso escreve-se $p = proj_M^u$ (projeção ortogonal de u sobre M) e $\delta = dist(u, M)$.

Demonstração: Inicialmente, demonstra-se sua existência. Chamamos de $\delta = dist(u, M)$. Pela definição de ínfimo, dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$ existe uma sequência $(v_n) \in M$ tal que

$$\delta \leq \|u - v_n\| < \delta + \frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\|u - v_n\| = \delta_n \longrightarrow \delta.$$

Vamos mostrar que (v_n) é uma sequência de Cauchy. Com efeito, colocando $v_n - u = z_n$, tem-se $\|z_n\| = \|v_n - u\| = \delta_n$ e para $n, m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\|z_n + z_m\| = \|(v_n - u) + (v_m - u)\| = 2\left\|\frac{v_n + v_m}{2} - u\right\| \geq 2\delta \tag{2.6}$$

pois $\frac{v_n+v_m}{2} \in M$ e M é convexo. Além disso, $v_n - u = z_n$ implica $v_n - v_m = z_n - z_m$. Como $\|z_n\| = \delta_n$, de (2.4) e pela lei do paralelogramo, temos

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|z_n - z_m\|^2 = 2(\|z_n\|^2 + \|z_m\|^2) - \|z_n + z_m\|^2 \leq 2(\delta)$$

pois $\dfrac{v_n + v_m}{2} \in M$ e M é convexo.E ainda, $v_n = u = z_n$ implica $v_n - v_m = z_n - z_m$. Como $\|z_n\| = \delta_n$, de (2.4) e pela lei do paralelogramo, temos

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|z_n - z_m\|^2 = 2(\|z_n\|^2 + \|z_m\|^2) - \|z_n + z_m\|^2 \leq 2((\delta_n)^2 + (\delta_m)^2) - (2\delta)^2$$

Onde $2((\delta_n)^2 + (\delta_m)^2) - (2\delta)^2$ tende a zero quando $m, n \longrightarrow \infty$. Ou seja, (v_n) é uma sequência de Cauchy. Como M é completo, existe $v_0 \in M$ tal que $v_n \longrightarrow v_0$.
Pela definição de δ, temos que $\|u - v_0\| \geq \delta$. Usando disto, segue que:

$$\delta \leq \|u - v_0\| = \|u - v_n + v_m - v_0\| \leq \|u - v_n\| + \|v_n - v_0\| = \delta_n + \|v_n - v_0\|.$$

Como $\delta_n \longrightarrow \delta$ e $\|v_n - v_0\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, a desigualdade acima ocorre de forma que

$$\delta \leq \|u - v_0\| \leq \delta$$

ou seja,

$$\|u - v_0\| = \delta$$

Por fim,

$$\delta = \inf \|u - v\| = \|u - v_0\|$$

onde $v \in M$. Provaremos sua unicidade. Suponha que $v_0, v \in M$ e satisfaçam

$$\|u - v_0\| = \delta \text{e} \|u - v\| = \delta$$

Utilizando a lei do paralelogramo

$$\|v - v_0\|^2 = \|u - v_0 + v - u\|^2 = \|(v - u) - (v_0 - u)\|^2 = 2(\|(v - u)\|^2 + \|v_0 - u\|^2) - \|v - u + v_0 - u\|^2$$

Assim,

$$2\|v-u\|^2+2\|v_0-u\|^2-\|(v-u)+(v_0-u)\|^2=4\delta^2-4\left\|\frac{v+v_0}{2}-x\right\|^2$$

Como M é convexo segue que $\dfrac{v+v_0}{2}\in M$ e

$$\left\|\frac{v+v_0}{2}-x\right\|^2\geq\delta$$

Então

$$\|v-v_0\|^2=4\delta^2-4\left\|\frac{v+v_0}{2}-x\right\|^2\leq 4\delta^2-4\delta^2=0$$

Portanto,

$$\|v-v_0\|^2=0\Longrightarrow v=v_0$$

■

Lema 2.2.1. *Com as hipóteses do teorema anterior, seja E um espaço de produto interno e considere $Y\neq\varnothing$ um subespaço fechado de E. Então $x=u-p$ é ortogonal a Y, em que $p=proj_Y^u$.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $x\perp Y$ não seja verdade. Ou seja, existe $v_1\in Y$ tal que

$$(x,v_1)=\beta\neq 0.$$

Naturalmente, $v_1\neq 0$ pois caso contrário $(x,0)=0$. Além disso, para qualquer $\alpha\in\mathbb{R}$ temos

$$\|x-\alpha v_1\|^2=(x-\alpha v_1,x-\alpha v_1)=(x,x)+(z,-\alpha v_1)+(-\alpha v_1,x)+(-\alpha v_1,-\alpha v_1)$$

$$=(x,x)-\bar{\alpha}(x,v_1)-\alpha(v_1,x)+\alpha\bar{\alpha}(v_1,v_1)$$

$$=(x,x)-\bar{\alpha}\beta-\alpha[\beta-\bar{\alpha}(v_1,v_1)].$$

Como $v\neq 0$, escrevemos $\bar{\alpha}=\dfrac{\bar{b}}{(v_1,v_1)}$, logo

$$\|x-\alpha v_1\|^2=(x,x)-\left(\frac{\bar{\beta}}{(v_1,v_1)}\right)\beta-\alpha\left[\beta-\bar{\alpha}\left(\frac{\bar{\beta}}{(v_1,v_1)}\right)(v_1,v_1)\right]=(x,x)-\frac{|\beta|^2}{(v_1,v_1)}$$

Pelo Teorema (2.2.2), $\delta=\|u-v_0\|=\|x\|$. Assim,

$$\|x-\alpha v_1\|^2=\|x\|^2-\frac{|\beta|^2}{\|v_1\|^2}=\delta^2-\frac{|\beta|^2}{\|v_1\|^2}<\delta^2$$

Portanto,

$$\|x - \alpha v_1\|^2 < \delta^2 \Longleftrightarrow \|x - \alpha v_1\| < \delta$$

contudo, isto é impossível, visto que

$$x = \alpha v_1 = u - v_1 \qquad \text{onde} \qquad v_2 = v + \alpha v_1 \in Y$$

e como $\delta = \inf \|u - v\| = \|u - v_0\| = \|x\|$, com $v \in M$, segue que $\|x - \alpha v_1\| \geq \delta$. Logo isto é uma contradição e assim, para todo $v_1 \in Y$ temos $x \perp Y$.

■

O lema apresentado é conhecido como lema da ortogonalidade. Nosso objetivo agora é buscar uma representação de um espaço de Hilbert como uma soma direta de um subespaço Y fechado e um complemento ortogonal. Para isto, definimos o complemento ortogonal.

Definição 2.2.5 (Complemento Ortogonal). *Seja E um espaço com produto interno e $M \subset E$ não vazio. Então, o subconjunto*

$$M^\perp = \{v \in E; (u, v) = 0 \quad \forall u \in M\}$$

é denominado de complemento ortogonal de M.

Definição 2.2.6 (Soma Direta). *Um espaço vetorial V é chamado de soma direta de dois subespaços de V, digamos Y e Z, e escreve-se*

$$V = Y \oplus Z$$

se cada $v \in V$ tem única representação

$$v = u + w \quad , \quad u \in Y \, e \, w \in Z$$

Neste caso, Z é chamado de complemento algébrico de Y em V e Y é chamado de complemento algébrico de Z em V.

Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$. Naturalmente, Y tem uma infinidade de complementares em $\mathbb{R}^2$ onde todos são uma reta real. Contudo, o interessante é buscarmos um complementar que seja ortogonal à Y. Quando V é de dimensão finita e Y é um subespaço de V, sempre podemos escrever $V = Y \oplus Y^\perp$. Se tratando de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, o subconjunto que nos gera maior interesse é o complemento ortogonal de um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Desse modo, apresentamos o Teorema da Projeção.

Teorema 2.2.3. *Seja H um espaço de Hilbert e $Y \subset H$ um subespaço fechado. Então*

$$H = Y \oplus X \qquad \text{onde} \qquad X = Y^\perp$$

Demonstração: Primeiramente, mostremos sua existência. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, então $\mathcal{H}$ é completo e sendo Y um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, segue que Y é completo e convexo pelo Teorema 1.2.1.

Pelo Teorema (2.2.2) e o Lema (2.2.1), para cada $u \in H$ existe $v_0 \in Y$ tal que

$$u = v_0 + x \qquad \text{onde} \qquad x \in X = Y^{\perp} \tag{2.7}$$

o que mostra que $\mathcal{C} = Y + X$. Agora, mostraremos sua unicidade. Suponha que existem $v_0, v_1 \in Y$ e $x_0, x_1 \in X$ tais que:

$$u = v_0 + x_0 \qquad \text{e} \qquad u = v_1 + x_1$$

Logo,

$$v_0 + x_0 = v_1 + x_1 \Longleftrightarrow v_0 - v_1 = x_1 - x_0$$

Agora, $v_0 - v_1 \in Y$ assim como $x_1 - x_0 \in X = Y^{\perp}$. Então,

$$v_0 - v_1 = x_1 - x_0 \in Y \cap Y^{\perp}.$$

Se existir $k \in \mathcal{H}$ tal que $k \in Y \cap Y^{\perp}$ então $(k,k) = 0$, ou seja, $k = 0$. Logo

$$v_0 - v_1 = 0 \Rightarrow v_0 = v_1 \quad \text{e} \quad x_1 - x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_0$$

Portanto, $\mathcal{H} = Y \oplus X$.

■

Na equação (2.7) anterior, o vetor $v_0 \in Y$ chama-se projeção ortogonal de u em Y. Esta projeção define uma aplicação $P : \mathcal{H} \longrightarrow Y$ tal que $v_0 = P(u)$. Analogamente, o vetor $w \in Y^{\perp}$ é a projeção ortogonal de u em $Y^{\perp}$ o qual define $Q : \mathcal{H} \longrightarrow Y^{\perp}$ tal que $w = Q(u)$.

Exemplo 2.2.2. *Seja $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ com $Y = eixo - x$ e $Y^{\perp} = eixo - y$ então $\mathcal{H} = Y \oplus Y^{\perp}$. Como Y é completo, segue que é um subespaço fechado. Assim, podemos manusear o vetor $h = (\xi_1, \xi_2)$ e projetar qualquer h sobre o eixo-$x = Y$ tal que $P(h) = y$. Esta projeção é dada por $y = P(h) = (\xi, 0)$.*

Quando trabalha-se com subconjunto M de um espaço de produto interno E, $M \neq \varnothing$, seu complementar $M^{\perp}$ é um subespaço fechado de E mesmo M não sendo um subespaço. Com efeito, o complementar de M é dado por

$$M^{\perp} = \{u \in E; u \perp M\} = \{u \in E; (u,m) = 0, \forall m \in M\}.$$

Assim, dados $u, v \in M^{\perp}$, para quaisquer $m \in M$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(\alpha u + \beta v, m) = \alpha(u,m) + \beta(v,m) = 0 + 0 = 0,$$

ou seja, $\alpha u + \beta v \in M^{\perp}$, o que mostra que M é um subespaço. Agora, vamos mostrar que M é fechado. Com efeito, seja $u_m \in M^{\perp}$ uma sequência convergente, digamos, $u_m \longrightarrow u \in E$. Sendo $u_m \in M^{\perp}$ tem-se para todo $m \in M$

$$(u, m) = (u - u_m + u_m, m) = (u - u_m, m) + (u_m, m).$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$0 \leq \|(u, m)\| = \|(u - u_m, m)\| \leq \|u - u_m\|\|m\|.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ tem-se $\|u - u_m\| \longrightarrow 0$ o que implica

$$0 \leq \|(u, m)\| \leq 0 \Longrightarrow (u, m) = 0, \qquad \forall m \in M$$

logo $u \in M^{\perp}$ e portanto $M^{\perp}$ é fechado. Uma outra observação a ser feita é o fato de que $M \subset (M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp\perp}$. Com efeito, $u \in M \Longrightarrow u \perp M^{\perp} \Longrightarrow u \in M^{\perp\perp}$. Isso nos da motivo suficiente para o próximo lema.

Lema 2.2.2. *Se M é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $M = M^{\perp\perp}$*

Demonstração: Como vimos, $M \subset M^{\perp\perp}$. É suficiente mostrar o caso contrário, ou seja, $M^{\perp\perp} \subset M$. Com efeito, seja $u \in M^{\perp\perp}$, pelo Teorema (2.2.3), para cada $u \in \mathcal{H}$ existe $v_0 \in M \subset M^{\perp\perp}$ tais que

$$u = v_0 + w \qquad \text{onde} \qquad w \in M^{\perp}. \tag{2.8}$$

Como $M^{\perp\perp}$ é um subespaço vetorial e $u \in M^{\perp\perp}$, temos

$$w = u - v_0 \in M^{\perp\perp}$$

e pelo Lema (2.2.1),

$$w \perp M^{\perp}.$$

Note que $w \in M^{\perp}$ e $w \perp M^{\perp}$, segue que $w \perp w$, ou seja, $(w, w) = 0 \Longleftrightarrow w = 0$. De (2.8), o elemento $u \in M$ pois $u = v_0$ portanto $M \supset M^{\perp\perp}$. Concluí-se que $M = M^{\perp\perp}$.

■

Lema 2.2.3. *Dado $M \neq \varnothing$ um subconjunto de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O subespaço vetorial gerado por M é denso em $\mathcal{H}$ se, e somente se, $M^{\perp} = 0$*

Demonstração: Suponha um subespaço gerado por M denso em $\mathcal{H}$, ou seja, $\overline{[M]} = \mathcal{H}$ e considere $u \in M^{\perp}$. Assim, $u \in \mathcal{H} = \overline{[M]}$, logo existe uma sequência $(u_n) \in [M]$ tal que $u_n \longrightarrow u$, $n \in \mathbb{N}$. Daí, como $M^{\perp} \perp [M]$ e $u \in M^{\perp}$, temos

$$(u_n, u) = 0$$

pela continuidade de produto interno, Proposição 2.1.4., $(u_n, u) \longrightarrow (u, u)$ quando $n \longrightarrow \infty$. Desse modo, $(u, u) = \|u\|^2 = 0 \Longrightarrow u = 0$. Portanto, $M^\perp = 0$.
Reciprocamente, suponha $M^\perp = 0$. Se $u \perp [M]$. Então, $u \perp M$, ou seja, $u \in M^\perp \Longrightarrow u = 0$. Pelo Teorema 2.2.3.,

$$\mathcal{H} = \overline{[M]} \oplus \overline{[M]}^\perp$$

Como $\overline{[M]}^\perp = 0$, concluímos que $\mathcal{H} = \overline{[M]}$.

■

2.3 Conjuntos e Sequências Ortonormais

Sabemos do fato que todo espaço vetorial possui uma base e isso nos garante que todo elemento deste espaço pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base, como vimos na seção 1.3. Entretanto, em espaços de dimensão infinita esta representação não tem, em geral, muita utilidade. Nesta seção, iremos apresentar uma forma mais útil de representar vetores em espaços de Hilbert.

Definição 2.3.1. *Seja M um conjunto ortogonal em um espaço de produto interno E, ou seja, os elementos de M são, dois a dois, ortogonais. Um* ***conjunto ortonormal*** *$M \subset E$ é um conjunto ortogonal em E onde seus elementos possuem norma 1, isto é, para todo $u, v \in M$*

$$(u, v) = \begin{cases} 0, & se \quad u \neq v \\ 1, & se \quad u = v \end{cases} \tag{2.9}$$

Se um conjunto ortonormal ou ortogonal M é enumerável, podemos arranjar (organizar) uma sequência (u_n) e chamá-lo de **sequência ortonormal**.

Mais geralmente, um conjunto organizado ou família, (u_α) com $\alpha \in I$, é chamado de ortogonal se $u_\alpha \perp u_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in I$ e $\alpha \neq \beta$. A família é chamado de ortonormal se for ortogonal e todo u_α tem norma 1, assim para todo $\alpha, \beta \in I$ temos

$$(u_\alpha, u_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{se} \quad \alpha = \beta \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker.

Exemplo 2.3.1. *Considere $\mathbb{R}^n$ com o produto interno canônico definido no Exemplo 2.1.1., então os vetores $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.3.2. *Considere o espaço das sequências das sequências de quadrado somável l^2. Então $e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), e_3 = (0, 0, 1, 0, ...)$ e assim por diante. Daí, uma sequência (e_n), com $n \in \mathbb{N}$, é um conjunto ortonormal em ℓ^2.*

Exemplo 2.3.3. *Seja E o espaço das funções contínuas de valores reais em $[0, 2\pi]$, ou seja, $E = C([0, 2\pi], \mathbb{R})$, com produto interno definido por:*

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt \tag{2.11}$$

Considere (x_n) uma sequência em E definida por:

$$x_n(t) = \cos(nt), \qquad n \in \mathbb{N}$$

Vamos construir uma sequência ortonormal em E a partir desta sequência. Sendo assim, temos

$$(x_n, x_m) = \int_0^{2\pi} x_n(t)x_m(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt$$

para $n, m \in \mathbb{N}$. Agora, analisaremos
Se $m = n = 0$, então

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos(0)\cos(0)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Se $m = n = 1, 2, 3, ...$, então

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)\, dt = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi n} \frac{1 + \cos(2u)}{2}\, du$$

onde utilizamos o método da substituição e depois a identidade trigonométrica de $\cos^2(u)$. Daí, da ultima igualdade obtemos

$$\frac{1}{n}\int_0^{2\pi n} \frac{1}{2}\, du + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi n} \cos(2u)\, du = \frac{1}{2n}\int_0^{2\pi n} du + \frac{1}{2n}\Big[2\,\mathrm{sen}(2u)\Big]_0^{2\pi n}$$
$$= \frac{1}{2n}\Big[u\Big]_0^{2\pi n}.$$

De modo que esta ultima igualdade é igual a π, concluímos que

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt = \pi \qquad \text{quando} \qquad n = m.$$

Por fim, se $m \neq n$, então

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n-m)t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((n+m)t)\, dt$$

o qual utilizamos a identidade trigonométrica: $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$. Além disso, como $n, m \in \mathbb{N}$, chamemos $n - m = p$ e $n + m = q$, assim da última igualdade obtemos com as substituições

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(pt)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(qt)\, dt = \frac{1}{2p}\int_0^{2\pi p} \cos(u)\, du + \frac{0}{2q}\int_1^{2\pi q} \cos(v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2p}\Bigg[\operatorname{sen}(u)\Bigg]_0^{2\pi p} + \frac{1}{2p}\Bigg[\operatorname{sen}(v)\Bigg]_0^{2\pi q} = 0.$$

Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\; dt = 0 \qquad \textit{para} \qquad m \neq n.$$

Portanto, analisado as condições necessárias, sintetizamos nossos resultados da seguinte forma

$$(x_n, x_m) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\; dt = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n \\ \pi, & se \quad m = n = 1, 2, ... \\ 2\pi, & se \quad m = n = 0. \end{cases}$$

Assim, uma sequência ortonormal é definida (e_n) *como*

$$e_0(t) = \frac{x_0(t)}{\|x_0(t)\|} = \frac{\cos(0t)}{\sqrt{\langle x_0, x_0\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

para $n = 0$*. Quando* $n = 1, 2, 3, ...$ *temos,*

$$e_n(t) = \frac{x_n(t)}{\|x_n\|} = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\langle x_n, x_n\rangle}} = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Aplicando a definição de produto interno e norma definidos em E*, observamos que:*

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq m \\ 1, & se \quad n = m \end{cases}$$

onde também $\|e_n\| = 1$*, para* $n = 0, 1, 2, ...$ *De forma análogo, considere* $(y_n) = \operatorname{sen}(nt)$ *e construa uma sequência ortonormal* $\tilde{e}_n$*. Ou seja, analisaremos para* $n \neq m$ *e* $n = m = 1, 2, ...$ *tal que*

$$(y_n, y_m) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(mt)\; dt$$

e constate que

$$(y_n, y_m) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq m \\ \pi, & se \quad m = n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Logo, a sequência $\tilde{e}_n$ *é definida por*

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{y_n(t)}{\|y_n\|} = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

e, portanto,

$$(\tilde{e}_n, \tilde{e}_m) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq m \\ 1, & se \quad n = m \end{cases}$$

com $\|\tilde{e}_n\| = 1$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$ *Sendo assim,* (e_n) *e* $(\tilde{e}_n)$ *são sequências ortonormais em* E*. Além disso, é interessante observar que* $x_n \perp y_m$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$*. De fato,*

$$(x_n, y_m) = \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{sen}(mt)\; dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(nt - mt) + \mathrm{sen}(nt + mt)\; dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}((n-m)t) + \mathrm{sen}((n+m)t)\; dt$$

chamando $n - m = p$ *e* $n + m = q$*, então*

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(pt) + \mathrm{sen}(qt)\; dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(pt)\; dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(qt)\; dt$$

chamando $pt = u$ *e* $qt = v$*, temos*

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2\pi p} \mathrm{sen}(u)\; du + \frac{1}{2q}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(v)\; dv = -\frac{1}{2p}\Bigg[\cos(u)\Bigg]_0^{2\pi p} - \frac{1}{2q}\Bigg[\cos(v)\Bigg]_0^{2\pi q} =$$
$$= -\frac{1}{2p}[1-1] - \frac{1}{2q}[1-1] = 0.$$

Portanto,

$$(x_n, y_m) = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Em geral, considere $E = C([0, L]; \mathbb{R})$ *munido do produto interno*

$$(f, g) = \int_0^L f(t)g(t)dt.$$

Para a sequência $(\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L})$ *de vetores de* E*, resulta*

$$\Big(\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}, \mathrm{sen}\,\frac{m\pi t}{L}\Big) = \begin{cases} 0, & se \quad n \neq m \\ \frac{L}{2} & se \quad n = m \end{cases}$$

Assim a sequência (e_n) *onde*

$$e_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\, n\pi t \quad , \quad n = 1, 2, ...$$

é uma sequência ortonormal em E*.*

Mencionamos na seção anterior que o Teorema e Pitágoras era válido para dois vetores ortogonais, o mesmo acontece com conjuntos ortonormais finitos. De fato, seja $X = u_1, ..., u_n$ um conjunto ortonormal, então

$$\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$$

Com efeito, por definição, $(u_i, u_j) = 0$ se $i \neq j$, assim

$$\Bigg\|\sum_{i=1}^n u_i\Bigg\|^2 = \Bigg(\sum_{i=1}^n u_i, \sum_{j=1}^n u_j\Bigg) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (u_i, u_j) = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

como queríamos mostrar.

Lema 2.3.1. *Um conjunto ortonormal é linearmente independente.*

Demonstração: Considere $S = \{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal e seja a combinação linear igual a zero,

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0. \tag{2.12}$$

Note que $(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$, então multiplicando por um escalar fixo, digamos e_j, temos

$$e_1\alpha_1 e_j + \cdots + e_n\alpha_n e_j = 0 \iff \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j\right) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_j) = 0 \iff$$
$$\iff \alpha_j (e_j, e_j) = \alpha_j = 0.$$

Portanto todo escalar é igual a zero o que mostra que S é linearmente independente. O mesmo resultado é válido para S infinito e a demonstração é análoga.

■

Considere E um espaço de produto interno e $(e_1, e_2, ...)$ uma sequência ortonormal de E. Seja $u \in [e_1, ..., e_n]$ então, podemos escrever u como

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \tag{2.13}$$

onde α_k é um escalar para $k = 1, 2, ..., n$. Multiplicando por um e_j fixo, obtemos

$$(u, e_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (e_k, e_j) = \alpha_j$$

de modo que (2.13) torna-se

$$u = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k. \tag{2.14}$$

Vimos no Teorema 2.2.2., que se $M \subset E$ um subespaço fechado, então todo vetor de E admite uma única melhor aproximação. Agora, a partir de (2.14), vamos fornecer um resultado dessa melhor aproximação para um subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert.

Proposição 2.3.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $e_1, ..., e_n$ um conjunto ortonormal em E. Se $M = [e_1, ..., e_n]$ e $u \in \mathcal{H}$, então*

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{n} (u, e_j) e_j \right\| = dist(u, M) \tag{2.15}$$

Demonstração: Com efeito, pelo Teorema 2.2.2. e o Teorema 2.2.3. da seção anterior, podemos tomar $p \in M$ e $q \in M^{\perp}$ tal que

$$u = p + q \quad e \quad \|u - p\| = dist(u, M) = \delta$$

como $p \in M$, existem escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de modo que

$$p = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

como $u - p = q \in M^{\perp}$, temos $(u-p) \perp e_j$, $j = 1, ..., n$ assim

$$(u - p, q) = 0 \Longleftrightarrow (u, e_j) - (p, e_j) = 0 \Longleftrightarrow (u, e_j) = (p, e_j) \Longleftrightarrow u = p.$$

Daí, $p = u \in \mathcal{H}$ o que nos leva a equação

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k \right\| = dist(u, M)$$

como queríamos provar.

■

Como este resultado provado, vamos mostrar uma desigualdade essencial motivada pela identidade (2.14): a desigualdade de Bessel (1784 - 1846). Vale observar que nosso objetivo é mostrar que todo vetor em um espaço de Hilbert pode ser escrito como uma soma de múltiplos de vetores de um sistema ortonormal completo. Entretanto, geralmente, essa soma não é finita, sendo assim, precisaremos de alguns resultados auxiliares, principalmente o que concerne a séries.

Teorema 2.3.1 ((Desigualdade de Bessel)). *Considere $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno E. Então, para todo $u \in E$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(u, e_k)|^2 \leq \|u\|^2$$

Demonstração: Com efeito, considere a equação dada em (2.14) com $u \in E$ e $v \in Y_n = [e_1, ..., e_n]$ tal que v seja definido por

$$v = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k \tag{2.16}$$

onde n é fixo. Defina $z \in E$ como $u = v + z$, ou seja, $z = u - v$, logo $z \perp v$. De fato, por (2.16) temos

$$\|v\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k, \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} (e_k, e_k)(u, e_k)\overline{(u, e_k)} = \sum_{k=1}^{n} \|(u, e_k)\|^2$$

Ou seja,

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|(u, e_k)\|^2 \tag{2.17}$$

Logo,

$$(z,v) = (u-v,v) = (u,v) - (v,v) = \left(u, \sum_{k=1}^{n}(u,e_k)e_k\right) - \sum_{k=1}^{n}\|(u,e_k)\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\overline{(u,e_k)}(u,e_k) - \sum_{k=1}^{n}\|(u,e_k)\|^2 = 0,$$

de modo que $z \perp v$, assim pelo Teorema de Pitágoras,

$$\|z+v\|^2 = \|v\|^2 + \|z\|^2 \Longleftrightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2 + \|z\|^2$$

ou

$$\|z\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

de

(2.17)

, obtemos

$$0 \leq \|z\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\|(u,e_k)\|^2$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{n}\|(u,e_k)\|^2 \leq \|u\|^2 \tag{2.18}$$

Por fim, note que esta série não possui termos não negativos e ainda forma uma sequência monótona crescente e limitada por $\|u\|^2$, portanto convergente. Como é uma sequência de somas parciais convergentes de uma série infinita (2.18) implica

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|(u,e_k)\|^2 \leq \|u\|^2. \tag{2.19}$$

como queríamos demonstrar.

■

Definição 2.3.2. *Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço normado E. Diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente se existe $u \in E$ tal que a sequência das somas parciais $\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para u. Nesse caso dizemos que u é a soma da série e escrevemos*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Diz-se também que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é incondicionalmente convergente se para toda função bijetora $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\sigma(n)}$ é convergente.

Na desigualdade (2.19), quando ocorre a igualdade, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(u, e_k)\|^2 = \|u\|^2$$

chamamos de identidade de Parseval(1755 - 1836), o somatório será finito se o espaço for de dimensão finita e será infinito caso contrário.

Lema 2.3.2. *Seja $S = \{e_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para cada vetor de $\mathcal{H}$ diferente do vetor nulo, o conjunto*

$$J = \{i \in I; (u, e_k) \neq 0\}$$

é finito ou enumerável.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina,

$$J_k = \{i \in I : \|(u, e_i)\| > \frac{1}{k}\}$$

para obter $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Ou seja, mostremos que cada J_k é finito. Com efeito, pela desigualdade de Bessel sabemos que para todo subconjunto finito J_0 é verdade que

$$\sum_{i \in J_0} \|(u, u_i)\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Em particular, dado um número finito de elementos $i_1, ..., i_n$ de J_n, temos

$$\frac{n}{k^2} = \frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < \|(u, e_{i_1})\|^2 + \cdots + \|(u, e_{i_n})\|^2 \leq \|u\|^2$$

consequentemente, $n \leq k^2\|u\|^2$. Portanto, o número de elementos de qualquer subconjunto finito de J_k não excede $k^2\|u\|^2$. Logo, J_k é finito.

■

Caminharemos para a parte principal desta seção, o qual é apresentar que se $\{e_i : i \in I\}$ é um sistema ortonormal completo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então todo vetor de $\mathcal{H}$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{i \in I} (u, e_i) e_i, \qquad u \in H$$

fato este que demonstra a importância de trabalharmos com sistemas ortonormais completos. Como vimos no lema anterior, $\{i \in I : \langle x, e_i \rangle \neq 0\}$ é finito ou enumerável, ou seja, a série acima denota que o somatório é finito ou o somatório é sobre um conjunto enumerável. A convergência da série pode ser verificada em [1].

Teorema 2.3.2. *Seja $S = \{e_i; i \in I\}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para cada $u \in \mathcal{H}$, u é escrito como*

$$u = \sum_{i \in I} (u, e_i) e_i$$

se, e somente se, S for um sistema ortonormal completo.

Demonstração: É suficiente provar que $S^\perp = \{0\}$. Com efeito, suponha $u \in S^\perp$, como $(u, e_i) = 0$ para todo $i \in I$, tem-se

$$u = \sum_{i \in I} (u, e_i) e_i = \sum_{i \in I} (0) e_i = 0.$$

Sendo assim, $\forall u \in S^\perp$ segue que $u = 0$. Concluímos então que $S^\perp = \{0\}$.
Reciprocamente, suponha que S é um sistema ortonormal completo. Defina $J = \{i \in I : (u, e_i) \neq 0\}$ infinito com $u \in \mathcal{H}$. Seja $\{i_1, i_2, \cdots\}$ uma enumeração qualquer de J.
Do Lema 2.3.2., obtemos

$$\sum_{i \in I} (u, e_i) e_i = \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j}$$

agora analisemos. Seja $i \in I$, se $i \notin J$ então

$$\left(u - \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j}, e_i \right) = 0.$$

Se $i \in J$ então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i = i_k$. Neste caso, como $(e_{i_j}, e_{i_j}) = \delta_{i_j i_k} = \delta_{jk}$, segue que

$$\left(u - \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j}, e_i \right) = \left(u - \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j}, e_{i_k} \right) = (u, e_{i_k}) - \left(\sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j}, e_{i_k} \right) = 0.$$

sendo S completo, temos

$$u - \sum_{j \in I} (u, e_i) e_i = u - \sum_{j=1}^{\infty} (u, e_{i_j}) e_{i_j} = 0.$$

Portanto,

$$u = \sum_{i \in I} (u, e_i) e_i.$$

■

Lema 2.3.3. *Nas condições do teorema anterior com $S = \{e_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então*

$$\overline{[S]} = \mathcal{H}.$$

Demonstração: Com efeito, vamos denotar M por $\overline{[S]}$. Como S é um subconjunto de M então $M^\perp$ é subespaço de $S^\perp = 0$, logo $M^\perp = 0$. Agora, pelo Teorema 2.2.3. $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, donde concluímos que $\mathcal{H} = M = \overline{[S]}$.

∎

Teorema 2.3.3 (Identidade de Parseval). *Seja $S = \{e_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para cada u em $\mathcal{H}$, temos*

$$\|u\|^2 = \sum_{i \in I} \|(u, e_i)\|^2.$$

Demonstração: Com efeito, sejam $u \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 2.2.3. existe $v_\varepsilon \in [S]$ tal que $\|u - v_\varepsilon\| < \varepsilon$. Como $v_\varepsilon \in [S]$, existem um subconjunto finito J_ε de I e escalares $(a_i)_{i \in J_\varepsilon}$ tais que $v_\varepsilon = \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i e_i$. Da Proposição 2.3.1 sabemos que $\sum_{i \in J_\varepsilon} (u, e_i) e_i$ é a melhor aproximação de u em $[e_i : i \in J_\varepsilon]$, logo

$$\left\| u - \sum_{i \in J_\varepsilon} (u, e_i) e_i \right\| \leq \left\| u - \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i e_i \right\| = \|u - v_\varepsilon\| < \varepsilon$$

como $\{e_i : i \in J\}$ é ortonormal,

$$\|u\|^2 - \sum_{i \in J_\varepsilon} \|(u, e_i)\|^2 = \left(u - \sum_{i \in J_\varepsilon} (u, e_i) e_i, u - \sum_{i \in J_\varepsilon} (u, e_i) e_i \right) =$$

$$= \left\| u - \sum_{i \in J_\varepsilon} (u, e_i) e_i \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Da desigualdade de Bessel, obtemos

$$\|u\|^2 < \sum_{i \in J_\varepsilon} \|(u, e_i)\|^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{i \in I} \|(u, e_i)\|^2 + \varepsilon^2 \leq \|u\|^2 + \varepsilon^2.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, obtemos

$$\|u\|^2 < \sum_{i \in J_\varepsilon} \|(u, e_i)\|^2 \leq \sum_{i \in I} \|(u, e_i)\|^2 \leq \|u\|^2$$

Portanto,

$$\|u\|^2 = \sum_{i \in I} \|(u, e_i)\|^2.$$

∎

Definição 2.3.3. *Seja (e_k) uma sequência ortonormal em um espaço E munido de um produto interno. Para todo $u \in E$, os produtos internos (u, e_k) (na desigualdade de Bessel) são chamadas de* ***coeficientes de Fourier*** *de u em relação à sequência ortonormal (e_k).*

Quando consideramos um espaço vetorial E munido com um produto interno e consideramos o conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal em E com $u \in E$ então

$$w = u - \sum_{j=1}^{n}(u, e_j)e_j$$

é ortogonal a cada e_k com $1 \leq k \leq n$. De fato,

$$(w, e_k) = \Big(u - \sum_{j=1}^{n}(u, e_j)e_j, e_k\Big) = (u, e_k) - \sum_{j=1}^{n}(u, e_j)(e_j, e_k)$$

$$= (u, e_k) - (u, e_k)(e_k, e_k) = (u, e_k) - (u, e_k) = 0.$$

Sendo assim, o vetor w acima é ortogonal a cada e_k, portanto ele é ortogonal ao subespaço gerado por $\{e_1, ..., e_n\}$.

Definição 2.3.4. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Diz-se que $\mathcal{H}$ é um espaço separável se possuir um subconjunto denso e enumerável.*

Teorema 2.3.4. *Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em $\mathcal{H}$ um sistema ortonormal completo enumerável.*

Demonstração: Suponha que $S = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ seja um sistema ortonormal completo em $\mathcal{H}$. Pelo Teorema 2.3.2., todo $u \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}(u, e_i)e_i$$

e pelo Lema 2.3.3., $[S]$ é denso em $\mathcal{H}$. A separabilidade é garantida pois um espaço normado E é separável se existir um subconjunto enumerável $A \subset E$ tal que $[A]$ é denso em E. Nesse contexto, o subconjunto enumerável é $S = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$.
Reciprocamente, suponha $\mathcal{H}$ separável. Seja $E = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso em $\mathcal{H}$. Então podemos extrair de E uma base B, finita. Digamos $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Assim, como $[E]$ é denso em $\mathcal{H}$ (note que $[E] \subset E$) e também subespaço de dimensão finita de espaços completos são fechados, temos

$$\mathcal{H} = \overline{[E]} = \overline{[v_1, \cdots, v_n]} = [v_1, \cdots, v_n].$$

Entretanto, isto é um absurdo pois $\mathcal{H}$ tem dimensão infinita, logo B de $[E]$ é infinita. Além disso, E é enumerável, logo B também o é. Digamos $B = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então, pelo processo de Gram-Schmidt, existe um conjunto ortonormal S em $\mathcal{H}$ tal que $[S] = [v_n : n \in \mathbb{N}]$. Assim,

$$\overline{[S]} = \overline{[v_n : n \in \mathbb{N}]} = \overline{[E]} = \mathcal{H}$$

e, pelo Teorema 2.3.2., concluímos que S é um sistema ortonormal completo.

■

A existência de um sistema ortonormal completo enumerável para um espaço de Hilbert de dimensão infinita garante a separabilidade do mesmo.

Teorema 2.3.5 (Teorema de Riez-Fischer). *Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ^2.*

Demonstração: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Do Teorema 2.3.4., existe um sistema ortonormal completo enumerável $S = \{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ em $\mathcal{H}$. Defina o operador

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2, \qquad T(u) = ((u, u_n))_{n=1}^{\infty}.$$

Da desigualdade de Bessel sabemos que, para todo $u \in \mathcal{H}$, $((u, u_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ de modo que T está bem definida. Além disso, pelo Teorema 2.3.2., todo $u \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i)e_i.$$

Utilizando a identidade de Perseval, temos $\|T(u)\| = \|u\|$. Ou seja, T é injetora. Vamos provar a sobrejetividade. Para isso, seja $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$. Primeiramente, mostra-se que a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j$ converge para $\mathcal{H}$. De fato, escrevendo para cada $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j u_j$ e utilizando o Teorema de Pitágoras para $n > m$, temos

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} a_j u_j \right\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} \|a_j u_j\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2.$$

Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$ é convergente tem-se $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy em $\mathcal{H}$ portanto convergente. Logo $u := \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j \in \mathcal{H}$ está bem definido e de $(u_j, u_n) = \delta_{jn}$ segue que

$$T(u) = (a_j)_{j=1}^{\infty}$$

como queríamos provar.

■

Definição 2.3.5. *Um **conjunto total (ou fundamental)** em um espaço de produto interno E é um subconjunto N cujo subespaço gerado é denso em E. Em outros palavras, o subconjunto N é total em E se, e somente se, $\overline{[N]} = E$. Consequentemente, um conjunto ortonormal (ou sequência ou família) no espaço E que seja total em E é chamado de **conjunto ortonormal total** em E.*

Definição 2.3.6. *Uma **base ortonormal** em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um conjunto ortonormal total.*

Teorema 2.3.6. *Em todo espaço de Hilbert $\mathcal{H} \neq \{0\}$ existe uma base ortonormal.*

Demonstração: Ver [1] e [6].

■

Todas as bases ortonormais em um espaço de Hilbert possuem a mesma cardinalidade. Este conceito de cardinalidade é o mesmo visto em cursos de Teoria dos Números e Análise Real e está diretamente relacionado com a dimensão do espaço de Hilbert. Se $\mathcal{H} < \infty$, então a dimensão de Hilbert é o sentido algébrico, ou seja, a dimensão é o número de elementos da base.

Definição 2.3.7. *A dimensão de um espaço de Hilbert, chamada **dimensão hilbertiana**, é a cardinalidade de uma base ortonormal desse espaço.*

Teorema 2.3.7. *Seja N um subconjunto de um espaço com produto interno E. Então:*

(i) Se N é um subconjunto total em E, com $u \in E$, temos $u \perp N \Longrightarrow u = 0$.

(ii) Se E é um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, a condição (i) também é suficiente para totalidade de N em $E = \mathcal{H}$.

Demonstração: (i) Pelo Teorema do Completamento, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que é o completamento de E. Assim, sendo $E \subset \mathcal{H}$, E é dendo em $\mathcal{H}$. Como N é total em E, então pela definição de conjunto total, o subespaço gerado por N é dendo em E, ou seja, $\overline{[N]} = E$. Assim, por E ser denso em $\mathcal{H}$, segue $\overline{[N]} = \mathcal{H}$. Pelo Lema 2.2.3, se $\overline{[N]} = \mathcal{H}$ então o completamento ortogonal de N em $\mathcal{H}$ é o conjunto nulo $N^{\perp} = 0$, portanto, se $u \in E$ com $u \perp N$ implica $u = 0$.
(ii) Se $E = \mathcal{H}$ satisfazendo $N^{\perp} = 0$, pelo Lema 2.2.3., tem-se $\overline{[N]} = \mathcal{H}$, isto é, o conjunto gerado por N é denso em $\mathcal{H}$. Portanto, pela definição de conjunto total resulta que N é total em E.
Um conjunto ortonormal completo $N = \{e_1, e_2, ...\}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é denominado uma base de Hilbert de $\mathcal{H}$. ■

Teorema 2.3.8. *Um conjunto ortonormal $N \subset \mathcal{H}$ é total em $\mathcal{H}$ se, e somente se, todo $u \in \mathcal{H}$ satisfaz a relação de Perseval.*

Demonstração: Suponha que N seja total em um $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert. Considera-se qualquer $u \in \mathcal{H}$ e seus coeficientes de Fourier não nulos dispostos na sequência $(u, e_1), (u, e_2), ...$, ou escrita de forma definitiva para uma quantidade finita de termos. Defina $v \in \mathcal{H}$ como

$$v = \sum_k (u, e_k) e_k \tag{2.20}$$

o qual é convergente para uma série infinita. Afirmamos que o vetor $u - v$ é ortogonal a N. Com efeito, para cada e_j em (2.20) usando a ortonormalidade segue que

$$(u - v, e_j) = (u, e_j) - (v, e_j) = (u, e_j) - \Big(\sum_k (u, e_k)e_k, e_j\Big) =$$

$$= (u, e_j) - \sum_k (u, e_k)(e_k, e_j) = (u, e_j) - (u, e_j) = 0.$$

Seja $c \in N$ distinto de todo (e_k), então $(u, c) = 0$, de modo que

$$(u - v, c) = (u, c) - (v, c) = (u, c) - (\sum_k^{e_k} e_k, c) =$$

$$= (u, c) - \sum_k (u, e_k)(e_k, c) = 0 - 0 = 0.$$

Assim, $u - v \perp N$, ou seja , $n - v \in N^{\perp}$. Como N é total em $\mathcal{H}$ o conjunto gerado por N é denso em $\mathcal{H}$, e pelo Lema 2.2.3, temos $N^{\perp} = \{0\}$, resultando que $u - v = 0 \Longrightarrow u = v$. Logo,

$$u = \sum_k (u, e_k)e_k.$$

Usando a ortonormalidade, temos

$$\|u\|^2 = (u, u) = \Big(\sum_k (u, e_k)e_k, \sum_k (u, e_k)e_k\Big) =$$

$$= \sum_k |(u, e_k)|^2 (e_k, e_k) = \sum_k |(u, e_k)|^2$$

ou seja, u satisfaz a relação Perseval.

Reciprocamente, suponha que N não é total. Pelo Teorema 2.4.5 existe um elemento não nulo $u \in \mathcal{H}$ tal que $u \perp N$ em $\mathcal{H}$. Como $u \perp N$, deve-se ter que $(u, e_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ utilizando a desigualdade de Bessel. Assim, na relação de Perseval,

$$\sum_k |(u, e_k)| = 0.$$

Por outro lado, como $u \neq 0$, segue que $\|u\|^2 \neq 0$ logo

$$\sum_k |(u, e_k)| \neq \|xu|^2,$$

Entretanto, este fato contradiz a relação de Perseval. Portanto, para

$$\sum_k |(u, e_k)|^2 = \|u\|^2, \qquad \forall u \in \mathcal{H}$$

então N é total em $\mathcal{H}$.

■

Capítulo 3

A Integral de Lebesgue

Nesta capítulo iremos introduzir o leitor num dos mais importantes teoria da análise matemática: a integral de Lebesgue. A parte que apresentamos nesta pesquisa é uma introdução à integral de Lebesgue e sugerimos uma leitura mais aprofundada nas referências [3] e [6]. O método utilizado para a construção da integral de Lebesgue foi idealizado por Fyodorov Riesz (1880-1956) e nele, considera-se o espaço vetorial das funções escada no qual se define uma noção de integral, e então considera-se a classe das sucessões crescentes de funções escada cujas integrais são limitadas. Define uma nova coleção de funções limites de sucessões nas condições anteriores. Estende-se a noção de integral a esta coleção de funções e pela diferença de seus elementos, a nova coleção é ampliada fazendo-se assim uma extensão nova da noção de integral. A classe que iremos obter é a das funções integráveis à Lebesgue e a integral obtida nesta classe é denominada a de Lebesgue.

3.1 Conjuntos de Medida Nula

Definição 3.1.1. *Fixamos o conjunto $\mathbb{R}$. Diremos que um subconjunto E de $\mathbb{R}$ tem* ***medida nula*** *quando para todo $\varepsilon > 0$ existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as condições:*

(i) $E \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$*, ou seja,* $\{I_k\}_{k\in\mathbb{K}}$ *é um recobrimento de* E*;*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) < \varepsilon$.

Nesta definição, $amp(I)$ é a amplitude do intervalo I, ou seja, o valor absoluto da diferença entre os extremos do intervalo. Decorre também da definição que todo subconjunto de um conjunto de medida nula possui medida nula.

Exemplo 3.1.1. *Considere o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$. Sabemos que este conjunto é um subconjunto enumerável da reta real. Seja $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ e, para cara*

$\varepsilon > 0$, considere os intervalos $I_n = \left\{ x \in \mathbb{R}; x_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} < x < x_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right\}$ para $n = 1, 2, ...$. A família $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um recobrimento enumerável de $\mathbb{Q}$ e ainda, a amplitude de cada I_n é dada por:

$$amp(I_n) = \left| \left(x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) - \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \right| = \frac{\varepsilon}{2^n}$$

logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} amp(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

Portanto concluímos que $\mathbb{Q}$ possui medida nula. Em geral, subconjuntos enumeráveis da reta real $\mathbb{R}$ possuem medida nula.

Proposição 3.1.1. *A união de uma família enumerável de conjuntos de medida nula também possui medida nula.*

Demonstração: Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos de medida nula. Para cada $\varepsilon > 0$ e para $n \in \mathbb{N}$ existe um recobrimento enumerável de E_n por intervalos abertos $\{I_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k^n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{3.1}$$

Logo, a família de intervalos $\{I_k^n\}_{k,n \in \mathbb{N}}$ que é enumerável é um recobrimento do conjunto $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e por (3.1) tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} amp(I_k^n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Portanto, E possui medida nula como queríamos demonstrar.

∎

O conceito de medida nula de um conjunto é uma formalização matemática de um conjunto que não é importante em um sentido topológico. Quando uma propriedade p é verdadeira em um conjunto E exceto em um subconjunto de E com medida nula, diremos que a propriedade vale **quase sempre em** E

3.2 Funções Escada

Seja (a, b) um intervalo aberto e limitado de $\mathbb{R}$. Toda coleção finita $\{x_0, ..., x_k\}$ de pontos de $\mathbb{R}$ tais que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ determina k subintervalos, sendo eles $I_1 = (x_0, x_1), I_2 = (x_1, x_2), ..., I_k = (x_{k-1}, x_k)$ de (a, b). Dizemos que a coleção $\{I_1, ..., I_k\}$ é uma decomposição de (a, b) pelos pontos $x_0, ..., x_k$ e que $x_0, ..., x_k$ são os pontos de divisão dessa decomposição.

Sejam D_1 e D_2 duas decomposições de um intervalo limitado (a, b), representamos por $D_1 + D_2$ a decomposição cujos pontos de divisão são os de D_1 e os de D_2.

Definição 3.2.1. *Dizemos que $u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função escada**, quando existe uma decomposição D do intervalo (a, b) tal que u é constante em cada subintervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ com $k = 1, 2, ..., n$ de D. A decomposição D diz-se associada à função escada u. A decomposição não é univocamente determinada por u.*

Lema 3.2.1. *Sejam u e v funções escada definidas em (a, b). Então existe uma decomposição de (a, b) associada, simultaneamente, a u e v.*

Demonstração: Consideremos D_1 e D_2 decomposições de (a, b) associadas a u e v, respectivamente. A decomposição $D_1 + D_2$ pode ser obtida pelo acréscimo à D_1 dos pontos referentes de D_2 como por acréscimo a D_2 dos pontos de D_1.Portanto, $D_1 + D_2$ tanto pode ser associada a u como a v.

■

A partir do Lema 3.2.1 podemos enxergar que a classe das funções escadas definidas em (a, b) é um espaço vetorial real. Representaremos este novo espaço por $S_0(a, b)$ ou S_0, quando não houver ambiguidade no intervalo o qual estamos trabalhando. Definimos de maneira natural a integral em S_0 como segue:

Definição 3.2.2. *Seja $u \in S_0$ e D uma decomposição associada a u. Denotaremos por C_k o valor constante assumido pela função u no intervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ de D com $k = 1, ..., k$. Então, o número real*

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1})$$

*denomina-se **integral** da função u no intervalo (a, b) e o representaremos por $\int_a^b u(x)dx$ ou apenas $\int u$. Ou seja,*

$$\int u = \int_a^b u(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1}).$$

Proposição 3.2.1. *Se $u \in S_0$ então a integral de u em (a, b) não depende da decomposição D de (a, b) associada a u.*

Demonstração: Com efeito, consideremos uma função $u \in S_0$ e duas decomposições, D_1 e D_2, associadas a ela tais que sejam obtidas, respectivamente, pelos pontos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ e $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$. Então, pela Definição 3.2.2. a integral de u com a partição D_1 é dada por $I_{D1} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1})$ assim como a integral de

u com a partição D_2 é dada por $I_{D2} = \sum_{k=1}^{n} F_k(y_k - y_{k-1})$, onde C_k e F_k são os valores constantes de u em $(x_k - x_{k-1})$ e $(y_k - y_{k-1})$, respectivamente. Façamos $D = D_1 + D_2$ em cada intervalo (x_{k-1}, x_k). A partir de D_1 é possível encontrar pontos de D_2 de maneira que $x_{k-1} = z_0^k < z_1^k < \cdots < x_{n(k)}^k = x_k$ observando que a diferença de intervalos é $x_k - x_{k-1} = (z_{n(k)}^k - z_{n(k)-1}^k) + \cdots + (z_1^k - z_0^k)$ para $k = 1, 2, ...$ Logo

$$I_{D1} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} C_k \sum_{p=1}^{n(k)} C_k(z_p - z_{p-1}) = I_D.$$

Analogamente, mostra-se que $I_{D2} = I_D$. Ou seja, $I_{D1} = I_{D2}$ e conclui-se que a integral não depende da decomposição.

■

Observamos que a integral de uma função escada não depende dos pontos de divisão de uma decomposição associada a ela, depende apenas dos valores assumidos nos extremos dos intervalos de decomposição. Também, quando temos $u \leq v$, entendemos que existem decomposições D_1 e D_2 de (a, b), associados a u e a v respectivamente, tal que $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in (a, b)$ distintos dos pontos de divisão de $D_1 + D_2$.

Definição 3.2.3. *Seja E um subconjunto de um dado intervalo (a, b). Definimos a **função característica** de E, $\mathcal{X}_E : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, como*

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in E \\ 0, & se\ x \notin E. \end{cases}$$

Também definimos, para cada $u \in S_0$,

$$\int_E u = \int_a^b u\mathcal{X}_E.$$

Em particular, se $u = \mathcal{X}_E \in S_0$, então

$$\int_E \mathcal{X}_E = \sum_{k=1}^{n} amp(I_k).$$

*O número $\int_E \mathcal{X}_E$ chama-se **amplitude** de E e denota-se por $amp(E)$.*

Proposição 3.2.2. *Considere $u, v \in S_0$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Afirmamos que*

$$\int (\lambda u + \beta v) = \lambda \int u + \beta \int v.$$

Demonstração: Com efeito, por definição obtemos

$$\int (\lambda u + \beta v) = \int_a^b (\lambda u + \beta v)(x)dx = \int_a^b (\lambda u)(x)dx + \int_a^b (\beta v)(x)dx =$$

$$= \lambda \int_a^b (u)(x)dx + \beta \int_a^b (v)(x)dx = \lambda \int u + \beta \int v.$$

■

Esta proposição nos diz que a aplicação $u \longrightarrow \int u$ que a cada $u \in S_0$ associa um número real $\int_a^b u$ é um funcional linear sobre o espaço vetorial S_0. Iremos apresentar agora os dois lemas fundamentais o qual se baseia a definição da integral de Lebesgue proposta por F. Riesz.

Proposição 3.2.3. ***(Primeiro Lema Fundamental)****: Seja (u_k) uma sucessão decrescente de funções escada não negativas em (a,b). Se $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ quase sempre em (a,b) então $\lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$.*

Demonstração: Seja E_k, $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos pontos de descontinuidade da função u_k em $[a,b]$. Por hipótese, $u_k \in S_0$ então E_k é finito, portanto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ é enumerável. Assim, E possui medida nula.

Seja F o conjunto de pontos de $[a,b]$ nos quais as sucessões (u_k) não convergem para 0. Por hipótese, F possui medida nula. Se $G = E \cup F$, então G possui medida nula. Ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, existe um recobrimento enumerável de G por intervalos abertos, cuja soma das amplitudes é menor que $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ onde $M > sup\{u_1(x); x \in (a,b)\}$.

Denotamos por J_1 o citado recobrimento. Se $p \in [a,b] - G$, então, por hipótese, $\lim_{k\to\infty} u_k(p) = 0$. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ (dependendo de p e ε) tal que

$$u_m(p) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{3.2}$$

Como $p \notin G$, u_m é contínua em p e ainda, u_m é uma função escada, sendo assim, existe um intervalo aberto $I(p)$ contido em (a,b) que contém p, tal que $\forall x \in I(p)$ tem-se

$$u_m(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{3.3}$$

Sendo u_k decrescente, (3.3) é válido para $k \geq m$ e todo $x \in I(p)$, isto é,

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \forall k \geq m \ e\ \forall x \in I(p). \tag{3.4}$$

Quando p varia em $[a,b] - G$, obtemos uma coleção de intervalos abertos $J_2 = \{I(p); p \in [a,b] - G\}$, nos quais vale (3.4). A união $J_1 \cup J_2$ é portanto um recobrimento do intervalo compacto $[a,b]$ por intervalos abertos. Pelo teorema de Borel-Lebesgue, existe uma subfamília finita de $J_1 \cup J_2$ que ainda é um recobrimento de $[a,b]$ e o representaremos por:

$$B = \{\delta_1.\delta_2, ..., \delta_r, I(p_1), I(p_2), ..., I(p_s)\}$$

onde $\delta_i \in J_1$ e $I(p_j) \in J_2$.

Para cada intervalo $I(p_j)$, $j = 1, 2, ..., s$ de B, existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \ \forall k > m_j \ e \ \forall x \in I(p_j).$$

Seja $m* = max\{m_1, m_2, ..., m_s\}$, então

$$u_k(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \ \forall x \in K = \bigcup_{j=1}^{s} I(p_j)$$

e todo $k > m*$. Agora, K pode ser escrito como união de um número finito de subintervalos de $[a, b]$ dois a dois sem ponto interior em comum. Logo, para todo $k > m*$, tem-se

$$\int_K u_k = \int_a^b u_k \mathcal{X}_K \leq \int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) \mathcal{X}_K = \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) \int_a^b \mathcal{X}_k$$

da última igualdade, temos

$$\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) \int_a^b \mathcal{X}_k = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_K \mathcal{X}_K = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} amp(K) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Considerando agora a parte correspondente aos δ_i, seja $\delta = \bigcup_{i=1}^{r} \delta_i$ e seja $S = \delta \cap [a, b]$. Então, S pode ser escrito como uma união de um número finito de subintervalos de $[a, b]$ dois a dois sem ponto interior em comum. Portanto, para $\forall k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\int_S u_k = \int_a^b u_k \mathcal{X}_S \leq \int_a^b u_1 \mathcal{X}_S \leq \int_a^b \mathcal{X}_S = M \int_S \mathcal{X}_S$$

Ou seja,

$$M \int_S \mathcal{X}_S = M amp(S) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.6}$$

uma vez que $amp(S) < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.De (3.5) e (3.6) podemos concluir que $\forall k > m*$

$$0 \leq \int_a^b u_k = \int_a^b u_k \mathcal{X}_{(a,b)} \leq \int_a^b u_k(\mathcal{X}_S + \mathcal{X}_K) = \int_a^b u_k \mathcal{X}_S + \int_a^b u_k \mathcal{X}_k =$$

$$= \int_S u_k + \int_K u_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pelo teorema do sanduíche, segue o resultado.

■

Proposição 3.2.4. ***(Segundo Lema Fundamental)***: *Seja (u_k) uma sucessão de funções escada em (a, b), crescente e tal que a sucessão das integrais tenha um majorante finito, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\int u_k) < M, \forall k \in \mathbb{N}$. Então a sucessão (u_k) converge para um limite finito u quase sempre em (a, b).*

Demonstração: Consideramos (u_k) uma sequência positiva, ou seja, $u_1(x) \leq u_2(x) \leq \cdots \leq u_k(x)$. Daí, a sequência $(u_k) = u_k - u_1$ é positiva. Seja $E_0 = \{x \in (a,b); \lim_{k\to\infty} u_k(x) = +\infty\}$. É suficiente mostrar que E_0 possui medida nula pois nos pontos onde (u_k) ela não tende ao infinito ela é limitada e como é monótona, é convergente.

Por hipótese, exite $M > 0$ tal que $\int u_k < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada natural $k \in \mathbb{N}$, considere o conjunto $E_{\varepsilon,k}$ definido como

$$E_{\varepsilon,k} = \left\{ x \in (a,b); u_k(x) > \frac{M}{\varepsilon} \right\}.$$

Variando $k \in \mathbb{N}$, obtém-se uma sucessão de conjuntos $(E_{\varepsilon,k})_{k\in\mathbb{N}}$, crescente, pois a sucessão (u_k) é crescente. Além disso, $E_{\varepsilon,1} \subset E_{\varepsilon,2} \subset \cdots \subset E_{\varepsilon,k}$ e ainda $E_0 \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}$. Representemos por $m_{\varepsilon,k}$ a soma das amplitudes destes intervalos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$M \geq \int_a^b u_k = \sum_{j=1}^{n(k)} C_j^k (x_j^k - x_{j-1}^k) \tag{3.7}$$

sendo C_j^k o valor de u_k no intervalo (x_{j-1}^k, x_j^k) de uma decomposição associada a u_k. Se $E_{\varepsilon,k} \neq \varnothing$, então é possível separar a soma do segundo membro de (3.7) em duas outras, $\sum'$ e $\sum''$, definidas da forma: $\sum'$ é a soma dos termos em que $C_j^k > M/\varepsilon$ e $\sum''$ é a soma dos termos restantes. Daí, concluímos que:

$$M \geq \sum{}' + \sum{}'' > \frac{M}{\varepsilon} m_{\varepsilon,k} + \sum{}'' > \frac{M}{\varepsilon} m_{\varepsilon,k},$$

portanto $m_{\varepsilon,k} < \varepsilon$.Então, se $E_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}$, o conjunto E_ε é uma união de família enumerável de intervalos cuja soma das amplitudes é menor que ε. Logo, E_0 possui medida nula e fica demonstrado o resultado.

■

Representaremos por $S_1(a,b)$ ou S_1 a classe de todas as funções $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ que são limites quase sempre de sucessões crescentes de funções de S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental. Isto é, $u \in S_1$ se, e somente se, exite uma sucessão crescente (u_k) de funções de S_0 tal que a sucessão das integrais $(\int u_k)$ tenha um majorante finito e $\displaystyle\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ quase sempre em (a,b). Diz-se que a sucessão define u.

Exemplo 3.2.1. *Seja u uma função nula em (a,b) exceto possivelmente nos pontos de um conjunto E de medida nula. Então, $u \in S_1$ pois a sucessão (u_n), onde u_n é, para todo n, a função identicamente nula, satisfaz às condições do Segundo Lema Fundamental e converge quase sempre para u.*

Definição 3.2.4. *Seja $u \in S_1$. Então definimos a integral de u em (a,b) como sendo,*

$$\int_a^b u(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Em que as integrais $\int_a^b u_k$ são aqueles definidas para S_0.

Esta é uma noção de integral bem natural, estendida a partir da integral definida em S_0. Se considerarmos $u \in S_1$ e (u_k) uma sucessão de funções em S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental, convergindo para u quase sempre em (a,b), então sendo a sucessão (u_k) crescente temos $(\int u_k)$ também crescente e como $\int u_k < M$ ela é convergente. Portanto, **exite** e é **finito** o $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int u_k$. Sugerimos o leitor verificar que, de fato, esta noção de integral está bem definida em S_1. Para isso, basta verificar que:
(i): $\int u$ não depende da sucessão (u_k) de S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental;
(ii): Quando a integral de S_1, restrita aos elementos de S_0, coincide com a integral definida em S_0.

Definição 3.2.5. *Dada duas funções reais u e w definidas em $[a,b]$, definimos as funções $u \vee w$, $u \wedge w$ e $|u|$ como*

$$(u \vee w)(x) = \max\{u(x), w(x)\};$$

$$(u \wedge w)(x) = \min\{u(x), w(x)\};$$

$$|u|(x) = |u(x)|.$$

*Também, dada uma função $u : (a,b) \to \mathbb{R}$, definimos as funções u^+ e u^-, chamadas respectivamente de **parte positiva de u** e **parte negativa de u**, como:*

$$u^+ = u \vee \mathcal{O};$$

$$u^- = (-u) \wedge \mathcal{O},$$

onde $\mathcal{O}$ é a função nula.

Proposição 3.2.5. *Sejam $u, v \in S_1$ definidas, respectivamente, pelas sucessões (u_k) e (v_k) de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental. Então, se $u \leq v$ quase sempre em (a,b), temos*

$$\lim_{k\to\infty} \int u_k \leq \lim_{k\to\infty} \int v_k.$$

Demonstração: Com efeito, sejam u, v funções de S_1 definidas, respectivamente, pelas sucessões (u_k) e (v_k) de funções de S_0. Fixemos uma função u_m de (u_k). Logo, a sucessão $(u_m - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ será decrescente e convergindo quase sempre em (a,b), para $(u_m - v)$. Além disso, temos

$$u_m - v \leq u - v \leq 0$$

quase sempre em (a,b). Portanto, $[(u_m - v_k)]_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow [(u_m - v)] \equiv 0$ quase sempre em (a,b). Ou seja, temos uma sucessão $([u_m - u_k]^+)_{k\in\mathbb{N}}$ decrescente convergindo quase sempre em (a,b) para 0, pelo Primeiro Lema Fundamental,

$$\int([u+m-u_k]^+)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0.$$

Contudo, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos $u_m - v_k \le [u_m - v_k]^+$ e assim

$$\int(u_m - v_k) \le \int [u_m - v_k]^+.$$

Passando o limite quando $k \to \infty$ e lembrando que o segundo membro converge para 0, temos:

$$\int u_m - \lim_{k\to\infty}\int v_k = \lim_{k\to\infty}\int(u_m - v_k) \le \lim_{k\to\infty}\int[u_m - v_k]^+ \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$\int u_m - \lim_{k\to\infty}\int v_k \le 0 \Longrightarrow \int u_m \le \lim_{k\to\infty}\int v_k.$$

Como esta última desigualdade é válida para todo $m \in \mathbb{N}$, concluímos que:

$$\lim_{k\to\infty}\int u_k \le \lim_{k\to\infty}\int v_k.$$

■

Corolário 3.2.1. *Se $u \in S_1$ é limite de (u_k) e (v_k) de S_0, nas hipóteses do Segundo Lema Fundamental, então $\lim\limits_{k\to\infty}\int u_k = \lim\limits_{k\to\infty}\int v_k$.*

Corolário 3.2.2. *A restrição da integral definida em S_1 à classe de funções de S_0, coincide com a integral definida em S_0.*

Concluímos que a integral em S_1 está bem definida, em virtude do Corolário 3.2.1.

Definição 3.2.6. *Dizemos que um subconjunto C de um espaço vetorial V é um* ***cone*** *se $\lambda u \in C$, $\forall u \in C$ e $\forall \lambda \ge 0$. Diz-se também que, um cone $\mathbb{C}$ é um* ***cone convexo*** *se C é um cone e $u + v \in C$, $\forall u, v \in C$.*

Proposição 3.2.6. *A classe de funções S_1 é um cone convexo. Além disso, $\int \lambda u = \lambda \int u$ e $\int(u+v) = \int u + \int v$.*

Demonstração: Sejam $u, v \in S_1$ e as sucessões $(u_k), (v_k) \in S_0$ com $\lambda \in \mathbb{R}^+$, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental. Ou seja, (u_k) e (v_k) definem u e v, em S_1, respectivamente. Vejamos que $\lambda \ge 0$ então (λu_k) está nas condições do Segundo Lema Fundamental e portanto, definem a função λu. Logo, $\lambda u \in S_1$, obtendo-se

$$\int \lambda u = \lim_{k\to\infty}\int \lambda u_k = \lim_{k\to\infty}\left[\lambda \int u_k\right] = \lambda \int u$$

pois $\int \lambda u_k = \lambda \int u_k$ uma vez que $u_k \in S_0$. De forma análoga, as sucessões $(u_k + v_k)$ está nas condições do Segundo Lema Fundamental e definem $u + v$. Daí,

$$\int (u+v) = \lim_{k\to\infty} \int (u_k + v_k) = \lim_{k\to\infty} \int u_k + \lim_{k\to\infty} \int v_k = \int u + \int v.$$

■

Seja V um espaço vetorial. Considere W como sendo o subespaço de V gerado por um cone convexo C. Sendo W gerado por um cone convexo, cada elemento de W é uma combinação linear de uma família finita de elementos de C, i.e., se $w \in W$, então:

$$w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n, \;\; w_i \in C, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n.$$

Agora definindo u e v como sendo as somas, respectivamente, dos termos para os quais $\lambda_i > 0$ e $\lambda_i < 0$, temos $w = u - v$ com $u, v \in C$. Reciprocamente, se $u, v \in C$ e $w = u - v$, então $w \in W$. Portanto, W é o conjunto dos elementos de V da forma $u - v$, onde $u, v \ni C$. O espaço gerado pelo cone convexo S_1 é o *espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue*, o qual será estudado mais adiante.

3.3 Integral à Lebesgue-Riesz

Vamos denotar o subespaço das funções reais em (a, b) gerado pelo cone convexo $S_1(a, b)$ por $L(a, b)$. Pelo que foi supracitado, $w \in L(a, b)$ se, e somente se, $w = u - v$ onde $u, v \in S_1$. O conceito que iremos apresentar é o de integral de Lebesgue no qual é uma integral mais geral que à de Riemann.

Definição 3.3.1. *Seja $w \in L(a, b)$ e escrevamos $w = u - v$ onde $u, v \in S_1$. Definimos a **integral** de w em $L(a, b)$ como sendo*

$$\int w = \int u - \int v,$$

onde as integrais do segundo membro são aquelas definidas em S_1.

Proposição 3.3.1. *Seja $w \in L(a, b)$. A integral de w não depende da escolha da representação de w como diferença de funções de S_1.*

Demonstração: De fato, suponhamos $w = u - v = u_1 - v_1$, sendo $u, v, u_1, v_1 \in S_1$. Resulta daí,

$$u - v = u_1 - v_1 \Longrightarrow u + v_1 = u_1 + v$$

como $u_1 + v$ e $u + v_1 \in S_1$, obtemos:

$$\int u_1 + \int v = \int u + \int v_1$$

portanto,

$$\int u_1 - \int v_1 = \int u - \int v = \int w$$

logo a integral de w está bem definida. ∎

Definição 3.3.2. *O espaço $L(a,b)$ é o **espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue**. A integral definida em $L(a,b)$ denomina-se **integral de Lebesgue**.*

Proposição 3.3.2. *Seja $w \in L(a,b)$ com $w \geq 0$ quase sempre em (a,b), então $\int w \geq 0$.*

Demonstração: Seja $w \in L(a,b)$ com $w \geq 0$ quase sempre em (a,b). Escrevamos $w = u - v$ com $u, v \in S_1$. Como $w \geq 0$ então $u \geq v$ quase sempre e assim $\int u \geq \int v$ pela Proposição 3.2.5, donde conclui-se que $\int w = \int u - \int v \geq 0$.

∎

Proposição 3.3.3. *Consideremos $w \in L(a,b)$. Então existe uma sucessão $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções escada em (a,b) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} w_n = w$ quase sempre em (a,b).*

Demonstração: Com efeito, consideremos $w \in L(a,b)$, então escrevamos $w = u - v$ com $u, v \in S_1$. Então, existem sucessões (u_n) e (v_n) de funções escada, satisfazendo o Segundo lema Fundamental, convergindo quase sempre para u e v, respectivamente. Sendo assim, considerando a sucessão (w_n) onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Portanto, w_n é uma função escada e $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ quase sempre. ∎

Proposição 3.3.4. *Consideremos $w \in L(a,b)$. Nas hipóteses da proposição anterior, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \int |w_n - w| = 0.$$

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int |w_n - w| = \int |u_n - v_n - u + v| \leq \\ \leq \int |u - u_n| + \int |v - v_n| = \\ = \int (u - u_n) + \int (v - v_n), \end{aligned}$$

visto que $u \geq u_n$ e $v \geq v_n$. Passando o limite quando $n \to \infty$, obtemos $\int (u - u_n) + \int (v - v_n) \longrightarrow 0$ resultando,

$$\lim_{n\to\infty} \int |w_n - w| = 0.$$

∎

Definição 3.3.3. *Dizemos que uma função $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ é **mensurável** quando u é limite quase sempre de uma sucessão de funções escada.*

Exemplo 3.3.1. *Seja u uma função nula definida em (a, b) exceto nos pontos de um conjunto de medida nula E. Então, u é mensurável pois é limite da sucessão (u_n) onde, para cada n, (u_n) é a função identicamente nula convergindo quase sempre para u. De modo geral, as funções constantes são mensuráveis.*

Proposição 3.3.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja (u_n) uma sequência de $L(a, b)$ tal que*

(i) $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ *quase sempre em* (a, b)

(ii) existe $w \in L(a, b)$ tal que $|u_n(x)| \leq w(x)$ quase sempre em (a, b) então $u \in L(a, b)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |u_n(x) - u(x)|dx = 0.$$

Demonstração: Ver [3].

∎

Exemplo 3.3.2. *Pela Proposição 3.3.3, se $w \in L(a, b)$ então existe uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções escada em (a, b) tal que $\lim_{k\to\infty} w_n = w$ quase sempre. Portanto, conclui-se que toda função integrável a Lebesgue é mensurável. A recíproca não é verdadeira. Com efeito, seja w definida em $(0, 1)$ por $w(x) = 1/x$. A função w é mensurável pois é limite quase sempre da sucessão de funções escada $(w_n), n = 1, 2, ...,$ definida em $(0, 1)$ por $w_n(x) = \dfrac{n}{k}$ se $\dfrac{k-1}{n} < x \leq \dfrac{k}{n}$, $k = 1, ..., n$. No entanto, esta função não é integrável. Para isso, considere a função para cada n definida em (a, b) por:*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \geq 1/n \\ n, & se\ 0 < x \leq 1/n. \end{cases}$$

Então, cada u_n é integrável e $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Além disso,

$$|u_n| \leq w,$$

para todo n. Sendo assim, se w é integrável, pelo teorema de Lebesgue, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 0 = 0.$$

Contudo, para n temos:

$$\int_0^1 u_n = 1.$$

Portanto, w é mensurável mas não é integrável.

Proposição 3.3.6. *Seja (u_n) uma sucessão de funções mensuráveis convergente quase sempre para função u. Então, u é mensurável.*

Demonstração: Com efeito, considere $u_n \geq 0$ para todo n. E, para cada n seja $v_n = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ quase sempre em (a,b) segue que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+u_n} = \dfrac{1}{1+u}$ quase sempre. Além disso, as funções de v_n são quocientes de duas funções mensuráveis e $0 < v_n \leq 1$ para todo n, logo v_n é mensurável, limitadas em (a,b) com amplitude finita, portanto as funções de v_n são integráveis. Agora, considere u_0 integrável em (a,b) tal que $|1| \leq u_0$. Pelo teorema de Lebesgue (Ver[4]), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b v_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} v_n = \int_a^b \frac{1}{1+u}$$

Assim, $v = \dfrac{1}{1+u}$ é uma função integrável e, pelo Exemplo 3.3.2, mensurável.

■

3.4 O espaço $L^2(a,b)$

Nesta seção, apresentaremos algumas caraterísticas do espaço $L^2(a,b)$ que irão nos dar suporte teórico para o próximo capítulo.

Definição 3.4.1. *Representaremos por $L^2(a,b)$ a classe de todas as funções reais u, definidas em (a,b), u mensuráveis em (a,b) tal que $|u|^2$ é integrável.*

Os elementos do espaço $L^2(a,b)$ são classes de equivalência tais que $u \in L^2(a,b)$ é equivalente a v se a integral de Lebesgue de $|u-v|^2$ sobre (a,b) é zero. Pois, em $L(a,b)$, identifica-se as funções que definem apenas por um conjunto de medida nula, isto é, diremos que $u = v$ quando $u(x) = v(x)$ quase sempre em (a,b), visto que

$$u_1 = u \text{ e } v_1 = v \Longrightarrow u_1 + v_1 = u + v$$

e

$$u_1 = u \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda u.$$

Com isso. surge um novo espaço denotado por $L^1(a,b)$ e, sendo assim, seus elementos são classes de equivalência. Contudo, é usual utilizarmos elementos do espaço $L^1(a,b)$ como funções de $L(a,b)$ tomando os cuidados necessários. De modo geral, define-se $L^p(a,b)$ como a classe de funções reais mensuráveis em (a,b) que possuem $|u|^p$ integrável.

Definição 3.4.2. *Seja $L^2(a,b)$ a classe de todas as funções reais u, u mensuráveis em (a,b) e que possuem quadrado integráveis em (a,b). Define-se em $L^2(a,b)$ uma norma $\|\cdot\|_2$ que a cada u associa o número real*

$$\|u\|_2 = \left(\int \|u\|^2 \right)^{1/2} \tag{3.8}$$

o qual satisfaz:

(i) $\|u\|_2 \geq 0,\ \forall u \in L^2$ *e* $\|u\|_2 = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *em que* $u(x) = 0$*;*

(ii) $\|\lambda u\|_2 = |\lambda|\|u\|_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in L^2$*;*

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\|_2 + \|v\|_2,\ \forall u, v \in L^2$.

Demonstraremos, mais adiante, que a norma $\|\cdot\|_2$ apresentada em (3.8) é, de fato, uma norma neste espaço. Entretanto, apresentaremos algumas desigualdades importantes que servirão como amparo teórico para a demonstração deste fato.

Definimos uma métrica em $L^2(a, b)$ proveniente da norma $\|\cdot\|_2$ o qual é formulada como

$$\|u - v\|_2, \quad \forall u, v \in L^2(a, b).$$

Sendo L^2 um espaço métrico, dizemos que uma sucessão (u_k) de funções de L^2 converge para u se

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0.$$

Chamamos esta convergência de **convergência forte em** L^2 ou **convergência na norma de** L^2 ou **convergência média de ordem 2**.

Chamaremos de *índice conjugado de* p o número $\dfrac{p}{p-1}$ que será denotado por q, para cada $p > 1$. Desta forma, temos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vamos utilizar neste trabalho o caso $p = q = 2$.

Proposição 3.4.1. *(Desigualdade de Young): Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *não negativos, então*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Demonstração: Com efeito, seja $a, b \in \mathbb{R}$ não negativos e considere $(a - b)^2 \geq 0$. Desenvolvendo, obtemos

$$(a - b)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Longrightarrow ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

como queríamos demonstrar.

■

Proposição 3.4.2. *(Desigualdade de Hölder): Se* $u, v \in L^2$ *então* $uv \in L^1$ *e tem-se a desigualdade:*

$$\int |uv| \leq \|u\|_2\|v\|_2. \tag{3.9}$$

Demonstração: Para fins de simplificação iremos usar $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_2$. Seja $m = \|u\|$ e $n = \|v\|$ com $a(t) = \dfrac{|u(t)|}{m}$ e $b(t) = \dfrac{|v(t)|}{n}$. Pela desigualdade de Young, temos

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Então, para cada t, substituindo $a(t)$ e $b(t)$ na desigualdade, obtemos:

$$a(t)b(t) \leq \frac{1}{2}(a(t))^2 + \frac{1}{2}(b(t))^2 \Longrightarrow \frac{|u(t)v(t)|}{mn} \leq \frac{1}{2}\Big(|u(t)|\frac{1}{m}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(|v(t)|\frac{1}{n}\Big)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int \frac{|u(t)v(t)|}{mn} \leq \int \frac{1}{2}\Big(|u(t)|\frac{1}{m}\Big)^2 + \int \frac{1}{2}\Big(|v(t)|\frac{1}{n}\Big)^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{mn}\int |uv| \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{m}\|u\|\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\|v\|\Big)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

pois $|u|^2$ e $|v|^2$ são integráveis e uv é mensurável logo uv é integrável e portanto $|uv|$ é integrável. Concluímos a partir da última desigualdade que

$$\int |uv| \leq \|u\|\|v\|.$$

■

Proposição 3.4.3. *Seja $L^2(a,b)$ a classe de funções reais mensuráveis com o quadrado integrável. Então, a aplicação definida em (3.8) é uma norma em $L^2(a,b)$.*

Demonstração: Com efeito, devemos verificar os itens da Definição 3.4.2.. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in L^2(a,b)$ tem-se

(i) $\|u\|_2 = \left(\int |u|^2\right)^{1/2} \geq 0$, e $\|u\|_2 = \left(\int |u|^2\right)^{1/2} = 0$ se $\int |u|^2 = 0$ ou seja, $u = 0$ quase sempre em (a,b). Conferir o Teorema de Beppo Levi em [2].

(ii) $\|\lambda u\|_2 = \left(\int |\lambda u|^2\right)^{1/2} \Longrightarrow \left(|\lambda|^2 \int |u|^2\right)^{1/2} = |\lambda|\|u\|$. Como queríamos provar.

(iii) Com efeito, deve-se lembrar que verifica-se a desigualdade triangular $|u+v| \leq |u|+|v|$. Suponha $p = 2$ tal que $\frac{1}{2}+\frac{1}{q} = 1$, ou seja, $q = 2$. Escrevamos $p = q(p-1)$ e $q = p(q-1)(\alpha)$. Aplicando a desigualdade triangular, obtemos

$$|u+v|^2 = |u+v||u+v| \leq |u||u+v| + |v||u+v|. \tag{3.10}$$

Como L^2 é um espaço vetorial então $u+v \in L^2$ e $\int |u+v|^2 < \infty$. Isto implica que $\int |u+v| \in L^1(a,b)$ sabendo que $|u+v| \in L^1$. Aplicando a integral e a desigualdade de Hölder, obtemos:

(i)' $\int |u|(|u+v|) \leq \|u\|\|u+v\| = \|u\|\Big(\int |u+v|^2\Big)^{1/2}$;

(ii)' $\int |v|(|u+v|) \leq \|v\|\Big(\int |u+v|^2\Big)^{1/2}$.

Integrando a desigualdade dada em (3.10) e substituindo (i)' e (ii)", obtemos:

$$\int |u+v|^2 \leq \int |u||u+v| + \int |u||u+v|$$

$$\int |u+v|^2 \leq \|u\|\|u+v\| + \|v\|\|u+v\| = (\|u\|+\|v\|)\|u+v\|,$$

dividindo esta última desigualdade por $\Big(\int |u+v|^2\Big)^{1/2}$, concluímos que:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \;\forall u, v \in L^2.$$

■

Em $L^2(a,b)$ o item (iii) da Proposição 3.4.3. é conhecido como *Desigualdade de Minkowski*, logo a demonstração deste item é a prova para da proposição seguinte.

Proposição 3.4.4. *(Desigualdade de Minkowski). Se $u, v \in L^2(a,b)$ então*

$$\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2. \tag{3.11}$$

Definição 3.4.3. *Seja $V = L^2$ o espaço vetorial das classes de funções reais mensuráveis que possuem quadrado integrável. Define-se um **produto interno** sobre $L^2(a,b)$ como uma aplicação $(\cdot,\cdot)$ que associa $u, v \in L^2$ ao número real*

$$(u,v) = \int uv. \tag{3.12}$$

O número (u,v) é dito produto interno de u por v e satisfaz as seguintes condições:

(i) $(u+v,w) = (u,w) + (v,w),\ \forall u, v, w \in L^2$;

(ii) $(\lambda u, v) = \lambda(u,v),\ \forall u, v \in L^2$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $(u,v) = (v,u),\ \forall u, v \in L^2$;

(iv) $(u,u) \geq 0.\ u = 0 \Longleftrightarrow (u,u) = 0.$

Note que o produto interno dado em (3.12) é proveniente da fórmula dada no Capítulo 2: $\|u\| = (u,u)^{1/2}$. Vamos mostrar que o espaço $L^2(a,b)$ é um espaço de Hilbert. Para isso, devemos provar que toda sucessão de Cauchy é convergente neste espaço.

Teorema 3.4.1. *(Riesz-Fischer). Se (u_k) é uma sucessão de Cauchy em L^2 então (u_k) é convergente em L^2.*

Demonstração: Com efeito, seja (u_k) de Cauchy em L^2. Existe um índice k_1 tal que $\|u_k - u_s\| < \frac{1}{2}$ para todo $k, s \geq k_1$. Pela mesma razão, existe outro índice k_2, de modo que $k_1 < k_2$, tal que $\|u_k - u_s\| < \frac{1}{4}$ para todo $k, s \geq k_2$ e assim por diante, obtemos uma sucessão de índices (k_n) tais que $k_{n+1} > k_n$ e $\|u_k - u_s\| < \frac{1}{2^n}$ para cada $n = 0, 1, ...$ e todo $k\, s \geq k_n$.

Deste modo, temos uma subsucessão (u_{k_n}) de (u_k) tal que para cada $n = 0, 1, 2, ...$, tem-se:

$$\|u_{k_{n+1}} - u_{k_n}\| < \frac{1}{2^n}. \tag{3.13}$$

Se $E \subset \mathbb{R}$ é um intervalo onde $(u_k) \subset E$, seja $I \subset E$ um intervalo com amplitude finita. Então por Hölder,

$$\int_I |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}| = \int_I |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}|\mathcal{X}_I \leq \Big(amp(I)\Big)^{1/2} \|u_{k_{n+1}} - u_{k_n}\|.$$

De (3.13), tem-se

$$\int_I |u_{kn+1} - u_{k_n}| \leq \Big(amp(I)\Big)^{1/2} \frac{1}{2^n}. \tag{3.14}$$

Do Teorema de Beppo Levi (Conferir [3]) e (3.14) conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{k_{n+1}} - u_{k_n}$ é convergente quase sempre em I. Como o intervalo E é uma união enumerável de intervalos com amplitudes finitas, então (u_{k_n}) converge quase sempre em E. Portanto, para cada k, a sucessão (u_n), onde $w_n = |u_k - u_{k_n}|$ converge quase sempre em E para $|u_k - u_{k_n}|^2$. Se $r \in \mathbb{N}$, quando $k > k_r$ e $n > r$ obtemos, pela própria construção de k_n, que

$$\int w_n = \int |u_k - u_{k_n}|^2 = \|u_k - u_{k_n}\| \leq \Big(\frac{1}{2^r}\Big)^2 = \frac{1}{2^{2r}}.$$

Utilizando o Lema de Fatou (Conferir [2]) à sucessão (w_n) tem-se $|u_k - u|^2$, integrando obtemos

$$\int |u_k - u|^2 \leq \frac{1}{2^2 r},\ \forall k > k_r \tag{3.15}$$

Portanto $(u_k - u) \in L^2$ e consequentemente $u = u_k - (u_k - u) \in L^2$. Quando $k \longrightarrow \infty$ em (3.15) temos $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_2 = 0$.

■

Pelo Teorema de Riesz-Fischer, o espaço $L^2(a, b)$ é completo e portanto é um espaço de Hilbert.

Capítulo 4

Aplicações

O presente capítulo tem como objetivo apresentar uma solução dita fraca para uma equação diferencial parcial. Escolhemos o problema que modelamos das pequenas vibrações de uma corda elástica. Iremos deduzir o modelo através do Princípio de Hamilton o qual nos permite caracterizar os deslocamentos de uma corda elástica por meio de uma identidade integral. Antes de obter nosso objetivo, vamos apresentar alguns resultados que nos servirão como suporte teórico, são eles, distribuição de Schwartz e Espaços de Sobolev.

4.1 Vibrações Transversais de uma Corda Elástica

Suponha uma corda elástica, estendida ao londo do eixo Ox de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, perfeitamente flexível. Esta corda possui comprimento L com extremos fixos em $x = 0$ e $x = L$, contudo com uma tensão τ constante ao longo da corda. Denomina-se esta situação por *configuração de equilíbrio* ou *repousa da corda*.

Suponha então que a configuração de equilíbrio está alterada permitindo-a vibrar livremente no plano xOy, em que cada partícula da corda mova-se sobre uma reta perpendicular ao eixo Ox. Considera-se a amplitude das vibrações pequenas de modo que sua inclinação, relativa ao eixo Ox, seja pequena comparada a configuração de repouso.

Representaremos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal, no instante t, de um ponto da corda cuja abscissa é x no intervalo $[0,L]$ e, para cada t, $u(x,t)$ descreve as deformações da corda no plano xOy. Variando x em $[0,L]$ e t em $[0,T]$, $u = u(x,t)$ representa uma família de curvas planas passando por $x = 0$ e $x = L$, e que suporemos serem regulares. Também, iremos representar por $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ a inclinação da corda no instante t, no ponto de abcissa x e $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ a velocidade com que o ponto de abcissa x se desloca verticalmente. Com a hipótese de extremos fixos temos $u(0,t) = u(L,t) = 0$, para todo t.

Quando supomos uma corda flexível a única força atuante na corda é a tensão τ e então a energia potencial da corda na configuração $u(x,t)$, no instante t, é o trabalho realizado pela tensão durante a deformação à partir da configuração de repouso até a posição $u(x,t)$. Portanto, quando o segmento dx deforma-se no arco ds, no instante t, a energia potencial de ds é dada por:

$$dV(t) = \tau(ds - dx).$$

Pelo desenvolvimento do Binômio de Newton, consideramos a seguinte aproximação:

$$ds = \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx.$$

Logo,

$$dV(t) = \tau\left[\left(1 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\right)dx - dx\right] = \left[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{x}\Big)^2\right] sx\tau - dx\tau = \left[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 - 1\right] dx\tau$$

Donde, pela última igualdade, $\dfrac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$. Por fim obtemos a energia potencial da corda integrando, ou seja,

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \tau\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 dx.$$

Iremos supor agora que a densidade da corda é dada por $\rho(x)$ contínua, estritamente positiva, $0 \le x \le L$, logo a massa do segmento dx será $p(x)dx$ e portanto, sua energia cinética é dada por:

$$dU(t) = \frac{1}{2}\rho(x)dx\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2.$$

Integrando obtemos a energia cinética da configuração $u(x,t)$ no instante t, por:

$$U(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 dx.$$

Consideramos agora $t_1 < t_2$ e definimos a integral

$$\int_{t_1}^{t_2} [U(t) - V(t)]dt \tag{4.1}$$

como a *ação do sistema* constituído pela corda entre os instantes t_1 e t_2. Esta integral é um funcional sobre a classe de funções reais $u(x,t)$, definidos no domínio $\bar{Q} = [o, L] \times [o, T], T > 0$, continuamente deriváveis em $Q =]0, L[\times]0, T[$ nulos em $x = 0$ e $x = L$, com o quadrado das derivadas integráveis em Q. Esta família de funções denomina-se **classe das configurações admissíveis** em Q.

O princípio de Hamilton ou princípio da ação estacionária, afirmar que: entre as configurações admissíveis, as que representam vibrações transversais da corda elástica são as que tornam (4.1) estacionária. Partindo deste propósito, vamos deduzir um modelo matemático, por meio do princípio de Hamilton (1834), que representa as pequenas vibrações em uma corda elástica com extremos fixos.

Considere $t_1 = 0$ e $t_2 = T$ e escrevamos (4.1) da forma:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L \Big(\rho u_t^2 - \tau u_x^2\Big) dxdt$$

onde $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ e $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Assim, segundo o princípio de Hamilton, as configurações que representam vibrações da corda elástica presa, nos extremos, são representadas pelas funções admissíveis que anulam a derivada de $J(u)$. Seja $\lambda > 0$ e v admissíveis, então pela derivada de Gdeaux, temos:

$$J(u+\lambda v) - J(u) = \lambda \int_0^T \int_0^L \Big(\rho u_t v_t - \tau u_x v_x\Big) dxdt + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T \int_0^L \Big(\rho v_t^2 - \tau v_x^2\Big) dxdt$$

dividindo-se os membros desta igualdade por λ e passando o limite $\lambda \longrightarrow 0$, obtemos a expressão de derivada de J em u na direção v. Logo, as u que representam vibrações da corda devem anular esta derivada, para todo v admissível, isto é,

$$\int_0^T \int_0^L \Big(\rho u_t v_t - \tau u_x v_x\Big) dxdt = 0, \tag{4.2}$$

para todo v admissível em Q. Concluímos dizendo que as funções $u((x,t))$ admissíveis em Q, representando vibrações transversais de uma corda elástica flexível, presa nos extremos, são as soluções de (4.2). Desse modo, modelamos nosso fenômeno físico da forma

$$\int_0^T \int_0^L \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\Big) dxdt = 0 \tag{4.3}$$

para todo v admissível. $u(x,0) = u_0(x); u_t(x,0) = u_1(x)$ em $]0,L[$ e ainda $u(0,t) = u(L,t) = 0$ em $]0,T[$. O qual estamos supondo $\rho = \tau = 1$. Tem-se que u_0 é a configuração inicial da corda e u_1 sua velocidade no instante no instante observado.

O objetivo do presente trabalho é estudar e apresentar uma solução fraca aproximada para a equação diferencial parcial proposto em (4.3). Entretanto, é necessário apresentar uma análise matemática da noção de uma derivada mais geral introduzida por S. Sobolev (1936) e L. Schwartz (1945).

O fenômeno físico aqui proposto também possuem outras modelagens, a modelagem clássica (por sua vez, a solução clássica) é deduzida pelo modelo de d'Alembert (1717 - 1783), o qual é suposto uma classe admissível mais regular, ou seja, duas vezes continuamente deriváveis em Q, com derivadas primeiras de quadrado integrável em Q, nulas em $x = 0$ e $x = L$ e uma igualdade pontual em Q. E conhecida sua solução, chamada de fórmula de d'Alembert desde 1743. Ver [2].

4.2 Noção de Distribuições e Espaços de Sobolev

Nesta seção estudaremos o conceitos de Distribuição e conheceremos o espaço em que as soluções fracas das equações parciais habitam: os espaços de Sobolev. A noção de distribuição é uma generalização do que conhecemos por função. Vamos familiarizarmos com a nomeclatura.

Definição 4.2.1. *Define-se* ***suporte de uma função u*** *por:*

$$supp(u) = fecho\ em\ ]a,b[\ de\ \{x \in]a,b[; u(x) \neq 0\}.$$

Definição 4.2.2. *Seja V o espaço vetorial das funções reais com derivadas contínuas em todas as ordens definidas em $]a,b[$ com suporte compacto em $]a,b[$. Denotaremos este espaço por $C_0^\infty(a,b)$.*

Exemplo 4.2.1. *Considere a função definida em $C^\infty(a,b)$, por:*

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & se\ x > 0; \\ 0, & se\ x \leq 0. \end{cases}$$

donde $\theta \in C^{\infty(a,b)}$ mas não pertence a $C_0^\infty(a,b)$ pois não possui suporte compacto em $]a,b[$ visto que $supp(\theta) = [0,+\infty)$. Agora considere as funções φ_1 e φ_2 definidos abaixo o qual são translação da função θ.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-1/1+x}, & se\ x > -1; \\ 0, & se\ x \leq -1. \end{cases}$$

e

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} e^{-1/1-x}, & se\ x < 1; \\ 0, & se\ x \geq 1. \end{cases}$$

Definidas as funções φ_1 e φ_2 acima, definiremos a função ρ tal que $\rho(x) = \Big(\varphi_1\varphi_2\Big)^{1/2}$. Daí,

$$\rho(x) = \begin{cases} \left(e^{\frac{-2}{1-x^2}}\right)^{1/2}, & se\ |x| < 1; \\ 0, & se\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

E, portanto, $supp(\rho) = [-1,1]$ que é compacto em $]a,b[$. Logo, $\rho \in C_0^\infty(a,b)$ o que prova que $C_0^\infty(a,b) \neq 0$.

Proposição 4.2.1. *Sejam dois subconjuntos de (a,b), denotamos por K e F, sendo o primeiro compacto e o segundo fechado, disjuntos, respectivamente. Então existe $u \in C_0^\infty(a,b)$ satisfazendo a condição*

$$u = 1\ em\ K,\ u = 0\ em\ F\ e\ 0 \leq u \leq 1.$$

Demonstração: Ver [2].

∎

O espaço apresentado é de grande interesse para o estudo das derivadas fracas. Para isso, vamos definir uma noção de convergência neste espaço proposta por Schwartz.

Definição 4.2.3. *Dizemos que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u \in C_0^\infty(a,b)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) todas as u_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de $]a,b[$;

(ii) a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u uniformemente em K, juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço C_0^∞ com esta noção de convergência será denotado por $\mathcal{D}(a,b)$.

Denomina-se **distribuição sobre** $]a,b[$, a toda forma $T : \mathcal{D}(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:

(i) $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathcal{D}(a,b)$;

(ii) T é contínua, isto é, se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\Big(T(u_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(u)$ em $\mathbb{R}$.

Vamos denotar o valor da distribuição em u por $\Big\langle T, u\Big\rangle$.

Considere o espaço vetorial de todas as distribuições sobre (a,b). Dizemos que a sucessão $T_n \longrightarrow T$, quando a sucessão $(\langle T_n, u\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \langle T, u\rangle$ em $\mathbb{R}$, para todo $u \in \mathcal{D}(a,b)$. Denotamos este espaço por $\mathcal{D}'(a,b)$ com esta noção de convergência.

Exemplo 4.2.2. *Seja $L^1_{loc}(a,b)$ o espaço vetorial das classes de funções $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a restrição de u a qualquer compacto K de (a,b) é integrável a Lebesgue em K. Considere $u \in L^1_{loc}(a,b)$ e T em $\mathcal{D}(a,b)$ por:*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_a^b u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b). \tag{4.4}$$

Vamos mostrar que T é uma distribuição.

Solução: Para mostrar que (4.4) é linear, basta desenvolver o valor $\langle T, \alpha u + \beta v\rangle$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathcal{D}(a,b)$. Note que a integral definida em (4.4) existe pois $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ possui suporte compacto K contido em (a,b). Devemos provar então que T é contínua. Temos,

$$\Big(\langle T, \varphi_n\rangle\Big)_{n\in\mathbb{N}} - \langle T, \varphi\rangle \Longrightarrow \int_a^b u(x)\varphi_n(x)dx - \int_a^b u(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_a^b u(x)[\varphi_n(x) - \varphi(x)]dx \le \int_a^b |u(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|dx \le$$

$$\leq \max_{x\in K}|\varphi(x)|\int_K |u(x)|dx \longrightarrow 0.$$

Ou seja, quando $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero em $\mathcal{D}(a,b)$, todas as φ_n possuem suportes em um compacto K e convergem para zero em K. Logo,$(\langle T,\varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero provando que T é uma distribuição.

■

Exemplo 4.2.3. *Seja o funcional δ_0 definido em $\mathcal{D}(a,b)$ por*

$$\langle \delta_0,\varphi\rangle = \varphi(0),$$

é uma distribuição sobre (a,b), denominada de medida de Dirac concentrada no ponto zero.

Proposição 4.2.2 (Lema de Du Bois Raymond)**.** *Seja $u\in L^1_{loc}(a,b)$ tal que*

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \textit{para toda} \quad \varphi\in\mathcal{D}(a,b).$$

Então $u=0$ quase sempre em (a,b).

Demonstração: Com efeito, seja $u\in L_{\text{loc}^1}(a,b)$, então para cada $\varepsilon>0$ existe $v\in C_0^\infty(a,b)$ tal que

$$\int_a^b |u-v|dx \leq \varepsilon,$$

pois $C_0^\infty(a,b)$ é denso em $L^1_{\text{loc}}(a,b)$. Desta última desigualdade obtemos,

$$\left|\int_a^b v\varphi dx\right| = \left|\int_a^b (u\varphi - v\varphi)dx\right| \leq \left|\int_a^b (u-v)\varphi dx\right| \leq \varepsilon\max|\varphi|, \tag{4.5}$$

para todo $\varphi\in\mathcal{D}(a,b)$.

Considere dois subconjuntos compactos e disjuntos de $]a,b[$, digamos

$$K_1 = \{x\in]a,b[; v(x)\geq\varepsilon\} \quad \text{e} \quad K_2 = \{x\in]a,b[; v(x)\leq\varepsilon\}$$

Pela Proposição 4.2.1, existem $\varphi_1,\varphi_2\in C_0^\infty(a,b)$ tal que

$$\varphi_1 = 1 \quad \text{em} \quad K_1, \qquad \varphi_1 = 0 \quad \text{em} \quad K_2 \quad , \quad 0\leq\varphi_1\leq 1$$

e

$$\varphi_2 = 1 \quad \text{em} \quad K_1, \qquad \varphi_2 = 0 \quad \text{em} \quad K_2 \quad , \quad 0\leq\varphi_2\leq 1$$

Agora, seja $\psi=\varphi_1-\varphi_2$, então

$$\psi = 1 \quad \text{em} \quad K_1, \qquad \psi = -1 \quad \text{em} \quad K_2 \quad , \quad -1\leq\psi\leq 1.$$

Logo,

$$\int_a^b v\psi dx = \int_{]a,b[\setminus K} v\psi dx + \int_K v\psi dx, \qquad K = K_1 \cup K_2. \tag{4.6}$$

De (4.6) e aplicando (4.5), obtemos

$$\left| \int_K v\psi dx \right| \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon$$

como $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ e $|v| \leq \varepsilon$ em $]a,b[\setminus K$,

$$\int_K |v| dx = \int_K v\psi dx \leq \varepsilon + (b-a)\varepsilon.$$

Por fim, tem-se

$$\int_a^b |u| dx \leq \int_a^b |u-v| dx + \int_K |v| dx + \int_{]a,b[\setminus K} |v| dx \leq 2\varepsilon + 2(b-a)\epsilon.$$

Fazendo ε tender a zero, conclui-se que $u = 0$ quase sempre em $]a,b[$.

■

É importante observar que a distribuição dada em (4.4) é determinada *univocamente por u*. De fato, suponha $u, v \in L^1_{loc}(a,b)$, então aplicando a distribuição tem-se

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b u(x)\varphi(x) dx \qquad e \qquad \langle T, \varphi \rangle = \int_a^b v(x)\varphi(x) dx$$

Daí,

$$\int_a^b u(x)\varphi(x) dx = \int_a^b v(x)\varphi(x) \Longrightarrow \int_a^b [u(x) - v(x)]\varphi(x) dx = 0.$$

Do Lema de Du Bois Raymond concluímos que $u = v$ quase sempre em (a,b). Por esta particularidade que as distribuições possuem, dizemos que *u identifica-se a distribuição por ela definida*, dizendo *a distribuição u de* $L^1_{loc}(a,b)$.

Exemplo 4.2.4. *O funcional δ_0 definido no Exemplo 4.2.3., não é uma função localmente integrável em (a,b) e ainda é uma distribuição. Ver [2].*

Exemplo 4.2.5. *Seja u continuamente derivável em $\mathbb{R}$ no sentido Newton-Leibniz. Então, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$, integrando por parte, temos*

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b u'\varphi dx. \tag{4.7}$$

Segundo Sobolev, $u \in L^1_{loc}$ possui derivada fraca, quando existe um $h \in L^1_{loc}$ tal que:

$$\int_a^b u\varphi' dx = -\int_a^b h\varphi dx \tag{4.8}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. A função h denomina-se derivada fraca de u e denota-se $\frac{du}{dx} = h$.

A noção de derivada fraca permite obter soluções fracas das equações diferenciais parciais. Note que se $T \in D'(a,b)$ define-se $\frac{dT}{dx} \in D'(a,b)$ por

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in D(a,b).$$

Esta derivada é denominada ***derivada no sentido das distribuições****. Se $T \in L^1_{loc}(a,b)$ então sua derivada fraca quando existe é igual à derivada de T no sentido das distribuições.*

Definição 4.2.4 (Espaços de Sobolev)**.** *Definimos como* ***espaço de Sobolev*** *de ordem m sobre (a,b), como o espaço vetorial das $u \in L^2(a,b)$ tais que as derivadas no sentido das distribuições $\frac{d^n u}{dx^v}$, $v = 1,2,...,m$ pertençam a $L^2(a,b)$. Este espaço é denotado por $H^m(a,b)$.*

O espaço de Sobolev $H^m(a,b)$ é munido do seguinte produto interno e norma:

$$\begin{cases} ((u,v)) = \displaystyle\int_a^b uv dx + \sum_{v=1}^{m} \int_a^b \frac{d^v u}{dx^v} \frac{d^v v}{dx^v} \\ \|u\|^2 = \displaystyle\int_a^b u^2 dx + \sum_{v=1}^{m} \int_a^b \left(\frac{d^v u}{dx^v} \right)^2 dx \end{cases} \tag{4.9}$$

Para o espaço L^2 iremos utilizar as seguintes notações:

$$\begin{cases} (u,v) = \displaystyle\int_a^b uv dx \\ |u|^2 = \displaystyle\int_a^b u^2 dx. \end{cases} \tag{4.10}$$

Proposição 4.2.3. *O espaço vetorial $H^m(a,b)$, com o produto interno apresentado, é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: É suficiente mostrar que toda sucessão de Cauchy em $H^m(a,b)$ converge. Com efeito, considera-se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy em $H^m(a,b)$. Então, $\left(\frac{d^v u_n}{dx^v}\right)_{v\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(a,b)$. Sendo L^2 completo, Teorema de Riesz-Fishcer, tem-se que a sucessão $u_v \in L^2$ é convergente em L^2.

Quando $v = 0$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \quad \text{em} \quad L^2(a,b)$$

e portanto, em $\mathcal{D}'(a,b)$. Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^v u_n}{dx^v} = \frac{d^v u_0}{dx^v} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(a,b).$$

Sendo $v = 1,2,...,m$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^v u_n}{dx^v} = u_v \quad \text{em} \quad L^2.$$

Portanto em $\mathcal{D}'(a,b)$. E, $u_v = \dfrac{d^v u_0}{dx^v}$, ou seja, $\dfrac{d^v u_0}{dx^v} \in L^2$ para $v = 1, ..., m$ e $u_0 \in H^m(a,b)$. Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 \in H^m(a,b)$$

o que prova sua completeza.

■

Definição 4.2.5. *Sejam V, H espaços de Hilbert de modo que $V \in H$. Diz-se que V está continuamente imerso em H quando*

$$|v|_H \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V, \quad c > 0.$$

Proposição 4.2.4. *Tem-se que $H^1(a,b)$ está continuamente imerso em $C^0([a,b])$.*

Demonstração: Ver [2].

■

Diz-se, com certo abuso de linguagem, que funções de $H^1(a,b)$ são contínuas em $[a,b]$, por consequência da Proposição 4.2.4. Denotaremos por $H_0^1(a,b)$ o espaço das funções $u \in H^1$ tais que $u(a) = u(b) = 0$. Sendo assim, $H_0^1(a,b)$ é um subespaço de $H^1(a,b)$. Mostra-se que $u \in H_0^1(a,b)$ vale a desigualdade

$$\int_a^b u^2 dx \leq C \int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 dx$$

o qual é conhecida como *desigualdade de Poincaré-Friedrichs.* É devido a esta desigualdade que

$$\|u\|^2 = \int_a^b u(s)^2 ds + \int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds \leq C_0 \int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds, \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

Em outras palavras, para todo $u \in H_0^1(a,b)$, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds\right)^{1/2} \leq \|u\| \leq C\left(\int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds\right)^{1/2}. \tag{4.11}$$

Isto é, $\|u\|$ e $\left[\int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds\right]^{1/2}$ são normas equivalentes em $H_0^1(a,b)$. É por este motivo que denotaremos em $H_0^1(a,b)$ o produto escalar por

$$((u,v)) = \int_a^b \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} ds$$

e com norma induzida,

$$\|u\| = \left(\int_a^b \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds\right)^{1/2}.$$

4.3 Retornando à Equação de Vibrações de uma Corda Elástica

Nesta seção, vamos retomar ao estudo da equação de vibrações de uma corda elástica e apresentar sua solução fraca por meio do método de separação de variáveis. Antes, porém, vamos apresentar alguns resultados sobre a sucessão

$$\left(\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen} \frac{v\pi x}{L}\right)_{v\in\mathbb{N}},$$

para deixar a exposição de conceitos mais clara visto que esta sucessão participa de modo direto na solução apresentada.

Devemos lembrar do estudo introdutório feito no Capítulo 2 deste trabalho sobre os Espaços de Hilbert que uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ de vetores ortonormais de $\mathcal{H}$ seja completa é a validade da identidade de Parseval,

$$|v|^2_{\mathcal{H}} = \sum_{v=1}^{\infty} |(v, w_v)_{\mathcal{H}}|^2, \qquad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Neste sentido, apresentamos a proposição seguinte.

Proposição 4.3.1 (Identidade de Parseval-Vitali). *Uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$, ortonormal em $L^2(a,b)$, seja completa é que seja válida a identidade*

$$x - a = \sum_{v=1}^{\infty} \Big(\int_a^x w_v(s) ds \Big)^2, \tag{4.12}$$

para cada $x \in]a,b[$.

Demonstração: *Condição necessária:* Seja $x \in]a,b[$ e $\mathcal{X}_{[a,x[}$ a função característica de $[a,x[$. Suponha $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormal e completo em $L^2(a,b)$. Aplica-se a identidade de Perseval à função caraterística, então

$$\left|\mathcal{X}_{[a,x[}\right|^2_{L^2(a,b)} = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^b w_v(s) \mathcal{X}_[a,s[(s) ds \right)^2$$

o que implica

$$x - a = \sum_{v=1}^{\infty} \left(\int_a^x w_v(s) ds \right)^2.$$

Condição suficiente: Considere (4.12) acima. Então, por contradição, suponha a sucessão $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ não seja completa. Neste caso, existe uma função $w \in L^2$, diferente da função nula, tal que seja perpendicular a w_v em L^2, para $n \in \mathbb{N}$. Fazendo-se $\frac{w}{|w|}$, resulta a sucessão

$w_1, w_2, ..., w_n, ...$ ortonormal em L^2 por definição. Utilizando a Desigualdade de Bessel, obtemos:

$$\left(\int_a^b w(s)\mathcal{X}_{[a,x[}(s)\right)^2 + \sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^b w_v(s)\mathcal{X}_{[a,s[}(s)ds\right)^2 \leq \int_a^b \mathcal{X}_{[a,x[}(s)ds$$

ou seja,

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^x w_v(s)ds\right)^2 + \left(\int_a^x w(s)ds\right)^2 \leq x - a.$$

Utilizando (4.12) nesta ultima desigualdade, tem-se:

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^x w_v(s)ds\right)^2 + \left(\int_a^x w(s)ds\right)^2 \leq x - a = \sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^x w_v(s)ds\right)^2$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^x w_v(s)ds\right)^2 + \left(\int_a^x w(s)ds\right)^2 \leq \sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_a^x w_v(s)ds\right)^2$$

$$\left(\int_a^x w(s)ds\right)^2 \leq 0, \qquad \forall x \in (a,b).$$

Portanto, $w(s) = 0$ quase sempre em (a,b) o que é uma contradição. Portanto, $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ é completa. ∎

Exemplo 4.3.1. *Demonstremos que a sucessão $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ definida em por*

$$w_v(s) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \operatorname{sen} \frac{v\pi s}{L} \tag{4.13}$$

com $x \in]0, L[$ é completa. É suficiente verificar (4.12) *para todo $x \in (0, L)$, isto é,*

$$x = \sum_{v=1}^{\infty}\left(\int_0^x \left(\frac{2}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{v\pi s}{L} ds\right)^2.$$

De fato,

$$\frac{2}{L}\left(\int_a^x \operatorname{sen} \frac{v\pi s}{L} ds\right)^2 = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{2}{L}\left(1 - \cos\frac{v\pi x}{L}\right)^2 = \frac{2L}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{v\pi x}{L}\right)^2 =$$

$$= \frac{2L}{\pi^2}\Big[1 - 2\cos\frac{v\pi x}{L} + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2v\pi x}{L}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{2L}{\pi^2}\Big(\frac{3}{2}\frac{1}{v^2} - \frac{2\cos\frac{v\pi x}{L}}{v^2} + \frac{1}{4}\frac{2\cos\frac{2v\pi x}{L}}{v^2}\Big).$$

Note que

$$\sum_{v=1}^{\infty}\frac{2\cos v\lambda}{v^2} = \frac{\lambda^2}{2} - \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3}, \qquad 0 \leq \lambda \leq 2\pi$$

e

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Fazendo-se $\lambda = \frac{\pi x}{L}$ *e* $\lambda = \frac{2\pi x}{L}$, *temos*

$$\frac{2L}{\pi^2}\Big(\frac{3}{2}\frac{1}{V^2} - \frac{2\cos v\lambda}{v^2} + \frac{1}{4}\frac{2\cos v\lambda}{v^2}\Big).$$

Realizando as contas, tem-se

$$\sum_{v=1}^{\infty}\Big[\frac{2L}{\pi^2}\Big(\frac{3}{2}\frac{1}{v^2} - \frac{2\cos v\lambda}{v^2} + \frac{1}{4}\frac{2\cos v\lambda}{v^2}\Big)\Big] = \frac{3L}{\pi^2}\Big(\frac{\pi^2}{6} - \Big[\frac{\lambda^2}{2} - \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3}\Big] + \frac{1}{4}\Big[\frac{\lambda^2}{2} - \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3}\Big]\Big) =$$

$$= \frac{L}{2} = \frac{3L}{\pi^2}\Big[\frac{\lambda^2}{2} - \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3}\Big] + \frac{3L}{4\pi^2}\Big[\frac{\lambda^2}{2} - \pi\lambda + \frac{\pi^2}{3}\Big] = \frac{L}{2} - \frac{3L\lambda^2}{2\pi^2} + \frac{3L\lambda}{\pi} - L = x.$$

Portanto, o resultado é verificado. Além disso, pela Proposição 4.3.2. e o Exemplo 4.3.1., a sucessão $(w_v)_{v\in\mathbb{N}}$ *é uma base de Hilbert de* $L^2(a,b)$.

Quando modelamos o problema e o apresentamos por meio do Principio de Hamilton no início do capítulo, verificou-se que as vibrações u foram caracterizadas por funções reais definidas em $Q = \{(x,t); 0 \le x \le L, 0 \le t \le T\}$ que satisfazem:

$$\int_0^T \int_0^L \Big(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) dxdt = 0. \tag{4.14}$$

para todo v admissível em Q. Agora, definindo uma função $\theta(t)v(x)$, sendo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^1(0,L)$, tem-se que $\theta(t)v(x)$ é admissível em Q. Sendo assim, substituindo $\theta(t)v(x)$ em (4.14) e integrando por partes, obtemos

$$\int_0^T \Big\{\frac{d}{dt}(u'(t),v) + ((u(t),v))\Big\}\theta(t)dxdt = 0. \tag{4.15}$$

observa-se que $(u'(t),v)$ é o produto escalar em L^2 e $((u(t),v))$ é o produto escalar em $H_0^1(0,L)$. Portanto, estendemos como solução uma função que satisfaz a identidade (4.15) para toda $v \in H_0^1(0,L)$ e todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Além disso, a identidade (4.15) em $\mathcal{D}'(0,T)$ é equivalente à

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + ((u(t),v)) = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(0,L).$$

Sendo assim, por todas as informações supracitadas, vamos buscar uma solução para o problema abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & 0 < x < L, t > 0. \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0. \\ u(x,0) = u^0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \tag{4.16}$$

Para facilitar a notação, utilizaremos $c = 1$. A estratégia utilizada para a solução de (4.16) é o método de separação de variáveis. Suponha que u pode ser escrito como

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$$

em que X depende apenas de x e T apenas de t. Substituindo esta função em (4.16), obtemos

$$X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0.$$

em que $X'(x)$ e $T'(t)$ representam suas respectivas derivadas. Assim,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

e $X(0) = 0 = X(L)$. O valor de λ acima é chamado de constante de separação. Com a hipótese dos extremos fixos, podemos escrever (4.16) da forma:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < L; \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

e

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0, & t > 0; \end{cases} \tag{4.18}$$

Como $\lambda > 0$, a solução $X(x)$ de (4.17) tem a seguinte forma:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x$$

com c_1 e c_2 constantes. Utilizando as respectivas condições de fronteira, obtemos

$$X(0) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} 0 + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} 0 = 0$$

de modo que $c_1 = 0$ e $X(L) = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} L = 0$, o que nos leva a denotar:

$$\sqrt{\lambda} L = n\pi, \qquad n = 1, 2, ...$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, ...$$

Portanto, as soluções de (4.17) para $X(x)$ são da forma:

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{4.19}$$

em que $n = 1, 2, ...$ As soluções para (4.18) de $T(t)$ são da forma:

$$T_n(t) = k_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \qquad n = 1, 2, ... \tag{4.20}$$

onde k_1 e k_2 são constantes. A partir de (4.19) e (4.20) podemos escrever $u_n(x,t)$ da forma

$$u_n(x,t) = \left(k_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + k_{2n} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Logo, uma possível solução $u(x,t)$ de (4.17) tem a forma:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_{1n}\cos\frac{n\pi t}{L}+k_{2n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{4.21}$$

Agora, analisando as condições iniciais, temos

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(k_{1n}\Big)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}=u^0(x), \qquad 0<x<L \tag{4.22}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-k_{1n}\frac{n\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}+k_{2n}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{4.23}$$

ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}k_{2n}\frac{n\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}=u^1(x), \quad 0<x<L \tag{4.24}$$

Sabemos que a sucesão $\left(\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)=(w_n)$ é uma base de Hilbert em $L^2(0,L)$. Considerando-se $u^0,u^1\in L^2(0,L)$, podemos escrever u^0 e u^1 da forma abaixo considerando a série de Fourier, logo:

$$\begin{cases} u^0=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u^0,w_n)_{L^2(0,L)}w_n \\ u^1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(u^1,w_n)_{L^2(0,L)}w_n. \end{cases} \tag{4.25}$$

Comparando-se (4.21), (4.22), (4.24) e (4.25) obtemos,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u^0,w_n)w_n=\sum_{n=1}^{\infty}k_{1n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u^1,w_n)w_n=\sum_{n=1}^{\infty}k_{2n}\frac{n\pi}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

ou seja,

$$k_{1n}=(u^0,w_n), \qquad n=1,2,...$$

Substituindo estas duas ultimas igualdades em (4.21), encontra-se

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(u^0,w_n)_{L^2(a,b)}\cos\frac{n\pi t}{L}+\frac{L}{n\pi}(u^1,w_n)_{L^2(a,b)}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right]w_n(x) \tag{4.26}$$

como possível solução do problema proposto em (4.16).

Solução clássica para (4.16)**:** Mostra-se em [7], que se

$$u^0\in C^2([0,L]) \quad \text{com} \quad u(0)=u(L)=0 \quad \text{e} \quad v^1\in C^1([0,L])$$

então $u(x,t)$ dado por (4.26) é uma solução clássica de (4.16), isto é, $u(x,t)$ satisfaz (4.16) para cada $(x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$.
Solução fraca de (4.16)**:** Mostra-se em [2] que se

$$u^0 \in H_0^1(0,L) \quad \text{e} \quad u^1 \in L^2(0,L)$$

então $u(x,t)$ dado por (4.26) é solução fraca de (4.16), isto é, uma solução de (4.16) no sentido de Hamilton.

Referências Bibliográficas

[1] BOTELHO G., *Fundamentos de Análise Funcional* / Geraldo Botelho, Daniel Pellegrino e Eduardo Teixeira - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] MEDEIROS, L.A, MIRANDA, M. M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[3] MEDEIROS, L.A., MELLO, E.A., *A integral de Lebesgue*, IM - UFRJ, 6 ed. Rio de Janeiro, 2008.

[4] LIMA, E.L., *Análise real, v.2*, 3 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2007.

[5] LOUREDO, A. T., OLIVEIRA, A.M., *Um primeiro curso de Álgebra Linear*, Campina Grande: EDUEPB, 2015.

[6] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons Inc, Estados Unidos, 1978.

[7] MEDEIROS, L. A.; ANDRADE, N. G., *Iniciação às equações diferenciais parciais.* Rio de Janeiro: Livro Técnico e Científico, 1978.

[8] VILCHES, M. A., *Equações Diferenciais: Métodos de séries.* Departamento de Análise - IME, UERJ. Rio de Janeiro, 2004.