UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE A DERIVADA E ALGUMAS APLICAÇÕES

HENRIQUE SANTOS NÓBREGA

CAMPINA GRANDE- PB
2019

Henrique Santos Nóbrega

UM ESTUDO SOBRE A DERIVADA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento as exigências para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Onildo dos Reis Freire

CAMPINA GRANDE- PB

2019

N337e Nóbrega, Henrique Santos.
Um estudo sobre a derivada e algumas aplicações [manuscrito] / Henrique Santos Nobrega. - 2019.
54 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Me. Onildo dos Reis Freire , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Cálculo diferencial. 2. Derivada. 3. Teoremas. I. Título

21. ed. CDD 515.33

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

HENRIQUE SANTOS NÓBREGA

UM ESTUDO SOBRE A DERIVADA E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 02 / 07 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Onildo dos Reis Freire

Prof. Me. Onildo dos Reis Freire (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba

Emanuela Régia de Sousa Coelho

Profa. Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho

Universidade Estadual da Paraíba

Gustavo da Silva Araújo

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo

Universidade Estadual da Paraíba

"Aquele que ajuda os outros simplesmente porque deveria ajudar e porque é a coisa certa a se fazer, é sem dúvida, um super-herói de verdade." (Stan Lee).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade concedida de estar concluindo essa importante etapa na minha vida. Agradeço aos meus familiares em especial aos meus pais, Valdeque e Jocélia, e ao meu irmão Ricardo, pelo incentivo, apoio e todo suporte necessário.

Agradeço a meu orientador e professor Onildo dos Reis Freire, pelo apoio na realização desse trabalho, pelos ensinamentos em sala de aula e ensinamentos para a vida. Agradeço também aos professores que me ajudaram nesta caminhada e contribuíram na minha formação acadêmica. Em especial, registro meus agradecimentos aos professores Fernando Luiz, Aldo Trajano, José Elias, José Ginaldo, Milla Miranda, Victor Hugo, Gustavo Araújo, Emanuela Régia, Vandenberg Lopes, Israel Burití, Marcella Lima, Kátia Suzana, Pedro Lúcio e Aníbal de Menezes.

Agradeço a minha namorada Maria Letícia pelo apoio, motivação, carinho, alegria e estímulo durante todo esse tempo, aos meus amigos de curso que estiveram presentes, e sempre me ajudaram durante essa jornada, Matheus, Geovane, Raylson, Jamerson, Newton, Jailson, Weslley, Renata, Victor, Nahara entre outros que peço desculpas por não citar nominalmente.

Resumo

No presente trabalho estudamos conceitos relativos ao Cálculo Diferencial, especificamente, traremos uma breve explanação sobre a construção histórica da descoberta do cálculo diferencial, com enfoque nos embates de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, momento este que ficou conhecido como a Guerra do Cálculo. Exploraremos ainda o conceito da derivada, suas regras de derivação e ideias principais. Realizamos também um estudo sobre Teoremas famosos a respeito da Derivada, suas consequências e aplicação em diversas áreas.

Palavras-chave: Cálculo, Derivada, regras, aplicações.

Abstract

In the present work we study concepts related to Differential Calculus, specifically, we will give a brief explanation about the historical construction of the differential calculus, focusing on the attacks of Isaac Newton and Gottfried Leibniz, which was known as the War of Calculus. We will also explore the concept of the derivative, its rules of derivation, and main ideas. We also carried out a study on famous Theorems about the Derivative, its consequences and application in several areas.

Keywords: Calculus, Derivatives, rules, applications.

Sumário

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral foi construído a partir da necessidade que alguns matemáticos da antiguidade encontravam para resolver certos tipos de problemas, como por exemplo, traçar retas tangentes em determinados pontos de uma curva, calcular áreas de figuras planas ou volumes de sólidos. O primeiro registro de um problema onde é capaz de se enxergar o uso de ideias primitivas do Cálculo foi datado aproximadamente no ano de 1850 a.C., e se trata do Papiro de Golonishev, onde apresenta o cálculo do volume de um tronco de pirâmide quadrada, sendo este o primeiro cálculo de um volume de um sólido já registrado.

Para se chegar a totalidade desse conceito foi necessário um longo período de desenvolvimento, levaram-se séculos para que os termos que conhecemos hoje fossem formulados. Naturalmente vários matemáticos voltaram suas forças e deram suas contribuições para este desenvolvimento, mas credita-se a Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz a estruturação necessária para a criação do Cálculo Diferencial e Integral.

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 1, será abordado todo o desenrolar da parte histórica por trás do Cálculo. No Capítulo 2, desenvolveremos a base teórica sobre o estudo da Derivada. No Capítulo 3, estudaremos algums teoremas e suas consequências.

Após a abordagem histórica, apresentaremos a definição da Derivada, um dos conceitos mais importantes desse trabalho. Em seguida, mostraremos suas particularidades, propriedades e algumas aplicações. Através dessas aplicações, veremos o quão é vasto o campo de trabalho desse conceito. Por fim, faremos a exibição de alguns teoremas importantes relacionados ao Cálculo Diferencial, como por exemplo, o Teorema de Rolle, atribuído ao matemático francês Michel Rolle (1652

- 1719), o Teorema do Valor Médio, atribuído a Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), o Teorema do Valor Médio de Cauchy, que é a versão generalizada do Teorema criado por Lagrange, que resultará na Regra de L'Hôpital que recebe esse nome graças ao seu criador Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital (1661 - 1704) e o Teorema de Taylor que recebe seu nome do matemático britânico Brook Taylor, quem o enunciou em 1712.

Capítulo 1

Abordagem Histórica

O conceito de limite é a base do chamado cálculo infinitesimal, que ao surgir era constituído de duas partes: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O cálculo sempre se mostrou como uma das técnicas mais poderosas da matemática, sendo estudado por vários séculos pelos melhores cientistas até que acontecesse sua formalização.

A primeira datação do cálculo se dá por volta de 1850 a.C. por meio do Papiro Egípcio de Moscou ou Papiro Golonishev, em forma de tira, medindo 5,5 cm de comprimento por 8 cm de largura, onde apresenta 25 problemas matemáticos, entre eles, em especial, o cálculo do volume do tronco de uma pirâmide, o que se assemelha a função básica do cálculo integral de calcular volumes e áreas.

Já na idade média, mais especificamente no século XII, o matemático indiano Bhaskaracharya, desenvolveu uma derivada prematura representando uma mudança infinitesimal, e também o que seria uma forma primitiva do "Teorema de Rolle".

O alemão Johannes Kepler (1571- 1630) foi um dos primeiros matemáticos modernos a desenvolver trabalhos sobre o cálculo. Usando ideias de integração em seus trabalhos relacionados a Lei dos Movimentos Planetários. Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês, foi quem primeiro desenvolveu trabalhos usando claramente a ideia de derivada. Com base nos trabalhos de Kepler, Fermat desenvolveu um método que é conhecido como o Método de Fermat para determinar máximos e mínimos, este por sua vez é incompleto, pois não considera quando a derivada é nula.

Até hoje é possível encontrar controvérsias sobre seu descobrimento, a mais aceita é a chamada "Guerra do Cálculo".

No início do século XVIII, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716) e Sir Isaac

Figura 1.1: Papiro Golonishev.

Newton (1642-1726) estavam a ponto de entrar em guerra. Por mais de dez anos, até o final de suas vidas, estas duas brilhantes figuras estavam empenhadas no direito de reivindicar a autoria do Cálculo. Entre os anos de 1665 e 1666 Newton era um estudante da Universidade de Cambridge e estava em sua época mais criativa, mas teve que ficar recluso em sua cidade natal por conta da peste negra que se alastrava por Londres. Entre tantas descobertas nesse tempo, Newton descobriu o cálculo e o chamou de "Método de fluxos e fluentes". Mas manteve seu trabalho em segredo durante a maior parte de sua vida, mostrando apenas para amigos mais próximos e nunca publicou coisa alguma de seu trabalho. Posteriormente, usando diferenciação, Newton produziu métodos que resolviam problemas do cálculo de área, tangentes, comprimento de curvas e máximos e mínimos de funções.

Dez anos depois, Leibniz firmou seus estudos no Cálculo quando estudava na França, e durante dez anos pôde aperfeiçoar seus trabalhos. Ao contrário de Newton, Leibniz publicou suas descobertas, e criou um sistema totalmente original de símbolos e representações gráficas. Com isso, Leibniz reivindicou seus direitos intitulando-se como o inventor do Cálculo, o que fez com que ficasse reconhecido por muitos anos na Europa, como o maior matemático vivo. Newton por sua vez, não admitia que alguém levasse os créditos por uma descoberta feita por ele anos antes. As duas primeiras décadas do século XVIII presenciaram a deflagração das guerras do Cálculo.

Leibniz havia visto alguma coisa do trabalho inicial e inédito de Newton em uma viagem a Londres em 1673, o que foi o suficiente para dar a entender a este que Leibniz era um ladrão. Uma vez convencido disto, Newton passou decisivamente à ofensiva e utilizou sua influência, ele sabia que havia sido o primeiro a inventar o Cálculo – e podia prová-lo. Newton não agiu por malícia ou ciúme, mas pela firme convicção de que Leibniz era um ladrão. Também não houve recuo da parte de Leibniz, ele reagiu com a ajuda de partidários que afirmavam que fora Newton quem se apropriara das ideias de Leibniz. Além disto, Leibniz atuou sobre a comunidade de intelectuais da Europa, e fez a disputa chegar aos mais altos níveis do governo, até mesmo ao rei da Inglaterra.

Após adoecer e ficar em sua cama por, aproximadamente, quatro meses, Gottfried Leibniz faleceu em novembro de 1716 na Alemanha, sua terra natal. Mesmo com sua morte, Isaac Newton continuou a publicar artigos em sua defesa, e conseguiu o respeito e a certeza de todos de que havia descoberto o Cálculo antes de Leibniz. Após sua morte, em 1727, toda a Inglaterra acreditava na veracidade de seus documentos e atribuíam a ele a descoberta. Atualmente é creditada aos dois a descoberta do cálculo. Isso tudo mostra o quão humano podem ser duas mentes brilhantes quando está em jogo a disputa de apropriação intelectual.

Capítulo 2

Derivada

Inicialmente usaremos os conceitos de taxa de variação e de reta tangente a uma curva para definirmos a derivada de uma função como um caso particular de limite. Posteriormente, apresentaremos e demonstraremos algumas Regras de Derivação que serão de suma importância em nossas aplicações.

2.1 Taxa de variação

A taxa de variação média de y em relação a x quando x varia de x_1 para x_2 é dada pela razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $\Delta x = x_2 - x_1$, temos $x_2 = x_1 + \Delta x$. Assim,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Se a taxa de variação média de y em relação a x se aproxima de um valor limitado quando Δx tende a zero, obtemos a taxa de variação instantânea de y em relação a x.

Se $y = f(x)$, a taxa de variação instantânea de y em relação a x no instante $x = x_1$ é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad = \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir, passaremos a chamá-lo de derivada da função f no ponto x_1.

Agora, vamos calcular algumas taxas de variação nos exemplos seguintes

Exemplo 2.1 Uma partícula se move de modo que no instante t a distância percorrida é dada por $s(t) = t^3 - 2t + 1$.

a) Qual a velocidade da partícula no instante $t = 1s$?

b) Em que instante a aceleração é igual a $6m/s^2$?

Solução: a) Sendo $s(t) = t^3 - 2t + 1$, a velocidade quando $t = 1s$ é dada por

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1+\Delta t) - f(1)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(1+\Delta t)^3 - 2(1+\Delta t) + 1] - [1^3 - 2 \cdot 1 + 1]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\Delta t^3 + 3\Delta t^2 + 3\Delta t + 1 - 2 - 2\Delta t + 1] - 0}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t^3 + 3\Delta t^2 + \Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t^2 + 3\Delta t + 1) \\
&= 1m/s.
\end{aligned}$$

b) Sabemos que a aceleração de uma partícula é dada por $\dfrac{\Delta^2 s}{\Delta t^2}$. Portanto, sendo $s(t) = t^3 - 2t + 1$, segue que $a = \dfrac{\Delta^2 s}{\Delta t^2} = 6t$ e, daí $6t = 6$ ou $t = 1s$.

$\triangle$

Exemplo 2.2 Um quadrado se expande de modo que seu lado varia a razão de 5cm/s. Ache a taxa de variação de sua área no instante em que seu lado mede 15cm de comprimento.

Solução: Seja x o lado do quadrado. Logo, $\Delta x/\Delta t = 5cm/s$ e $A = x^2$. Daí,

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = 2x\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = 2 \cdot 15cm \cdot 5cm/s = 150cm^2/s.$$

$\triangle$

Exemplo 2.3 A equação horária de um corpo em movimento é dada por $s(t) = t^3$. Calcule a velocidade do corpo num instante t qualquer. Qual é a velocidade no instante $t = 4s$?

Solução: Sendo $s(t) = t^3$, vamos calcular a velocidade do corpo em um instante t qualquer.

$$\begin{aligned}
\Delta s &= s(t+\Delta t) - s(t) \\
&= (t+\Delta t)^3 - t^3 \\
&= 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3.
\end{aligned}$$

No intervalo $[t, t+\Delta t]$, temos

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2$$

e, portanto,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

Quando $t = 4s$, a velocidade é $v = 3 \cdot 16 = 48$ unidades de espaço por segundo. $\triangle$

2.1.1 Reta Tangente

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo (a, b), como na figura a seguir:

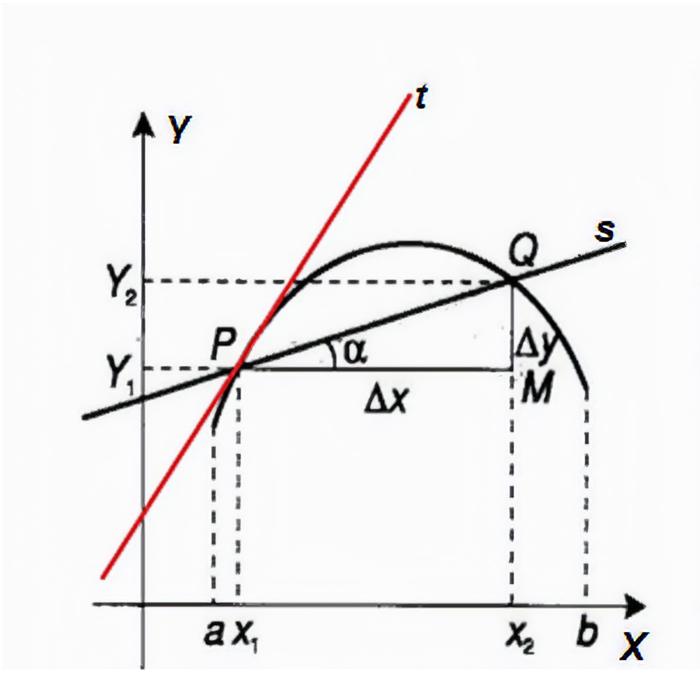

Figura 2.1: Reta Tangente.

Sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$. Agora, seja s a reta secante que passa pelos pontos P e Q. Levando em consideração o triângulo PMQ, verificamos que a inclinação α da reta s é

$$m_s = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

em que m_s é o coeficiente angular da reta s.

Supondo o ponto P fixo e o ponto Q se deslocando sobre a curva em direção a P. Consequentemente, a reta secante s tende a coincidir com a reta t tangente à curva no ponto P. A inclinação α da reta tangente à curva no ponto P é

$$m_t = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quando o limite existir. Observe que m_t é o limite da Taxa de Variação. Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, obtemos

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Assim, a derivada de uma função f no ponto x_1 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_1.

Equação da reta tangente

Se a função f é contínua em x_1,então a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$ é:

i) A reta que passa por P tendo inclinação

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Se este limite existe, tem-se a equação

$$y - f(x_1) = m(x - x_1)$$

ii) A reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \infty.$$

Exemplo 2.4 Mostre que a tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (x_0, y_0), diferente do vértice, corta o eixo das abcissas no ponto $x = \dfrac{x_0}{2}$.

Solução: Seja (x_0, y_0) o ponto de tangência. Assim, a equação da reta tangente nesse ponto seria:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Como $f'(x_0) = 2x_0$ e $f(x_0) = x_0^2$, segue que

$$t(x) = x_0^2 + 2x_0 \cdot (x - x_0)$$

Quando uma função qualquer corta o eixo x seu valor é zero, ou seja, $t(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
x_0^2 + 2x_0 \cdot (x - x_0) \quad &= \quad 0 \\
\Rightarrow \; 2x_0 x &= -x_0^2 + 2x_0^2 \\
\Leftrightarrow \; 2x_0 x &= x_0^2 \\
\Leftrightarrow \; x &= \frac{x_0}{2}
\end{aligned}$$

△

Exemplo 2.5 Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1).

Solução: Se $f(x) = x^2 - 2x + 1$, então

$$f(x_1) = x_1^2 - 2x_1 + 1$$

e

$$\begin{aligned}
f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^2 - 2(x_1 + \Delta x) + 1 \Leftrightarrow \\
&= x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da definição da inclinação da reta tangente, vem:

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x_1 - 2\Delta x + 1 - (x_1^2 - 2x_1 + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x - 2)}{\Delta x} = 2x_1 - 2.
\end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1) é

$$m(x_1) = 2x_1 - 2.$$

△

Exemplo 2.6 Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2.

Solução: O ponto da curva $y = 2x^2 + 3$, cuja abscissa é 2, é o ponto $P(2, f(2)) = (2, 11)$.

Vamos encontrar a inclinação dessa curva no ponto $P(2, 11)$. Para isso, encontraremos primeiro a inclinição da curva num ponto (x_1, y_1). Temos,

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 + 3 - (2x_1^2 + 3)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 - 2x_1^2 - 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot (4x_1 + 2\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (4x_1 + 2\Delta x) \\
&= 4x_1
\end{aligned}$$

Como $m(x_1) = 4x_1, \forall x_1 \in \mathbb{R}$ então $m(2) = 4 \cdot 2 = 8$. Logo, a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ em $P(2, 11)$ é dada por

$$\begin{aligned}
& y - f(x_1) &= m(x - x_1) \\
\Leftrightarrow \ & y - 11 &= 8(x - 2) \\
\Leftrightarrow \ & 8x - y - 5 &= 0
\end{aligned}$$

$\triangle$

2.2 Derivada de uma função

Seja $y = f(x)$ uma função real e seja $x_0 \in D_f \cap \mathbb{R}$. Consideremos o quociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ x \neq x_0.$$

Tal quociente é conhecido como coeficiente de Newton. Quando

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, dizemos que f é derivável em x_0 e o denotamos por $f'(x_0)$. Assim, temos

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ x \neq x_0$$

se fizermos $x - x_0 = h$ obtemos

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2.2.1 Notações da Derivada

A derivada foi criada independentemente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz no século XVII. Com o passar do tempo surgiram novas notações para representar a mesma. As mais usadas são:

$$f', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad D_x f.$$

Veremos agora, alguns exemplos da aplicação desta definição

Exemplo 2.7 Verifique se a função $f(x) = x^2 - 2x$ é derivável em $x_0 = 1$. Em caso afirmativo determine $f'(x_0)$.

Solução: Utilizando a definição já apresentada de derivada, tem-se

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2x)-(1^2-2\cdot 1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-1+2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}(x-1) = 0.
\end{aligned}$$

como $f'(1) = 0$, f é derivável em $x_0 = 1$. △

O Cálculo Diferencial é largamente utilizado na Física, vejamos uma aplicação da derivada no Movimento Uniforme (MU) e no Movimento Uiformemente Variado.

Seja s a função que determina a posição de um objeto em um determinado instante t, de modo que

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Assim,

$$v = \frac{ds}{dt} = (s_0)' + (v \cdot t)' = 0 + v = v = cte$$

Calculando a aceleração deste objeto, segue que

$$a = \frac{dv}{dt} = 0.$$

Portanto, como a velocidade é constante e a aceleração é nula, o movimento é uniforme. Agora, considere a função

$$s = s_0 \ + \ v_0 \cdot t \ + \ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Daí,

$$v = \frac{ds}{dt} = (s_0)' + (v_0 \cdot t)' + \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2\right)' = v_0 + a \cdot t.$$

Portanto,

$$\frac{dv}{dt} = (v_0)' + (a \cdot t)' = a = cte.$$

Como a velocidade varia uniformemente no decorrer do tempo e a aceleração é constante, o movimento é uniformemente variado. Em cada ponto x, a tangente à reta $y = mx + b$ coincide com a própria reta e, portanto, todas as retas tangentes tem a inclinação m. Isso sugere geometricamente que se $f(x) = mx + b$, então $f'(x) = m$ para todo x. De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[m(x+h) + b] - [mx + b]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h \to 0} m = m. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a taxa de variação de y em relação a x ao longo da reta $y = mx+b$ é constante, e essa constante é m.

Proposição 2.1 *Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0 .*

Demonstração: Consideremos a igualdade

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Calculando o limite quando $h \to 0$ e sendo f derivável em x_0 temos :

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h \\ &= \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right] \cdot \left[\lim_{h \to 0} h\right] = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$. Logo, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ou seja, f é contínua em x_0.

Observe que a recíproca dessa proposição não é verdadeira. Para comprovarmos isso, seja $f(x) = |x|\,,\ x \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é mostrar que f não possui derivada no ponto $x_0 = 0$. Calculando as derivadas laterais de f em $x = 0$, obtemos

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Como $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, consequentemente, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ não existe. Logo, $f(x)$ não é derivável em $x = 0$. $\triangle$

2.2.2 Regras de Derivação

Uma função f é dita diferenciável ou derivável em x, quando $f'(x)$ existir. As regras de derivação permitem determinar as derivadas das funções sem o uso do cálculo do limite presente na definição. Vejamos algumas delas.

1) Função Constante: *Se* $f(x) = c$ *com* $c \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f$ *, então* $f'(x) = 0$. De fato, aplicando a definição da derivada, segue que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2) Função Identidade: *Se* $f(x) = x, \forall x \in D_f$ *, então* $f'(x) = 1$. Aplicando a definição da derivada, segue que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

3) *Se* $f(x) = x^n$ *com* $n \in \mathbb{R}^*, \forall x \in D_f$ *, então* $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. De fato, se $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{R}^*$, então $f(x+h) = (x+h)^n$. Assim,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Expandindo $(x+h)^n$ pelo Teorema Binomial com $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + ... + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + ... + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

4) *Se g é uma função definida por $g(x) = c \cdot f(x)$ com $c \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f$ então $g'(x) = c \cdot f'(x)$, $\forall x \in D_f$.* Aplicando a definição de derivada, segue que

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\
&= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x)
\end{aligned}$$

$\triangle$**5**) **5**) *Se f e g são deriváveis em x, então $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.* Utilizando novamente a definição de derivada, obtemos

$$\begin{aligned}
[f(x) + g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] + \left[\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

$\triangle$**3**) **6**) **Regra do Produto:** *Se f e g são deriváveis em x, então*

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

De fato,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) \cdot g(x+h)] - [f(x) \cdot g(x)]}{h}$$

Adicionando e subtraindo ao numerador a expressão $f(x+h)\cdot g(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
[f(x)\cdot g(x)]' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]+g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}\\
&= \left[\lim_{h\to 0}f(x+h)\right]\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\left[\lim_{h\to 0}g(x)\right]\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= \left[\lim_{h\to 0}f(x+h)\right]\cdot g'(x)+\left[\lim_{h\to 0}g(x)\right]\cdot f'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

7) Regra da Inversa Aritmética: *Seja g uma função diferenciável em x e suponha que $g(x)\neq 0, \forall x\in D_g$. Seja h uma função definida por $h(x)=1/g(x)$, $\forall x\in D_g$. Então, h é diferenciável em x e*

$$h'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{1}{g(x)}\right)'\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{1}{g(x)}(x+h)-\frac{1}{g(x)}(x)\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)}\right]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\\
&= \left[\lim_{h\to 0}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\right]\\
&= -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

△

8) Regra do Quociente: *Se f e g são deriváveis em x, então*

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},\ \text{com } g(x)\neq 0.$$

Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$; ao aplicarmos a Regra do Produto e a Regra da Inversa Aritmética, temos

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right]' \\
&= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}$$

9) *Se* $f(x) = a^x$ $(a > 0$ *e* $a \neq 1)$, *então* $f'(x) = a^x \cdot lna$. Aplicando a definição da derivada em $f(x) = a^x$, obtemos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{(x+h)} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} \\
&= \left[\lim_{h \to 0} a^x\right] \cdot \left[\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}\right] \\
&= a^x \cdot \ln a
\end{aligned}$$

△

2.2.3 Regra da Cadeia

Uma das fórmulas mais úteis do Cálculo Diferencial é a Regra da Cadeia, usada para calcular a derivada da composta de uma função com outra. Para determiná-la vamos inicialmente provar o seguinte resultado.

Lema 1: *Se f derivável em u, então existe uma função φ contínua em 0 tal que:*

$$f(u + k) - f(u) = kf'(u) + k\varphi(k), \forall k \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Como $f'(u)$ existe, podemos definir a função $\varphi(k)$ da seguinte forma:

$$\varphi(k) = \begin{cases} \dfrac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u) \text{ se } k \neq 0 \\ 0 \text{ se } k = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{k \to 0} \varphi(k) = \lim_{k \to 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k} - f'(u) = f'(u) - f'(u) = 0 = \varphi(0)$$

e vale a igualdade:

$$k\varphi(k) = f(u+k) - f(u) - kf'(u)$$

ou seja,

$$f(u+k) - f(u) = kf'(u) + k\varphi(k), \forall k \in \mathbb{R}$$

$\triangle$

Teorema 2.1 *Sejam f e g funções tais que $f'(g(x))$ e $g'(x)$ existem. Então $(f \circ g)'(x)$ existe e*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Obs: Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções deriváveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Demonstração: Sejam $u = g(x)$ e $k = g(x+h) - g(x)$. Notemos que, quando $h \to 0$, temos $k \to 0$ pois g é contínua em x. Fazendo uso do **Lema 1** e os valores de u e de k no quociente de Newton, apresentado na definição da derivada, para $f \circ g$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} &= \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(u+k) - f(u)}{h} \\
&= \frac{kf'(u) + k\varphi(k)}{h} \\
&= \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f'(u)\right] + \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \varphi(k)\right]
\end{aligned}$$

Agora, tomando limite quando $h \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} \\
&= \left[\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f'(u)\right] + \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \varphi(k)\right] \\
&= [g'(x) \cdot f'(u)] + g'(x) \cdot 0 = f'(g(x)) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

$\triangle$

Nos exemplos a seguir, veremos algumas maneiras de utilizar a definição da Regra da Cadeia.

Exemplo 2.8 Uma partícula está em um movimento harmônico simples. Se a equação do seu movimento é dada pela fórmula $s(t) = A \cdot \cos(wt + \delta)$ com A, w e δ constantes, determine a equação da velocidade dessa partícula.

Solução: Como $v(t) = ds/dt$ e $s(t) = A \cdot \cos(wt + \delta)$, pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{ds}{dt} \\ &= A \cdot [-\text{sen}(wt + \delta)] \cdot w \\ &= -A \cdot w \cdot \text{sen}(wt + \delta) \end{aligned}$$

$\triangle$

Exemplo 2.9 Mostre que:

a) a derivada de uma função diferenciável par é uma função ímpar.

b) a derivada de uma função diferenciável ímpar é uma função par.

Solução: a) Seja f uma função par, ou seja, $f(x) = f(-x), \forall x \in D_f$. Se $h(x) = -x, \forall x \in D_f$, então

$$f(x) = (f \circ h)(x), \forall x \in D_f$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f \circ h)' \cdot (x) \\ &= f'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= f'(-x) \cdot (-1) \\ &= -f'(-x) \end{aligned}$$

para todo $x \in D_f$. Logo, f' é uma função ímpar.

b) Seja g uma função ímpar, ou seja, $g(x) = -g(-x)$,$\forall x \in D_g$. Se $h(x) = -x, \forall x \in D_g$, então

$$g(x) = -(g \circ h)(x), \forall x \in D_g$$

Logo,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(g \circ h)'(x) \\ &= g'(-x) \end{aligned}$$

para todo $x \in D_g$. Logo, g' é uma função par. $\triangle$

2.2.4 Derivadas das Funções Trigonométricas

Agora, apresentaremos e, em seguida demonstraremos, a derivada de das principais funções trigonométricas.

1) *Se* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *então* $f'(x) = \cos x$. Usando a definição de derivada, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos h+\operatorname{sen} h\cdot\cos x-\operatorname{sen} x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\cos x+\frac{\operatorname{sen} x\cdot(\cos h-1)}{h}\right] \\ &= \cos x\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]+\operatorname{sen} x\cdot\left[\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}\right] \\ &= \cos x\cdot 1+\operatorname{sen} x\cdot 0 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Obs: Como limite $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ é um limite fundamental tal que $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}\cdot\frac{(\cos h+1)}{(\cos h+1)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h\cdot(\cos h+1)} \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}^2 h+\cos^2 h = 1$, temos $\cos^2 h = 1-\operatorname{sen}^2 h$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h\cdot(\cos h+1)} &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}^2 h-1}{h\cdot(\cos h+1)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h+1} = 1\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

2) *Se* $f(x) = \cos x$, *então* $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. Como $f(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, ao aplicarmos a Regra da Cadeia, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen} x\right)\cdot(-1) \\ &= (0\cdot\cos x+1\cdot\operatorname{sen} x)\cdot(-1) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

3) *Se* $f(x) = \tan x$, *então* $f'(x) = \sec^2 x$. Como $tg\ x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos\ x}$; ao aplicarmos a Regra do Quociente, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos\ x \cdot (sen\ x)' - sen\ x \cdot (\cos\ x)'}{\cos^2\ x} \\ &= \frac{1}{\cos^2\ x} = \sec^2\ x \end{aligned}$$

4) *Se* $f(x) = \cot\ x$*, então* $f'(x) = -\csc^2\ x$. Como $\cot\ x = \dfrac{1}{\tan\ x}$; utilizando a Regra do Quociente, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{0 \cdot \tan x - 1 \cdot (\tan x)'}{\tan^2 x} \\ &= -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x \end{aligned}$$

5) *Se* $f(x) = \sec\ x$*, então* $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$. Sabemos que $\sec x = \dfrac{1}{\cos\ x}$, usando este fato e a Regra do Quociente, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos\ x}\right)' \\ &= \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos\ x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos\ x} = \sec x \cdot \tan x \end{aligned}$$

6) *Se* $f(x) = \csc x$*, então* $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$. Como $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$; fazendo uso da Regra do Quociente, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\csc x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)' \\ &= \frac{0 \cdot \operatorname{sen} x - 1 \cdot (\operatorname{sen} x)'}{sen^2 x} = -\frac{\cos\ x}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \text{-}\frac{\cos\ x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\csc(x) \cdot \cot(x) \end{aligned}$$

2.3 Derivação Implícita

Até agora vimos equações em termos de apenas uma variável, seja ela x ou y. Veremos agora equações com uma relação implícita entre as variáveis x e y.

Considere a equação $F(x, y) = c$, onde c é uma constante e F é uma função. Dizemos que a função $y = f(x)$ é definida implicitamente por essa equação, se ao substituirmos y por $f(x)$ a mesma se transformar numa identidade, ou seja,

$$F(x, f(x)) = c, \forall x.$$

Agora em algumas aplicações de diferentes ramos, faremos uso desta definição para resolver as situações problemas.

Exemplo 2.10 Uma escada de $5m$ de comprimento está apoiada em uma parede. A base da escada escorrega, afastando-se da parede a uma taxa (velocidade) de $2cm/seg$. Com que velocidade cai o topo da escada, no momento em que a base da escada está a $3m$ da parede?

Solução: Sejam x e y as distâncias da base e do topo da escada à base da parede, respectivamente. Como mostra a Figura 2.2.

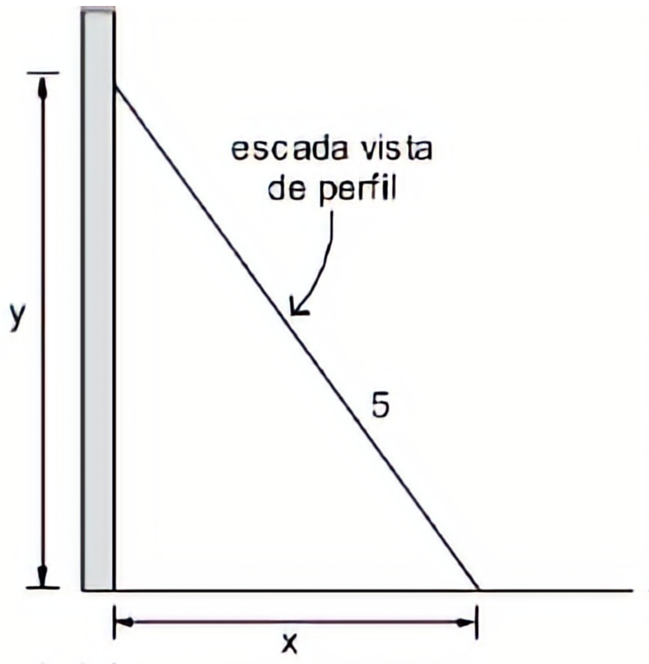

Figura 2.2: Escada Relativa ao Problema.

Temos,

$$\frac{dx}{dt} = 2\ cm/seg$$

Usando o Teorema de Pitágoras, obtemos $x^2 + y^2 = 25$. Derivando implicitamente em relação a t, segue que

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Observe que quando $x = 3$ e $m = 300\ cm$, temos $y = 4$ e $m = 400\ cm$. Daí,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-3}{4} \cdot 2 = -1,5\ cm/seg$$

Neste instante, a velocidade com que o topo da escada cai é $1,5\ cm/seg$. △

Exemplo 2.11 Dois carros se deslocam em estradas perpendiculares, um para o norte com velocidade média de 48 km/h e o outro para o leste, com velocidade média de 60 km/h. O segundo carro passou pelo cruzamento das estradas 2 horas depois do primeiro. Determine a taxa de variação da distância entre os carros 3 horas após o segundo carro passar pelo cruzamento.

Solução: Sejam y a distância do carro A, que vai para o norte, ao ponto de cruzamento O e x a distância do carro B, que vai para leste, ao ponto de cruzamento O. Seja z a distância entre os carros. Três horas após o segundo carro passar pelo cruzamento, o primeiro terá se deslocado 5 horas após passar por O. Logo a distância de A até O é dada por

$$y = v_A \cdot \Delta t = 48 \cdot 5 = 240\ km$$

Neste mesmo instante, o carro B terá se deslocado por 3 horas após passar pelo cruzamento, assim, a distância de B até O é

$$x = v_B \cdot \Delta t = 60 \cdot 3 = 180\ km$$

Pelo Teorema de Pitágoras, segue que $z^2 = x^2 + y^2$, onde z é a distância entre os carros. No instante em que $x = 180$ e $y = 240$, o valor de z é igual a

$$z^2 = 180^2 + 240^2 = 90000 \Rightarrow z = 300$$

Derivando a equação $z^2 = x^2 + y^2$ e substituindo os valores de z, x, y, $\dfrac{dx}{dt}$ e $\dfrac{dy}{dt}$, obtemos

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2z \cdot \frac{dz}{dt} &= 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{z} \cdot \left(x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} \right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dz}{dt} &= 74\ km/h. \end{aligned}$$

△

Exemplo 2.12 A que taxa cresce o volume de uma bola de neve esférica, sabendo que o raio cresce à razão de 5 cm/s, no instante em que ele mede 10 cm?

Solução: Sabemos que $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ é o volume da esfera de raio r e que $\dfrac{dr}{dt} = 5cm/s$
.

Fazendo uso da Regra da Cadeia, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right)' \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}\Big|_{r=10} &= 4\pi \cdot 10^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= 4\pi \cdot 100 \cdot 5 \\ &= 2000\pi \end{aligned}$$

Portanto, o volume da esfera cresce a $2000\pi\ cm^3/s$. △

Exemplo 2.13 Um balão esférico perde ar por um furo de tal forma que seu raio diminui a uma taxa de $2cm/\min$. Qual a taxa de diminuição do volume, quando o raio do balão for de $50cm$?

Solução: Consideremos r o raio e V o volume do balão. Como o balão é esférico seu volume é dado por

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dr} &= 4\pi \cdot r^2 \end{aligned}$$

Usando a Regra da Cadeia e substituindo $r = 50cm$ e $\dfrac{dr}{dt} = -2$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ &= 4\pi \cdot (50cm)^2 \cdot (-2) \\ &= 4\pi \cdot 2500 \cdot (-2) \\ &= -20000\pi \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de diminuição do volume é de $20000\pi \ cm^3/\min$. △

Exemplo 2.14 Uma mancha de óleo expande-se em forma de círculo onde a área cresce a uma taxa constante de 26 km^2/h. Com que rapidez estará variando o raio da mancha quando a área for de 9 km^2?

Solução: Sejam r e A o raio e a área da mancha em questão, respectivamente. Sabemos que

$$A = \pi \cdot r^2$$

Daí, derivando implicitamente, obtemos

$$\frac{dA}{dr} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt}$$

Já nos foi dado que $\dfrac{dA}{dr} = 26 \ km^2/h$, mas ainda precisamos do valor do raio para substitutuir. Sendo assim,

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot r^2 \\ \Leftrightarrow \quad 9 &= \pi \cdot r^2 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{9}{\pi} &= r^2 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{9}{\pi}} &= \sqrt{r^2} \\ \Leftrightarrow \quad r &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} km \end{aligned}$$

Substituindo os valores, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad 26 &= \pi \cdot 2\frac{3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{dr}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad 26\sqrt{\pi} &= 6\pi \cdot \frac{dr}{dt} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{dt} &= \frac{26\sqrt{\pi}}{6\pi} = \frac{13\sqrt{\pi}}{3}\ km/h \end{aligned}$$

Portanto, o raio da mancha varia à $\dfrac{13\sqrt{\pi}}{3}\ km/h$. △

2.4 Derivadas Sucessivas

Seja f' a derivada de f. Se calcularmos a função derivada de f', nos pontos em que ela exista, chamaremos de derivada segunda de f a essa função e a indicamos por f''. De modo análogo, podemos definir a derivada terceira, quarta, etc. A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f em x, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f em x.

Capítulo 3

Teoremas Importantes do Cálculo Diferencial

Inicialmente, introduziremos alguns conceitos e resultados que serão de suma importância na demonstração desses teoremas.

Definição 3.1 *Uma função f definida em um intervalo fechado $[a, b]$ é contínua neste intervalo se f é continua em (a, b) e se*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad e \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Definição 3.2 *Sejam f uma função definida em um conjunto S de números reais e c um número em S. Dizemos que*

i) *$f(c)$ é o valor máximo de f em S se $f(c) \geq f(x) \;\; \forall \, x \in S$;*

ii) *$f(c)$ é o valor mínimo de f em S se $f(c) \leq f(x) \;\; \forall \, x \in S$.*

Teorema 3.1 *Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e assume seu valor máximo ou mínimo em um ponto $c \in (a, b)$, então ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Demonstração: Suponha que f tem um valor máximo ou mínimo em $x = c$. Se $f'(c)$ não existe, então o teorema está provado. Se $f'(c)$ existe, então podemos ter uma dessas seguintes possibilidades:

i) $f'(c) > 0$

ii) $f'(c) < 0$

iii) $f'(c) = 0$

Chegaremos a iii) provando que nem i) nem ii) podem ocorrer. Assim, supondo que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0,$$

então pelas propriedades de limite de uma função, existe um intervalo aberto (a', b') contendo c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \ \forall x \in (a', b') \text{ e } x \neq c.$$

Assim,

$$\begin{array}{ccc} f(x) - f(c) > 0 \text{ sempre que } x - c > 0 & \Rightarrow & f(c) < f(x) \text{ sempre que } x > c \\ & \text{ou} & \\ f(x) - f(c) < 0 \text{ sempre que } x - c < 0 & \Rightarrow & f(c) > f(x) \text{ sempre que } x < c \end{array}$$

Isso quer dizer que f não possui valor máximo e nem mínimo, o que contradiz nossa hipótese, consequentemente, i) não pode ocorrer.

Agora, suponha que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

Logo, existe um intervalo aberto (a', b') contendo c tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \ \forall x \in (a', b') \text{ e } x \neq c.$$

Assim,

$$\begin{array}{ccc} f(x) - f(c) > 0 \text{ sempre que } x - c < 0 & \Rightarrow & f(c) < f(x) \text{ sempre que } x < c \\ & \text{ou} & \\ f(x) - f(c) < 0 \text{ sempre que } x - c > 0 & \Rightarrow & f(c) > f(x) \text{ sempre que } x > c \end{array}$$

ou seja, numa vizinhança de c, $f(x) < f(c) < f(x)$ e então $f(c)$ não é valor máximo nem mínimo, consequentemente, ii) não pode ocorrer. Portanto, $f'(c) = 0$. $\triangle$

Agora, já dispomos de informações suficientes para provarmos um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial. Geometricamente, este teorema nos diz que se uma curva diferenciável toca ou corta o eixo x em dois pontos, então deve haver pelo menos um ponto sobre a curva entre esses pontos em que a tangente é horizontal. Isso é mostrado claramente na figura abaixo

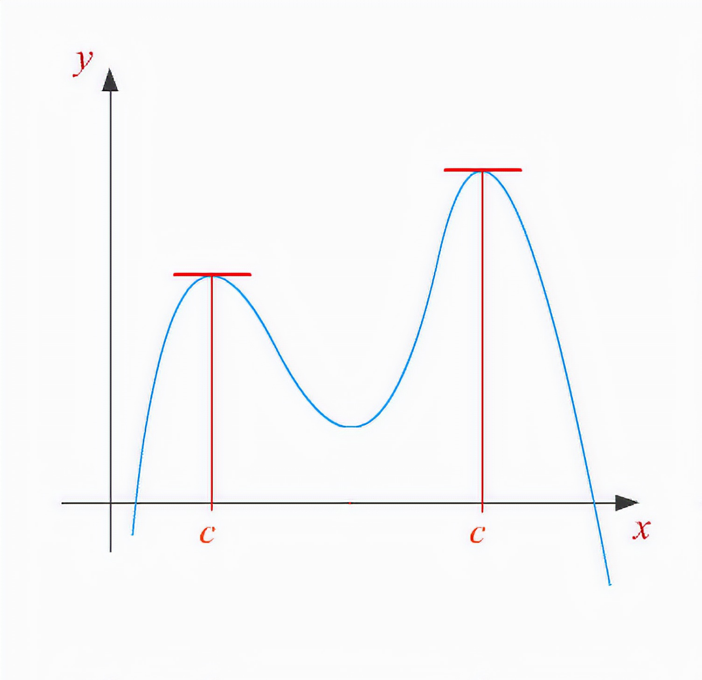

Figura 3.1: Teorema de Rolle.

3.1 Teorema de Rolle

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) e se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração: Dividiremos nossa prova em três etapas:

Etapa 1 Se $f(x) = f(a) = f(b)\ \forall\ x \in (a, b)$, então f é uma função constante, e daí, $f'(x) = 0$ para todo x;

Etapa 2 Se existir $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor máximo de f em $[a, b]$ será obtido em algum $c \in (a, b)$ e como f é diferenciável em (a, b), concluímos, pelo **Teorema 2**, que $f'(c) = 0$.

Etapa 3 Se existir $x \in (a, b)$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, então o valor mínimo de f em $[a, b]$ será obtido em algum $c \in (a, b)$. De modo análogo a etapa anterior, segue que $f'(c) = 0$. $\triangle$

O próximo teorema geometricamente nos diz que entre dois pontos P e Q sobre a curva de uma função diferenciável existe pelo menos um ponto em que a reta tangente a curva é paralela à corda que liga P e Q, como mostra a figura a seguir.

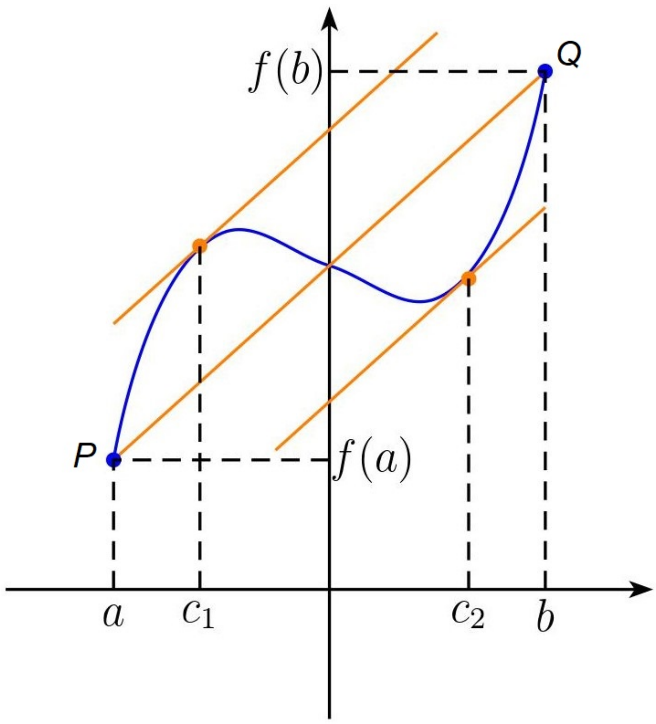

Figura 3.2: Paralelismo entre a Reta Tangente e a Corda PQ.

3.2 Teorema do Valor Médio

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b), então existe pelo menos um número $c \in (a,b)$, tal que

$$f(b) - f(a) \quad = \quad f'(c) \cdot (b-a)$$

Demonstração: A equação da reta s é dada por

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m \cdot (x - x_0) \\ \Leftrightarrow \quad y - f(a) &= \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \end{aligned}$$

Fazendo $y = h(x)$, obtemos

$$h(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right] + f(a)$$

Como h é uma função polinomial, h é contínua e derivável em $\mathbb{R}$. Considere a função $g(x) = f(x) - h(x), \forall x$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right] - f(a)$$

Observe que a função g satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. De fato, g é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) pois f e h o são. Além disso, $g\,(a) = g\,(b) = 0$ pois

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) - f(a) = 0$$

e

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) - f(a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, existe pelo menos um número $c \in (a, b)$, tal que $g'(c) = 0$. Assim, temos

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Daí, segue que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

$\triangle$

Agora, apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Valor Médio e inicialmente mostraremos sua importância na construção de gráficos de funções ao determinar os intervalos onde uma curva $y = f(x)$ é crescente ou decrescente.

Teorema 3.2 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).*

i) Se $f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

ii) Se $f'(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração: Sejam quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2\,(x_2 - x_1 > 0)$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2), pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$, tal que:

$$f\,(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \quad (\star)$$

i) Suponha $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in (a, b)$. Assim, $f'(c) > 0$ e como $x_2 - x_1 > 0$, concluímos, analisando a igualdade $(\star)$, que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Longrightarrow f(x_{1)} < f(x_2)$$

Portanto, f é crescente em $[a, b]$.ii) Suponha $f'(x) < 0 \; \forall \; x \in (a, b)$. Daí, $f'\,(c) < 0$ e como $x_2 - x_1 > 0$, concluímos, analisando a igualdade $(\star)$, que

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Portanto, f é decrescente em $[a, b]$. $\triangle$

Exemplo 3.1 Seja a função $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29$. Determine os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

Solução: Calculando a derivada de f em $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{array}{rrcl} & f'(x) & = & 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 29 \\ \Rightarrow & f'(x) & = & 12x^3 + 12x^2 - 72x \\ \Leftrightarrow & f'(x) & = & 12x \cdot (x^2 + x - 6) \\ \Leftrightarrow & f'(x) & = & 12x \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \end{array}$$

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, segue que

$$12x \cdot (x + 3) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Agora, basta analisar individualmente os sinais de cada fator e multiplicá-los. Assim sendo, temos quatro casos a serem analisados.

Caso 1 :$x < -3$

Substituindo $x = -4$ na função $f'(x)$, obtemos

$$f'(-4) = 12 \cdot (-4) \cdot (-4 + 3) \cdot (-4 - 2) = (-48) \cdot (-1) \cdot (-6) = -288$$

Como o sinal de $f'(x)$ é negativo, então f é decrescente.

Caso 2 :$-3 < x < 0$

Tomemos $x = -1$. Daí,

$$f'(-1) = 12(-1)(-1+3)(-1-2) = -12 \cdot 2 \cdot -3 = 72.$$

Como o sinal de $f'(x)$ é positivo, então f é crescente.

Caso 3 :$0 < x < 2$

Tomando $x = 1$. Temos,

$$f'(1) = 12(1)(1+3)(1-2) = 12 \cdot 4 \cdot -1 = -48.$$

Note que o sinal de $f'(x)$ é negativo, logo f é decrescente.

Caso 4 :$x > 2$

Tomemos $x = 3$. Daí,

$$f'(3) = 12(3)(3+3)(3-2) = 36 \cdot 6 \cdot 1 = 216.$$

Como o sinal de $f'(x)$ é positivo, então f é crescente. △

A seguir, veremos algumas aplicações do Teorema do Valor Médio.

Exemplo 3.2 Foram necessários 14 s para que um termômetro de mercúrio subisse de $-19°C$ para $100°C$ após ser retirado do congelador e colocado em água fervente. Demonstre que em algum ponto a coluna de mercúrio subia a 8,5$°C/s$.

Solução: Seja $T(t)$ a temperatura do termômetro no tempo t, então $T(0) = -19°C$ e $T(14) = 100°C$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe t_0 com $0 < t_0 < 14$, tal que

$$\begin{aligned} T(14) - T(0) &= T'(t_0) \cdot (14 - 0) \\ \Rightarrow \quad T'(t_0) &= \frac{T(14) - T(0)}{(14 - 0)} \\ \Leftrightarrow \quad T'(t_0) &= \frac{100 - (-19)}{14} = \frac{119}{14} = 8,5°C/s \end{aligned}$$

△

Exemplo 3.3 Um caminhoneiro apresentou um bilhete na cabine do pedágio que mostrava que em 2 horas ele havia percorrido 159 milhas em um estrada cujo limite de velocidade era de 65 milhas/hora. Ele foi multado por excesso de velocidade. Por quê?

Solução: Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{array}{rrcl} & V(2)-V(0) & = & V'\cdot(2-0)\\ \Rightarrow & V' & = & \dfrac{V(2)-V(0)}{(2-0)}\\ \Leftrightarrow & V' & = & \dfrac{159-0}{2-0}\\ \Leftrightarrow & V' & = & \dfrac{159}{2}\\ \Leftrightarrow & V' & = & 79,5\; milhas. \end{array}$$

O cálculo feito acima retrata a velocidade média do caminhão, e pelo Teorema do Valor Médio, podemos concluir que ele deve ter ido nessa velocidade ao menos uma vez durante o trajeto. △

Exemplo 3.4 Sabendo que a média geométrica de dois números positivos a e b é o número $\sqrt{ab}$. Mostre que o valor de c na conclusão do Teorema do Valor Médio para $f(x) = 1/x$ em um intervalo de números positivos $[a, b]$ é $c = \sqrt{ab}$.

Solução: Pelo Teorema do Valor Médio, segue que $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Aplicando-o na função $f(x) = 1/x$, obtemos

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a} & = & \left(-\dfrac{1}{c^2}\right)\cdot(b-a)\\ \Leftrightarrow & -\dfrac{1}{c^2} & = & \dfrac{\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)}{b-a}\\ \Leftrightarrow & c^2\cdot\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right) & = & -(b-a)\\ \Leftrightarrow & c^2 & = & (a-b)\cdot\left(\dfrac{ab}{a-b}\right)\\ \Leftrightarrow & c^2 & = & abc\\ \Leftrightarrow & c & = & \sqrt{ab} \end{array}$$

△

Exemplo 3.5 Sabendo que a média aritmética de dois números a e b é $(a + b)/2$. Mostre que o valor de c na conclusão do Teorema do Valor Médio para $f(x) = x^2$ em qualquer intervalo $[a, b]$ é $c = (a + b)/2$.

Solução: Pelo Teorema do Valor Médio, segue que $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. Aplicando-o a função $f(x) = x^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
b^2 - a^2 &= 2c \cdot (b - a) \\
2c &= \frac{b^2 - a^2}{(b - a)} \\
2c &= \frac{(b - a) \cdot (b + a)}{(b - a)} \\
2c &= b + a \\
c &= \frac{a + b}{2}
\end{aligned}$$

△

Corolário 3.1 Se $f'(x) = 0$ em todos os pontos de um intervalo I, então $f(x) = c$ para qualquer x em I, onde c é uma constante.

Prova: Sejam quaisquer $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_2 > x_1$, ou seja, $x_2 - x_1 > 0$. Para provarmos que f é uma função constante em I, basta mostrarmos que $f(x_1) = f(x_2)$. Como f é diferenciável em (x_1, x_2) e consequentemente contínua neste intervalo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$, tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$$

Como $f(x) = 0$ ao longo de I, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \Longrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

△

Se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe, então $x = c$ é chamado de ponto crítico de f e $f(c)$ pode ser um mínimo local, máximo local ou nenhum dos dois. Agora que relacionamos crescimento e decrescimento do gráfico de uma função com o sinal da derivada, podemos usar esta para, dado um ponto $x = c$ tal que $f'(c)$, dizer em quais das três opções ele se enquadra.

Os máximos e mínimos locais acontecem exatamente quando há mudança de sinal em f'. Essa busca por esses resultados é chamada Teste da Derivada Primeira.

Proposição 3.1 *Sejam uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b), e c um ponto crítico de f.*

i) *Se f' passa de positiva para negativa em c, então f tem máximo local em c.*

ii) *Se f' passa de negativa para positiva em c, então f em mínimo local em c.*

iii) *Se f' não muda o sinal em c, então f não tem máximo e nem mínimo local em c.*

Agora, usaremos o Teorema de Rolle para provarmos uma extensão técnica do Teorema do Valor Médio que será necessária para estabelecer a Regra de L' Hôpital.

3.3 Teorema do Valor Médio de Cauchy

Se f e g são duas funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) e se $g'(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in (a, b)$, então existe pelo menos um número $z \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Demonstração: Note que se $g(a) = g(b)$, então, pelo Teorema de Rolle, g' se anula em algum ponto entre a e b, o que contradiz à hipótese.. Logo $g(a) \neq g(b)$.

Agora, considere a função

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot [g(x) - g(a)]$$

e observe que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. De fato, h é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), pois f e g o são. Além disso, $h(a) = h(b) = 0$, isso porque,

$$h(a) = f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot [g(a) - g(a)] = 0$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - f(a) - \left[\tfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right] \cdot [g(b) - g(a)] \\ &= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, existe pelo menos um número $z \in (a, b)$ tal que $h'(z) = 0$. Derivando h

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot g'(x)$$

logo

$$f'(z) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right] \cdot g'(z) = 0$$

Mas $g'(z) \neq 0$. Daí, segue que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

$\triangle$

Corolário 3.2 *Se $f'(x) = g'(x)$ em todo ponto de um intervalo I, então existe uma constante c tal que*

$$f(x) = g(x) + c$$

para qualquer x em I.

Prova: Em cada ponto x de I, a derivada da função $h = f - g$ é

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Assim, pelo **Corolário 4.2.7**, $h(x) = c$, onde c é uma função constante. Isto é,

$$f(x) - g(x) = c$$

em I, então $f(x) = g(x) + c$. $\triangle$

Corolário 3.3 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que*

$$[f'(x)] \leqslant K \ \forall \ x \in I,$$

então

$$|f(y) - f(x)| \leqslant K \cdot (y - x) \quad \forall \ x, y \in I.$$

Prova: Sejam quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$. Como f é contínua no intervalo fechado $[x, y]$ e diferenciável em (x, y), pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x)$$

Assim,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c) \cdot (y - x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leqslant K \cdot |y - x|$$

$\triangle$

Diante do que já foi explorado, podemos enunciar uma regra para resolver problemas que contenham limites indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Tal mecanismo é conhecido como a Regra de L'Hôpital.

3.3.1 Regra de L'Hôpital

Sejam f e g duas funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs: O mesmo vale se a for substituido por $a^+, a^-, \infty, -\infty$, ou seja, o mesmo vale para limites laterais no infinito. No caso de limites no infinito o intervalo I deve ser do tipo (b, ∞) para $x \to \infty$ e do tipo $(-\infty, b)$ para $x \to -\infty$.

Demonstração: Inicialmente, faremos a demonstração para limites laterais à direita $x \to a^+$.

Suponha então que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, e que $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Nosso objetivo é provarmos que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Considere as funções F e G definida em I por

$$F(x) = \{ \begin{matrix} f(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{matrix} \text{ e } G(x) = \{ \begin{matrix} g(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{matrix}$$

Seja $x \in I$, com $x > a$. Como f e g são deriváveis em $I \setminus \{a\}$, então as funções F e G são deriváveis no intervalo $(a, x]$ e, portanto, contínuas em $(a, x]$. Mas F e G também são contínuas em $x = a$ pois

$$\lim_{x\to a^+} F(x) \quad = \quad \lim_{x\to a^+} f(x) \quad = \quad 0 \quad = \quad F(a)$$

e

$$\lim_{x\to a^+} G(x) \quad = \quad \lim_{x\to a^+} g(x) \quad = \quad 0 \quad = \quad G(a)$$

Assim, F e G são contínuas em $[a, x]$, deriváveis em (a, x) e vale que $G\prime(x) \neq 0$ em (a, b). Como essas hipóteses atendem às condições do Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe um $c_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}.$$

Mas $F(a) = G(a) = 0$, $F'(c_x) = f'(c_x)$ e $G'(x) = g'(c_x)$ para $c_x \in (a, x)$. Portanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \; (\star)$$

Fazendo agora o limite quando $x \to a^+$ em $(\star)$, como $c_x \in (a, x)$, temos que $c_x \to a^+$, o que resulta em

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

o que conclui a prova para o limite lateral à direita $x \to a^+$. A demonstração para o limite à esquerda é análoga e podemos assim considerar provado o caso dos limites $x \to a^+$, $x \to a^-$ e $x \to a$.

Provaremos agora a Regra de L'Hôpital para limites no infinito $x \to \pm\infty$. Faremos para o caso $x \to \infty$. A prova do caso $x \to -\infty$ é análoga.

Sejam f e g funções deriváveis no intervalo (b, ∞) tais que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (b, \infty)$ e suponha que exista $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Provaremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Fazendo $t = \dfrac{1}{x}$ para $x > b$, temos $0 < t < \dfrac{1}{b}$ para $b < x < \infty$ e $t \to 0^+$ se $x \to \infty$. Usaremos a mudança de variável $t = \dfrac{1}{x}$ para reduzir ao caso já provado da Regra de L'Hôpital.

Sejam as funções $F, G : \left(0, \dfrac{1}{b}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ e } G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

Então,

$$\lim_{t\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

Pela Regra da Cadeia, F e G são deriváveis em $\left(0, \dfrac{1}{b}\right)$ e

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$$

e

$$G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$

Fazendo uso da parte que já demonstramos da Regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\dfrac{1}{t^2} f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{-\dfrac{1}{t^2} g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},
\end{aligned}$$

$\triangle$

Os exemplos a seguir mostram o vasto ramo de aplicabilidade da derivada.

Exemplo 3.6 Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada na margem de um rio de 500 metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2000 metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de R$ 640,00 por metro, enquanto, em terra, custa R$ 312,00. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?

Solução: Nossa função é

$$f(x) = (2000 - x)\cdot 312 + \sqrt{x^2 + 500^2}\cdot 640$$

Nosso objetivo é calcular o mínimo absoluto dessa função para $0 \leq x \leq 2000$. Assim,

$$f'(x) = -312 + \frac{640x}{\sqrt{x^2+500^2}}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
& -312 + \frac{640x}{\sqrt{x^2+500^2}} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ & 640x - 312\cdot\sqrt{x^2+500^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ & 8\cdot\left(80x - 39\cdot\sqrt{x^2+500^2}\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow\ & 80x - 39\cdot\sqrt{x^2+500^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow\ & x &\cong 279,17 \text{ metros.}
\end{aligned}$$

Agora, calculando $f''(x)$ fazendo uso da Regra do Soma e da Regra do Quociente, temos

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(-312+\frac{640x}{\sqrt{x^2+500^2}}\right)' \\
&= (-312)' + \left(\frac{640x}{\sqrt{x^2+500^2}}\right)' \\
&= \left(\frac{640x}{\sqrt{x^2+500^2}}\right)' \\
&= 640\cdot\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+500^2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+500^2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+500^2}\right)^2} \\
&= 640\cdot\frac{\sqrt{x^2+500^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+500^2}}}{\left(\sqrt{x^2+500^2}\right)^2} \\
&= 640\cdot\frac{\sqrt{x^2+500^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+500^2}}}{x^2+500^2} \\
&= 640\cdot\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x^2+500^2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+500^2}\right)-x^2}{\sqrt{x^2+500^2}}}{x^2+500^2} \\
&= 640\cdot\frac{\dfrac{x^2+500^2-x^2}{\sqrt{x^2+500^2}}}{x^2+500^2} \\
&= 640\cdot\frac{500^2}{\sqrt{x^2+500^2}}\cdot\frac{1}{x^2+500^2} \\
&= \frac{640\cdot 500^2}{(x^2+500^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Logo, $f''(x)=\dfrac{640\cdot 500^2}{(x^2+500^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Como $f''(279,17)>0$, temos $x=279,17$ um ponto mínimo relativo.

Restando saber se este mínimo é absoluto no intervalo $0\le x\le 2000$. Como o único ponto crítico de f em (0,2000) é $x\cong 279,17$, este ponto é mínimo absoluto neste intervalo. Portanto $f(0)>f(279,17)$ e $f(2000)>f(279,17)$. Concluimos que a obra poderá ser realizada com o menor custo possível se a canalização alcançar o outro lado do rio $279,17$ m abaixo da central. △

Exemplo 3.7 Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r.

Solução: Consideremos o semicírculo como a metade superior do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ com o centro na origem. Pelo problema dado, sabemos que o retângulo tem dois vértices sobre o semicírculo e dois sobre o eixo x.

Seja (x, y) o vértice que está no primeiro quadrante. Logo o retângulo tem lados de comprimento $2x$ e y, e sua área é

$$A = 2xy$$

Como (x, y) esta sobre o círculo $x^2 + y^2 = r^2$, então $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Assim

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

O domínio dessa função é $0 \leq x \leq r$ e sua derivada

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

que é zero quando

$$2x^2 = r^2, \text{ ou seja, } x = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2},$$

uma vez que $x \geq 0$. Esse valor de x dá um valor máximo de A, visto que $A(0) = 0$ e $A(r) = 0$. Portanto, a área do maior retângulo inscrito é

$$\begin{aligned} A\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{r\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \\ &= r\sqrt{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2 \end{aligned}$$

$\triangle$

Exemplo 3.8 Uma caixa retangular deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15x30 cm, recortando no quatro cantos e depois dobrando a folha nas linha determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Solução: Seja x o lado do quadrado que é cortado nos cantos da caixa. A caixa terá como base um retângulo de lados $30 - 12x$ e $15 - 2x$ e altura x. Assim, calculando seu volume, obtemos

$$\begin{aligned} V(x) &= x \cdot (30 - 12x) \cdot (15 - 2x) \\ V(x) &= 4x^3 - 90x^2 + 450x \end{aligned}$$

Observe que devemos ter $0 < x < \dfrac{15}{2}$ para que seja possível fazer o corte do retângulo. Derivando $V(x)$ duas vezes, obtemos

$$V'(x) \quad = \quad (12x^2 - 180x + 450)' \qquad \text{e} \qquad V''(x) \quad = \quad 24x - 180$$

Determinando os pontos críticos de $V(x)$, segue que

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 180x + 450 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_1 = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{2} \cong 11,8 \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{2} \cong 3,2$$

Observe que x_1 será desprezado por estar fora do intervalo $\left(0, \dfrac{15}{2}\right)$. Aplicando o Teste da Derivada Segunda em x_2, obtemos

$$V''(x) = 24x_2 - 180 \cong -103,9 < 0,$$

o que mostra que o ponto é de máximo.Portanto, obteremos uma caixa de volume máximo para um corte quadrado de lado quando $x \cong 3,2$. △

Exemplo 3.9 Uma fazenda produz laranjas e ocupa uma certa área com 50 laranjeiras. Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano. Verificou-se que para cada nava laranjeira plantada nesta área a produção por árvore diminui de 10 laranjas. Quantas laranjeiras devem ser plantadas no pomar de forma a maximizar a produção?

Solução: Seja x as novas árvores plantadas, o número total de árvores passa a ser $50+x$ mas a produção individual passa a ser $600-10x$ laranjas por árvore, totalizando uma produção anual de

$$\begin{aligned} P(x) &= (50+x)\cdot(600-10x) \\ &= 30000 + 100x - 10x^2 \end{aligned}$$

Para que $x > 0$, devemos ter

$$600 - 10x > 0 \Rightarrow x < 60$$

Assim,

$$P'(x) = 100 - 20x \text{ e } P''(x) = -20.$$

Logo, há um ponto crítico em

$$100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$$

Este ponto será de máximo, pois $P''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, deve-se plantar cinco novas árvores para maximizar a produção. △

3.4 Teorema de Taylor

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função $n+1$ vezes derivável em $a \in I$. Dado $b \in I$, supondo que f seja $n+1$ vezes derivável no intervalo aberto e contínua no intervalo fechado entre a e b, então existe c entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Demonstração: Suponha que $b > a$. Seja a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - ... - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{M}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}. \ (\star)$$

em que $M \in \mathbb{R}$ é escolhida de forma que $g(a) = 0$.

Temos g contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Além disso, pela escolha de M, $g(a) = 0$ e, substituindo $x = b$ em $(\star)$, vemos que $g(b) = 0$. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Rolle e concluir que existe um $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Mas a derivada de g em x é

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -f'(x) - (f''(x)(b-x) - f'(x)) - \left(\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x)\right) \\
&- ... - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right) + \frac{M}{n!}(b-x)^n \\
&= \frac{M - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n
\end{aligned}$$

Como $g'(c) = 0$ então $M = f^{(n+1)}(c)$. Substituindo x por a em $(\star)$ e lembrando que $g(a) = 0$, resulta em:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

$\triangle$

Através do Teorema de Taylor, definiremos uma Série de Taylor, com o objetivo de podermos representar algumas funções através de uma Série de Potências.

3.4.1 Série de Taylor

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função cuja n-ésima derivada em I existe, para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja $a \in I$. A série infinita

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n
\end{aligned}$$

é chamada *Série de Taylor* da função f no ponto $x = a$.

Exemplo 3.10 Calcule o valor de *sen* 47° com precisão de quatro casas decimais.

Solução: A Série de Taylor para $f(x) = sen\ x$ em $x = a$ é dada por

$$\begin{aligned} sen\ x &= sen\ a + (\cos a)(x-a) - \\ &- (sen\ a)\frac{(x-a)^2}{2!} - (\cos a)\frac{(x-a)^3}{3!} + ... \end{aligned}$$

Para tornar $x - a$ pequeno devemos escolher um valor de a próximo do valor de x para o qual a função esteja sendo calculada. O seno e o cosseno desse valor também devem ser conhecidos. Assim sendo, fazendo $a = \dfrac{1}{4}\pi$, obtemos

$$\begin{aligned} sen\ x &= sen\ \frac{1}{4}\pi + \left(\cos\frac{1}{4}\pi\right)\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \\ &- \left(sen\ \frac{1}{4}\pi\right)\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} - \left(\cos\frac{1}{4}\pi\right)\frac{\left(x-\frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!} + ... \end{aligned}$$

Como 47° é equivalente a $\dfrac{47}{180}\pi$ rad ou $\left(\dfrac{1}{4}\pi + \dfrac{1}{90}\pi\right)$ rad, dessa série com $x = \dfrac{47}{180}\pi$, segue que

$$\begin{aligned} sen\ \frac{47}{180}\pi &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{90}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{90}\pi\right)^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{90}\pi\right)^3 + ... \\ &\cong \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1 + 0,03490 - 0,00061 - 0,000002 + ...) \end{aligned}$$

Substituindo $\sqrt{2} \cong 1,41421$ e usando os três primeiros termos da série, obtemos

$$\begin{aligned} sen\ \frac{47}{180}\pi &\cong (0,70711)\cdot(1,03429) \\ &\cong 0,73136 \end{aligned}$$

Arredondando para quatro casas decimais, obtemos *sen* 47° $\cong$ 0,7314. O erro introduzido com a utilização dos três primeiros termos é $R_2\left(\dfrac{47}{180}\pi\right)$, então

$$\left|R_2\left(\frac{47}{180}\pi\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{1}{90}\pi\right)^3}{3!} \cong 0,00001$$

O resultado, então, está entre 0,73136 - 0,00001 e 0,73136 + 0,00001, isto é, o resultado está entre 0,73135 e 0,73137. Assim, para uma precisão de quatro casas decimais, temos

$$sen\left(\frac{47}{180}\pi\right) \cong 0,7314$$

△

Considerações Finais

Nesse trabalho percebemos que toda teoria em volta do Cálculo Diferencial que conhecemos hoje é fruto de um processo que levou muitos anos para ser concretizado, e que teve a contribuição de diversos gênios em diferentes épocas da história.

Um breve estudo foi realizado a respeito do conceito da derivada e de suas aplicações. Enunciamos e demonstramos alguns resultados, que consideramos de fundamental importância para o entendimento do conteúdo abordado. Buscamos expor o conteúdo com clareza e dinamismo para facilitar a compreensão do leitor desse trabalho.

Através dos problemas de otimização, podemos constatar o vasto ramo de aplicabilidade da derivada, principalmente. Vimos que o significado do Teorema de Rolle e do Teorema do Valor Médio está não em si mesmo, mas em suas consequências. Neste trabalho mostramos a necessidade desses resultados para a obtenção da Regra de L'Hôpital., bastante usada no cálculo de limites.

Outra aplicação do Teorema do Valor Médio foi determinar os intervalos onde uma curva é crescente ou decrescente. Este teorema, juntamente com outros resultados apresentados no trabalho, fornecem o caminho para o Cálculo Integral. Com isso, comprovamos a importância da Derivada como ferramenta de suma importância para a formação acadêmica e para resolução de problemas já existentes, e que ainda estão por vir, em vários campos das ciências.

Bibliografia

[1] BARDI, JASON S. *A guerra do cálculo*. Rio de janeiro: Record, 2008;

[2] CLARK, MARCONDES R.; LIMA, OSMUNDO A. *Cálculo de funções de uma variável*. Teresina: EDUFPI, 2012;

[3] LEITHOLD, LOUIS. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3.ed. São Paulo: HARBRA, 1994;

[4] MUNEM. MUSTAFA A.; FOULIS, David J. *Cálculo*. 2.ed. Rio de Janeiro: Guanabara dois, 1986;

[5] NETO, ANTONIO C.M., *Fundamentos de Cálculo*. SBM, 2015;

[6] STEWART, JAMES. *Cálculo*, volume 1. 5.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006;

[7] THOMAS, GEORGE B. *Cálculo*, volume 1. 12.ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2012.

[8] FLEMMING, DIVA M.; GONÇALVES, MIRIAN B. *Cálculo A*. Ed. Pearson, Prentice Hall, São Paulo 2006.