UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALBERTO GONÇALVES SANTOS

OS LOGARITMOS E SUA MARAVILHOSA APLICABILIDADE

CAMPINA GRANDE – PB
2019

ALBERTO GONÇALVES SANTOS

OS LOGARITMOS E SUA MARAVILHOSA APLICABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Profª Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano

CAMPINA GRANDE - PB
2019

S237l Santos, Alberto Gonçalves.
Os logaritmos e sua maravilhosa aplicabilidade [manuscrito] / Alberto Gonçalves Santos. - 2019.
48 p. : il. colorido.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Profa. Ma. Kátia Suzana Medeiros Graciano , Departamento de Matemática - CCT."

1. Matemática. 2. Logaritmos. 3. John Napier. 4. Jobst Burgi. I. Título

21. ed. CDD 513.22

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

ALBERTO GONÇALVES SANTOS

OS LOGARITMOS E SUA MARAVILHOSA APLICABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 08 / 11 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof[a]. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Castor da Paz Filho

Prof. Me. Castor da Paz Filho
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

José Hélio Henrique de Lacerda

Prof. Me. José Hélio Henrique de Lacerda
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por ter me ajudado até aqui, concedendo-me saúde, fé e esperança na realização desse sonho.

A minha esposa Josilene por ter me dado força e me apoiado, sendo paciente nessa caminhada até esta conquista que é nossa.

Dedico também essa conquista aos meus filhos: Grazielly, Arthur e Lucas (bebê que muitas vez engatinhando desligava o computador).

Aos meus pais Carmem e Paulo, meus irmãos e todos familiares que de alguma forma me apoiaram com suas palavras.

A Universidade Estadual da Paraíba, aos professores do curso de Licenciatura em Matemática e em especial a professora Kátia Suzana Medeiros Graciano, minha orientadora, pelos conhecimentos, pelo apoio e paciência

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

“Por que nos torna tão pouco felizes está maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servi dela com bom senso.”

Einstein (1879 – 1955)

RESUMO

Os logaritmos possuem inúmeras aplicações na matemática e em diversas áreas do conhecimento e do nosso cotidiano. Eles surgiram da necessidade de simplificar cálculos numéricos para navegadores e astrônomos no início do século XVII. Neste trabalho apresentamos um pequeno levantamento histórico dos logaritmos, passando pelos principais matemáticos envolvidos e suas contribuições. Em seguida apresentamos a definição de logaritmos com suas propriedades e algumas demonstrações. Finalizamos com o foco principal deste trabalho que é a aplicabilidade dos logaritmos, apresentando algumas das inúmeras aplicações no cotidiano. Acreditamos que essa abordagem diferenciada no estudo dos logaritmos, ajudará professores a realizar um trabalho contextualizado, contribuindo com uma aula motivadora, que levará o aluno há uma aprendizagem mais efetiva.

Palavras-Chave: Logaritmos. História. Aplicações.

ABSTRACT

Logarithms have numerous applications in mathematics and in various areas of knowledge and our daily lives. It arose from the need to simplify numerical calculations for navigators and astronomers in the early seventeenth century. In this paper we present a small historical survey of the logarithms, going through the main mathematicians involved and their contributions. Following is the definition of logarithms with their properties and some demonstrations. We conclude with the main focus of this work that is the applicability of logarithms, presenting some of the numerous applications in daily life. We believe that this different approach in the study of logarithms will help teachers to do a contextualized work, contributing to a motivating class that will lead the student to a more effective learning.

Keywords: Logarithms. Story. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão de curso tem a finalidade de apresentar um tema explorado no primeiro ano do Ensino Médio e na graduação, os logaritmos.

“Muitos fenômenos, que conhecemos hoje, podem ser representados por modelos matemáticos envolvendo logaritmos. Daí, a grande importância que esse tema tem para o exercício da cidadania para compreender o mundo que vivemos” (SILVA, 2013, p 2).

O desejo de desenvolver esse trabalho surgiu na graduação em matemática, nas disciplinas de cálculo, por ser um assunto interessante e que muitos alunos não veem no Ensino Médio.

O objetivo desse trabalho é tratar de algumas aplicações dos logaritmos que estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano, dessa forma buscaremos apresentar o tema, de uma forma mais atraente, relacionando seu conceito e propriedades com algumas aplicações, facilitando o seu entendimento e tornando menos abstrato.

De acordo com os PCN+:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens especificas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões , generalizar e para muitas outras ações necessárias a sua formação.(PCN+, 2006, p 111)

A metodologia empregada para a elaboração desse trabalho foi a pesquisa bibliográfica, artigos e dissertações.

Iniciamos este trabalho fazendo uma viagem histórica desde o surgimento dos logaritmos até o seu desenvolvimento, sem esquecer de citar as contribuições feitas por alguns matemáticos para a construção dos logaritmos como conhecemos hoje.

Em seguida, apresentamos as definições e propriedades dos logaritmos com suas respectivas demonstrações, exemplificando para uma melhor compreensão do conteúdo.

No capítulo seguinte, que é o foco principal desse trabalho, apresentamos algumas de suas inúmeras aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Na Química mostramos a desintegração radioativa; na Matemática Financeira, os juros compostos; na Física, o cálculo do nível sonoro e na Sismologia, o estudo da Escala Richter.

Finalizamos com as considerações finais.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo vamos apresentar um breve estudo referente a história dos logaritmos, como também os primeiros matemáticos que desenvolveram o estudo desse conceito e suas publicações.

2.1 História dos Logaritmos

O século XVII foi marcado por descobertas revolucionárias na história da matemática, entre elas a invenção dos logaritmos.

> A era das explorações despertou uma revolução cultural e cientifica na Europa, marcada pelo interesse de novos lugares e por uma percepção de necessidades de tecnologia nova, especialmente na navegação. (FERREIRA, 2006, p 46)

Foi através de avanços na astronomia e na navegação que ocorreu a descoberta de novos territórios e com isso, matemáticos e astrônomos passaram a realizar cálculos aritméticos com números grandes e muito complexos para a época. Surgiu a necessidade de uma ferramenta que auxiliasse os cálculos, tornando-os mais práticos e rápidos.

Na época havia um grupo de fórmulas trigonométricas bastante utilizadas, que transformava produto em uma soma ou diferença:

(i) $2\cos A \cdot \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

(ii) $2\cos A \cdot \text{sen}\, B = \text{sen}(A+B) - \text{sen}(A-B)$

(iii) $2\text{sen}\, A \cdot \cos B = \text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)$

(iv) $2\text{sen}\, A \cdot \text{sem}\, B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

> *As fórmulas passaram a ser largamente usadas por matemáticos e astrônomos perto do final do* século *XVII como um método de conversão de produtos em somas e diferenças. Esse método tornou-se conhecido como prostaférese, a partir da palavra grega que significa "adição e subtração". Uma divisão pode ser tratada da mesma maneira*. (EVES, 2011, p 343)

Os avanços da tecnologia foram chegando e com o passar do tempo eram exigidos cálculos mais precisos e o método trigonométrico tornou-se inviável. Uma de suas desvantagens era a dificuldade em aplicá-lo para produtos com mais de três fatores e a impossibilidade para calcular potência e raízes.

John Napier (1550-1617) foi o pioneiro na publicação de uma obra sobre logaritmos. Acredita-se que ele tenha criado os logaritmos, mas não há comprovação, pois sabe que esta teoria também foi desenvolvida praticamente ao mesmo tempo pelo suiço Jobst Burgui (1552-1632).

> Ficou sugerido, até agora, que a invenção do logaritmo foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer, Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas ideias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Burgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Burgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier recomeçar a trabalhar na mesma direção. Porém Burgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua Descriptio. A obra de Burgi apareceu em Praga num livro intitulado Arithmetische Und Geometrische Progress Tabulen, e isso indica que as influências que guiaram seu trabalho foram semelhantes as que operaram no caso de Napier. Os dois partiram das propriedades das sequências aritméticas e geométricas, estimulados, provavelmente, pelo método de prostaférese. (BOYER,1974, p 230)

Esse método de simplificar operações por meio de fórmulas trigonométricas, conhecido como prostaférese, foi apresentado a Napier por Dr John Craig, que era médico de James VI da Escócia, mas como já mencionamos antes, esse método não era suficiente, fazendo com que a comunidade cientifica da época, busca-se outros métodos para solucionar operações com números grandes, pois era uma das dificuldades para astrônomos e matemáticos. Tais informações encorajou Napier a desenvolver estudos relativos a simplificação de cálculos aritméticos complicados, exigidos na época com o contínuo desenvolvimento da navegação e da astronomia. Depois de 20 anos de estudos, publicou em 1614 sob o título "*Uma construção da maravilhosa regra dos logaritmos", como* mostra a figura abaixo.

Figura*1:* *Folha de rosto da edição do Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*


MIRIFICI
Logarithmorum
Authore ac Inventore,

Fonte:https://www.sophiararebooks.com/pages/books/4638/john-napier

A ideia de logaritmos de Napier baseou-se nos trabalhos de um matemático Alemão Miguel Stifel (1487-1567) que publicou sua obra intitulada *"Arithmética integra*" em 1544. A mesma trazia pela primeira vez resultados com potências de qualquer número racional.

Napier associou termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n$ aos de uma progressão aritmética, 1,2,3,4,...,m,...,n, então o produto $b^m . b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado a soma m + n dos termos correspondentes da segunda progressão.

A ideia era a seguinte:

Tabela 1: Sequências de PA e PG

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Fonte: Próprio autor

Para efetuar, por exemplo, 16 · 512, basta observar que:

* 16 na segunda linha corresponde a 4 na primeira.

* 512 na segunda linha corresponde a 9 na primeira.

* como 4 + 9 = 13, 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, 16 · 512 = 8192 resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

Para evitar intervalos grandes, entre um termo e o seu sucessor nas sequências de potências, como por exemplo: $2^3 = 8$ e $2^4 = 16$, desse modo os números de 9 a 15 não aparecem na tabela.

Segundo Eves (2011), Napier escolheu um número b bem próximo de 1. Assim sendo, ele tomou $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ = 0,9999999 para b. Para evitar decimais, multiplicou cada potencia por 10^7, resultando no seguinte: $N = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^L$, onde L representa o logaritmo de N. Assim o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de 10^7 $(1-\frac{1}{10^7})$ = 0,9999999 é 1. Dividindo-se N e L por 10^7, encontramos um sistema de logaritmos na base $\frac{1}{e}$, pois $(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Napier não trabalhou com conceito de base de um sistema de logaritmos.

A publicação dos logaritmos em 1614 por Napier, conhecida por Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos), despertou interesse no ano seguinte do professor de Oxford Henry Briggs (1561-1631), que viajou até Edimburgo para se encontrar com Napier e, neste encontro, Briggs sugeriu a Napier que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, sugestão acolhida por Napier, o que levou mais tarde Briggs á publicar os logaritmos Briggsianos ou os logaritmos de base 10, os quais usamos atualmente.

O suíço Jost Burgi (1552-1632) foi matemático e fabricante de instrumentos. Acredita-se que ele também desenvolveu uma tabela de logaritmos independente de Napier e que publicou seus resultados no ano de 1620, seis anos após a publicação da criação dos logaritmos de Napier.

Burgi foi considerado na época um descobridor independente, que não foi tão reconhecido devido a antecipação de Napier. Os dois partiram do mesmo caminho, utilizando sequências geométricas com razão bem próxima de 1.

O que diferenciava na obra dos dois era a terminologia e os valores numéricos adotados. Burgi determinou uma razão um pouco maior que 1 ($1{,}0001=1+10^{-4}$) e ao invés de multiplicar as potencias por 10^7 ele multiplicava por 10^8. Como também na construção de sua tábua de logaritmos Burgi multiplicava as potências por 10, isto é, sendo $N = 10^8\ (1+10^{-4})L$, ele chamava 10L o número "vermelho" correspondente ao número "preto" N.

Segundo Boyer (1974, p.231):

> Burgi chamava 10L o número "vermelho" correspondente ao número "preto" N. Se nesse esquema dividirmos todos os números pretos por 10^8 e todos os vermelhos por 10^5, teremos virtualmente um sistema de logaritmos naturais. Por exemplo, Burgi dava para o número preto 1.000.000.000 número vermelho 230.270,022 que, deslocando a virgula, equivale a dizer que Ln10 = 2,30270022. Isso não é uma aproximação má do valor moderno, especialmente quando lembramos que $(1+10^{-4})^{10}$ não é bem a mesma coisa que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, embora os valores coincidam até quatro casas significativas.

Napier chamou a sua invenção de índice de potência de números artificiais e mais tarde logaritmos, que é a composição de duas palavras gregas logos (razão) e arritmos (ou número). A invenção dos logaritmos foi adotada por toda Europa na época, em especial pelos astrônomos, conforme afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos"(EVES, 2011, p 346). Nos dias de hoje o logaritmo nada mais é que um expoente, assim; se $n = b^{x}$, dizemos que **x** é o logaritmo de **n** na base **b**.

Logaritmo é um dos conteúdos que compõe o currículo de matemática do primeiro ano do ensino médio, é utilizado em diversas áreas da ciência, como à Física, a Química, e a matemática financeira, entre outras, nas quais suas propriedades são ferramentas importantes na resolução de situações – problema.

2.2 John Napier

John Napier era um rico e inteligente escocês proprietário de terras, que morava no castelo de Merchiston, próximo a Edimburg na Escócia, nasceu em 1550 e era um admirador de polêmicas políticas e religiosas de sua época.

Figura 2: John Napier (1550 – 1617)

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_john-napier/

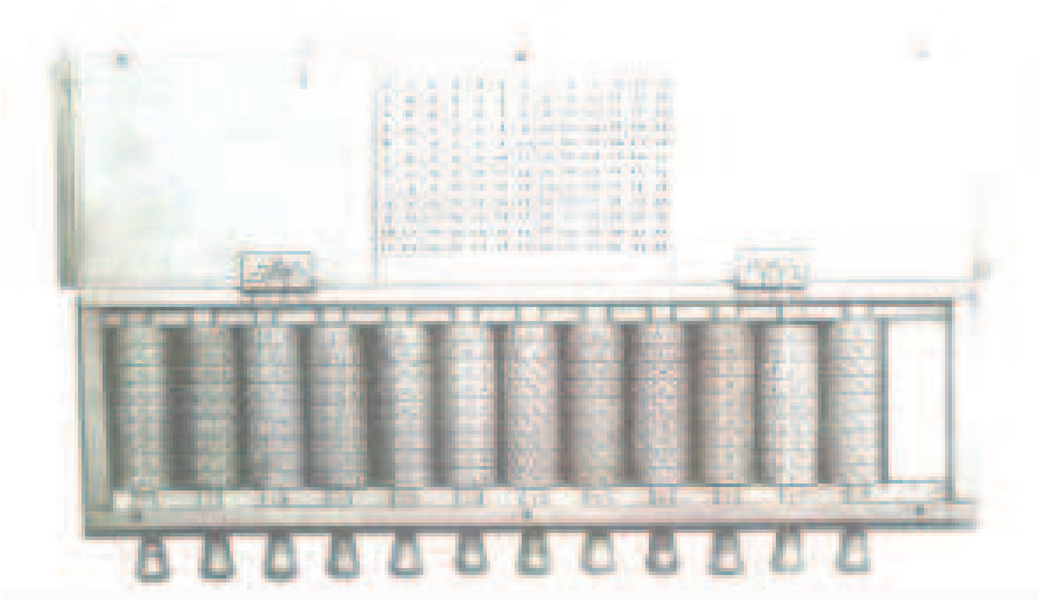
Napier era protestante e gastava boa parte do seu tempo com discussões religiosas, em 1593 publicou um livro bastante lido contra a igreja católica, o livro tinha como título A Plaine Discouery of tbe Wbole Reuelation of Saint Lobn, que consistia em provar que o papa era o anticristo, tal livro alcançou 21 edições. Ele escreveu projetos e diagramas de máquina de guerra, previu que no futuro o homem desenvolveria a metralhadora, o submarino e o tanque de guerra . Com esses pensamentos, levou alguns a acreditarem que ele era mentalmente desequilibrado e outros o chamava de amador de magia negra.

Napier não era um matemático profissional, mas estudava ciência e matemática, nas horas de lazer, em especial gostava mais dos aspectos da computação e da trigonometria, buscava simplificar cálculos para a astronomia, pois era um desafio da época, e assim sendo conseguiu suprir essas necessidades com a invenção dos logaritmos em 1614. Napier morreu em 1617, deixando um marco na história da matemática com suas invenções:

> São: (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso dispositivo mnemônico, conhecido como regra das partes circulares, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecida como analogias de Napier, úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como barras de Napier ou ossos de Napier, usados para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.(EVES, 2011, pag 342).

Conforme Bianchini e Paccola (2004), as barras de Napier ou ossos de Napier, como foram citadas acima, eram compostas por cilindros com tabelas de multiplicação, essas tabelas eram formadas por um conjunto de nove bastões, um para cada dígito, que realizava multiplicações e divisões por meio de logaritmos.

Figura 3: *Barras de Napier*



Fonte:Bianchini Paccola (2004)

2.3 Jobst Burgi

Jobst Burgi matemático e fabricante de instrumentos astronômicos, nasceu no ano de 1522, um suíço da cidade de Lichtensteig. Burgi iniciou os estudos sobre logaritmos em 1588, mas só conseguiu publicar os seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier. A obra de Burgi foi publicada na cidade de Praga, com o título

Arithmetische und Geometrische Progress - Tabulen, pesquisadores da história da matemática acreditam que Burgi foi o primeiro a iniciar os estudos sobre logaritmos, mas não teve o devido reconhecimento, pela antecipação de Napier em publicar sua Descriptio.

Figura 4: Jobst Burgi (1552-1632)

Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/burgi.htm

Segundo Soares (2011), Burgi era de uma família pobre, modesta e numerosa, que deixou sua terra natal para viver na pobreza e com dificuldades, se achava inferior aos intelectuais de sua época. Ocupou grande parte de sua vida na fabricação de relógios para condes e imperadores, era um apaixonado pela ciência astronômica. Nunca chegou a universidade e a falta de cultura literária e de domínio do latim, foram os principais obstáculos para suas invenções e publicações.

Procuramos neste capítulo fazer um estudo histórico referente a evolução do conceito de logaritmo, destacando os principais cientistas que desenvolveram os primeiros estudos e os obstáculos encontrados na construção desse conceito.

3. LOGARITMO

Neste capítulo vamos apresentar o conceito de logaritmos, demostrando suas propriedades, apresentaremos também os logaritmos naturais, decimais e por fim a mudança de base. Como base para as definições e propriedades foi tomada a obra de Gelson Iezzi.

Definição 1: Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com **a ≠ 1,** chama-se logaritmo de **b** na base **a**, o expoente que se deve dar a base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

Em símbolos: se **a, b** $\in \mathbb{R}$**,** $0 <$ **a** $\neq 1$ e **b** > 0,então

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Em **log** $_a$ **b = x**, dizemos: **a** é a base do logaritmo, **b** é o logaritmando e **x** é o logaritmo.

Exemplos:

a) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

b) $\log_3 243 = 5$, pois $3^5 = 243$

c) $\log_{17} 1 = 0$, pois $17^0 = 1$

d) $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$

3.1 Antilogaritmo.

Definição 2: Sejam **a** e **b** números reais positivos com **a** $\neq 1$, se o logaritmo de **b** na base **a** é **x** , então **b** é o antilogaritmo de **x** na base **a**.

Em símbolos, se **a** e **b** $\in$ **R**, $0 <$ **a** $\neq 1$ e **b** > 0 então:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a\, x$$

Exemplos:

a) $\text{antilog}_3 2 = 9$, pois $\log_3 9 = 2$

b) $\text{antilog}_2 3 = 8$, pois $\log_2 8 = 3$

3.2 Consequências da Definição

Considerando a definição de logaritmo e as condições de existência, temos que:

1) O logaritmo da unidade em qualquer base é igual a zero:

$$\mathbf{\log_a 1 = 0}$$

2) O logaritmo da base em qualquer base é igual a um:

$$\mathbf{\log_a a = 1}$$

3) A potência da base **a** e expoente **log** $_{\mathbf{a}}$ **b** é igual **b**:

$$\mathbf{a^{\log_a b} = b}$$

A justificativa desta propriedade está no fato de que o logaritmo de **b** na base **a** é o expoente que se deve dar a base **a** para a potência obtida ficar igual a **b.**

4) Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Demonstração

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow a^{\log_a c} = b \Leftrightarrow c = b.$$

3.3 Propriedades dos logaritmos

3.3.1 Logaritmo do produto

Em qualquer base **a** tal que $0 < a \neq 1$, o logaritmo de dois fatores reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores, isto é:

Se $0 < \mathbf{a} \neq 1$, $\mathbf{b} > 0$ e $\mathbf{c} > 0$,então:

$$\mathbf{\log_a (b \,.\, c) = \log_a b + \log_a c}$$

Demonstração:

Inicialmente vamos considerar $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \,.\, c) = z$, agora vamos mostrar que $z = x + y$.

Por definição temos o seguinte:

$\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b$

$\log_a c = y \Rightarrow a^y = c$

$\log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c$

Assim:

$$a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y.$$

Observações:

1) Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de n ($n \geq 2$) fatores reais e positivos ,isto é:

Se $0 < a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$,então,

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n$$

Demonstração:

Faremos a demonstração por indução sobre n.

i) Para n = 2 é verdadeira, isto é :

$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

ii) Suponhamos que a propriedade seja válida para $k \geq 2$. Temos,

$\log_2 (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_k$

Provaremos que a propriedade é válida para n= k +1,isto é,

$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k \cdot b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$

Sabemos que,

$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k \cdot b_{k+1}) = \log_a [(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k) \cdot b_{k+1}] = \log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k) + \log_a b_{k+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$.

2) Notemos que, se **b** > 0 e **c** > 0 então **b** $\cdot$ **c** > 0 e vale a identidade :

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, com $0 < a \neq 1$, mas se soubermos apenas que **b** $\cdot$ **c** > 0 então, temos:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a |b| + \log_a |c| \text{ , com } 0 < a \neq 1.$$

Exemplos:

a) $\log_3 (9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$

b) $\log_5 (25 \cdot 125 \cdot \frac{1}{5}) = \log_5 25 + \log_5 125 + \log_5 \frac{1}{5} = 2 + 3 - 1 = 4$

c) $\log_6 [3 \cdot (-4) \cdot (-5)] = \log_6 3 + \log_6 |-4| + \log_6 |-5|$

3.3.2 Logaritmo do quociente

Em qualquer base **a** ($0 < a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor, ou seja :

Se $0 < \mathbf{a} \neq 1$, $\mathbf{b} > 0$ e $\mathbf{c} > 0$, então:

$$\mathbf{log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a\ b - log_a\ c}$$

Demonstração:

Seja $\log_a b = x$, $\log_a c = y$, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, queremos mostrar que $z = x - y$.

De fato:

$\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b$

$\log_a c = y \Longrightarrow a^y = c$

$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Longrightarrow a^z = \frac{b}{c}$

Assim:

$$a^z = \frac{a^x}{a^y} \Longrightarrow a^Z = a^{x-y} \Longrightarrow z = x-y .$$

Observações:

1) Vamos considerar b = 1, logo:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c \Longrightarrow \log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$$

2) Agora se $\mathbf{b} > 0$ e $\mathbf{c} > 0$ implicam que $\frac{b}{c} > 0$, daí é válida a seguinte identidade.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad \text{onde } 0 < a \neq 1.$$

Basta saber que $\frac{b}{c} > 0$, por conseguinte obtemos:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c| \text{, com } 0 < a \neq 1.$$

Exemplos:

a) $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 1 - \log_5 25$

b) $\log_{10} \left(\frac{2\,.\,3}{5}\right) = \log_{10} (2\,.\,3) - \log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5$

c) $\log_{10} \left(\frac{2}{3\,.\,5}\right) = \log_{10} 2 - (\log_{10} 3 + \log_{10} 5) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 - \log_{10} 5$

3.3.4 Logaritmo da potência

Em qualquer base **a** $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, ou seja.

Se $0 < \mathbf{a} \neq 1$, $\mathbf{b} > 0$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a b$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^{\alpha} = y$, provemos que $y = \alpha \cdot x$

Temos que:

$\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b$

$\log_a b^{\alpha} = y \Longrightarrow a^y = b^{\alpha}$

$a^y = (a^x)^{\alpha} \Longrightarrow a^y = a^{\alpha\,.x} \Longrightarrow y = \alpha\,.x$

Observações:

1) Como colorário desta propriedade, temos que,

Em qualquer base **a** $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo da raiz enézima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando.

Seja a $(0 < a \neq 1)$, $b > 0$ e $n \in N^*$, assim

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b.$$

2) Seja $b > 0$ e $b^{\alpha} > 0$ para todo α real, vale a identidade:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha\,.\log_a b$$

Mas se soubermos apenas que $b^{\alpha} > 0$ então temos:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha\,.\log_a b$$

Exemplos:

a) $\log_2 3^2 = 2 \cdot \log_2 3$

b) $\log_4 \sqrt[5]{3} = \log_4 3^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log_4 3$

c) $\log_2 \frac{1}{3^4} = \log_2 3^{(-4)} = (-4) \log_2 3$

3.4 Cologaritmo

Clamamos de cologaritmo de um número **b** com $b \in R$ e $b > 0$ numa base **a** com $a \in R$ e ($0 < a \neq 1$), ao oposto do logaritmo de **b** na base **a .**

Em símbolos:

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$, então:

$$\text{colog}_a\, b = -\log_a b$$

Considerando que $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$, temos :

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$, logo:

$$\text{Colog}_a\, b = \log_a \frac{1}{b}$$

Exemplos:

a) $\text{colog}_2 4 = -\log_2 4 = \log_2 \frac{1}{4}$

b) $\log_{10} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = \log_{10} 2 + \text{colog } 3$

c) Se $x > 1$ então $\log_3 x - \log_3 (x - 1) = \log_3 x + \text{colog}_3 (x - 1)$

3.5 Mudança de base

Há ocasiões em que os logaritmos em bases diferentes necessitam serem transformados para uma única base conveniente. Na aplicação das propriedades operatórias os logaritmos devem estar todos numa mesma base.

Vejamos agora o processo que permite transformar o logaritmo de um número positivo em uma certa base para outro em base conveniente.

3.5.1 Propriedades

Se **a**, **b** e **c** são números reais positivos e **a** e **c** diferentes de um, então tem-se:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração:

Consideremos $\log_a b$= x, $\log_c b$ = y, $\log_c a$ = z e notemos que z ≠ 0 pois a ≠ 1

Provemos que x = $\frac{y}{z}$

De fato:

$\log_a b$ = x ⟹ a^x = b

$\log_c b$ = y ⟹ c^y = b

$\log_c a$ = z ⟹ c^z = a

⟹ $(c^z)^x = a^x = b = c^y$ ⟹ zx = y ⟹ x = $\frac{y}{z}$

Exemplos:

a) $\log_3 5$ transformando para a base 2, temos: $\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$

b) $\log_2 7$ transformando para a base 10, temos: $\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$

c) $\log_{100} 3$ transformando para a base 10, temos: $\log_{100} 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 100} = \frac{\log_{10} 3}{2} =$ $\frac{1}{2}\log_{10} 3$.

Observação:

A propriedade da mudança de base pode também ser assim apresentada:

Se **a**, **b** e **c** são números reais positivos e **a** e **c** diferentes de um, então tem-se:

$$\mathbf{\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c}$$

Demonstração

A demonstração é bastante simples, basta que transformemos o $\log_c b$ para a base a:

$$\log_c b \cdot \log_a c = \frac{\log_a b}{\log_a c} \cdot \log_a c = \log_a b$$

Consequências

1) Se **a** e **b** são números reais positivos e diferentes de 1, tem –se:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Demonstração:

Devemos converter o $\boldsymbol{\log_a b}$ para a base **b**, obtermos o seguinte:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

2) Se **a** e **b** são reais positivos com **a** diferente de um e **α** é um real não nulo, então tem –se :

$$log_{a^{\alpha}}\ b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$$

Demonstração:

Devemos considerar dois casos.

1º caso: se b=1, temos:

$$\log_a 1 = 0$$

$$log_{a^{\alpha}} 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad log_{a^{\alpha}} 1 = \frac{1}{\alpha} \log_a 1$$

2º caso: se $b \neq 1$, temos:

$$log_{a^{\alpha}}\ b = \frac{1}{\log_b a^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_a b$$

Exemplos:

a) $\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = \frac{1}{3} \log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}} 6 = \log_{5^{-1}} 6 = -\log_5 6$

c) $\log_{\frac{1}{9}} 5 = \log_{3^{-2}} 5 = -\frac{1}{2} \log_3 5$

3.6 Logaritmo natural

Os logaritmos naturais ou logaritmos neperianos, são aqueles de base **e** onde **e** é um número irracional de valor aproximadamente **2,7182818284**... O nome natural se dar pelo fato de que no estudo dos fenômenos naturais, geralmente aparece uma lei exponencial de base **e**. Já o nome neperiano vem do escocês John Napier.Como vimos no capítulo II, foi o primeiro a publicar uma obra sobre os logaritmos. Indicamos logaritmo natural ou neperiano pela expressão:

$$\log_e x \text{ ou } \ln x$$

Exemplos:

a) $\log_e 2 = \ln 2$

b) $\log_e \frac{1}{5} = \ln \frac{1}{5}$

c) $\log_e 10 = \ln 10$

3.7 Logaritmos decimais

O logaritmo decimal é aquele de base 10, também chamado de logaritmo de Henry Briggs (1561-1630) matemático inglês, que foi o primeiro a destacar a vantagem dos logaritmos de base 10. Indicamos o logaritmo decimal pela expressão:

$$\log_{10} x \text{ ou } \log x$$

Exemplos:

a) $\log_{10} 2 = \log 2$

b) $\log_{10} 5 = \log 5$

Temos que:

1) $\log 1 = 0$

2) $\log 10 = 1$

3) $x > 1 \Rightarrow \log x > 0$

$0 < x < 1 \Rightarrow \log x < 0$

3.7.1 Característica e mantissa

Qualquer que seja o número real e positivo **x** que considerarmos, é possível provar que x estará necessariamente compreendido entre duas potencias de 10 com expoentes inteiros consecutivos.

Exemplos:

a) $x = 0{,}04 \Rightarrow 10^{-2} < 0{,}04 < 10^{-1}$

b) $x = 0{,}351 \Rightarrow 10^{-1} < 0{,}351 < 10^{0}$

c) $x = 3{,}72 \Rightarrow 10^{0} < 3{,}72 < 10^{1}$

Assim, dado $x > 0$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que:

$10^{c} \leq x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^{c} \leq \log x < \log 10^{c+1} \Rightarrow c \leq \log x < c+1$

Podemos afirmar que:

$$\mathbf{\log x = c + m, \text{ onde } c \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq m < 1}$$

Isto é, o logaritmo decimal de x é a soma de um número inteiro c com um número decimal m não negativo e menor que 1.

O número inteiro **c** é por definição a característica do logaritmo de **x** .

E o número decimal **m** ($0 \leq m < 1$) é por definição a mantissa do logaritmo decimal de **x.**

3.7.2 Regras da característica

A característica do logaritmo decimal de um número x real positivo será calculada por uma das duas regras simples.

i) Regra I ($x > 0$)

A característica do logaritmo decimal de um número $x > 1$ é igual ao número de algarismo de sua parte inteira, menos 1.

Justificativa:

Seja **x** > 1 e x tem (n+ 1) algarismos na sua parte inteira, então temos:

$10^{n} \leq x < 10^{n+1} \Rightarrow \log 10^{n} \leq \log x < \log 10^{n+1} \Rightarrow n \leq \log x < n + 1$

Isto é, a característica de **log x** é **n .**

Exemplos:

Logaritmo	característica (quantidade de algarismo da parte inteira menos 1)
a) log 2	c = 0
b) log 20	c = 1
c) log 200	c = 2
d) log 2000	c= 3

ii) Regra II ($0 < x < 1$)

A característica do logaritmo decimal de um número $0 < x < 1$ é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

Justificativa:

Seja $0 < x < 1$ e x tem n algarismos zeros precedendo o primeiro algarismo não nulo, temos então :

$10^{-n} \leq x < 10^{-n+1} \Rightarrow \log 10^{-n} \leq \log x < \log 10^{-n+1} \Rightarrow -n \leq \log x < -n + 1$, Isto é a característica de **log x** é **- n** .

Exemplos

Logaritmo	característica
a) log 0,2	c = -1
b) log 0,02	c = -2
c) log 0,002	c = -3

3.7.3 Mantissa

A mantissa é obtida nas tábuas (tabelas) de logaritmos

Em geral, a mantissa é um número irracional e por esse motivo as tábuas de logaritmos são tabelas que fornecem os valores aproximados dos números inteiros.

Nas figuras 5 e 6 temos uma tabela de mantissas dos logaritmos dos números inteiros de 100 a 999.

Para procurarmos a mantissa do logaritmo decimal de **x**, devemos utilizar a seguinte propriedade:

i) Propriedade da mantissa

A mantissa do logaritmo decimal de **x** não se altera se multiplicarmos **x** por uma potência de 10 com expoente inteiro.

Demonstração:

Para demonstrar essa propriedade mostraremos que se p $\in \mathbb{Z}$ então a diferença:

$$(\log(x \cdot 10^p) - \log x) \in \mathbb{Z}$$

De fato:

$\log(10^p \cdot x) - \log x = \log\left(\frac{10^p \cdot x}{x}\right) = \log 10^p = p \in \mathbb{Z}$.

"Os logaritmos de dois números cujas representações decimais diferem apenas pela posição da virgula têm mantissas iguais".

Assim os logaritmos dos números 2, 200, 2000, 0,2; 0,02; 0,002 têm todos a mesma mantissa 0,3010; mas as características são respectivamente 0,2,3,-1,-2, -3

Figura 5*: Tabela de logaritmos decimais A*

	Mantissas									
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7464	7372	7380	7388	7396
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

Fonte: (IEZI,1977)

Figura 6: Tabela de logaritmos decimais B

	Mantissas									
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte:(IEZI,1977)

Exemplos:

a) Calcular log 547

Como já vimos anteriormente: log x = c + m

c = característica do logaritmo decimal (c ∈ ℤ)

m = mantissa do logaritmo decimal (0 ≤ m < 1)

Então temos:

$$\log 547 = 2 + 0{,}7380 = 2{,}7380$$

Observação: a característica é 2 (pois x > 0 e pelas regras da característica; o número 547 contém três algarismos, menos um é igual a dois). E verificando na figura 5 (tabela das mantissas A), a mantissa de log 547 que é a mesma de log 54,7 é 0,7380.

b) calcular log 0,042

Temos que: $\log x = c + m$

c = característica do logaritmo decimal ($c \in \mathbb{Z}$)

m = mantissa do logaritmo decimal ($0 \leq m < 1$)

Assim: $\log 0{,}042 = -2 + 0{,}6232 = -1{,}3768$

Observação: a característica é -2 (pois $0 < x < 1$) e pela regra da característica, temos que o número 0,042 possui dois zeros, então a característica é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo. E verificando na figura 5 (tabela das mantissas A), a mantissa de log 0,042 é a mesma de log 420 e igual a 0,6232.

Assim concluímos esse capitulo, apresentando a definição de logaritmo e suas propriedades com exemplos e demonstrações, utilizando uma linguagem simples e objetiva, para um melhor entendimento do leitor.

4 APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS

Neste capitulo, vamos apresentar algumas aplicações dos logaritmos. Como vimos no capítulo II, o logaritmo surgiu da necessidade de simplificar cálculos para navegadores e astrônomos. Encontramos hoje suas aplicações em várias áreas do conhecimento, como na Química, Física, Economia, Geografia, Biologia, entre outras. “Podemos através das aplicações logarítmicas, transformar problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real e na matemática” (ANGELIN, 2015, p 41).

4.1 Desintegração radioativa

De acordo com Feltre (2004), em um conjunto de átomos radioativo pode ocorre de um átomo está se desintegrando (deixando de existir) neste instante, um segundo átomo se desintegra daqui a uma hora, um terceiro daqui a três meses e assim por diante. Daí surge a necessidade de saber o tempo de desintegração de um elemento radioativo. E para medir esse tempo, utiliza-se do conceito de meia vida, que se define como o tempo necessário para que a atividade de um elemento que emite radiação seja reduzido à metade da unidade.

Conhecer a rapidez com que um elemento radioativo se desintegra é muito importante. Na medicina nuclear, por exemplo, os médicos precisam saber por quanto tempo um radioisótopo que foi injetado em um paciente para um tratamento médico, permanece no seu organismo. Outro exemplo é o armazenamento do lixo nuclear, pois é necessário saber por quanto tempo o lixo deve permanecer estocado, para evitar acidentes.

A tabela abaixo, nos mostra que o tempo de meia vida varia bastante de um radioisótopo para outro.

Tabela 2: Tempo de meia vida de um radioisótopo

Radioisótopo	Tempo de meia-vida
$^{220}_{86}Rn$	55,6 segundos
$^{218}_{84}Po$	3,08 minutos
$^{95}_{43}Tc$	20,0 horas
$^{234}_{90}Th$	24,1 dias
$^{90}_{38}Sr$	29,1 anos
$^{14}_{6}C$	5.715 anos
$^{10}_{4}Be$	1,52 milhão de anos
$^{238}_{92}U$	4,46 bilhões de anos

Fonte: Feltre (2004, p. 375)

A equação que gera a desintegração radioativa de uma substância é dada por:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m_o} \cdot e^{-kt},$$

onde **m** é a massa da substância, $\mathbf{m_o}$ é a massa da substância no inicio da contagem do tempo, **k** é uma constante chamada constante de desintegração e **t** é o tempo.

Exemplos:

a) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão: M(t) = A $.(2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para log 2. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27

B) 36

C) 50

D) 54

(E) 100

Solução:

De acordo com o enunciado da questão, sabemos que a meia vida do césio- 137 é de 30 anos. Aplicando esse valor a expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, podemos substituir o tempo t por 30 e a massa A , quando t = 30, por $\frac{A}{2}$:

$$M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$$

$$\frac{A}{2} = A \cdot (2{,}7)^{30.k}$$

$$(2{,}7)^{30k} = \frac{1}{2}$$

$$(2{,}7)^{30k} = 2^{-1}$$

Agora basta aplicar logaritmo de base 10 em ambos os lados da equação:

$$\log (2{,}7)^{30k} = \log 2^{(-1)}$$

$$30k \cdot \log 2{,}7 = (-1) \cdot \log 2$$

Como log 2 = 0,3:

$$30k \cdot \log 2{,}7 = (-1) \cdot (0{,}3)$$

$$30k \cdot \log 2{,}7 = -0{,}3$$

$$\log 2{,}7 = \frac{-0{,}3}{30K}$$

$$k = \frac{-0{,}01}{\log 2{,}7} \qquad \text{(equação I)}$$

Fazendo:

$$0{,}1A = A \cdot (2{,}7)^{kt}$$

$$(2{,}7)^{kt} = 0{,}1$$

Aplicando logaritmos em ambos os lados da igualdade, teremos:

$$\log (2{,}7)^{kt} = \log 0{,}1$$

$$kt \cdot \log 2{,}7 = -1$$

Substituindo o valor de **k**, obtido na equação (I), temos:

$$\left(\frac{-0{,}01}{\log 2{,}7}\right) t \cdot \log 2{,}7 = -1$$

$$(-0{,}01)\,t = -1$$
$$t = 100$$

Portanto, em 100 anos, a massa do césio-137 será reduzida para 10% da quantidade inicial. A alternativa correta é a letra **e**.

b) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural de se desintegrarem, diminuindo, portanto, sua quantidade original com o passar do tempo. Suponha que certa quantidade de um elemento radioativo, com massa inicial m_o (gramas), com $m_o \neq 0$, decomponha-se conforme o modelo matemático: $m(t) = m_o \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$, em que m(t) é a quantidade de massa radioativa restante no tempo t (anos). Usando a aproximação log 2 = 0,3; a quantidade de anos para que esse elemento se decomponha até atingir $\frac{1}{8}$ da massa inicial será:

(A) 60
(B) 62
(C) 64
(D) 63
(E) 70

Solução:

De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$\frac{1}{8} m_0 = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$$

$$\frac{1}{8} = 10^{-\frac{t}{70}}$$

$$(2^3)^{-1} = 10^{-\frac{t}{70}}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\log 2^{-3} = \log 10^{-\frac{t}{70}}$$

$$(-3) \cdot \log 2 = -\frac{t}{70} \cdot \log 10$$

$$-0{,}9 = -\frac{t}{70}$$

$$-t = -0{,}9 \cdot 70$$

$$t = 63$$

Portanto, levará 63 anos até que a decomposição atinja $\frac{1}{8}$ da massa inicial.

4.2 Juros compostos

Segundo Dante(2013), encontraremos a equação matemática do juros compostos, observando a seguinte situação:

Um capital de R$ 10000,00 foi aplicado a taxa de 4% ao mês durante 3 meses. Qual foi o montante no final dos 3 meses?

No sistema de juros simples, temos: 4% de 10000 = 0,04 .10000 = 400 (juros produzidos em 1 mês), 400 . 3 = 1200 (juros produzidos em 3 meses), 10000 +1200 = 11200 (montante ao final de 3 meses). Logo, no final dos três meses o montante será de R$ 11200,00.

No sistema do juros compostos, temos: No primeiro mês: 4% de 10000 = 400 (juros produzidos em 1 mês), 10000 + 400 = 10400 (montante no final do primeiro mês), No segundo mês: 4% de 10400 = 416 (juros produzidos em 2 meses), 10400 + 416 = 10816 (montante no final do segundo mês). No terceiro mês: 4% de 10816 = 432,64 (juros produzidos em 3 meses), 10816 + 432,64 = 11248,64. Logo no final dos três meses o montante será de R$ 11248,64.

Observe que no sistema de juros simples os juros foram R$ 1200,00 e nos juros compostos foram 1248,64, o que gerou essa diferença?

Essa diferença se dá, pois no juros compostos, os juros em cada período são calculados sobre o montante anterior. É o que chamamos de ‘’juros sobre juros”. Observamos também que esse método de resolução no sistema de juros compostos, se torna inconveniente para calcular um período longo.

De acordo com Dante(2013), existe um método mais prático para calcular os juros compostos.

Vamos calcular, no sistema de juros compostos, qual será o montante **M**, produzido por um capital **C**, aplicado a taxa **i** ao período, no final de **t** períodos.

Como podemos ver na tabela abaixo:

Tabela 3: Cálculo dos juros compostos

	Inicio	Juros	Montante no final do período
1º Período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1+ i)$
2º Período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+ i) =$ $C (1+ i)(1+i) = C(1+i)^2$
3º Período	M_2	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i) =$ $C(1+i)^2(1+i) = C(1+ i)^3$
....			

Fonte: Próprio autor

No fim de **t** períodos o montante será:

$$\mathbf{M = C(1 + i)^{t}}$$

Para calcular o período utilizando essa equação, no cálculo do juros compostos, se faz necessário uma ferramenta muito importante que é o logaritmo e suas propriedades.

Exemplos:

a) O capital de 2 000,00; aplicado a juro composto a taxa de 20 % ao ano, produzirá o montante de 5 000,00 ao final de quanto tempo? Considere log 2 = 0,30; log 3 = 0,48 e log 5 = 0,70.

A) 4 anos

B) 4 anos e 2 meses

C) 4 anos e 8 meses

D) 5 anos

E) 5 anos e 6 meses.

Solução:

Utilizando os dados do problema, temos:

$$M = C_0 \,.\, (1 + i)^{t}$$

$$5\,000 = 2\,000\,(1+ 0,2)^{t}$$

$$\frac{5}{2} = (1,2)^{t}$$

Aplicando logaritmo nos dois lados da igualdade, temos que:

$$\log \frac{5}{2} = \log (1,2)^t$$

$$\log 5 - \log 2 = t \cdot (\log 1,2)$$

$$t = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 1,2}$$

$$t = \frac{\log \frac{10}{2} - \log 2}{\log \frac{12}{10}}$$

$$t = \frac{\log \frac{10}{2} - \log 2}{\log \frac{2^2 \,.\, 3}{10}}$$

$$t = \frac{(\log 10 - \log 2) - \log 2}{(2 \cdot \log 2 + \log 3) - \log 10}$$

$$t \cong \frac{(1 - 0,3) - 0,3}{(2\,(0,3) + 0,48) - 1}$$

$$t \cong \frac{0,4}{0,08}$$

$$t \cong 5$$

Portanto, o montante de 5 000,00 reais será alcançado após 5 anos.

b**)** Saulo aplicou 45000,00 reais em um fundo de investimento que rende 20% ao ano. Seu objetivo é usar o montante dessa aplicação para comprar uma casa que, na data da aplicação, custava 135000,00 reais e se valoriza à taxa anual de 8%. Nessas condições, a partir da data da aplicação, quantos anos serão decorridos até que Saulo consiga comprar tal casa?

A) 15

B) 12

C) 10

D) 9

E) 6

Solução:

$$45\,000 \,.\, (1 + 0,20)^t = 135000.\, (1 + 0,08)^t$$

$$45\ 000 \ .\ (1{,}20)^{t} = 135000.\ (1{,}08)^{t}$$

$$\left(\frac{1{,}20}{1{,}08}\right)^{t} = \frac{135\ 000}{45\ 000}$$

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{t} = 3$$

Aplicando logaritmos nos dois lados da igualdade, temos:

$$\log\left(\frac{10}{9}\right)^{t} = \log 3$$

$$t\ .\ (\log 10 - \log 9) = \log 3$$

$$t\ .\ (\log 10 - \log 3^{2}) = \log 3$$

$$t\ .\ (\log 10 - (\ 2\ .\ \log 3) = \log 3$$

$$t\ .\ (1 - 2\ (0{,}48)) \cong 0{,}48$$

$$t.\ (0{,}04) \cong 0{,}48$$

$$t \cong 12$$

Serão decorridos 12 anos, então a alternativa correta é a letra **B**

4.3 Nível sonoro

Segundo Ramalho (2007), o aparelho auditivo humano identifica no som três características, também conhecidas como qualidades fisiológicas, que são altura, intensidade e timbre.

Vamos considerar a segunda dessas três qualidades fisiológicas, a intensidade.

A qualidade fisiológica pela qual diferenciamos os sons fracos dos fortes é denominada intensidade auditiva ou sonoridade, ou nível sonoro do som. De acordo com Ramalho (2007), para medir a intensidade auditiva ou o nível sonoro, utiliza–se uma escala logarítmica.

Considerando I_0 como a menor intensidade física de um som audível (geralmente adota-se 10^{-12} w/m^{2}) e I a intensidade física do som que se quer medir, se define intensidade auditiva ou nível sonoro β de um som, como o expoente a que se deve elevar o número 10 para se obter a relação $\frac{I}{I_0}$. Assim, temos:

$$10^{\beta} = \frac{I}{I_0}$$

Pela definição de logaritmo decimal, podemos escrever:

$$\beta = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Nessa fórmula, β é a medida em bel (símbolo B), nome dado em homenagem a Alexander Graham Bell (1847 –1922), cientista escocês naturalizado norte americano, que desenvolveu vários estudos no campo da Acústica, e foi o inventor do telefone e do microfone.

O nível sonoro β geralmente é medido em um submúltiplo do bel, o decibel (dB), sendo que 1 dB = $\frac{1}{10}$B

Assim, temos que:

$$\beta = 10 \,.\, \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Onde:

β é o nível sonora

I é a intensidade correspondente ao nível β

I_0 é a constante limiar da audibilidade ($I_0 = 10^{-12}$ w/m^2)

Observe alguns níveis sonoros em decibéis presentes no cotidiano, como nos mostra a tabela abaixo.

Tabela 4: Nível sonoro em decibéis

Fonte sonora	**Intensidade (dB)**
Arma de fogo	130
Decolagem de avião	120
Conserto de rock	110
Despertar de campainha	80
Conversação normal	50
Limiar da audição	0

Fonte: www.megaclima.pt/tabela-decibeis (adaptado)

Exemplos:

a) A intensidade do som, representada por I, é a potência do som por unidade de área de uma superfície e é medida na unidade W/m^2. A intensidade mais baixa que o ser humano ainda consegue ouvir é $I_0 = 10^{-12}$ w/m^2. Quando ouvimos um som de intensidade I, o nível sonoro, representado por β, é o número dado por $\beta = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, em que a unidade chama-se decibel (db). Certo dia, na Rua São Clemente no Rio de

Janeiro, ao meio dia, foi medida a intensidade sonora do tráfego de veículos de 10^{-4} $^{W}/m^{2}$. Nesse momento, o nível sonoro era de:

a)100 db.

b) 80 db.

c) 60 db

d) 40 db .

e) 90 db .

Solução:

Utilizando os dados da questão, temos:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right)$$

$$\beta = 10 \cdot \log 10^{8}$$

$$\beta = 10 \cdot 8 \log 10$$

$$\beta = 10 \cdot 8$$

$$\beta = 80 \text{ db}$$

Naquele instante o nível sonoro era de 80 db, tendo como resposta a alternativa **b** .

b) O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibéis (dB) por:

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

onde: I = intensidade sonora fornecida pela caixa de som; I_0 = intensidade padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual N = 0). Para o nível de intensidade N = 120 dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

a) $10^{13} \cdot I_0$

b) $10^{12} \cdot I_0$

c) $1200 \cdot I_0$

d) $120 \cdot I_0$

e) $12 \cdot I_0$

Solução:

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$120 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 12$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^{12}$$

$$I = 10^{12} \cdot I_0$$

Logo, a alternativa correta é a letra **b**

4.4 Escala Richter

Segundo Dante (2013), um terremoto, ou sismo, ocorre quando rochas da litosfera submetidas a altas tensões se acomodam. As ondas sísmicas causadas pelo choque, parte em toda direção a partir de um ponto chamado foco ou hipocentro e o ponto situado na superfície exatamente acima do foco é chamado de epicentro do terremoto. A partir desse ponto, as ondas de choque fazem com que o solo se mova em movimentos cíclicos que geram ondas forçando o solo para cima e para baixo e de um lado para o outro. Quando o epicentro está abaixo de um oceano, ele pode criar um maremoto ou um tsunami, que é uma onda gigante.

A maior parte dos terremotos ocorre nas áreas de contato entre placas tectônicas que constituem a nossa crosta terrestre.

Adotada em 1935, a **escala Richter** foi assim batizada em homenagem ao físico norte-americano Charles F. Richter (1900-1985). Essa escala foi construída a partir dos logaritmos decimais. A intensidade **I** de um terremoto é um número que varia de **I** = 0 até **I** = 9,5 para o maior terremoto conhecido. **I** é dado pela formula:

$$\mathbf{I} = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E é a energia liberada em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$.

A tabela 5 contém os valores de magnitude de terremotos e seus respectivos efeitos

Tabela 5: Terremotos e seus efeitos

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte: Pereira (2016, p 61)

O maior terremoto já registrado foi o grande terremoto do Chile, em 1960, que atingiu 9,5 na escala Richter, seguido pelo da indonésia, em 2004, que atingiu 9,3 na mesma escala (DANTE, 2013, p 200).

Exemplos:

a) Dois tremores de terra sentidos pela população de Montes Claros (MG) em 19 de maio de 2012. O mais forte deles alcançou uma intensidade aproximada de 4,5 pontos na escala Richter, tendo sido detectado pelos equipamentos de sismologia da Universidade de Brasília (UnB). Qual foi a energia liberada por ele?

Solução:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$4,5 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7.\ 10^{-3}}\right)$$

$$6,75 = \log_{10}\left(\frac{E}{7.\ 10^{-3}}\right)$$

$$10^{6,75} = \left(\frac{E}{7\,.10^{-3}}\right)$$

$$E = 7 \cdot 10^{3,75} \text{ kwh}$$

Temos que a energia liberada foi de $E = 7 \cdot 10^{3,75}$ kwh .

b) Qual é a energia liberada em um terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

Solução:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$8 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{7\,.10^{-3}}\right)$$

$$12 = \log_{10}\left(\frac{E}{7.\ 10^{-3}}\right)$$

$$10^{\ 12} = \left(\frac{E}{7\,.10^{-3}}\right)$$

$$E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{12}$$

$$E = 7 \cdot 10^{9} \text{ kwh}$$

Temos que a energia liberada é de $E = 7 \cdot 10^{9}$ kwh .

Os exemplos citados, são alguns entre as muitas aplicações referentes a logaritmos que se estende a inúmeras áreas. Com estas aplicações percebemos o quanto este tema é importante para ciência.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho realizamos um estudo dos logaritmos e apresentamos algumas de suas inúmeras aplicações. Podemos concluir que a abordagem do tema é de grande relevância, visto a sua aplicabilidade na matemática e em diversas situações do cotidiano.

As aplicações apresentadas neste trabalho, são uma proposta para ensinar o conteúdo dos logaritmos de uma forma interdisciplinar e contextualizada, proporcionando, portanto, uma aprendizagem motivadora e efetiva.

Verificamos ainda, que o desenvolvimento deste trabalho contribuiu para uma melhor compreensão da evolução histórica e do conceito dos logaritmos, invenção que surgiu da necessidade de simplificar cálculos, no início do século XVII e que atualmente, continua a colaborar como ferramenta na resolução de modelos matemáticos, em diversas aplicações, contribuindo no desenvolvimento científico e tecnológico.

Esperamos que esta proposta pedagógica sirva de suporte para estudantes e professores que estão em sala de aula, que estes sintam-se motivados a desenvolver uma metodologia que estabeleça a relação entre a história e as aplicações dos logaritmos, como também de outros conteúdos desta maravilhosa ciência que é a matemática.

REFERÊNCIAS

ANGELIN, Eduardo Miranda. **Logaritmos: História, Teoria e Aplicações**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, tradução Elza F. Gomide 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Biucher, 1996.

BIANCHINI, E. PACCOLA, H. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

BRASIL**, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais *(PCN+)***. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. vol. 1.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, tradução Hygino H. Domingues 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Ronize Lampert. **Uma sequência de ensino para o estudo de logaritmo usando a engenharia didática**. 2006. Dissertação(Mestrado Profissional em Ensino de Física e Matemática) –Centro Universitário Franciscano de Santa Maria , Santa Maria, 2006.

FELTRE, R. **Química**. 6. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2004. v.2.

IEZZI.G. DOLCE, O. MURAKAME, C. **Fundamentos de Matemática Elementar 2.** 3. ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.

PEREIRA, Mariana Costa. **Logaritmos: Uma abordagem interdisciplinar.** 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2016

RAMALHO JÚNIOR, F.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. T**. Os Fundamentos da Física** 9. ed. São Paulo: Moderna, 2007. Vol. 2

ROCHA, Fernando José Martins da. **Logaritmos e aplicações.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campo dos Goytacazes, 2013

SILVA, Josiel Pereira da. **Logaritmos e aplicações.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013

SOARES. Evanildo Costa. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestão didática para sala de aula.** 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de

Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

SOPLIA E RARE BOOKS**. Napier, John**. [2019]. 1 imagem. Disponível em: https://www.sophiararebooks.com/pages/books/4638/john-napier/mirifici-logarithmorum-canonis-constructio-et-eorum-ad-naturales-ipsorum-numeros-habitudines. Acesso em: 20 agosto 2019.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **b_John Napier.** [2019]. 1 imagem. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_john-napier/. Acesso em: 28 agosto 2019.

E-CACULO DA USP. **História Burgi. [2009].** 1 imagem. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/burgi.htm. Acesso em: 28 agosto 2019.

MEGACLIMA. **Tabela de Decibéis. [2015].** 1 tabela. Disponível em: https://www.megaclima.pt/tabela-decibeis.php. Acesso em: 21 setembro 2019.