



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**PAULO WEBER PINHEIRO DA SILVA**

**TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES**

**MONTEIRO  
2019**

PAULO WEBER PINHEIRO DA SILVA

## TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Orientador:** Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO

2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586t Silva, Paulo Weber Pinheiro da.  
Teorema de Green e aplicações [manuscrito] / Paulo  
Weber Pinheiro da Silva. - 2019.  
44 p.  
Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de  
Ciências Humanas e Exatas , 2019.  
"Orientação : Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira ,  
Coordenação do Curso de Matemática - CCHE."  
1. Teorema de Green. 2. Cálculo. 3. George Green. 4.  
Cálculos de área. 5. Fluxo de campo de velocidade. 6.  
Matemática aplicada. I. Título  
21. ed. CDD 515

PAULO WEBER PINHEIRO DA SILVA

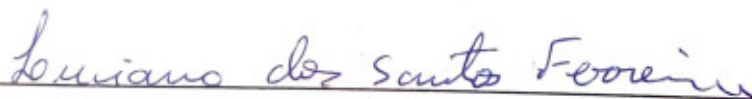
## TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

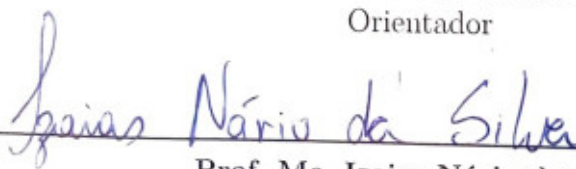
Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em: 29/11/2019.

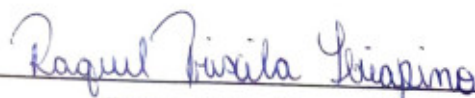
### BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira  
Orientador



Prof. Me. Izaias Nário da Silva  
Examinador externo (SEECT-PB)



Profa. Esp. Raquel Priscila Ibiapino  
Examinador interno (CCHE/UEPB)

*Dedico a realização deste trabalho a DEUS que abençoou sempre a cada passo feito nesta produção da pesquisa, a toda minha família, namorada, amigos e professores que sempre apoiaram em todos os momentos. E a todos que deseja almejar sempre algo melhor que nunca desista de seus sonhos e metas, que tudo é possível se tem um sonho corra atrás que no final sempre vem sua recompensa.*

## AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus pelo dom da vida e ter me concedido saúde e força para superar todos desafios enfrentado. A minha família minha mãe Maria José, pai José Paulo, irmãos Kaio César e Maria Sthefany, meus avôs, tios, primos e amigos que sempre esteve ao meu lado com palavras de apoio e passando sempre confiança que tudo iria da certo. E a minha namorada Silvaneide que foi uma pessoa excepcional que conheci iluminada por DEUS e sempre me apoiando e motivando pra sempre buscar algo a mais.

Ao apoio de todos os professores que me sempre esteve apoiando de não fazendo desistir, desde do ensino fundamental até minha graduação. Os professores que fizeram parte deste crescimento e apoio foram: Professora Ione, Dora, Veronice, Cida Silvestre, Genilda, Elenida e todos os demais que tiveram sua contribuição na formação do fundamental ao ensino médio. Na graduação teve a soma de uma equipe de grandes professores que contribuíram muito para o meu crescimento pessoal e profissional, que incentivaram e sempre encaminhado e orientando para estudos. Ao meu orientado professor mestre Luciano que teve paciência, os professores mestre e doutores Braune, Robson, Rodrigo, Luiz Lima, Luiz Calvante, Joélson, Stalen, Roger, Marciel, Nathan, Cladio, Toni e os demais que deixaram sua contribuição. A coordenação e direção que sempre prestando um ótimo trabalho e ajudando nas informações, a equipe da biblioteca que sempre auxiliado e ajudando sendo prestativos a bibliotecaria Suzana, os auxiliares Marcos, Stalen e toda a equipe que compoem.

Sem falar de uma vastas amizade que consegui que vou levar para toda minha vida de colegas de sala pra irmão da vida pessoas pelas quais tenho admiração e respeito. Não poderia de deixa de agradecer a Padre Gabriel que hoje não esta conosco mais deixou grande contribuição e legado aos jovens e em principal a mim como estudante e bolsista, fornecendo bolsa de estudo para os jovens estudarem em colégios particulares.

Só tenho que agradecer a todos por terem contribuido no perido de estudo na UEPB, eu sempre falo que não tenho colegas e amigos e sim uma grande família. Que Deus abençoe todos nós e cubra de benção.

*“Peçam, e lhes será dado! Procurem, e encontrarão! Batam, e abrirão a porta para vocês! Pois todo aquele que pede, recebe; quem procura acha; e a quem bate, a porta será aberta.”*  
*(Bíblia Sagrada, Mateus 7 : 7 - 8)*

## RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade mostrar a história do Teorema de Green e suas áreas de aplicações. Assim como mostrar a importância de se entender a função do cálculo e como este está envolvido no nosso cotidiano. No decorrer do trabalho de caráter bibliográfico, mostraremos a história de Green, os desafios enfrentados para ter sua importância no mundo acadêmico e aceitação além dos trabalhos produzidos durante sua carreira. Suas pesquisas mais intensivas na área da física, considerando os Momentos de Inércia e Magnetismo, sendo possível desenvolver definições de fundamental importância e de alto valor. Seguiremos com resultados de definições de: curvas, curvas suaves, curvas fechadas, cálculo de integral de linha, campo escalar e vetorial e integrais duplas de superfícies, fundamental para o fortalecimento do Teorema que foi estudado. Também será ressaltada a importância do reconhecido Teorema de Green que trabalha com integrais de linhas para calcular regiões de curvas fechadas e integrais de duplas de tipo área, sendo usado em cálculos complexos, e também em fluxos de escoamento. Assim devido sua aplicação foi possível que se criasse um aparelho de extrema importância, o Planímetro, que facilitou o cálculo de área. Ademais, a generalização deste Teorema foi fundamental para o surgimento de dois Teoremas o de Stokes e Divergência de Gauss.

**Palavras-chave:** Teorema de Green. História. Aplicação. Planímetro.



## ABSTRACT

This paper aims to show the history of Green's Theorem and its application areas. As well as showing the importance of understanding the function of calculus and how it is involved in our daily lives. From the bibliographic work, we will show the history of Green, the challenges faced to have its importance in the academic world and acceptance beyond the works produced during his career. His most intensive research in the area of physics, considering the Moments of Inertia and Magnetism, being able to develop definitions of fundamental importance and high value. We will follow with definition results of: curves, smooth curves, closed curves, line integral calculation, scalar and vector field and double surface integrals, fundamental for the strengthening of the Theorem that was studied. Also noteworthy is the importance of the well-known Green Theorem that works with line integrals to calculate closed-loop and area-area integrals, being used in complex calculations as well as in flow flows. Thus due to its application it was possible to create an extremely important device, the Planimeter, which facilitated the area calculation. Moreover, the generalization of this theorem was fundamental for the emergence of two Stokes theorem and Gaussian divergence.

**Key-words:** Green's theorem. Story. Application. Planimeter.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – George Green . . . . .	13
Figura 2 – Lapidar de George Green . . . . .	13
Figura 3 – Curva . . . . .	15
Figura 4 – Curva Paramétrica . . . . .	16
Figura 5 – Ponto anguloso . . . . .	17
Figura 6 – Ponto anguloso na qual a derivada não existe . . . . .	17
Figura 7 – Curva Suave . . . . .	18
Figura 8 – Orientação da Curva . . . . .	18
Figura 9 – Orientação da Curva Suave por Partes . . . . .	18
Figura 10 – A Integral sobre a Curva Suave . . . . .	19
Figura 11 – Cálculo de Integral de Linha . . . . .	20
Figura 12 – Plano Tangente . . . . .	27
Figura 13 – Demonstração da 4.2 . . . . .	30
Figura 14 – Demonstração da 4.3 . . . . .	31
Figura 15 – Região retangular . . . . .	33
Figura 16 – Região com Buracos . . . . .	36
Figura 17 – Planímetro . . . . .	40

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	NOÇÕES BÁSICAS . . . . .	15
2.1	CURVAS . . . . .	15
3	FUNÇÃO VETORIAL . . . . .	24
4	TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES . . . . .	29
4.1	EXTENSÕES DO TEOREMA . . . . .	32
4.1.1	Regiões diversas . . . . .	32
4.1.2	Regiões com singularidades . . . . .	35
4.2	DUAS IMPORTANTES OBSERVAÇÕES . . . . .	37
4.3	APLICAÇÕES . . . . .	37
4.3.1	Cálculo de área . . . . .	37
4.3.2	Trabalho realizado pela força $\vec{F}$ . . . . .	38
4.4	GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN . . . . .	39
4.5	PLANÍMETRO . . . . .	40
5	CONCLUSÃO . . . . .	44
	REFERÊNCIAS . . . . .	45

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade mostrar a história do teorema de Green sua importância, as dificuldades encontradas para sua elaboração até a formalização, os campos de aplicações, as contribuições para outros teoremas, suas aplicações no cotidiano. A beleza deste teorema está na sua abrangência, no envolvimento de Cálculo Diferencial e Integral, apoiado nos estudos de dois grandes matemáticos Isaac Newton (1643 -1727) e Leibniz (1646 – 1716) que teve suas pesquisas de fundamentos mais importantes do cálculo: as derivadas e as integrais; também conhecido como Cálculo Infinitesimal e, que sobremaneira mais tarde refletem o Teorema de Green que é um importante Teorema de Cálculo Diferencial Vetorial.

Iremos analisar no Teorema de Green como utilizamos as Integrais de Linhas e sua importância ao decorrer dos estudos, a aplicações de vetores do Cálculo Vetorial, a utilização de Divergência e o Rotacional, que tem aplicação na física; sabendo que o Teorema de Green trabalha com regiões  $R$ , ou seja, no cálculo de área no espaço bidimensional (utilizamos a notação  $2D$ ), que serve como base para a generalização dos futuros de Stokes e Gauss.

O Teorema de Green é de autoria de George Green, que é de origem Inglesa nascido em Nottingham em 13 de Junho de 1793, vindo de uma família de origem de fazendeiros numa aldeia de Saxondale, localizada a algumas milhas de Nottingham. Segundo Buffoni (2003), O pai de George Green, foi ajudante de padeiro, onde no decorrer do tempo adquiriu sua própria padaria e partir daí prosperou comprando terras e propriedades que ficavam localizadas as margem do rio, tendo armazéns para guardar os grãos de trigo para uso na padaria e também um moinho. Alugava suas propriedades para obter lucro, tendo assim uma visão de empreendedor. George Green foi criado neste meio de fazendeiros, sendo enviado aos oito anos de idade para estudar em Robert Goodacre's Academy, onde permaneceu por quatro períodos estudando. Contudo passados os quatros anos teve que voltar para casa, para ajudar seu pai na padaria.

Ainda segundo Buffoni (2003), foi na escola particular Robert Goodacre's Academy, que Green teve uma ótima formação, sendo também onde teve o primeiro contato com os estudos, gerando assim uma curiosidade e gosto pelo conhecimento. Seus professores eram de ciência o que acabou influenciando no seu interesse por ciência. Contudo logo depois surgiu seu interesse por matemática surgiu logo depois. Com isso George Green aos nove de idade já tinha recebido toda a educação formal que ia adquirir até os quarenta anos da sua vida. Na sua cidade havia livrarias nas qual Green poderia compra livros de ensino e também enciclopédias, já que não havia bibliotecas na cidade. Tudo indica que ele teve aconselhamentos para leitura de alguns professores matemáticos diplomados que residia

na cidade de Nottingham, mostrando sim as dificuldades enfrentadas por Green na época.

De acordo com Buffoni (2003), aos quatorze anos de idade ele já tinha responsabilidades de uma pessoa de adulta. Tomando conta de um moinho de vento que seu pai havia construído em Sneiton, que não era de fácil manuseio, onde aprendeu com um operário o funcionamento do moinho e começou a operar, acredita-se que ele aproveitava a noite quando estava tudo tranquilo para estudar, utilizando o chão como forma de estudo, claro estudava quando estava parado o vento, porque quando estava ventado bastante o moído gerava bastante trabalho pra ele. Sendo essa uma vida bem difícil para um jovem desta idade. Contudo este jovem ainda iria surpreender bastante o mundo, aos vinte e quatro anos George Green se mudou para a cidade de Nottingham com toda sua família. Onde Green passou a frequentar a biblioteca que tinha sido aberta recentemente, dando assim início aos seus estudos matemáticos e de ciência, tornando-se uma pessoa altamente intelectual na sua cidade.

Green, iria passar por bastante dificuldade para ser reconhecido pelo mundo acadêmico, que estava almejando. Segundo Buffoni (2003) ele só teria publicado seu primeiro documento em 1828, com idade de trinta e cinco anos, trabalho intitulado “Um ensaio na Aplicação de Análise Matemática para as Teorias de Eletricidade e Magnetismo” era um trabalho de grande originalidade, notável e de grande importância no desenvolvimento da matemática, contudo não teve tanto efeito até alguns anos depois. Depois desse primeiro passo, Green teve alguém que o ajudou a dá um salto na sua vida acadêmica, o matemático Edward Bromgead diplomado pela faculdade de Cambridge deu apoio e o encorajou a publicar seus trabalhos científicos, fazendo-o evoluir cada vez mais, procurando áreas de mais interesses dos físicos e dos matemáticos britânicos. Logo após ele ingressou na faculdade de Cambridge para estudar e se graduar e ganhou seu primeiro diploma em matemática em 1837 e logo depois foi eleito por companheirismo da faculdade Gonville e Caius. Quando veio a ficar doente retornou para sua cidade natal e faleceu aos quarenta e dois anos de idade deixando esposa e sete filhos, não podendo ver em vida o valor do seu trabalho e sua utilidade.

Todo o trabalho de George Green teve uma abrangência na área da física e era quase todo desenvolvido para desenvolver problemas físicos de um modo em geral, tendo interesse em eletrostática, em cálculo de cargas de superfícies de condução, também fez grande uso no potencial elétrico em seu trabalho de grande reconhecimento provando este teorema que ficou conhecido como o famoso Teorema de Green. Para Buffoni (2003), este teorema é tão grandioso na sua utilização no cálculo de área de regiões  $R$  de superfícies fechadas e pode ser aplicada se houver singularidade (que conhecemos popularmente como buracos). Desenvolveu também técnicas poderosas para a resolução de equações diferenciais, podendo ser aplicadas em situações de problemas com alto grau de complexidade. Ainda segundo a citada autora anteriormente, Green teve um trabalho desenvolvido de caráter original

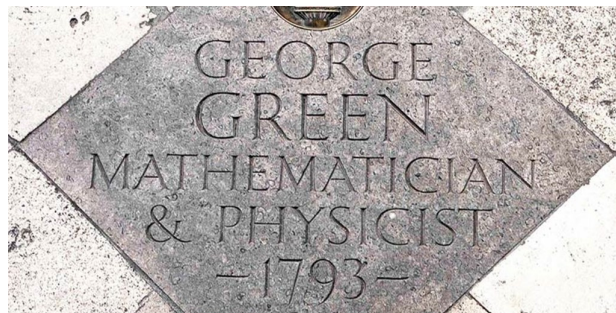
em elasticidade onde ficou conhecido como tensor de Green. É possível observar em seus estudos que em vários casos gerais são necessário 21 módulos diferentes para descrever a tensão, sendo o primeiro a pesquisar e escrever sobre o princípio da conservação de energia. Não podemos de deixar de falar que o seu trabalho conhecido como Teorema de Green foi utilizado por outros matemáticos brilhantes, onde houve uma generalização, que são o Teorema de Stokes e Teorema de Divergência ou Teorema de Gauss. Teoremas que possuem uma ampla utilização na física, engenharia e em diversas aplicações.

Figura 1 – George Green



Fonte: Bandeira (2016, p.15)

Figura 2 – Lapider de George Green



Fonte: Bandeira (2016, p.20)

De acordo com o exposto por Buffoni (2003), foi realizada uma homenagem a Green, considerado um grande matemático, onde em 1972 ocorreu a formação do Fundo Comemorativo de George Green, fundado no Departamento de Física na Universidade de Nottingham. E em 1985 foi promovida a restauração do Moinho de Green em Nottingham, foi uma valorização e reconhecimento do local de trabalho que iniciou sua vida de operador de moinho até se tornar um grande matemático e pesquisador.

Buffoni (2003), apresenta em seus estudos os trabalhos produzidos por George Green, sendo eles:

- Um ensaio na aplicação de análise matemática para as teorias de eletricidade e magnetismo;

- Aplicação dos resultados preliminares na teoria de magnetismo;
- Investigações matemáticas relativas às leis do equilíbrio de fluidos análogo ao fluido elétrico, com outras pesquisas semelhantes;
- Na determinação das atrações exteriores e interiores de elipsoides de densidades variáveis;
- No movimento de ondas em um canal variável de pequenas profundidade e largura;
- Na reflexão e refração de som;
- Nota no movimento de ondas em canais;
- Suplementos para uma dissertação da reflexão e refração de luz;
- Na propagação de luz em meio cristalizadas;
- Pesquisas na vibração de pêndulos em meios fluidos.

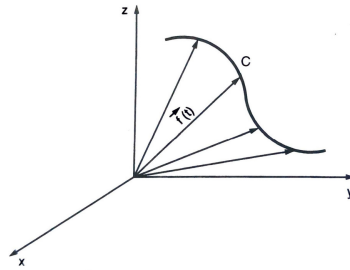
## 2 NOÇÕES BÁSICAS

Iremos apresentar algumas definições, conceitos e exemplos necessários para chegarmos ao objetivo principal deste trabalho: o Teorema de Green.

### 2.1 CURVAS

**Definição 2.1. (Curva)** Dada uma função vetorial contínua  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ ,  $t \in I$ , chamamos **curva** o lugar geométrico dos pontos  $P$  do espaço que tem vetor posição  $\vec{f}(t)$ ,  $t \in I$ . Se  $\vec{f}$  é o vetor posição de uma partícula em movimento, a curva  $C$  coincide com a trajetória da partícula: Segundo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007).

Figura 3 – Curva



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.28)

Podemos representar na forma parametrizada as curvas. Sejam,

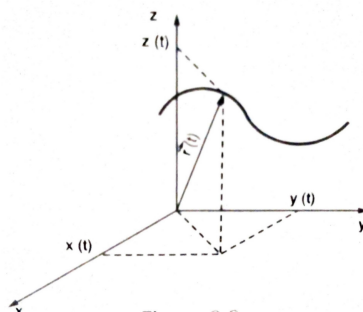
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo funções contínuas de uma variável  $t$ , definidas para  $t \in [a, b]$ . As equações (2.1) são chamadas equações paramétricas de uma curva na qual  $t$  é chamado parâmetro. Dadas as equações paramétricas de uma curva, podemos obter uma equação vetorial para ela. Basta considerar o vetor posição  $\vec{r}(t)$  de cada ponto da curva. As componentes de  $\vec{r}(t)$  são precisamente as coordenadas do ponto. Podemos escrever como

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \leq t \leq b.$$



Figura 4 – Curva Paramétrica



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.29)

**Definição 2.2. (Curva Fechada)** Uma curva é dita **fechada** se dada uma curva parametrizada  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , tem-se  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

**Definição 2.3. (Curva Simples)** Dizemos que uma curva é **simples** se cada ponto da curva corresponder a um único valor do parâmetro  $t$  (exceto quando  $t = a$  e  $t = b$ ).

**Definição 2.4. (Curva Suave ou Regular)** Uma curva é dita **suave** ou **regular** sempre que a curva  $C$  admitir uma parametrização  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , que tem derivada contínua  $\vec{r}'(t)$  e  $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ , para todo  $t \in I$ . Quando conseguimos dividir uma curva em um número finito de curvas suaves essa curva é dita **suave por partes**.

Uma curva pode ser caracterizada por ter pontos angulosos como também pela ausência de pontos angulosos.

**Exemplo 1:** Seja  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

Solução: Na Figura 5 mostra a curva. O ponto  $(0, 0)$ , correspondente a  $t = 0$ , é o ponto anguloso. Observamos que  $\vec{r}'(0) = \vec{0}$ .

**Exemplo 2:** Seja

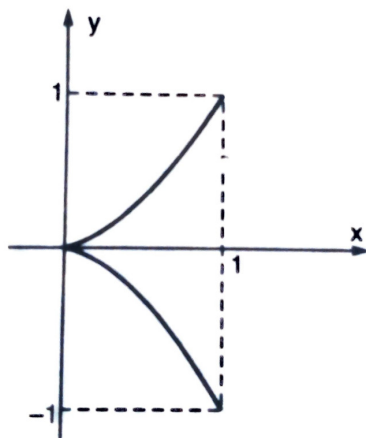
$$\vec{r}(t) = \begin{cases} i + tj & 0 \leq t \leq 1 \\ ti + j & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Solução: Na Figura 6, ao expressar está curva, podemos observar que o ponto  $(1, 1)$ , corresponde a  $t = 1$ , é o ponto anguloso na qual a derivada  $\vec{r}'(1)$  não existe.

Segundo (FLEMMING; GONÇALVES, 2007), a representação geométrica de uma curva suave é caracterizada pela ausência de pontos angulosos. Em cada um de seus pontos, a curva tem uma tangente única que varia continuamente quando se move sobre a curva. A Figura 7 mostra mais claramente:

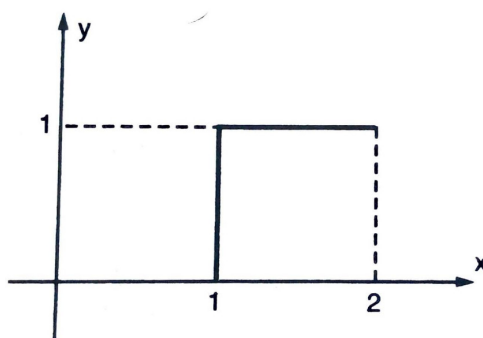
**Definição 2.5. (Orientação de uma curva)** Se um ponto desloca-se sobre uma curva suave  $C$  temos dois possíveis sentidos de percurso. A escolha de um deles como sentido

Figura 5 – Ponto anguloso



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.55)

Figura 6 – Ponto anguloso na qual a derivada não existe



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.55)

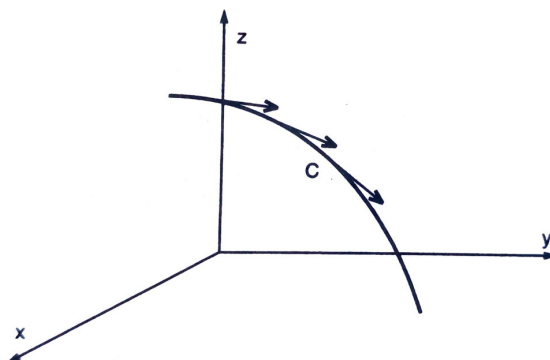
positivo define uma orientação na curva  $C$ . Vamos supor que a curva  $C$  seja representada por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

Convencionamos chamar de sentido positivo sobre  $C$  o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro  $t$  cresce de  $a$  até  $b$ , conforme a figura abaixo. O sentido oposto é chamado sentido negativo sobre  $C$ ., de acordo com a Figura 8

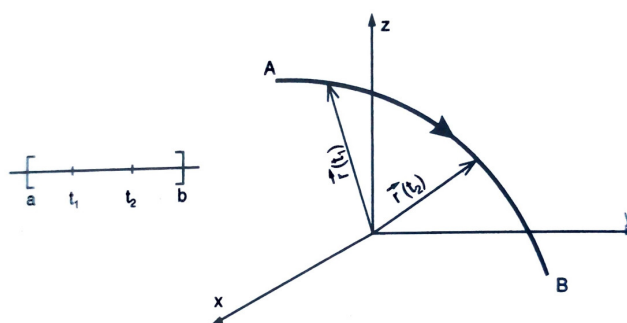
De acordo com nossa convenção sempre que uma curva suave  $C$  é representado por:  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  com  $t \in [a, b]$ ,  $C$  é uma curva orientada e o seu percurso

Figura 7 – Curva Suave



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.55)

Figura 8 – Orientação da Curva

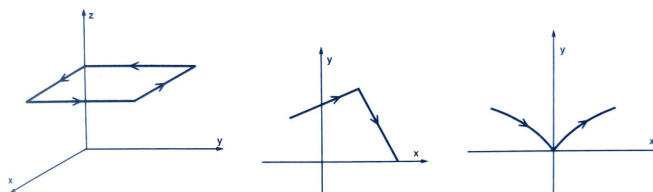


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.56)

positivo é quando os valores do parâmetro  $t$  é crescente.

Se uma curva simples  $C$  é suave por partes, podemos orientá-la, como mostra as figuras a seguir, orientando cada parte suave de  $C$ .

Figura 9 – Orientação da Curva Suave por Partes



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.57)

**Definição 2.6.** Dada uma curva orientada  $C$ , representada por  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  com  $t \in [a, b]$  então a curva  $-C$  é definida como a curva  $C$  com orientação oposta. A curva  $-C$  é dada por:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(a + b - t) = x(a + b - t)\vec{i} + y(a + b - t)\vec{j} + z(a + b - t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

**Definição 2.7. (Campos Escalares)** Seja  $D$  uma região no espaço tridimensional e seja  $f$  uma função escalar definida em  $D$ . Então, a cada ponto  $P \in D$ ,  $f$  associa uma única grandeza escalar  $f(P)$ . A região  $D$ , juntamente com os valores de  $f$  em cada um de seus pontos, é chamado **campo escalar**. Dizemos também que  $f$  define um campo escalar sobre  $D$ .

**Definição 2.8. (Integral de Linha)** Seja  $C$  uma curva suave, orientado com ponto inicial  $A$  e o ponto terminal  $B$ . Seja  $f(x, y, z)$  um campo escalar definido em cada ponto de  $C$ . Dividimos a curva  $C$  em  $n$  pequenos arcos pelos pontos

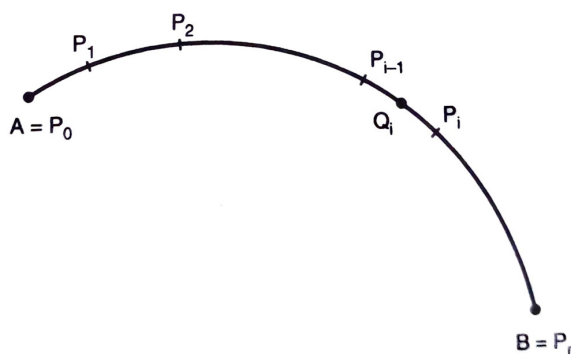
$$A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n = B.$$

Denotamos por  $\Delta s_i$  o comprimento do arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$ . Em cada arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$ , escolhemos um ponto  $Q_i$  conforme a figura abaixo. Calculamos o valor de  $f$  no ponto  $Q_i$ , multiplicamos esse valor por  $\Delta s_i$  e formamos a soma  $\sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \Delta s_i$ . A integral de linha de  $f$  ao longo de  $C$ , de  $A$  até  $B$ , que denotamos  $\int_C f(x, y, z) ds$ , é definida por

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta s_i \tag{2.2}$$

quando o limite à direita existe.

Figura 10 – A Integral sobre a Curva Suave



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.309)

A curva  $C$  é também chamada caminho de integração. Se a curva  $C$  é suave por partes, a integral de linha sobre  $C$  é definida como a soma das integrais sobre cada parte suave de  $C$ .

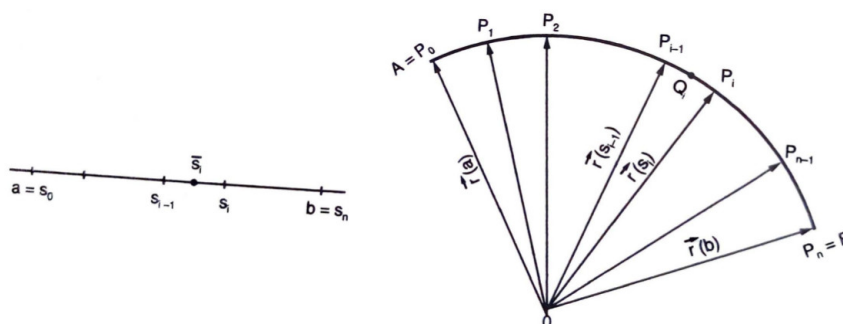
A  $\int_C f(x, y, z)ds$  também é denominada integral do campo escalar  $f$  com respeito ao comprimento do arco da curva  $C$ .

**Definição 2.9. (Cálculo de Integral de linha)** Para calcular a integral de linha, necessitamos da equação que representa a curva  $C$ .

1º) Caso: Representamos  $C$  por  $\vec{h}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ ,  $s \in [a, b]$ , onde  $s$  é o parâmetro de comprimento do arco de  $C$ . Neste caso, a divisão da curva  $C$  pelos pontos  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n$ . Originando uma partição no intervalo  $[a, b]$ , dada pelos pontos:

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_n = b.$$

Figura 11 – Cálculo de Integral de Linha



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.310)

O ponto  $Q_i$  em (2.2) tem coordenadas  $(x(s_i^*), y(s_i^*), z(s_i^*))$ , onde  $s_i^*$  é algum ponto do intervalo  $[s_{i-1}, s_i]$ . A soma que aparece em (2.2) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^n f(x(s_i^*), y(s_i^*), z(s_i^*))\Delta s_i.$$

Podemos verificar que é uma soma de Riemann da função  $f(x(s), y(s), z(s))$ . Assim, o limite em (2.2) é a integral definida dessa função. Temos, então:

$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s))ds. \tag{2.3}$$

2º) Caso: Representamos  $C$  por  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in [a, b]$ , onde  $t$  é um parâmetro qualquer. Para calcular a integral de linha nesse caso, fazemos uma mudança de variável em (2.3). Temos

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s)) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt.$$

Como  $\frac{ds}{dt} = \|\vec{r}'(t)\|$ , temos

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

**Definição 2.10. (Curva parcialmente suave)** Dada uma curva fechada simples ela é dita **parcialmente suave** quando é formada pela união finita de curvas  $C_k$ , tais que, essas curvas são simples e suaves.

**Definição 2.11. (Trabalho sobre uma curva suave)** O trabalho realizado por uma força  $F = Mi + Nj + Pk$ , sendo  $M, N, P$  são funções contínuas sobre uma curva suave  $r(t)$  de  $t = a$  a  $t = b$  é

$$W = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot T ds.$$

Lembrando que  $F(x)$  é a força continua magnética e  $T$  é o versor tangente da curva.

**Definição 2.12. (Campos Vetoriais)** Seja  $D$  uma região no espaço e seja  $\vec{f}$  uma função vetorial definida em  $D$ . Então, a cada ponto  $P \in D$ ,  $\vec{f}$  associa um único vetor  $\vec{f}(P)$ . A região  $D$ , juntamente com os correspondentes vetores  $\vec{f}(P)$ , constitui um **campo vetorial**. Dizemos também que  $\vec{f}$  define um campo vetorial sobre  $D$ .

**Exemplo 3:** Seja  $D$  a atmosfera terrestre. A cada ponto  $P \in D$  associamos o vetor  $\vec{v}(P)$  que representa a velocidade do vento em  $P$ . Então o vetor  $\vec{v}$  define um campo vetorial em  $D$ , chamado **Campo de Velocidade**.

**Definição 2.13. (Campo Gradiente)** O campo gradiente de uma função diferenciável  $f(x, y, z)$  é o campo de vetores gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k.$$

**Exemplo 4:** Encontre o campo gradiente de  $f(x, y, z) = xyz$ .

Solução: O campo gradiente é  $\nabla f = yzi + xzj + xyk$ .

**Definição 2.14. (Integral Curvilínea)** Seja  $C$  uma curva suave dada por  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$ . Seja  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  um campo vetorial definido e limitado sobre  $C$ . A integral curvilínea de  $\vec{f}$ , ao longo de  $C$ , que denotamos  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ , é definida por

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt,$$

sempre que a integral à direita existe.

**Exemplo 5:** A força variável  $\vec{f} = (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$  move uma partícula ao longo da curva

$$C : \begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t^2, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2, \text{ de } (1, 0) \text{ a } (9, 12).$$

Calcule o trabalho realizado se as distâncias são medidas em *cm* e a força é medida em dinas.

**Solução:**

O trabalho é dado pela integral de linha  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ , onde  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , logo  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ , assim,

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_C (3x - 4y)dx + (4x + 2y)dy.$$

Fazendo-se as substituições  $x = 4t + 1, dx = 4, y = 3t^2$  e  $dy = 6t$ , temos

$$\begin{aligned} \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^2 [3(4t + 1) - 4(3t^2)](4dt) + [4(4t + 1) + 2(3t^2)](6tdt) \\ &= \int_0^2 (36t^3 + 48t^2 + 72t + 12)dt = (9t^4 + 16t^3 + 36t^2 + 12t) \Big|_0^2 = 440 \text{ ergs.} \end{aligned}$$

A seguir vamos apresentar algumas propriedades das integrais de linhas, as quais são herança das integrais definidas.

**Proposição 2.1. (Aditividade)** Se uma curva  $C$  for formada por ligações finitas de curvas  $C_1, C_2, \dots, C_k$  pelas extremidades, então a integral de uma função sobre  $C$  é a soma das integrais sobre a curva que a compõem:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{C_k} \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

**Proposição 2.2. (Linearidade)** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}, \vec{F}, \vec{G}$  campos de vetores e  $C$  uma curva de classe  $C^1$ , então:

$$\int_C (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot d\vec{r} = a \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + b \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}.$$

**Proposição 2.3. (Inversão)** *É uma troca na direção da curva  $C$  sobre a região a qual a integral de linha é aplicada resulta em uma troca no sinal algébrico da integral, isto é:*

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$



### 3 FUNÇÃO VETORIAL

Agora iremos apresentar algumas definições que o auxiliarão no entendimento de pontos do Teorema de Green exposto no próximo capítulo.

**Definição 3.1. (Produto Escalar)** Sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . O produto escalar entre esses vetores, denotado por  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , é um número real determinado por  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$ , onde  $0 \leq \theta \leq \pi$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**Definição 3.2. (Produto Vetorial)** Sejam os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . O produto vetorial entre esses vetores, denotado por  $\vec{u} \times \vec{v}$ , é um vetor com as seguintes características:

- i) Norma:  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- ii) Direção: normal ao plano que contém  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- iii) Sentido é positivo.

**Definição 3.3. (Funções Vetoriais)** Chamamos de função vetorial de uma variável real  $t$ , definida em um intervalo  $I$ , a função que a cada  $t \in I$  associa um vetor  $\vec{f}$  do espaço. Denotamos

$$\vec{f} = \vec{f}(t).$$

O vetor  $\vec{f}(t)$  pode ser escrito como

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}.$$

Assim, podemos dizer que a função vetorial  $\vec{f}$  determina três funções reais de  $t$ :  $f_1 = f_1(t)$ ,  $f_2 = f_2(t)$  e  $f_3 = f_3(t)$ . Reciprocamente, as três funções reais  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  determinam a função real  $\vec{f}(t)$ .

**Exemplo 6:** Em física podemos estabelecer uma função vetorial tempo. Consideremos três hipóteses tais que a primeira tenha tempo  $t^3$ , a segunda tenha tempo  $t + 5$  e a terceira seja a soma das duas anteriores. A função vetorial tempo é:

$$\vec{f}(x, y, z) = (t^3, t + 5, t^3 + t + 5).$$

**Definição 3.4. (Funções Vetoriais contínuas)** Uma função vetorial  $\vec{f} = \vec{f}(t)$ , definida em um intervalo  $I$ , é contínua em  $t_0 \in I$ , se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$ , ou seja, para um  $\epsilon > 0$  arbitrário existe um  $\delta > 0$ , tal que  $\|\vec{f}(t) - \vec{a}\| < \epsilon$  sempre que  $0 < |t - t_0| < \delta$ .

**Proposição 3.1.** Sejam  $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$  e  $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ . O  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$  se, e somente se,  $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Demonstração:** Se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ , então para um  $\epsilon > 0$  arbitrário existirá um  $\delta > 0$ , tal que  $\|\vec{f}(t) - \vec{a}\| < \epsilon$  sempre que  $0 < |t - t_0| < \delta$ .

Como  $\vec{f}(t) - \vec{a} = [f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}$ , para  $0 < |t - t_0| < \delta$ , temos que  $|\vec{f}_i - \vec{a}_i| \leq \|\vec{f}(t) - \vec{a}\| < \epsilon$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Portanto,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}_i(t) = \vec{a}_i$ .

Analogamente, se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}_i(t) = \vec{a}_i, i = 1, 2, 3$ , para todo  $\epsilon > 0$ , existem  $\delta_i > 0$  com  $i = 1, 2, 3$ , tal que  $|\vec{f}_i - \vec{a}_i| < \frac{\epsilon}{3}$  quando  $0 < |t - t_0| < \delta_i$ . Tome  $\delta = \min\{\delta_i\}$ , com  $i = 1, 2, 3$ .

Usando a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(t) - \vec{a}\| &= \|[f_1(t) - a_1]\vec{i} + [f_2(t) - a_2]\vec{j} + [f_3(t) - a_3]\vec{k}\| \\ &\leq |f_1(t) - a_1| \|\vec{i}\| + |f_2(t) - a_2| \|\vec{j}\| + |f_3(t) - a_3| \|\vec{k}\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \text{ sempre que } 0 < |t - t_0| < \delta. \end{aligned}$$

Logo,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ .

Da proposição 3.1 segue que  $\vec{f}(t)$  é contínua em  $t_0$  se, e somente se, suas componentes são funções contínuas em  $t_0$ .

**Definição 3.5.** Se  $\vec{f}$  é uma função vetorial nas variáveis  $x, y, z$ , definida em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$ , ela pode ser escrita na forma

$$\vec{f}(x, y, z) = \vec{f}_1(x, y, z)\vec{i} + \vec{f}_2(x, y, z)\vec{j} + \vec{f}_3(x, y, z)\vec{k},$$

onde  $f_1, f_2, f_3$  são funções escalares definidas em  $D$ . Essas funções escalares são as funções coordenadas da função vetorial  $\vec{f}$ . Se restringimos o domínio da função vetorial de várias variáveis ao domínio  $D \subset \mathbb{R}^2$  podemos escrever:

$$\vec{f}(x, y) = \vec{f}_1(x, y)\vec{i} + \vec{f}_2(x, y)\vec{j} + \vec{f}_3(x, y)\vec{k}.$$

**Exemplo 7:** A função  $\vec{f}(x, y, z) = x^2z\vec{i} + xy^3\vec{j} + 2\sqrt{z}\vec{k}$  é uma função vetorial definida em todos os pontos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tais que  $z \geq 0$ . Suas funções coordenadas são dadas por  $f_1(x, y, z) = x^2z, f_2(x, y, z) = xy^3$  e  $f_3(x, y, z) = 2\sqrt{z}$ .

**Definição 3.6. (Derivadas Parciais de Funções Vetoriais)** Seja  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  uma função vetorial. A derivada parcial de  $\vec{f}$  em relação a  $x$ , que denotamos por  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ , é definida por

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x + \Delta x, y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta x}$$

para todo  $(x, y, z)$  desde que o limite exista. Analogamente,

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y + \Delta y, z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(x, y, z + \Delta z) - \vec{f}(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Se  $\vec{f}(x, y, z) = \vec{f}_1(x, y, z)\vec{i} + \vec{f}_2(x, y, z)\vec{j} + \vec{f}_3(x, y, z)\vec{k}$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} &= \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial x} \vec{j} + \frac{\partial \vec{f}_3}{\partial x} \vec{k}; \\
\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} &= \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{f}_3}{\partial y} \vec{k} \text{ e} \\
\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} &= \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial z} \vec{j} + \frac{\partial \vec{f}_3}{\partial z} \vec{k}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

**Exemplo 8:** Dada a função vetorial  $\vec{f}(x, y, z) = xy^2z\vec{i} + \sqrt{x}\vec{j} + 4e^{yz}\vec{k}$ , determine suas derivadas parciais.

**Solução:**

Temos

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = y^2z\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = 2xyz\vec{i} + 4ze^{yz}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = xy^2\vec{i} + 4ye^{yz}\vec{k}$$

**Definição 3.7. (Superfície)** Uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  pode ser descrita como um conjunto de pontos  $(x, y, z)$ , que satisfazem uma equação da forma

$$f(x, y, z) = 0,$$

onde  $f$  é uma função contínua. A equação acima é chamada **representação implícita** de  $S$ . Se for possível resolvê-la para uma das variáveis em função das outras, temos uma **representação explícita** de  $S$  ou de parte de  $S$ .

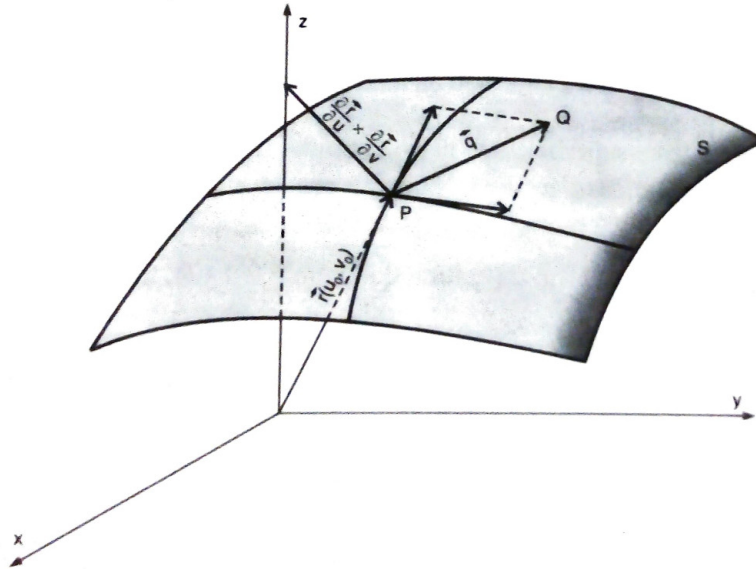
**Definição 3.8. (Plano Tangente)** Seja  $P$  um ponto de uma superfície  $S$ , representada por

$$\vec{r}(u, v), (u, v) \in R,$$

onde  $R$  é uma região conexa do plano. Suponhamos que  $P$  tem um vetor posição  $\vec{r}(u_0, v_0)$  e que as curvas coordenadas de  $S$  em  $P$  sejam suaves. Então, no ponto  $P$ , o vetor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{d(\vec{r}(u, v_0))}{du}$  é tangente à  $u$ -curva  $\vec{r}(u, v_0)$  e o vetor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{d(\vec{r}(u_0, v))}{dv}$  é tangente à  $v$ -curva  $\vec{r}(u_0, v)$ . Se os vetores  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$  e  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  são linearmente independentes, eles determinam um plano chamado plano tangente à superfície no ponto  $P$ . O vetor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$  é perpendicular ao plano tangente e é denominado vetor normal à superfície  $S$ .

**Definição 3.9. (Orientação de uma Superfície)** Uma superfície  $S$  está orientada quando escolhemos em cada ponto  $P \in S$  um vetor unitário  $\vec{n}(P)$ , normal a  $S$ , que varia continuamente com  $P$ . O campo de vetores  $\vec{n}$  é chamado campo normal unitário. Se  $S$  é representada por  $\vec{r}(u, v), (u, v) \in R$ , nos pontos, em que a condição de suavidade é satisfeita, os vetores

Figura 12 – Plano Tangente



Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p.373)

$$\vec{n}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|} \text{ e } \vec{n}_2 = -\vec{n}_1 \text{ são vetores unitários normais a } S.$$

**Definição 3.10. (Integral de Superfície de um Campo Escalar)** Seja  $S$  uma superfície suave, representada por  $\vec{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in R$ . Seja  $f$  um campo escalar definido e limitado sobre  $S$ . A integral de superfície de  $f$  sobre  $S$ , denotada por  $\int \int_S f dS$ , é definida pela equação

$$\int \int_S f dS = \int \int_R f(\vec{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv,$$

quando a integral dupla à direita existe.

**Definição 3.11. (Integral de Superfície de um Campo Vetorial)** Sejam  $S$  uma superfície suave, representada por  $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ ,  $(u, v) \in R$  e  $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$  um vetor unitário, normal a  $S$ . Seja  $\vec{f}$  um campo vetorial definido sobre  $S$ . A integral de superfície de  $\vec{f}$  sobre  $S$ , denotada por  $\int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS$ , é definida pela equação

$$\int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS = \int \int_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| dudv,$$

quando a integral à direita existe.

Se a superfície  $S$  é suave por partes, a integral é definida como a soma das integrais sobre cada pedaço suave de  $S$ .

**Exemplo 9:** Um fluido de densidade constante, com velocidade  $\vec{v} = (-2x, -2y, z)$ , escoia através da superfície  $S$  dada por  $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2 - 1)$ ,  $0 \leq u \leq 4$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ , na direção do vetor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ . Determinar a massa de fluido que atravessa  $S$  em uma unidade de tempo.

**Solução:** Vamos calcular  $\phi = \int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS$  sendo  $\vec{f} = \rho_0(-2x, -2y, z)$  e  $\rho_0$  uma constante.

Como desejamos o fluxo na direção de  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ , teremos o sinal (+) em frente à integral dupla.

Como

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u).$$

Usando a equação

$$\int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \pm \int \int_R \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \, dudv,$$

teremos

$$\begin{aligned} \phi &= \int \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = + \int \int_R \rho_0(-2u \cos v, -2u \sin v, u^2 - 1) \cdot (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u) \, dudv \\ &= \rho_0 \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4u^3 \cos^2 v + 4u^3 \sin^2 v + u^3 - u) \, dv \, du = 624\pi \rho_0 \text{ unidades de fluxo.} \end{aligned}$$

## 4 TEOREMA DE GREEN E APLICAÇÕES

Neste capítulo vamos apresentar o **Teorema de Green** é também sua demonstração. Ao longo do texto, iremos usar o símbolo  $\oint$  para denotar o sentido positivo de uma integral curvilínea ao longo de uma curva.

Uma curiosidade por que utilizamos o sentido anti-horário positivo. Considere uma curva  $C$  fechada simples  $C$  (sem auto - interseções) no plano, dizemos que ela é positivamente se ela é percorrida contra os ponteiros do relógio, anti - horário. Isso vale se a curva percorre no sentido horário, se seu região interior fica no lado esquerdo da curva  $C$  é negativa orientada, se ela é percorrida a favor dos ponteiros do relógio e daí o seu interior fica sempre do lado direito.

**Teorema 4.1. (Teorema de Green)** *Seja  $C$  uma curva fechada simples e lisa no plano  $xy$  com a propriedade de que retas paralelas aos eixos não a cortem em mais de dois pontos, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e  $R$  a região fechada delimitada por  $C$ . Se  $\vec{f} = (M, N)$  é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio  $D$  que contém  $R$ , então: Segundo Thomas George B.; Giordano (2009, p.498)*

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy. \quad (4.1)$$

**Demonstração:** Faremos a demonstração do teorema para o caso em que a curva  $C$  é suave e a região  $R$  pode ser descrita por:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b \text{ e } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \text{ e } R = \{(x, y) | c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Para provar (4.1), basta mostrar que:

$$\oint_C Mdx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dxdy. \quad (4.2)$$

e

$$\oint_C Ndy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dxdy. \quad (4.3)$$

Primeiro vamos mostrar (4.2). Temos que a curva  $C$  pode ser dividida em duas curvas  $C_1$  e  $C_2$ , de equações  $y = g_1(x)$  e  $y = g_2(x)$ . Usando  $x$  como parâmetro, obtemos uma parametrização de  $C_1$ , dada por:

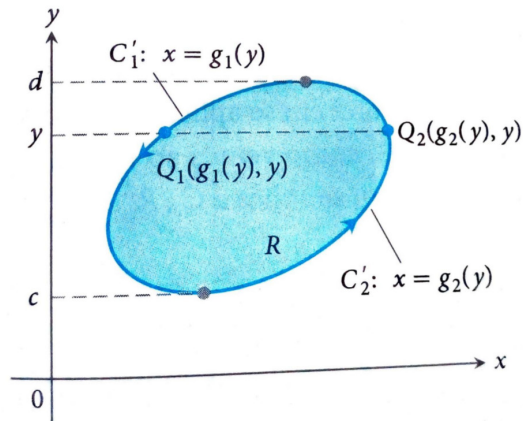
$$C_1 : \vec{r}_1(x) = (x, g_1(x)), \quad x \in [a, b].$$

Para a curva  $C_2$  não procederemos da mesma forma, pois o sentido positivo determinado pelos valores crescentes de  $x \in [a, b]$  nos dá a orientação sobre  $C_2$ , no sentido oposto ao

desejado. Porém, podemos, parametrizar  $-C_2$  e usar a propriedade de integral de linha de um campo vetorial  $\vec{f}$  que nos diz que  $\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ . Assim,

$$-C_2 : \vec{r}_2(x) = (x, g_2(x)), \quad x \in [a, b].$$

Figura 13 – Demonstração da 4.2



Fonte: Thomas George B.; Giordano (2009, p.502)

Portanto,

$$\oint_C M dx = \oint_{C_1} M dx + \oint_{C_2} M dx = \oint_{C_1} M dx - \oint_{-C_2} M dx = \int_a^b M(x, g_1(x)) dx - \int_a^b M(x, g_2(x)) dx. \quad (4.4)$$

No entanto, como  $\frac{\partial M}{\partial y}$  é contínua, desenvolvendo o 2º membro de (4.2) temos

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b \left[ M(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} \right] dx \\ &= \int_a^b [M(x, g_2(x)) - M(x, g_1(x))] dx = - \int_a^b [M(x, g_1(x)) - M(x, g_2(x))] dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

De (4.4) e (4.5), temos

$$\oint_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx dy.$$

Vamos provar (4.3), isto é:

$$\oint_C N dy = \int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy,$$

para

$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d \text{ e } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

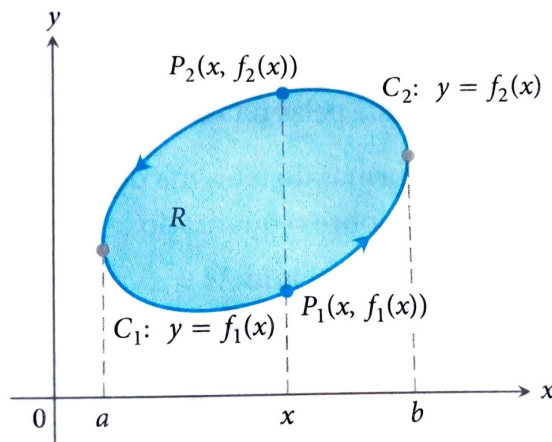
Temos que a curva  $C$  pode ser descrita como  $C_3$  e  $C_4$ , de equações  $x = h_1(y)$  e  $x = h_2(y)$ . Usando  $y$  como parâmetro, obtemos uma parametrização de  $-C_3$ , dada por:

$$-C_3 : \vec{r}_3(y) = (y, h_1(y)), \quad y \in [c, d].$$

Para a curva  $C_4$  procederemos da mesma forma. Usando  $y$  como parâmetro, obtemos uma parametrização de  $C_4$ , dada por:

$$C_4 : \vec{r}_4(y) = (y, h_2(y)), \quad y \in [c, d].$$

Figura 14 – Demonstração da 4.3



Fonte: Thomas George B.; Giordano (2009, p.502)

Portanto,

$$\oint_C N dy = \oint_{C_3} N dy + \oint_{C_4} N dy = - \int_c^d N(y, h_1(y)) dy + \int_c^d N(y, h_2(y)) dy. \quad (4.6)$$

Por outro lado,  $\frac{\partial N}{\partial x}$  é contínua e desenvolvendo o 2ª membro de (4.3), teremos

$$\int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left[ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d \left[ N(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} \right] dy$$



$$= \int_c^d [N(y, h_2(x)) - N(y, h_1(y))] dy = - \int_c^d N(y, h_1(y)) dy + \int_c^d N(y, h_2(y)) dy. \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7), obtemos

$$\oint_C N dy = \int \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy.$$

■

A seguir vamos apresentar um exemplo ilustrando o Teorema de Green sendo utilizado para o calcular a região de uma circunferência.

**Exemplo 10:** Calcular  $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ , ao longo da circunferência  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ , no sentido horário, sendo  $\vec{f} = (4x^2 - 9y, 9xy + \sqrt{y^2 + 1})$ .

**Solução:** Como  $C$  está orientada no sentido horário, não podemos aplicar o Teorema de Green diretamente. No entanto, podemos aplicar o Teorema de Green para calcular a integral sobre a curva  $-C$  e depois usar a proposição 2.3. Temos:

$$\int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int \int_R (9y + 9) dx dy = 9 \int \int_R (y + 1) dx dy.$$

Passando para coordenadas polares, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-C} \vec{f} \cdot d\vec{r} &= 9 \int_0^\pi \left[ \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} (r \operatorname{sen}\theta + 1)r dr \right] d\theta \\ &= 9 \int_0^\pi \left( \frac{r^2}{3} \operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^\pi \left( \frac{8}{3} \operatorname{sen}^4\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta \right) d\theta = 18\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -18\pi.$$

## 4.1 EXTENSÕES DO TEOREMA

### 4.1.1 Regiões diversas

Apesar de termos provado o Teorema de Green somente no caso particular onde  $R$  é uma região simples, podemos estendê-lo agora para o caso em que  $R$  é uma união finita de regiões simples.

O argumento usado anteriormente para uma região  $R$  simples não se aplica diretamente para uma região retangular, pois as retas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  e  $y = d$  encontram

com a fronteira dela em mais de dois pontos. Se dividirmos a fronteira  $C$  em quatro segmentos de retas orientados:

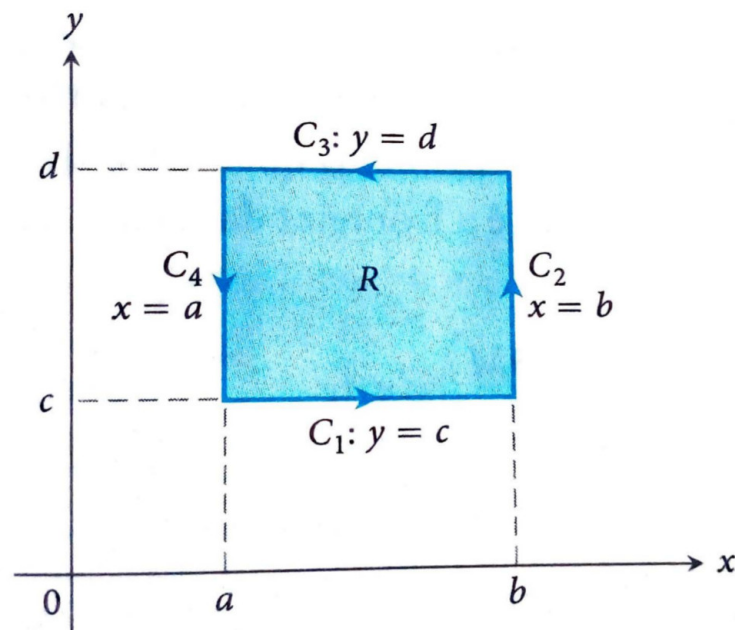
$$C_1 : y = c, \quad a \leq x \leq b$$

$$C_2 : x = b, \quad c \leq y \leq d$$

$$C_3 : y = d, \quad b \geq x \geq a$$

$$C_4 : x = a, \quad d \geq y \geq c.$$

Figura 15 – Região retangular



Fonte: Thomas George B.; Giordano (2009, p.501)

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_c^d (N(b, y) - N(a, y)) dy \\ &= \int_c^d N(b, y) dy + \int_d^c N(a, y) dy = \int_{C_2} N dy + \int_{C_4} N dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como  $y$  é constante ao longo de  $C_1$  e  $C_3$ ,  $\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy = 0$ , assim podemos adicionar  $\int_{C_1} N dy + \int_{C_3} N dy$  no lado direito da equação (4.8) sem alterar a igualdade. Dessa forma obtemos:

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \oint_C N dy. \quad (4.9)$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = - \oint_C M dx. \quad (4.10)$$

Subtraindo a equação (4.10) da equação (4.9), novamente chegamos a

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Exemplo 11:** Calcule a integral de linha  $\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy$ , onde  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solução:** Temos que  $C : x^2 + y^2 = 1$ .

Usando coordenadas polares obtemos:

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Assim, temos que  $M(x, y) = x^2 y$  e  $N(x, y) = -y^2 x$ . Além disso,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = -y^2.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_C x^2 y dx - y^2 x dy &= \iint_R -y^2 - x^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -(r \sin)^2 \theta - (r \cos)^2 \theta \quad r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{r^4}{4} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} d\theta = -\frac{\theta}{4} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**Exemplo 12:** Calcule a integral  $\oint_C [(y^2 + \sqrt{4-x^2}) dx + (\ln y - 4x) dy]$  ao longo do retângulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(3, 2)$  e  $(0, 2)$ , no sentido anti-horário.

**Solução:** Seja  $R$  a região retangular representada pelos vértices acima. Temos que:

$$M(x, y) = y^2 + \sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad N(x, y) = \ln y - 4x.$$

Além disso,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = -4.$$

Aplicando o Teorema de Green temos:

$$\begin{aligned}
 \oint_C [(y^2 + \sqrt{4-x^2})dx + (\ln y - 4x)dy] &= \iint_R (-4 - 2y) dx dy \\
 &= \int_0^2 \int_0^3 (-4 - 2y) dx dy = \int_0^2 (-4x - 2yx) \Big|_0^3 dy \\
 &= \int_0^2 (-4 \cdot 3 - 2y \cdot 3 - (-4 \cdot 0 - 2y \cdot 0)) dy = \int_0^2 (-12 - 6y) dy \\
 &= (-12y - 3y^2) \Big|_0^2 = -12 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - (-12 \cdot 0 - 3 \cdot 0) = -24 - 12 = -36.
 \end{aligned}$$

### 4.1.2 Regiões com singularidades

O Teorema de Green pode ser aplicado para regiões com furos, ou seja, regiões que não são simplesmente conexas. Note que a fronteira  $C$  da região  $R$  é constituída por duas curvas fechadas simples  $C_1$  e  $C_2$ . Admitiremos que essas curvas fronteiras são orientadas de modo que a região  $R$  esteja à esquerda quando percorrermos a curva  $C$ . Então a orientação positiva é anti-horária na curva externa  $C_1$ , porém é horária na curva interna  $C_2$ . Se dividirmos  $R$  em duas regiões  $R_1$  e  $R_2$  e aplicamos o Teorema de Green a cada uma das regiões  $R_1$  e  $R_2$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 &\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_{R_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{R_2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_{\partial R_1} M dx + N dy + \int_{\partial R_2} M dx + N dy.
 \end{aligned}$$

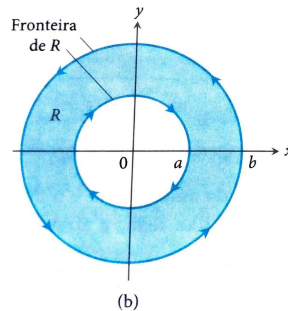
Como a integral de linha sobre a fronteira comum estão em sentidos opostos, elas se cancelam e obtemos:

$$\begin{aligned}
 &\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \int_{C_1} M dx + N dy + \int_{C_2} M dx + N dy = \int_C M dx + N dy,
 \end{aligned}$$

que é o teorema de Green para região  $R$ .

**Exemplo 13:** Vamos considerar  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas fechadas simples parcialmente suaves que não se interceptam, cada uma tendo como a origem como ponto interior. Se  $f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$  e  $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ , verifique a forma tangencial do Teorema de Green

Figura 16 – Região com Buracos



Fonte: Thomas George B.; Giordano (2009, p.503)

sobre a região anular  $R : h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 < h < 1$ .

**Solução:** A fronteira de  $R$  consiste na circunferência

$$C_1 : x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido anti-horário à medida que  $t$  aumenta, e a circunferência

$$C_h : x = h \cos \theta, \quad y = -h \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

percorrida no sentido horário à medida que  $\theta$  aumenta. As funções  $M$  e  $N$  e suas derivadas parciais são contínuas em  $R$ . Além disso,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

assim,

$$\iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R dx dy = 0.$$

A integral de  $Mdx + Ndy$  sobre a fronteira de  $R$  é:

$$\begin{aligned} \int_C Mdx + Ndy &= \oint_{C_1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \oint_{C_h} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{h^2} d\theta = 2\pi - 2\pi = 0. \end{aligned}$$

As funções  $M$  e  $N$  são descontínuas em  $(0, 0)$ , assim não podemos aplicar o Teorema de Green à circunferência e à região dentro dela. Devemos excluir a origem. Fazemos isso excluindo os pontos dentro de  $C_h$ . Poderíamos substituir a circunferência  $C_1$  por uma elipse ou qualquer outra curva fechada simples  $K$  que cerque  $C_h$ . O resultado ainda seria

$$\oint_K (Mdx + Ndy) + \oint_{C_h} (Mdx + Ndy) = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

o que leva a conclusão de que  $\oint_K (Mdx + Ndy) = 2\pi$ , para qualquer curva  $K$  desse tipo. Podemos explicar esse resultado mudando para coordenadas polares. Com

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

$$dx = -r \operatorname{sen} \theta d\theta + \cos \theta dr, \quad dy = r \cos \theta d\theta + \operatorname{sen} \theta dr,$$

temos:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)}{r^2} d\theta = d\theta,$$

e  $\theta$  aumenta em  $2\pi$  à medida que percorremos  $K$  uma vez no sentido anti-horário.

## 4.2 DUAS IMPORTANTES OBSERVAÇÕES

1. O Teorema de Green é um caso particular do Teorema de Stokes e Gauss. Podemos analisar que o Teorema de Stokes constitui uma generalização do Teorema de Green para o espaço tridimensional e pode ser utilizado para transformar determinadas integrais curvilíneas em integrais de superfície, ou vice-versa.

2. Podemos ver o Teorema de Green de outra maneira que é: **Teorema de Green (Circulação-Rotacional ou forma tangencial)** A circulação no sentido anti-horário de um campo  $F = M\vec{i} + N\vec{j}$  em torno de uma curva fechada simples  $C$  no plano é igual à integral dupla de  $(\operatorname{rot} F) \cdot k$  sobre a região  $R$  limitada por  $C$ .

$$\oint_C F \cdot T ds = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

## 4.3 APLICAÇÕES

### 4.3.1 Cálculo de área

**Teorema 4.2.** Se  $R$  for uma região tendo por fronteira uma curva  $C$  fechada simples suave, e  $A$  unidades de área for a área de  $R$ , então,

$$A = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx.$$

**Demonstração:** Sejam  $M(x, y) = -\frac{1}{2}y$  e  $N(x, y) = \frac{1}{2}x$ . Então,

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy &= \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{2}y \right) \right] dx dy \\ &= \iint_R \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx dy = \iint_R dx dy. \end{aligned}$$

Como  $\iint_R dx dy$  é a medida da área de  $R$ , logo  $\frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = A$ .



**Exemplo 14:** Aplique o Teorema de Green para calcular a área da região limitada pela elipse positivamente orientada e parametrizada pelo caminho  $\lambda : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\lambda(t) = (a \cos t, b \sin t)$ .

**Solução:** Usando a Fórmula do teorema de Green  $A = \frac{1}{2} \int_a^b [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$  para o cálculo de áreas, temos:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b [(a \cos t)(b \cos t) + ab \sin^2 t]dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab[\cos^2 t + \sin^2 t]dt = ab\pi.$$

### 4.3.2 Trabalho realizado pela força $\vec{F}$ .

Considere a integral de linha  $\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$ , onde a curva  $C$  é dada pelas equações paramétricas

$$C : \begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

Se definimos o vetor

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}, \quad a \leq t \leq b,$$

como sendo o vetor posição variável de um ponto  $(x, y)$  em  $C$ , então

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j},$$

ou na forma diferencial  $d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ . Agora, tomando-se  $\vec{F} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ , temos

$$\vec{F} \cdot d\vec{R} = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Logo

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}.$$

Analogamente, se  $C$  é uma curva no espaço tridimensional determinada por um vetor posição variável  $\vec{R}$ . A integral de linha  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$  não somente tem a vantagem da rigidez, mas também sugere uma importante integração física da integral de linha. Suponha que  $\vec{F}$  representa uma força variável agindo numa partícula  $P$  que se move ao longo da curva  $C$ . Se  $\vec{R}$  é o vetor posição variável de  $P$ , então podemos interpretar  $d\vec{R}$  como representando um deslocamento infinitesimal da partícula. Logo,  $\vec{F} \cdot d\vec{R}$  representa o trabalho realizado na partícula pela força  $\vec{F}$  durante seu deslocamento. Somando-se, isto é,

integrando-se todos esses trabalhos infinitesimais, obtemos  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ . Logo, a integral de linha  $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$  representa o trabalho útil realizado pela força  $\vec{F}$  no movimento de uma partícula ao longo da curva  $C$ , desde seu ponto inicial até seu ponto terminal.

**Exemplo 15:** Use o Teorema de Green para encontrar o trabalho total realizado ao mover um objeto no sentido anti-horário, uma vez em torno da circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ , se o movimento for causado pelo campo de forças  $F(x, y) = (\text{sen}x - y)\vec{i} + (e^y - x^2)\vec{j}$ . Suponha que o arco seja medido em metros e a força seja medida em Newton.

**Solução:** Se  $W$  for o trabalho realizado, então:

$$W = \oint_C (\text{sen}x - y)dx + (e^y - x^2)dy$$

onde  $C$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ . Do Teorema de Green, temos:

$$W = \int \int_R \left[ \frac{\partial}{\partial x}(e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{sen}x - y) \right] dx dy = \int \int_R (-2x + 1) dx dy.$$

Usaremos coordenadas polares para calcular a integral dupla, com  $x = r \cos \theta$  e  $dx dy = r dr d\theta$ . Então,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1)r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. -\frac{2}{3}r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right|_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{2}{3}a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta = -\frac{2}{3}a^3 \text{sen}\theta + \frac{a^2}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2. \end{aligned}$$

Logo, o trabalho realizado foi de  $\pi a^2 J$ .

#### 4.4 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE GREEN

**Teorema 4.3. (Teorema de Stokes)** Seja  $S$  uma superfície suave por parte, delimitada por uma curva fechada, simples, suave por partes,  $C$ . Então, se  $\vec{g}$  é um campo vetorial contínuo, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio que contém  $S \cup C$ , temos:

$$\int \int_S \text{rot} \vec{g} \cdot \vec{n} ds = \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r},$$

onde a integração ao longo de  $C$  é efetuada no sentido determinado pela orientação de  $S$ .

**Teorema 4.4. (Teorema da Divergência de Gauss)** Sejam  $\Omega$  um sólido limitado por uma superfície fechada  $S$ , formada por um número finito de superfícies e  $\vec{n}$  a normal



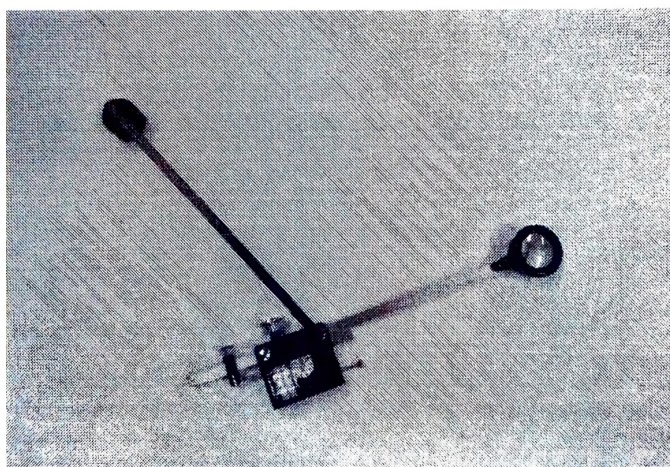
externa unitária. Se as componentes  $\vec{V}(x, y, z)$  têm derivadas parciais contínuas em  $\Omega$ , então

$$\int \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} dA.$$

## 4.5 PLANÍMETRO

O **Planímetro** foi um instrumento mecânico criado pelo matemático Jacob Amsler com o seguinte objetivo: calcular áreas de regiões planas e limitadas, ou seja, no popular seria calcular área de terrenos. Este instrumento tem uma construção muito simples, possui dois braços metálicos de tamanhos iguais ou diferentes podendo variar em um ângulo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  entre eles. Na extremidade de um dos braços temos uma ponta que pode ser fixada na superfície plana. Na articulação desses braços fica uma pequena roda que gira enquanto o contorno da curva na superfície é feita. Nesta roda existe um contador que mede o número de voltas que o braço faz enquanto contorna a curva. Quando esta roda move-se perpendicularmente em relação ao seu eixo, ela gira e seu movimento é registrado pelo contador. Medeiros Heloisa B.; Menezes (S.d.)

Figura 17 – Planímetro



Fonte: Braga (S.d., p.8)

O Teorema de Green juntamente com o planímetro tem sido de grande importância para o cálculo de área de figuras planas fechadas, pois ao calcularmos uma área de uma região fechada  $R$  podemos colocar o aparelho em qualquer área fora da área que queremos calcular e com a parte móvel contornamos toda a curva fechada no sentido anti-horário (por causa do marcador) e assim calculamos a área. Para entendermos como o Teorema de Green contribui para o funcionamento do planímetro, descreveremos o campo de funcionamento de direções definido pelo equipamento. Primeiro definiremos as coordenadas  $x$  e  $y$ . Logo após, consideremos a origem desse plano como sendo a ponta do planímetro

que está fixa e assim traçamos dois eixos  $x$  e  $y$  perpendiculares entre se. Como a roda gira perpendicularmente ao braço no qual está fixada, o campo  $F(x, y)$  definido pelo planímetro é perpendicular ao braço móvel e suponhamos que ele tenha módulo 1. Consideremos que o braço do Planímetro tenha tamanho  $r$ . O primeiro esteja fixado na origem  $(0, 0)$  e o braço móvel no ponto  $(a, b)$ . Chamemos de  $\vec{v}$  o vetor que representa o braço móvel do Planímetro no ponto  $(a, b)$ . Deste modo, temos que  $\vec{v} = (x - a, y - b)$  e considere um vetor perpendicular  $\vec{w} = (-(y - b), x - a)$ . Como os braços possui comprimento  $r$  temos  $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \sqrt{(y - b)^2 + (x - a)^2} = r$ . Assim, nosso campo é  $F = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{-(y-b)}{r}, \frac{x-a}{r}\right)$ , agora determinemos os valores de  $a$  e  $b$ . Consideremos a equação dos círculos descritas por cada um dos braços do Planímetro.

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 & (I) \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & (II) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação (II), temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \\ &= x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Temos que,

$$a^2 + b^2 = r^2$$

assim,

$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + r^2$$

ou ainda,

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb = 0$$

o que implica,

$$b = \frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y}.$$

Agora, substituindo o valor de  $b$  na equação (I) temos,

$$r^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{x^2 + y^2 - 2xa}{2y}\right)^2.$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} 4y^2r^2 &= 4y^2a^2 + (x^2 + y^2 - 2xa)^2 \\ &= 4y^2a^2 + 4x^2a^2 + (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)a. \end{aligned}$$

Assim,

$$4(x^2 + y^2)a^2 - 4x(x^2 + y^2)a + (x^2 + y^2)^2 - 4y^2r^2 = 0.$$

Usando  $R^2 = (x^2 + y^2)$  temos,

$$4R^2a^2 - 4xR^2a + R^4 - 4y^2r^2 = 0$$

$$a^2 - xa + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} = 0$$

$$a^2 - xa + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2} = 0.$$

Além disso,

$$\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2},$$

o que implica,

$$a - \frac{x}{2} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{R^4 - 4y^2r^2}{4R^2}}$$

$$a = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2R^2 - R^4 + 4y^2r^2}{4R^2}}.$$

Agora obtemos,

$$a = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2R^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2R}$$

ou seja,

$$a = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.$$

Com a escolha de um valor positivo para  $a$  implica que o caminho a ser percorrido pelo braço móvel do Planímetro é o sentido anti-horário. Com o valor de  $a$  definido, o valor de  $b$  aparece, como sendo:

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x\sqrt{R^2x^2 - R^4 + 4y^2r^2}}{2Ry}$$

ou seja,

$$b = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}.$$

Calculando os valores de  $a$  e  $b$  temos que o campo para o Planímetro é:

$$f(x, y) = -\frac{1}{r}(y - b) = \frac{1}{r}\left(-\frac{y}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}\right)$$

e

$$g(x, y) = -\frac{1}{r}(x - a) = \frac{1}{r}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2 + y^2} - 1}\right).$$

Derivando as duas equações acima vamos obter:

$$r\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\frac{2}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}$$

e

$$r\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2} + \frac{8xyr^2}{\frac{2}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{4r^2}{x^2+y^2} - 1}}.$$

Fazendo;

$$r\frac{\partial g}{\partial x} - r\frac{\partial f}{\partial y} = r\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1$$

e

$$K = r \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1$$

logo;

$$K = \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{r}.$$

Percebemos que se aplicarmos o Teorema de Green ao Planímetro, a constante que multiplica a área só depende do comprimento dos braços, ou seja,

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \frac{1}{r}.$$

\* Área cercada por  $C$ .

Então para o funcionamento do Planímetro é necessário sabermos o comprimento dos braços, o diâmetro da roda colocada perpendicularmente ao braço móvel e o número de voltas dadas pela roda que é marcado pelo contador ao percorrer a curva fechada  $C$  no sentido anti-horário, essas medidas são dadas pelas variáveis  $r$  para o comprimento dos braços,  $d$  para o diâmetro e  $k$  para o número de voltas dadas pela roda. O campo determinado pelo Planímetro é  $F(x, y) = (f, g)$ .

Então:

$$k\pi d = \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \frac{1}{r}.$$

\* Área cercada por  $C$ , ou seja,  $A_c(C) = k\pi dr$ .

## 5 CONCLUSÃO

Podemos concluir que todos os estudos e pesquisas realizadas foram de fundamental importância para compreensão dos conceitos necessários ao entendimento do Teorema de Green. Sua trajetória e as imensas dificuldades enfrentadas para ser reconhecido, suas limitações de tempo de estudo e sua rotina de trabalho que era intensa. A importância de como o cálculo de integrais curvilíneas é fundamental no estudo da matemática, fazendo uso das derivadas parciais para estabelecer uma junção, ou melhor, dizendo uma harmonia entre integrais de linha e integrais duplas, tornando assim o cálculo dessas funções mais simples e prático.

No decorrer do trabalho foi possível observar que o Teorema de Green possui uma extrema importância em outras áreas além da Matemática. Podendo ser aplicado na Física, em tensores e campos magnéticos e na área das Engenharias, sendo aplicado em cálculo de áreas de regiões fechadas. Sendo possível observar a aplicação do teorema em regiões de figuras fechadas, utilizando integrais de linhas e também em regiões que possuam singularidade, ou seja, que possuam "buracos". Foi visto os segmentos orientados de curvas, estudando os sinais do sentido horário e anti horário, as integrais duplas e campos vetoriais. Assuntos que tem fundamental importância para quem estuda cálculo e tem admiração pela matemática e suas aplicações em nossa realidade.

Sendo a partir deste teorema que foi desenvolvido um aparelho para calcular áreas de terrenos que possuam um formato de polígonos, que conhecemos como por exemplo: quadrado, retângulo e trapézio, como também pode-se calcular figuras de formas que não seja tão triviais. Sendo a generalização deste teorema feita por dois grandes matemáticos George Gabriel Stokes e Johann Carl Friedrich Gauss.

Portanto, este trabalho veio mostrar que em toda grande descoberta feita e desenvolvida, há por trás uma história de superação, determinação e persistência. Sem mencionar as utilizações e contribuições para novas pesquisas e descobertas feitas e as que venham a surgir no futuro por novos pesquisadores e admiradores do cálculo. Como exemplo na área de engenharia e em espaços tridimensionais.

## REFERÊNCIAS

BANDEIRA, R. d. S. Teorema de green e aplicações. 2016. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/13904/1/PDF%20-%20Ricardo%20de%20Souza%20Bandeira.pdf>>. Acesso em: 18 de ago. de 2019. Citado na página 13.

BRAGA, A. d. S. . teorema de green e aplicações. **Universidade Católica de Brasília Departamento de Matemática.**, S.d. Disponível em: <<https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1540/1/Alcimar%20de%20Souza%20Braga.pdf>>. Acesso em: 02 de set. de 2019. Citado na página 40.

BUFFONI, S. Três homens e dois teoremas. cálculo vetorial aplicado. **Universidade Federal Fluminense (UFF)**,, 2003. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/salete/wpcontent/uploads/sites/111/2017/08/HistoriaMat.pdf>>. Acesso em: 18 de ago. de 2019. Citado nas páginas 11, 12 e 13.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo B: funções de várias variáveis integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície.** [S.l.]: Pearson Prentice Hall, São Paulo, Brasil, 2007. Citado nas páginas 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 27.

MEDEIROS HELOISA B.; MENEZES, L. M. P. D. O. **George Green, o Homem e o Teorema.** S.d. Disponível em: <[https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50\\_n51\\_Artigo02.pdf](https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n50_n51_Artigo02.pdf)>. Acesso em: 18 de ago. de 2019. Citado na página 40.

THOMAS GEORGE B.; GIORDANO, W. H. **Cálculo Volume 2.** [S.l.]: São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2009. Citado nas páginas 29, 30, 31, 33 e 36.