



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

BRUNO SILVA MACÁRIO

DEDUÇÃO DA SOLUÇÃO DE BTZ

CAMPINA GRANDE - PB
2019

BRUNO SILVA MACÁRIO

DEDUÇÃO DA SOLUÇÃO DE BTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M174d Macário, Bruno Silva.
Dedução da solução de BTZ [manuscrito] / Bruno Silva Macario. - 2019.
27 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física - CCT."
1. Equações de Einstein. 2. Relatividade geral. 3. Algoritmo de Newman-Janis. 4. Métrica BTZ. I. Título
21. ed. CDD 530.11

BRUNO SILVA MACÁRIO

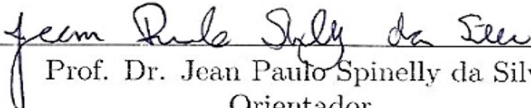
A SOLUÇÃO DE BTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

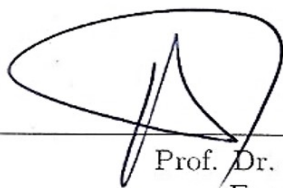
Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Aprovado em 24 de Outubro de 2019

BANCA EXAMINADORA

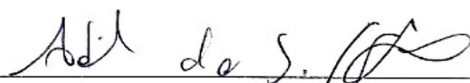

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Orientador



Prof. Dr. Alex da Silva

Examinador



Prof. Dr. Adiel da Silva Lemos

Examinador

Aos Meus Pais.

”Cada um de nós é, sob uma perspectiva cósmica, precioso.”

Carl Sagan

AGRADECIMENTOS

À Deus, por me iluminar e me ter concedido saúde e coragem durante toda esta jornada.

Aos meus pais e irmãos, Alberlândio e Silvana e Larissa e Breno, por sempre apoiarem minhas decisões e estarem ao meu lado em todas as dificuldades.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, pelo exemplo de ótimo profissional e toda atenção dedicada para a realização deste trabalho.

Aos meus avós, Antônio e Beatriz, por toda a força que me deram durante toda esta jornada acadêmica, me aconselhando nos momentos de angústica e de indecisões.

Aos amigos que conquistei na graduação, Marciana, Tatiana e Franciel, dentre outros que estiveram sempre a disposição nos momentos de descontração e nos momentos de dificuldades durante a graduação.

A Instituição pelo ambiente agradável e que me proporcionou momentos que ficarão marcados em toda a minha vida.

A todos que contribuíram diretamente e indiretamente para a minha formação, o meu mais sincero Muito Obrigado!

DEDUÇÃO DA SOLUÇÃO DE BTZ

Bruno Silva Macário¹

RESUMO

A teoria da relatividade geral, a qual foi proposta por Albert Einstein em 1915, estabelece que a gravitação deve ser vista como uma deformação no espaço-tempo causada pela distribuição de matéria e energia presentes. Nesta teoria, o campo gravitacional é descrito pelas 10 componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, as quais são soluções das chamadas *equações de Einstein*. Embora essa teoria tem sido concebida para um espaço-tempo de (3+1) dimensões, alguns pesquisadores encontraram soluções das equações de campo em (2+1) dimensões. Especificamente no trabalho desenvolvido por Máximo Bañados, Claúdio Teitelboim e Jorge Zanelli (1993), os autores obtiveram a solução das equações de Einstein com a constante cosmológica, para um corpo circularmente simétrico em rotação, que ficou conhecida como a métrica BTZ. Este trabalho tem como objetivo deduzir a métrica BTZ. Porém, ao invés de resolvermos diretamente as equações da relatividade geral, chegaremos à essa solução por meio da técnica matemática intitulada Algoritmo de Newman-Janis (1965).

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade geral. Newman-Janis. Métrica BTZ.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

DEDUCTION OF THE BTZ'S SOLUTION

Bruno Silva Macário¹

ABSTRACT

This work aims to solve the BTZ Metric in $2 + 1$ dimensions, using the mathematical technique called Newman-Janis Algorithm (ANJ). To do so, it is first necessary for us to briefly describe the concepts of gravitation and their development over the decades. Initially, we will discuss the paths that started the concepts of gravitational field, starting from the classical gravitational theory and moving to the relativistic gravitational theory. In addition, a discussion will be made about the importance of Einstein's Field Equations, and later on the impacts that occurred when Einstein decided to insert the so-called cosmological constant into his equations. After explaining these initial concepts, we will discuss about the solutions of the Einstein Equations in $2 + 1$ dimensions, and more precisely about the Anti De Sitter solution. In the following we will discuss about BTZ solution for black holes in $2 + 1$ dimensions, where in the present work we will develop such solution starting from Newman-Janis algorithm.

KEYWORDS: Einstein Equations, Black Holes, Cosmological Constant, Anti-De Sitter.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Equações de Einstein	9
3	Buraco negro em (2+1) dimensões	11
4	A Solução de BTZ	14
4.1	Tetradas nulas	14
4.2	O Algoritmo de Newman-Janis	16
4.3	Solução de BTZ a partir do Algoritmo de Newman-Janis	18
5	Considerações finais	22
6	Referências	24

1 Introdução

No século XVII, mais precisamente em 1687, o físico e matemático inglês Isaac Newton publicou a obra intitulada *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, que tinha como principal foco o enunciado das leis que regiam todos os fenômenos mecânicos existentes no universo.

A partir dos conceitos que sua obra trazia, Newton concluiu que todos os corpos pertencentes ao universo possuem uma propriedade denominada massa gravitacional e que existe uma força de atração entre eles, mesmo que estejam separados por uma certa distância.

Embora a teoria de gravitação proposta por Newton não contrariasse diversos experimentos realizados nos séculos XIX e XX, não conseguia explicar como os corpos adquirem aceleração entre si, ou seja, ela não tinha uma explicação de como os campos gravitacionais exerciam uma certa ação sobre os corpos a fim de que eles adquirissem uma aceleração (GRIFFITHS, 2008). Em meio a este problema, a teoria newtoniana começou a ser deixada de lado quando o físico alemão Albert Einstein (1879-1955) propôs a Teoria da Relatividade Geral (TRG), a qual é considerada como a teoria relativística da gravitação.

A TRG, enunciada por Einstein em 1915, se apresentou com uma sugestão inovadora na descrição dos efeitos gravitacionais. Segundo esta teoria, a gravitação não se trata de uma força, mas representa a consequência de um espaço-tempo que não é plano, mas sim curvo ou “deformado” pela distribuição de massa e energia presentes. A relatividade geral nega a concepção de que os astros devem se mover em órbitas curvas devido a ação de algum tipo de força; no entanto, se movem numa trajetória em uma espaço curvado, que é chamada de geodésica (HAWKING, 2015).

Formalmente, na TRG, o campo gravitacional, agora entendido como a curvatura do espaço-tempo, é descrito pelas 10 componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, as quais são soluções de um conjunto de 10 equações diferenciais denominado *equações do campo de Einstein* (LANDAU e LIFICHITZ, 1974; CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

Embora na formulação original da TRG o espaço-tempo tenha sido concebido em (3+1) dimensões, sendo 3 espaciais e 1 temporal, alguns autores têm investigado fenômenos físicos em (2+1) dimensões (DESER *et al*, 1984; GIDDINGS e KUCHAR, 1984; GOTT e ALPERT, 1984; BAÑADOS *et al*, 1992; SOURADEEP e SAHNI, 1992; BAÑADOS, TEITELBOIM e ZANELLI, 1993). Especificamente no trabalho desenvolvido por Máximo Bañados, Cláudio Teitelboim e Jorge Zanelli (1993), os autores encontraram a solução das equações de Einstein com a constante cosmológica, para um corpo circularmente simétrico em rotação, que ficou conhecida como a métrica BTZ.

No presente trabalho de conclusão de curso, mostraremos como podemos deduzir a métrica BTZ a partir do algoritmo proposto por Newman-Janis (1965). Antes, porém, apresentaremos as equações de campo da Teoria da Relatividade Geral, obteremos a métrica anti-De Sitter, que é o principal “ingrediente” para a obtenção da métrica BTZ via o algoritmo acima citado, e faremos uma revisão sobre as chamadas tetradas nulas.

2 Equações de Einstein

Para justificar a interação à distância, a teoria da gravitação newtoniana assume que uma distribuição da massa ρ produz um campo escalar Φ em todos os pontos do espaço, o qual é solução da equação de Poisson¹,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho, \quad (1)$$

de modo que se uma partícula de massa m for colocada na presença deste campo, sofrerá uma força atrativa dada por $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$.

Uma vez que a relatividade geral é a teoria relativística da gravitação, suas equações de campo devem, no limite de campo fraco, concordar com a equação de Poisson. Assim, como a equação de Poisson é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, o lado esquerdo das equações da TRG deve ser escrito em termos de derivadas de segunda ordem

¹Neste trabalho, estamos usando o sistema natural de unidades no qual $G = c = \hbar = 1$.

do tensor $g_{\mu\nu}$. Além disso, já que na relatividade restrita a componente 00 do tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, é proporcional a densidade massa ρ , o lado direito dessas equações deve depender linearmente deste tensor.

De acordo com Carmeli (1982), tendo isto em mente e buscando satisfazer a condição de conservação da energia $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, após várias tentativas, Einstein chegou a conclusão que as equações de campo da relatividade geral são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (2)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (3)$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (4)$$

são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, sendo

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (5)$$

os símbolos de Christoffel.

O conjunto de equações descrito por (??) é conhecido como as equações de campo de Einstein. Ao resolvê-lo encontraremos a métrica que define a geometria do espaço-tempo gerado por uma certa distribuição de matéria e energia.

Após propor as suas equações de campo, Einstein notou que as mesmas conduziam a um Universo Dinâmico. Desta forma, para que ele conseguisse definir uma solução estática para suas equações, inseriu a chamada Constante Cosmológica, Λ e as reescreveu da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (6)$$

A constante cosmológica foi definida como um tipo de gravidade de repulsão que tem a capacidade de manter em equilíbrio a atração da matéria no universo, a fim de impedir

que haja um colapso da mesma. No entanto, um estudo realizado por Erdrwin Hubble indicava que o universo estava de fato em expansão, o que conseqüentemente ignorava a inserção da constante cosmológica. De acordo com Fiolhais (2006), algum tempo depois, Einstein chamou a inserção de tal constante de maior erro da sua vida.

Em (2+1) dimensões, a métrica, os símbolos de Christoffel e o tensor de curvatura são definidos da maneira usual. Além disso, as equações de Einstein continuam sendo dadas por (??). No espaço-tempo de (3+1) dimensões, a constante κ é determinada a pela necessidade de que as equações de Einstein se reduzam às equações de Newton no limite não relativístico (limite de campo fraco), o que leva a $\kappa = 8\pi$. Porém, esse limite não existe em (2+1) dimensões, o que faz com que, em tais dimensões, a constante κ permaneça arbitrária.

3 Buraco negro em (2+1) dimensões

A solução das equações de Einstein em (3+1) dimensões, para uma distribuição de massa esfericamente simétrica, prevê a existência de um objeto denominado *buraco negro*. Na verdade, a métrica que descreve o espaço-tempo exterior a matéria possui um *horizonte de eventos* e esse objeto surgirá quando o raio da distribuição for menor que aquele que define o horizonte.

Em (2+1) dimensões, a menos que consideremos a constante cosmológica, a solução das equações de campo, para uma distribuição circularmente simétrica, não prevê um buraco negro. De fato, resolvendo tais equações com $\Lambda = 0$, Gott e Alpert (1984), Deser et al (1984) e Giddings e Kuchar (1984) mostraram que o espaço-tempo exterior à distribuição tem a forma cônica, mas é localmente plano. Por conseqüência, não possui horizonte de eventos.

Nesta seção, resolveremos as equações de Einstein com a constante cosmológica, para um corpo que possui simetria circular, e mostraremos que, em uma determinada situação, a métrica prediz a existência de um buraco negro.

Devido à simetria da distribuição, admitiremos que o elemento de linha é circularmente simétrico, isto é,

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\phi^2, \quad (7)$$

ou ainda

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (8)$$

onde $x^\mu = (t, r, \phi)$ e

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Naturalmente, como $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$, segue que:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -B(r)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Usando as equação (??) e (??) em (??), vemos que os símbolos de Christoffel não-nulos são

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{A'}{B}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{B} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad (11)$$

em que a “linha” é uma representação da derivada com relação a r . Então, aplicando essas expressões no Tensor de Ricci, o qual é definido por (??), temos que as componentes não-nulas deste tensor são:

$$R_{00} = \frac{1}{4AB^2r} [2rAA''B - rAA'B' + 2AA'B - rB(A')^2], \quad (12)$$

$$R_{11} = \frac{1}{4A^2Br} [-2rABA'' + Br(A')^2 + rAA'B' + 2A^2B'] \quad (13)$$

e

$$R_{22} = \frac{r}{2AB^2} [-A'B + AB'] . \quad (14)$$

Como consequência, da definição do escalar de Ricci, encontramos

$$R = \frac{1}{2A^2B^2r} [-2rAA''B + rB(A')^2 + rAA'B' - 2AA'B + 2A^2B'] . \quad (15)$$

Logo, fazendo $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = 1$ em (??), usando os resultados acima e levando em conta que, na região exterior ao corpo, $T_{\mu\nu} = 0$, chegamos às seguintes equações diferenciais:

$$\frac{1}{2} \frac{B'}{B^2 r} - \Lambda = 0, \quad (16)$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{A'}{Ar} + \Lambda B = 0. \quad (17)$$

Da equação (??) segue que

$$\frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{B} \right) + \Lambda = 0. \quad (18)$$

Então, aplicando o procedimento de separação de variáveis e integrando, temos:

$$B = \frac{1}{\xi - \Lambda r^2}, \quad (19)$$

em que ξ é simplesmente uma constante de integração. Por outro lado, multiplicando (??) por B e somando o resultado com (??), obtemos

$$\frac{1}{B} dB + \frac{1}{A} dA = 0. \quad (20)$$

Consequentemente, integrando esta equação, encontramos

$$B = \frac{\chi}{A}, \quad (21)$$

onde χ é uma constante de integração. Sem perdas de generalidade, podemos escolher $\chi = 1$. Fazendo isso, chegamos a conclusão que

$$A = \frac{1}{B} = \xi - \Lambda r^2. \quad (22)$$

Por fim, substituindo (??) e (??) na equação (??), encontramos o elemento de linha

$$ds^2 = (\xi - \Lambda r^2) dt^2 - (\xi - \Lambda r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (23)$$

Para que, no caso limite em que $\Lambda \rightarrow 0$, a métrica (??) concorde com a que foi obtida por Gott e Alpert (1984), devemos ter $\xi = 1 - \kappa M/2\pi$, onde M é a massa da distribuição.

Porém, uma vez que κ é uma constante adimensional, temos a liberdade de escolher $\kappa = 2\pi$. Então, fazendo essa escolha e levando em conta que a massa é muito grande, podemos escrever $\xi = -M$. Se, além disso, considerarmos que a constante cosmológica é negativa, isto é, $\Lambda = -\mathcal{L}^{-2}$, chegaremos à conclusão que a geometria do espaço-tempo exterior a um corpo circularmente simétrico será descrita pela expressão

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt^2 - \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (24)$$

Este elemento de linha, conhecido como a métrica anti-De Sitter, possui um horizonte de eventos em $r = r_H \equiv \mathcal{L}\sqrt{M}$, indicando que, caso o raio da distribuição seja menor que r_H , haverá um buraco negro.

4 A Solução de BTZ

Nesta seção, obteremos a solução BTZ utilizando um método conhecido como algoritmo de Newman-Janis (ANJ). Entretanto, para compreendermos a utilização desse procedimento, precisamos, primeiramente, entender o conceito de *tetradas nulas*. Diante disso, antes de abordarmos o ANJ e, posteriormente, obtermos a solução de BTZ, faremos uma breve revisão sobre essas tetradas.

4.1 Tetradas nulas

Na relatividade geral, escrever e resolver as equações de campo em uma base de coordenadas curvilíneas é algo comum. Acontece que nem sempre esse procedimento facilita a resolução dessas equações. Na verdade, em determinadas situações, se projetarmos todas as quantidades pertinentes à TRG e escrevermos as equações de campo numa base que corresponda a quatro campos vetoriais linearmente independentes e ortogonais, simplificaremos o nosso trabalho. Essa forma nova forma de descrever a relatividade geral é chamada de formalismo de tetradas.

Segundo D’Inverno (1992), podemos construir uma base formada por quatro vetores covariantes, $e_{(a)}^\mu$, com $a = 1, 2, 3, 4$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$, onde as letras entre parênteses

distinguem os índices de tetrada, que serão sempre representados pelas letras do alfabeto latino, e as gregas representam os índices de espaço-tempo. Além disso, podemos definir $e^{(a)}_{\mu}$ como a inversa da matriz $e_{(a)}^{\mu}$, de modo que

$$e_{(a)}^{\mu} e^{(a)}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad \text{e} \quad e_{(a)}^{\mu} e^{(b)}_{\mu} = \delta^{(b)}_{(a)}, \quad (25)$$

e considerar que $g_{(a)(b)}$ é uma matriz simétrica dada por

$$g_{(a)(b)} = e_{(a)}^{\mu} e_{(b)\mu}. \quad (26)$$

Naturalmente, admitindo que $g^{(a)(b)}$ é a inversa de $g_{(a)(b)}$, temos que:

$$g_{(a)(b)} g^{(b)(c)} = \delta^{(c)}_{(a)}. \quad (27)$$

Utilizando as definições acima, encontramos

$$g_{(a)(b)} e^{(a)}_{\nu} = e_{(b)\nu} \quad \text{e} \quad g^{(a)(b)} e_{(a)\nu} = e^{(b)}_{\nu}. \quad (28)$$

Conseqüentemente, levando em conta que $g_{\nu\rho} g^{\rho\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ e substituindo (??) na primeira das equações (??), chegamos a:

$$g_{\mu\nu} = g^{(a)(b)} e_{(a)\mu} e_{(b)\nu}. \quad (29)$$

As equações (??) nos permitem concluir que $g^{(a)(b)}$ e $g_{(a)(b)}$ são, respectivamente, as quantidades responsáveis por levantar e abaixar os índices de tetradas, assim como são as componentes contravariantes e covariantes do tensor métrico, no caso dos índices de coordenadas. Por sua vez o resultado apresentado em (??) nos leva a interpretar que os elementos $g^{(a)(b)}$ são as componentes do tensor métrico na base tetrada.

Ezra Newman e Roger Penrose propuseram uma base tetrada construída a partir de uma escolha especial de vetores. A escolha tomada foi a de uma tetrada de vetores nulos $e_{(a)}^{\mu} = (e_{(0)}^{\mu}, e_{(1)}^{\mu}, e_{(2)}^{\mu}, e_{(3)}^{\mu}) \equiv (n^{\mu}, l^{\mu}, m^{\mu}, \bar{m}^{\mu})$ que satisfazem às condições de ortogonalidade,

$$l^{\mu} m_{\mu} = l^{\mu} \bar{m}_{\mu} = n^{\mu} m_{\mu} = n^{\mu} \bar{m}_{\mu} = 0, \quad (30)$$

normalização,

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \quad (31)$$

e nulidade,

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0. \quad (32)$$

Como consequência, a partir das equações (??), vemos as componentes do tensor métrico nesta base são

$$g_{(a)(b)} = g^{(a)(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Finalmente, usando (??) em (??), chegamos à conclusão que as componentes covariantes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, podem ser escritas em termos dos vetores das tetradas nulas, conforme segue:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu. \quad (34)$$

Por conseguinte, as componentes contravariantes são dadas por:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (35)$$

Vale salientar que a expressão acima assume um papel de extrema importância para o complemento desse trabalho. De fato, como veremos na próxima seção, um dos passos do ANJ estabelece que as componentes contravariantes da métrica semente devem ser escritas na base de tetrada nulas, isto é, na forma da equação (??).

4.2 O Algoritmo de Newman-Janis

Dois anos após o matemático Roy Kerr ter publicado a solução que descreve a métrica do espaço-tempo exterior a um corpo massivo em rotação, Newman e Janis mostraram que essa solução poderia ser obtida, a partir da métrica de Schwarzschild, através de um procedimento que ficou conhecido como o algoritmo de Newman-Janis. Este mesmo

método também foi utilizado para obter a métrica que descreve o espaço-tempo gerado por um corpo esfericamente simétrico, carregado e em rotação, espaço-tempo de Kerr-Newman, a partir da solução de Reissner-Nordstrom (NEWMAN *et al*, 1965).

O algoritmo, acima citado, tem como objetivo determinar a métrica associada a uma distribuição com simetria esférica e rotação, a partir de uma métrica semente esfericamente simétrica e estática, através de um procedimento constituído pelas seguintes etapas:

1. Escrever o elemento de linha estático em um sistema de coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) , no qual a componente g_{rr} é eliminada e um termo cruzado será introduzido.
2. Expressar a forma contravariante da métrica em termos de tetradas nulas, ou seja, no formalismo de Newman-Penrose [Eq. (??)].
3. Estender as coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas \tilde{x}^ρ , $x^\rho \mapsto \tilde{x}^\rho$, e, conseqüentemente, fazer com que os vetores da base tetrada, $e_{(a)}^\mu$, fiquem sujeitos a uma transformação do tipo

$$e_{(a)}^\mu (x^\rho) \rightarrow \tilde{e}_{(a)}^\mu (\tilde{x}^\rho, \bar{\tilde{x}}^\rho) , \quad (36)$$

exigindo que a forma antiga da tetrada e, conseqüentemente, a métrica, sejam recuperadas quando tomarmos $\bar{\tilde{x}}^\rho = \tilde{x}^\rho$, tal que $\tilde{x}^\rho \in \mathbb{R}$.

4. Fazer uma transformação complexa de coordenadas da seguinte forma:

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + i\gamma^\rho (x^\sigma) , \quad (37)$$

onde $\gamma^\rho (x^\sigma)$ é uma função analítica das variáveis reais x^σ .

5. Considerar uma transformação simples de coordenadas que transformará a métrica para coordenadas de Boyer-Lindquist.

4.3 Solução de BTZ a partir do Algoritmo de Newman-Janis

Nesta seção, admitindo a existência da constante cosmológica, encontraremos a solução das equações de Einstein em (2+1) dimensões que descreve o espaço-tempo gerado por um corpo circularmente simétrico em rotação, conhecida como a métrica BTZ. Porém, ao invés de resolvermos diretamente as equações de campo, utilizaremos o ANJ.

• Aplicação do ANJ

De acordo com o que argumentamos na seção anterior, para obtermos a solução BTZ a partir do ANJ, deveríamos usar o algoritmo na métrica descrita pela equação (??). Porém, esse algoritmo é um procedimento aplicável apenas às soluções que representam espaços-tempo em (3+1) dimensões. Então, para contornarmos esse problema, estenderemos a métrica (??) para o caso quadridimensional, isto é, a substituiremos por

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt^2 - \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) , \quad (38)$$

utilizaremos o algoritmo de Newman-Janis e, por fim, tomaremos $\theta = \pi/2$, uma vez que as equações (??) e (??) coincidem para esse valor de θ .

1. O primeiro passo do ANJ exige que devemos escrever a métrica (??) no sistema de coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein (u, t, θ, ϕ) . Assim, para satisfazermos esse critério, temos que fazer a mudança de coordenadas

$$dt = du + \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)^{-1} dr \quad (39)$$

De fato, efetuando essa transformação, encontramos:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (40)$$

Neste caso, as componentes covariantes do tensor métrico são dadas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -M + r^2/\mathcal{L}^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} , \quad (41)$$

enquanto que as contravariantes são

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & M - r^2/\mathcal{L}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (42)$$

2. A segunda etapa do algoritmo estabelece que precisamos expressar a métrica em termos de tetradas nulas, conforme a equação (??). Logo, para que isso seja feito, assumiremos que a base de tetradas nulas é constituída pelos seguintes vetores:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (43)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2} \right) \delta_1^\mu, \quad (44)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (45)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (46)$$

3. O terceiro passo do ANJ diz que devemos estender o sistema de coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas \tilde{x}^ρ , $x^\rho \mapsto \tilde{x}^\rho$, de tal modo que a forma antiga da tetrada, e conseqüentemente da métrica, sejam recuperadas quando tomarmos $\bar{\tilde{x}}^\rho = \tilde{x}^\rho$, tal que $\tilde{x}^\rho \in \mathbb{R}$. Então, para cumprirmos tal exigência, faremos²

$$l^\mu \mapsto \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (47)$$

$$n^\mu \mapsto \tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(-M + \frac{\tilde{r}\bar{\tilde{r}}}{\mathcal{L}^2} \right) \delta_1^\mu, \quad (48)$$

$$m^\mu \mapsto \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (49)$$

e

$$\bar{m}^\mu \mapsto \bar{\tilde{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (50)$$

²Uma transformação deste tipo, claramente não é única, pois existem diferentes escolhas que satisfazem essas condições.

4. Seguindo o ANJ, o quarto passo estabelece que devemos fazer uma transformação do tipo $\tilde{x}^\rho = x^\rho + i\gamma^\rho(x^\sigma)$, onde γ^ρ é uma função analítica das coordenadas reais x^σ . No nosso caso, escolheremos a seguinte transformação:

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + ia(\delta_0^\rho - \delta_1^\rho) \cos \theta . \quad (51)$$

Logo, levando em conta que os vetores $e_{(a)}^\mu$ se transformam como

$$e_{(a)}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{e}_{(a)}^\rho , \quad (52)$$

as componentes da base tetrada nas coordenadas (u, r, θ, ϕ) tornam-se:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (53)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[-M + \frac{\Sigma}{\mathcal{L}^2} \right] \delta_1^\mu , \quad (54)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left[ias \text{en} \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen} \theta} \delta_3^\mu \right] \quad (55)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left[-ias \text{en} \theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen} \theta} \delta_3^\mu \right] , \quad (56)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Assim, substituindo esses vetores na expressão (??), encontramos as componentes contravariantes do tensor métrico nesse sistema, as quais são representadas pela matriz

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 1 + a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 0 & -a / \Sigma \\ 1 + a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & M - \Sigma / \mathcal{L}^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 0 & a / \Sigma \\ 0 & 0 & -1 / \Sigma & 0 \\ -a / \Sigma & a / \Sigma & 0 & -1 / \Sigma \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} . \quad (57)$$

Consequentemente, tomando a inversa obtemos a matriz das componentes covariantes,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\zeta & 1 & 0 & a \text{sen}^2 \theta (1 + \zeta) \\ 1 & 0 & 0 & -a \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ a \text{sen}^2 \theta (1 + \zeta) & a / \Sigma & 0 & -\text{sen}^2 \theta [r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta (1 + \zeta)] \end{pmatrix} , \quad (58)$$

onde $\zeta = M - \Sigma/\mathcal{L}^2$. Logo, o elemento de linha assume a forma

$$ds^2 = \left(-M + \frac{\Sigma}{\mathcal{L}^2}\right) du^2 + 2a\text{sen}^2\theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\mathcal{L}^2}\right) dud\phi + 2dudr - 2a\text{sen}^2\theta drd\phi - \Sigma d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + a^2\text{sen}^2\theta \left(1 + M - \frac{\Sigma}{\mathcal{L}^2}\right)\right] \text{sen}^2\theta d\phi^2. \quad (59)$$

5. Segundo o ANJ, o último passo exige que devemos expressar a métrica (??) nas coordenadas de Boyer-Lindquist, isto é, precisamos executar uma transformação de coordenadas do tipo

$$u = t + \int F(r) dr \quad \text{e} \quad \phi = \varphi + \int G(r) dr \quad (60)$$

de modo que $g_{t,\varphi}$ seja a única componente cruzada do tensor métrico. E, conforme argumentamos, só após esta etapa deveríamos fazer $\theta = \pi/2$, para, finalmente, obtermos a métrica BTZ. Porém, por questão de simplicidade, inverteremos esse processo, ou seja, faremos $\theta = \pi/2$ em (??) e, em seguida, efetuaremos a mudança que levará a métrica às coordenadas acima citadas. Assim, ajustando (??) para esse valor de θ , obtemos:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) du^2 + 2a \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dud\phi + 2dudr - 2adr d\phi - \left[r^2 + a^2 + a^2 \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)\right] d\phi^2. \quad (61)$$

Na sequência, fazendo

$$F(r) = -\frac{a^2 + r^2}{\Delta} \quad \text{e} \quad G(r) = -\frac{a^2}{\Delta}, \quad (62)$$

com $\Delta \equiv r^2(-M + r^2/\mathcal{L}^2) + a^2$, em (??) e substituindo em (??), chegamos à métrica BTZ nas coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt^2 + 2a \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt d\varphi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \left[r^2 + a^2 + a^2 \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)\right] d\varphi^2. \quad (63)$$

• **Considerações sobre a solução encontrada**

Tomando $\Delta = 0$, o que corresponde a fazermos $g_{rr} \rightarrow \infty$, observamos que o espaço-tempo BTZ possui horizontes exterior, r_+ , e interior, r_- , dados por

$$r_{\pm} = \mathcal{L} \left\{ \frac{M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (64)$$

onde r_+ é o horizonte de eventos. Este resultado garante que, se o raio da distribuição for menor que r_+ , haverá um buraco negro³. Contudo, analisando as expressões (??), percebermos que há uma massa mínima $M_0 = 2a/\mathcal{L}$ para que um *buraco negro extremo*, o qual possui apenas um horizonte, seja encontrado. Isto significa que se M for menor que M_0 , não haverá a possibilidade da formação de um buraco negro.

Através de um cálculo direto, vemos que solução descrita pela equação (??) satisfaz às equações de Einstein para o espaço Anti De Sitter em (2+1) dimensões, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \mathcal{L}^{-2}g_{\mu\nu} = 0$. Porém, um aspecto intrigante é que esta solução não possui exatamente a mesma forma da que foi obtida originalmente por Bañados, Teitelboim e Zanelli (1993):

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2} \right) dt^{*2} + 2adt^*d\varphi - r^2d\varphi^2 - \frac{r^2}{\Delta}dr^2. \quad (65)$$

Por outro lado, no limite em que o momento angular se anula ($a \rightarrow 0$), os elementos de linha (??) e (??) são reduzidos à (??), o que nos faz imaginar que essas soluções devem estar relacionadas através de uma transformação de coordenadas. De fato, fazendo

$$t^* = t - a\varphi. \quad (66)$$

em (??), encontraremos a equação (??). Sendo assim, podemos afirmar que as métricas (??) e (??) representam a mesma solução no espaço Anti-De Sitter em (2+1) dimensões.

5 Considerações finais

No início deste trabalho, vimos que na relatividade geral a gravitação é vista como uma deformação do espaço-tempo, que depende da distribuição de matéria e energia presentes,

³Por conta disso, muitos autores denominam esta solução de *Buraco Negro BTZ*.

e é descrita por um tensor de segunda ordem, $g_{\mu\nu}$, o qual é solução das equações de Einstein.

Posteriormente, inserindo um termo com uma constante cosmológica nas equações de campo, percebemos que, no caso em que tal constante é negativa, a solução dessas equações, correspondente uma distribuição circularmente simétrica, prevê a existência de um buraco negro em (2+1) dimensões.

Por fim, utilizando o algoritmo de Newman-Janis, encontramos a solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica negativa, em (2+1) dimensões, para uma distribuição circularmente simétrica com rotação. De posse do resultado gerado pela aplicação do algoritmo, observamos que métrica também prediz a possibilidade da existência de um buraco negro. Além disso, percebemos que havia um aparente problema, pois a métrica que obtivemos não tem forma daquela originalmente obtida por Bañados, Teitelboim e Zanelli (1993). Contudo, vimos que uma simples mudança na coordenada temporal transforma a solução obtida pelo algoritmo na métrica BTZ, o que mostra que ambas as soluções são equivalentes.

6 Referências

ASSIS, Andre Koch Torres; ASSIS, Andrbe Koch Torres. **Relational mechanics**. Montreal: Apeiron, 1999.

BAÑADOS, M. et al. Geometry of the $(2 + 1)$ Black Hole, **Physical Review D**, v. 48,ago. 1993.

BAÑADOS, M.; TEITELBOIM, C; ZANELLI, J. The Black Hole in Three-dimensional Space-time, **Physical Review Letters**, v. 69, set. 1992.

BERGMANN, Peter Gabriel. **Introdução a Teoria da Relatividade**. New York: Dover Publicações, 1975.

CARLESSO, P. F., **Introdução à Teoria da Relatividade Geral**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Santa Maria, UFSM, Brasil.

CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CAVALCANTE, Neymar José Nepomuceno. **Entropia de buracos negros extremais e simetria SL (2; R)**. 2016.

CAVALCANTI, A. G., **Radiação Hawking de um Buraco Negro BTZ Não-Comutativo**. 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande - PB

COSTA FILHO, Francisco Geraldo da et al. **Alguns aspectos das teorias de gravidade modificadas**. 2015.

D'INVERNO, R. A., **Introducing Einstein's Relativity**. New York, 1992 (117-178).

DESER, Stanley; JACKIW, Roman; HOOFT, G.'t. Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space. **Annals of Physics**, v. 152, n. 1, p. 220-235, 1984.

ERBIN, Harold. Janis-Newman algorithm: Generating rotating and NUT charged black holes. **Universe**, v. 3, n. 1, p. 19, 2017.

FERRARO, R. **An Introduction to Special and General Relativity**. 2007.

FIOLHAIS, Carlos. Albert Einstein: novo século e nova física. **Gazeta de Física**, v. 29, n. fasc. 3, p. 4-6, 2006.

GIDDINGS, Steven; ABBOTT, James; KUCHAR, Karel. Einstein's theory in a three-dimensional space-time. **General Relativity and Gravitation**, v. 16, n. 8, p. 751-775, 1984.

GOTT, J. Richard; ALPERT, Mark. General relativity in a $(2+1)$ -dimensional space-time. **General Relativity and Gravitation**, v. 16, n. 3, p. 243-247, 1984.

GRIFFITH, M.A., **Dedução das Equações de Einstein**. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Amazonas, UFAM, Brasil.

HAWKING, Stephen. **Uma breve história do tempo**. Editora Intrínseca, 2015.

KIM, Hongsu. Notes on Spinning AdS_3 Black Hole Solution. **arXiv preprint hep-th/9706008**, 1997.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Teoria do Campo**, trad. Normando C. Fernandes. São Paulo: Hemus Livraria e Editora Ltda, 1974.

MARTINEZ, Cristian; TEITELBOIM, Claudio; ZANELLI, Jorge. Charged rotating black hole in three spacetime dimensions. **Physical Review D**, v. 61, n. 10, p. 104013, 2000.

NEWMAN, Ezra T.; JANIS, A. I. Note on the Kerr Spinning-Particle Metric. **Journal of Mathematical Physics**, v. 6, n. 6, p. 915-917, 1965.

SOURADEEP, Tarun; SAHNI, Varun. Quantum effects near a point mass in $(2+1)$ -Dimensional gravity. **Physical Review D**, v. 46, n. 4, p. 1616, 1992.