UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

GUBIO GOMES DE LIMA

MODELO DE QUINTESSÊNCIA PARA A ENERGIA ESCURA

CAMPINA GRANDE - PB
2019

GUBIO GOMES DE LIMA

MODELO DE QUINTESSÊNCIA PARA A ENERGIA ESCURA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2019

L732m Lima, Gubio Gomes de.
Modelo de quintessência para energia escura [manuscrito] / Gubio Gomes de Lima. - 2019.
25 p.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva , Coordenação do Curso de Física - CCT."
1. Quintessência. 2. Energia escura. 3. Relatividade geral. 4. Equações de Friedmann. I. Título
21. ed. CDD 531.11

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

GUBIO GOMES DE LIMA

MODELO DE QUINTÊSSENCIA PARA A ENERGIA ESCURA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Aprovado em 09 de Dezembro de 2019.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador

Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador

Prof. Dr. Adiel da Silva Lêmos
Examinador

MODELO DE QUINTESSÊNCIA PARA A ENERGIA ESCURA

Gubio Gomes de Lima [1]

RESUMO

Considerando o cenário atual, no qual as descoberta de Hubble e das recentes observações dos grupos de Supernovas Tipos IA, nos leva a considerar um Universo em expansão acelerada. Nossa proposta é estudar possíveis modelos matemáticos que possam contribuir para descrever esse cenário, sabendo que tanto a matéria bariônica como a radiação não contribuem para a expansão, a proposta então é admitindo a existência de uma energia com característica repulsiva denominada Energia Escura (EE). O primeiro modelo matemático utilizado foi resgatando a Constante Cosmológica (CC) utilizada por Einstein, tal modelo não foi totalmente aceito pois ela apresenta alguns problemas, principalmente no seu valor. Portanto este trabalho buscou explorar um modelo dinâmico que tentam representar a EE, por meio do campo escalar (ϕ) este modelo muitas vezes é denominado quintessência. Para uma primeira análise foi admitido um cenário no qual a EE domina a composição do Universo, utilizamos o formalismo de primeira ordem com objetivo de auxiliar nas soluções, ao fim deste trabalho, foi proposto um exemplo para ilustrar o formalismo, que nos levará a um Universo Oscilante.

PALAVRAS-CHAVE: Quintessência. Campo Escalar. Energia escura.

[1] Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

QUINTESSENCE MODEL FOR DARK ENERGY

Gubio Gomes de Lima [1]

ABSTRACT

Considering the current scenario, in which Hubble's findings and recent observations by the Type IA Supernova groups lead us to consider a rapidly expanding universe. Our proposal is to study possible mathematical models that may contribute to describe this scenario, knowing that both baryonic matter and radiation do not contribute to the expansion, the proposal then is to admit the existence of an energy with repulsive characteristic called Dark Energy (EE). The first mathematical model used was rescuing the Cosmological Constant (CC) used by Einstein, such model was not fully accepted because it presents some problems, especially in its value. Therefore, this work sought to explore a dynamic model that attempts to represent EE, through the scalar field (*phi*) this model is often called quintessence. For a first analysis it was admitted a scenario in which EE dominates the composition of the universe, we use the first order formalism in order to help in the solutions, at the end of this work, an example was proposed to illustrate the formalism, which will lead us to a Oscillating universe.

KEYWORDS: Quintessence. scalar field. Dark Energy..

[1] Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1 Introdução

No inicio do século XX ocorreu um grande avanço nas pesquisas teóricas e observacionais relacionadas ao Universo, desenvolvendo, assim, a Cosmologia como um ramo da física.

Através dos dados de Slipher, Hubble demostrou que as galáxias mais distantes estavam se afastando de nós e quanto mais distante mais rápido se afastavam (SOUZA, 2004), em 1998, dois grupos observacionais de Supernovas do tipo Ia mostraram que o Universo está expandindo e de forma acelerada, (LIMA, 2004).

Como evidencia Maurer (2010) "Esta expansão não estava prevista no Modelo Cosmológico Padrão " pois a contribuição da matéria e radiação não poderiam gerar uma expansão acelerada. Então surge um problema a ser respondido: o que estaria acelerando o Universo?, uma das hipóteses seria considerar a existência de uma energia ainda não medida, nem observada, mas que "deve apresentar pressão negativa" (SANTOS, 2011), tal energia é denominada de Energia Escura.

Batista (2011) diz que "O exemplo mais simples de Energia Escura, é por meio da constante cosmológica introduzido por Einstein em 1917", mas ela apresenta alguns problemas, abrindo espaço para outros modelos. Posteriormente, a ideia foi utilizar um modelo dinâmico chamado ϕ-CDM(Cold Dark Matter) ou modelo de quintessência, em que a EE seria modelada por um campo escalar.

Neste trabalho faremos uma abordagem sobre o modelo ϕ-CDM. Antes, porém, apresentaremos as equações da Relatividade Geral. Em seguida, deduziremos as equações do Modelo Cosmológico Padrao (MCP) e discutiremos, de forma qualitativa, os resultados previstos por esse modelo.

2 Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) publicada em 1915 por Albert Einstein, é considerada como a teoria relativística da gravitação.

Essa teoria revolucionou a concepção sobre a gravitação, pois, diferentemente da teoria newtoniana, onde a gravidade tem sua origem em uma força atrativa entre corpos massivos, na relatividade geral a gravidade é vista como uma curvatura do espaço-tempo. Formalmente, na TRG a geometria do espaço-tempo é descrita por um objeto matemático chamado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual é determinado a partir da resolução de um conjunto de 10 equações diferenciais conhecido como equações de Einstein[1],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2T_{\mu\nu} \ , \tag{1}$$

em que

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} \ , \tag{2}$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3}$$

e $T_{\mu\nu}$ são, respectivamente, o tensor de Ricci[2], o escalar de Ricci e o tensor energia-momento.

O lado esquerdo das equações (1) está associado à geometria do espaço-tempo, através do tensor e do escalar de Ricci, enquanto que o lado direito está relacionado à contribuição de matéria e energia, por meio do tensor energia-momento, evidenciando a ideia de que um distribuição de matéria ou energia altera o espaço-tempo em sua volta. Porém, vale salientar que, caso o tensor energia-momento seja nulo (vazio), o espaço-tempo não será necessariamente plano. Na verdade, a planicidade ocorrerá apenas quando todas as componentes do tensor de Riemann forem nulos[3].

As equações de Einstein podem ser obtidas à partir da ação integral,

$$S = \int \sqrt{-g}\,(R - 4\mathcal{L}_F)\,d^4x \ , \tag{4}$$

na qual a densidade lagrangiana do campo gravitacional equivale ao escalar de Ricci R, enquanto que $\mathcal{L}_F$ é a densidade lagrangiana dos outros campos, na ausência da gravitação.

[1]Neste trabalho adotaremos $4\pi G = 1$ e $c = 1$.
[2]As quantidades $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} \equiv g^{\mu\lambda}\left(\partial_\alpha g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\nu\alpha}\right)/2$ são os chamados símbolos de Christoffel.
[3]O tensor de Riemann é definido por $R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\rho}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\rho}$.

De fato, aplicando o princípio variacional, $\delta S = 0$, com relação ao campo $g_{\mu\nu}$, encontramos as equações (1), com

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \tag{5}$$

(CARMELI, 1982).

3 Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão tem como base a TRG e o chamado *princípio cosmológico.*

Tal princípio, conforme postulado por Edward A. Milne, afirma que, em grande escala[4], o Universo é homogêneo e isotrópico (VILENKIN e SHELLARD, 1994). Em síntese, assumir a isotropia é afirmar que as propriedades físicas do Universo devem independer da direção considerada. Por outro lado, supor a homogeneidade é admitir que todos os pontos do Universo são equivalente. A hipótese de homogeneidade é respaldada pelas observações realizadas por E. P. Hubble em 1924, que, ao examinar as fotografias que utilizava para estudar as estrelas, percebeu que, além da nossa galáxia, existem muitas outras e que elas estão distribuídas de maneira aproximadamente uniforme. Já a hipótese da isotropia é justificada pela descoberta, realizada por Penzias e Wilson em 1965, da existência de uma radiação de micro-ondas originadas no Universo primitivo que emana de todas as direções do Universo com a mesma forma, denominada Radiação Cósmica de Fundo (RFC).

O modelo matemático que é a base do MCP é o de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). De acordo com o modelo de FRW, a dinâmica do Universo é governada pelas chamadas *equações de Friedmann.* É a partir do elemento de linha que obedece ao princípio cosmológico, denominado *métrica de Robertson-Walker* (RW), e do tensor energia-momento que descreve os constituintes do Universo, aplicados às equações de campo de Einstein, que as equações de Friedman são obtidas (SANTOS, 2007).

[4] 100 Mpc, onde 1 Mpc = 1 Mega parsec = $3,09 \times 10^{24} cm$

Nesta seção, encontraremos a métrica RW e as equações de Friedmann. Em seguida, faremos uma análise qualitativa sobre a evolução do Universo.

3.1 Métrica de Robertson-Walker

Em 1884, a geometria desenvolvida por Bernhard Riemann sugeria que o Universo poderia possuir uma geometria curva. Desta maneira, poderia se percorrer ao longo de uma geodésica de hiperfície tridimensional do espaço quadri-dimensional, onde dependendo da geometria, poderia se passar mais de uma vez pelo mesmo ponto se ocorresse um deslocamento "sempre em linha reta".

A métrica de Riemann é definida por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{6}$$

onde ds é chamado de elemento linha do espaço-tempo ou métrica do espaço-tempo, os índices μ e ν são 0,1,2,3 (com 0 representando a coordenada temporal e os índices restantes representam as coordenadas espaciais) e $g_{\mu\nu}$ chamamos de tensor métrico do espaço-tempo. Para uma métrica pseudo-riemanniana e diagonal, a equação reduz-se a,

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 \tag{7}$$

no qual, dl^2 representa a parte espacial da métrica do espaço-tempo.

Foram escritos vários modelos que representasse a componente espacial do elemento de linha, um deles é admitindo um espaço plano, onde obteremos a métrica de Minkowski, em seguida Friedmann obteve uma métrica para o Universo fechado com curvatura espacial positiva e constante, logo após obteve para um Universo aberto com curvatura espacial negativa constante. As mesmas foram obtidas de maneira independente pelos matemáticos H. P Robertson e A. G. Walker. Ambos construíram uma expressão mais geral, que podem ser conduzidas para os casos anteriores.

Podemos derivar a métrica argumentando primeiramente uma separação espacial na mesma hipersuperfície com t=constante de duas galáxias próximas e considerando suas coordenadas respectivamente (x^1, x^2, x^3) e $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$, o elemento de linha pode ser escrito como:

$$d\sigma^2 = h_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{8}$$

Agora considere o triângulo que essas galáxias próximas criam em algum momento específico e o triângulo formado pelas mesmas galáxias em algum momento posterior.

Pelo postulado de homogeneidade e isotropia todos os pontos e direções em uma hipersuperfície particular são equivalentes, de modo que o segundo triângulo deve ser semelhante ao primeiro, o fator de magnitude deve ser independente da posição do triângulo no espaço tridimensional. Segue-se que as funções $h_{\mu\nu}$ devem envolver a coordenada de tempo t através de um fator comum para que a proporção em pequenas distâncias seja sempre a mesma. Portanto a métrica dever ser

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{9}$$

onde o $\gamma_{\mu\nu}$ é função de (x^1, x^2, x^3) apenas. Considere o espaço tridimensional dado por

$$d\sigma'^2 = h_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{10}$$

Assumimos que neste espaço tridimensional seja homogêneo e isotrópico, então de acordo com um teorema de geometria diferencial, este deve ser um espaço de curvatura constante (ISLAM, 2002). Assim o tensor de Riemann pode ser construído apenas a partir da métrica e dos tensores constantes. O seguinte tensor tridimensional de quarta ordem, construído a partir do tensor métrico tridimensional de (10), tem as propriedades de simetria corretas para o tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu kl} = k(\gamma_{\mu k}\gamma_{\nu l} - \gamma_{\mu l}\gamma_{\nu k}). \tag{11}$$

onde k é uma constante. Pode-se verificar que o tensor tridimensional de Riemann do espaço dado por (10) tem a forma (11), se o $\gamma_{\mu\nu}$ for escolhido para ser dado pela seguinte métrica (WEINBERG, 1972)

$$d\sigma'^2 = \left(1 + \frac{kr'^2}{4}\right)^{-2} \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] , \tag{12}$$

onde

$$r'^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \ . \tag{13}$$

A métrica (9) agora pode ser escrita como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{kr'^2}{4}\right)^2} \right] \ . \tag{14}$$

Dada as seguinte transformações de coordenadas $x_1 = r'\text{sen}\theta \cos\varphi$; $x_2 = r'\text{sen}\theta\text{sen}\varphi$; $x_3 = r' \cos\theta$ substituído em (14), obteremos

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr'^2 + r'^2 \left(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2\right)}{\left(1 - kr'^4\right)^2} \right] \ . \tag{15}$$

A transformação $r = r'/\left(1 + kr'^2/4\right)$ produz a forma padrão da Métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \ . \tag{16}$$

A constante k pode ter 3 valores -1, 0 ou 1. Note que, k faz o papel da contante de curvatura e cada um desses valores implica em uma concepção do espaço diferente[5] e $a(t)$ é o fator de escala, que mede as variações nas escalas produzidas pela expansão (ou contração) do Universo

3.2 Equações de Friedmann

Escolhendo $x^\mu = (ct, r, \theta, \varphi)$, vemos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico associado à métrica de RW são, respectivamente, dadas por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(1, -\frac{a^2}{1 - kr^2}, -a^2r^2, -a^2r^2\text{sen}^2\theta\right) \tag{17}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}\left(1, -\frac{1 - kr^2}{a^2}, -\frac{1}{a^2r^2}, -\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta}\right) \tag{18}$$

[5]Para $k = 0$, representa fisicamente um Universo plano; $k = 1$, temos uma quadri-esfera, que representa um Universo fechado; $k = -1$, resulta no quadri-hiperbolóide, que representa um Universo aberto.

Logo, levando isso em conta, vemos que as componentes não-nulas do tensor de Einstein, o qual é definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \ , \tag{19}$$

são

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \ , \tag{20}$$

$$G_{11} = -\frac{1}{1-kr^2} \left(2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k \right) \ , \tag{21}$$

$$G_{22} = r^2 \left(1 - kr^2 \right) G_{11} \tag{22}$$

e

$$G_{33} = r^2 \mathrm{sen}^2\theta \left(1 - kr^2 \right) G_{11} \ . \tag{23}$$

Por outro lado, segundo Weyl, para que o princípio cosmológico seja satisfeito, o tensor energia-momento que caracteriza o conteúdo físico do Universo deve ser aquele que descreve um fluido perfeito, isto é,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \ . \tag{24}$$

em que p, ρ e $u^\mu \equiv dx^\mu/ds$ são, respectivamente, as pressão, densidade de energia[6] e quadrivelocidade do fluido (LANDAU e LIFSHITZ, 1974). Assim, entendendo que estamos tratando com um referencial co-móvel, isto é, que a quadrivelocidade é $u^\mu = (1,0,0,0)$[7], e utilizando (17), temos que as componentes não-nulas desse tensor são:

$$T_{00} = \sum_i \rho_i, \quad T_{11} = \frac{a^2}{1-kr^2} \sum_i p_i, \quad T_{22} = r^2 a^2 \sum_i p_i \quad \text{e} \quad T_{33} = a^2 r^2 \mathrm{sen}^2\theta \sum_i p_i, \tag{25}$$

[6]Por conta do princípio cosmológico, p e ρ devem depender apenas do tempo

[7]No referencial co-móvel, temos que $dx^\mu = 0$. Além disso, de acordo com a métrica (16), nesse referencial, o intervalo próprio infinitesimal é $ds = dt$. Isso garante que a quadrivelocidade seja dada por $u^\mu = (1,0,0,0)$

Portanto, usando os resultados acima nas componentes 00 e 11 das equações de Einstein, chegamos à:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3}\sum_i \rho_i \tag{26}$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -2\sum_i p_i \ , \tag{27}$$

que são as equações de Friedmann.

É importante destacarmos que não é possível descrevermos a dinâmica do Universo se nos basearmos apenas nessas equações. Na verdade, para resolvermos o problema da evolução, além das equações de Friedmann, necessitamos das equações de estado das quantidades que constituem o Universo,

$$p_i = \omega_i \rho_i \ , \tag{28}$$

onde ω_i é uma constante. Se o Universo for preenchido por a matéria não relativística (matéria bariônica e matéria escura), a qual tem como característica possuir pressão nula, essa constante é igual a zero. Já para a matéria relativística ou radiação, o valor da constante é 1/3 (CARROL, 2004; FERRARO, 2007).

Derivando (26) e substituindo o termo $\ddot{a}$ da equação (27) no resultado, obtemos

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_i + p_i\right) = 0 \ , \tag{29}$$

que é a equação relativística da conservação da energia em uma geometria de Robertson-Walker; algo semelhante à equação de continuidade, mas para o fluido cósmico. Como consequência, substituindo (28) em (29), encontramos:

$$\rho_i = \rho_{i0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega_i)} \ , \tag{30}$$

onde o índice “0”indica que a quantidade foi medida no tempo presente $t = t_0$.

3.3 Análise qualitativa das equações de Friedmann

Das equações de Friedmann segue que:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\sum_i \left(p_i + \frac{1}{3}\rho_i \right) \ . \tag{31}$$

A partir de suposições sobre o valor da pressão e da densidade, esta equação nos fornecerá informações qualitativas sobre o comportamento da função a. Por exemplo, supondo $3p_i + \rho_i$ que permaneça positivo, isto é, que $3\omega_i + 1 > 0$, notamos que a "aceleração" $\ddot{a}$ será negativa (tomaremos sempre $a > 0$). Isso indica que, se essa condição for válida, o Universo ou estará se expandindo ($\dot{a} > 0$) de forma desacelerada; ou estará se contraindo ($\dot{a} < 0$) de maneira acelerada.

Para uma melhor entendimento desse aspecto, analisaremos diretamente a primeira das equações de Friedmann [Eq. (26)].

Definindo o *parâmetro densidade* como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)} \quad \Rightarrow \quad \Omega_i(t) = \frac{2\rho_i(t)}{3H(t)^2} \ , \tag{32}$$

em que $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ é o parâmetro de Hubble e $\rho_c(t) = 3H(t)^2/2$ é a densidade crítica podemos escrever

$$\rho_i(t) = \frac{3}{2} H(t)^2 \Omega_i(t) \ . \tag{33}$$

Logo, substituindo esta equação em (26), vemos que a constante k pode ser expressa por:

$$k = a(t)^2 H(t)^2 \left[-1 + \sum_i \Omega_i(t) \right] = {a_0}^2 {H_0}^2 \left[-1 + \sum_i \Omega_{i0} \right] \ , \tag{34}$$

Mas, utilizando (33) em (30), segue que

$$\Omega_i(t) = \frac{\Omega_{i0} H_0^2 a_0^{3(1+\omega_i)}}{H(t)^2 a(t)^{3(1+\omega_i)}} \ . \tag{35}$$

Sendo assim, usando esta expressão em (34), chegamos à:

$$\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} + V = H_0^2 \left(1 - \sum_i \Omega_{i0} \right) \ , \tag{36}$$

sendo

$$V = -H_0^2 \sum_i \Omega_{i0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3\omega_i} . \tag{37}$$

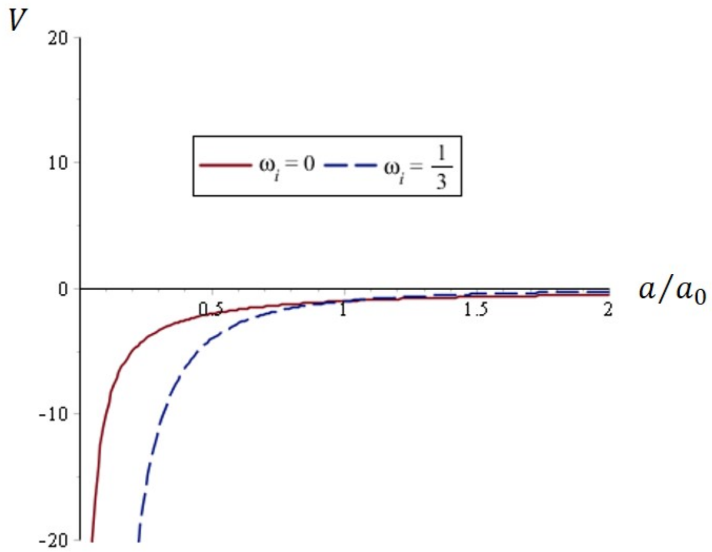

Figura 1: Comportamentos do "potencial"(37) para os casos em que ω_i assume os valores 0 e 1/3.

Como podemos observar, (36) é semelhante à equação de conservação da energia da mecânica clássica. Dessa forma, a utilizaremos para analisarmos qualitativamente o fator de escala, a, de forma análoga à análise qualitativa do movimento de uma partícula que se move na presença de uma força que depende apenas da posição (SYMON, 1971).

De acordo com a figura 1, independentemente do valor de ω_i, o "potencial", V, sempre será negativo e tenderá à zero quando $a \to \infty$. Isso garante que, caso tivéssemos $\sum_i \Omega_{i0} \leq 1$ ($k \leq 0$), no caso em que o Universo fosse originado a parti de uma singularidade (*Big Bang*), então expandiria para sempre de forma desacelerada. Por outro lado, se a condição $\sum_i \Omega_{i0} > 1$ ($k > 0$) fosse válida, o Universo não poderia se expandir para sempre. Na verdade, haveria uma expansão desacelerada até que o fator de escala atingisse um valor máximo e, em seguida, uma contração acelerada até que volume do Universo voltasse a se anular, originando outra singularidade, o *Big Crunch*.

4 Modelo ϕ-CDM

As análises feitas na seção anterior nos mostraram que a solução de Friedmann-Robertson-Walker, proposta em 1922, prevê que o Universo deve se expandir de forma desacelerada. Porém, as observações sobre o movimento de recessão das galáxias, realizadas em 1929 pelo astrônomo Edwin Hubble [Ver Fig. 2], e o *redshift* observado em Supernova Tipo Ia indicaram que o Universo deve estar em expansão acelerada.

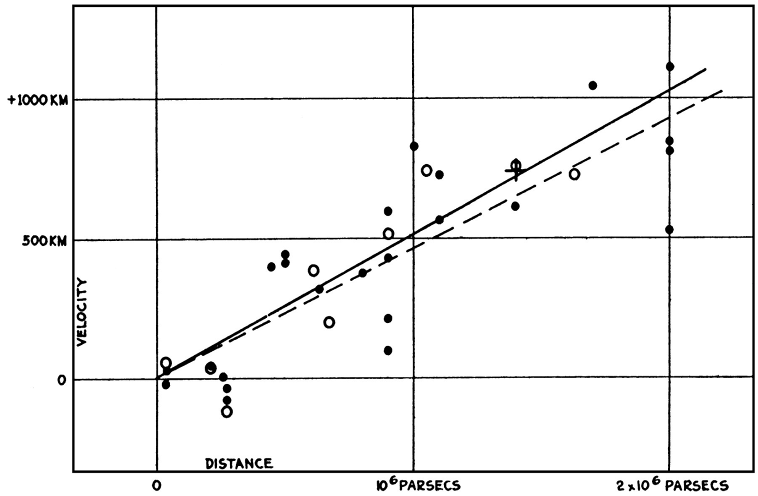

Figura 2: Relação entre as velocidades e distâncias das nebulosas.

Surge, então, um pergunta: o que gera essa aceleração?

Uma hipótese para a explicação da expansão acelerada do Universo é a existência de uma Energia Escura (EE), que consiste num fluido de pressão negativa. O modelo mais elementar para a EE é utilização da constante cosmológica, introduzida nas equações da TRG por Einstein em 1917. Mas, agora, ela terá o papel repulsivo para acelerar o Universo, diferente do modelo de Einstein que buscava uma solução de Universo estático. A necessidade da introdução da CC também se dá pela falta de um termo na densidade de energia e matéria do Universo (Ω_0), pois, de acordo com Batista (2010), a inflação e as medidas de anisotropia da radiação de fundo, associadas às observações das supernovas tipo Ia, nos indicam que $\Omega_0 = 1$, no qual aproximadamente 1/3 de toda matéria e energia do Universo é constituída por matéria (bariônica/ordinária[8] e escura) e radiação[9] e os outros 2/3 por um componente exótico de propriedade ainda não conhecida.

O modelo constituído pela CC, consegue descrever um Universo se expandindo aceleradamente, mas apresenta alguns problemas. Um dos quais está relacionado com o valor da constante, pois como afirma Weinberg (1989, p.1) “as expectativas teóricas para a constante cosmológica excedem os limites observacionais em cerca de 120 ordens de magnitude”.

Um modelo que se apresenta bem sucedido e está em concordância com a teoria do Big Bang, é o Λ-CDM, mas que precisa de alguns ajustes para poder explicar os problemas relacionados às condições iniciais da evolução do Universo, tais problemas são denominados de problema do horizonte e o problema da planura.

Alan Guth propôs para resolver alguns desses problemas, admitir uma fase de expansão acelerada no Universo primordial, mas a dificuldade em compatibilizar a constante cosmológica necessária para guiar o regime inflacionário, e o seu valor nos leva a descartar este modelo, para assim considerar um modelo dinâmico de inflação, onde consideraremos que um campo escalar denominado ínflaton que é o responsável pela inflação cósmica primordial e pela aceleração do Universo. Este modelo alternativo para Energia Escura é desenvolvido por meio de um campo escalar homogêneo ϕ, que será responsável pela expansão acelerada do Universo, este modelo é denominado de ϕ-CDM ou *quintessência*.

4.1 Equações do modelo ϕ-CDM

O modelo ϕ-CDM assume que a energia escura é modelada por um campo escalar, que depende apenas do tempo, cuja densidade lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_F = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\ . \tag{38}$$

Como consequência, substituindo essa densidade lagrangiana em (5), vemos que o

[8] Matéria Bariônica é composta de prótons, nêutrons, elétrons...
[9] neutrinos, fótons

tensor energia-momento associado ao campo ϕ é

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V \right) \ . \tag{39}$$

Logo, usando o fato que ϕ é função apenas de t e levando em conta que a métrica que descreve a geometria do Universo deve ser a de Robertson-Walker, chegamos à conclusão que as componentes não-nulas de $T_{\mu\nu}$ são as seguintes:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \tag{40}$$

$$T_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right) \tag{41}$$

$$T_{22} = a^2 r^2 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right) \tag{42}$$

e

$$T_{33} = a^2 r^2 \text{sen}^2\theta \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right) \tag{43}$$

Naturalmente, comparando esses resutados com aqueles apresentados (25), vemos que as densidade de energia e pressão, associadas à energia escura, são, respectivamente,

$$\rho^{(EE)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \qquad \text{e} \qquad p^{(EE)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \ . \tag{44}$$

Embora saibamos que, além da energia escura, o Universo é preenchido por matéria e radiação, assumiremos que estamos numa fase na qual energia escura domina. Em outras palavras, consideraremos que as densidade de energia e pressão são descritas pelas equações (44). Fazendo isso, temos que as equações de Friedmann [Eqs. (26) e (27)] assumem às seguintes formas:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right) \tag{45}$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -2 \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \right) \ . \tag{46}$$

Derivando o parâmetro de Hubble, temos:

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \ , \tag{47}$$

Desse modo, podemos reescrever as equações de Friedmann como segue

$$H^2 = \frac{1}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{2}{3}V - \frac{k}{a^2} \tag{48}$$

e

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2 + \frac{k}{a^2} \ . \tag{49}$$

Por outro lado, aplicando o princípio variacional na ação (4), com relação à ϕ, encontramos a equação de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial\ (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial \phi} = 0, \tag{50}$$

a qual, com uso da densidade lagrangiana (38), torna-se

$$\Box\phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \ , \tag{51}$$

onde $\Box\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi)$. Então, entendendo que a geometria do Universo é representada pela métrica de Robertson-Walker e lembrando que, no modelo ϕ-CDM, o campo escalar depende apenas de t, segue que a equação obedecida por ϕ é

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \ . \tag{52}$$

4.2 Formalismo de Primeira Ordem

Do ponto de vista do modelo ϕ-CDM, para descrevermos a evolução do Universo precisamos resolver, simultaneamente, as equações de Friedmann [Eqs. (45) e (46)] e a do campo escalar [Eq. (52)], para um dado potencial $V(\phi)$. Porém, conforme menciona Santos (2011), mesmo considerando um único fluido dominando o conteúdo de energia do Universo, tais resoluções não são simples de serem efetuadas.

Entretanto, como afirma Bazeia (2005), essa dificuldade pode ser amenizada se introduzirmos um método de redução da ordem da equações de campo, conhecido como *formalismo de primeira ordem*. Em essência, esse método estabelece que, para conseguirmos executar tal redução, devemos assumir que o parâmetro de Hubble pode ser escrito como uma função do campo escalar, isto é,

$$H = W(\phi) \,. \tag{53}$$

Com o intuito de compreendermos as consequências dessa escolha vamos analisar uma solução de espaço plano ($k = 0$).

Neste caso, usando (53), as equações de Friedmann podem ser escritas como

$$V = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 \tag{54}$$

e

$$\dot{\phi} = -W_\phi \ , \tag{55}$$

onde o "índice ϕ" indica derivada com relação à ϕ. Por outro lado, utilizando (53), vemos que a equação do campo escalar assume a seguinte forma:

$$V_\phi = 3WW_\phi - W_\phi W_{\phi\phi} \ . \tag{56}$$

Aparentemente, para analisarmos como o Universo evolui, no caso em que $k = 0$, deveremos utilizar as quatro últimas equações acimas. Porém, através de um cálculo simples, podemos mostrar que a segunda e a quarta são iguais. Isto significa que necessitaremos apenas de três dessas quatro equações. Sendo assim, por questão de simplicidade, usaremos o sistema constituído por (53), (54) e (55).

Para resolvermos esse sistema de equações devemos escolher $W(\phi)$ ou, de forma equivalente, $\phi(a)$. Mas, mesmo que teoricamente essa resolução seja possível, em várias escolhas de $W(\phi)$ ou $\phi(a)$ a manipulação das equações nos leva à funções que não são inversíveis e até mesmo em integrais que não apresentam soluções algébricas, o que nos impede de encontrarmos $\phi(t)$ e $a(t)$. Desse modo, nessas situações resta-nos apenas a realização de uma análise qualitativa da evolução do Universo, a qual pode ser feita através do parâmetro de aceleração, $\bar{q}$, definido por:

$$\bar{q} \equiv \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \Rightarrow \bar{q} = 1 - \left(\frac{W_\phi}{W}\right)^2 \ , \tag{57}$$

onde $\bar{q} > 0$ indica o Universo em expansão acelerada; $\bar{q} < 0$ desaceleração; $\bar{q} = 0$ Universo estático Vieira (2018).

Com a ajuda das equações (54) e (55), também podemos escrever

$$\bar{q} = -\frac{1}{2}\left(1 + 3w\right) \ , \tag{58}$$

onde

$$\omega = \frac{p^{(EE)}}{\rho^{(EE)}} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V}{\dot{\phi}^2 + 2V} \ . \tag{59}$$

Notemos que essa expressão é para o Universo plano. A variação observacional de w precisa estar dentro dos limites $-1 \leq w \leq 1$, o que nos leva a $-2 \leq \bar{q} \leq 1$. Observe que para $\bar{q} > 0$ Universo acelerado, teremos que $w < -1/3$ com mínimo -1.

- **Universo oscilante**

Para ilustrar a abordagem aqui apresentada sobre o formalismo de primeira ordem, vamos assumir que $\phi = \sqrt{3}\cos\left(\ln a\right)$.

A princípio nosso objetivo é encontrar a expressão de $a(t)$. Para tanto, devemos usar (55) para determinarmos $W(a)$ e, de posse desse resultado, utilizar (53) para obtermos $a(t)$.

Considerando que $a_0 = 1$ e $H_0 = 1$, a equação (55) nos fornece

$$W\left(a\right) = a^{-3/2}\exp\left[\frac{3}{4}\mathrm{sen}\left(2\ln a\right)\right] \ . \tag{60}$$

Porém, ao substituirmos essa expressão em (53) nos deparamos com uma integral que não possui uma solução algébrica, o que nos impossibilita de encontrar $a(t)$. Logo, conforme argumentamos anteriormente, partiremos para a análise do parâmetro de aceleração.

Usando (53) e (55), temos que a equação (57) torna-se

$$\bar{q} = 1 - a^2\left(\frac{d\phi}{da}\right)^2 \ , \tag{61}$$

o que nos leva à

$$\bar{q} = 1 - 3\text{sen}^2(\ln a) \tag{62}$$

e

$$w = 2\text{sen}^2(\ln a) - 1 \ . \tag{63}$$

Dessas equações vemos que, quando $a = 1$, $\bar{q} = 1$ e $\omega = -1$. Logo, uma vez que $\bar{q} > 1$ e $\omega < -1/3$ indicam expansão acelerada, a partir dessa valores podemos concluir que, na fase atual, o Universo está se expandindo aceleradamente, assim como é previsto pelos dados observacionais.

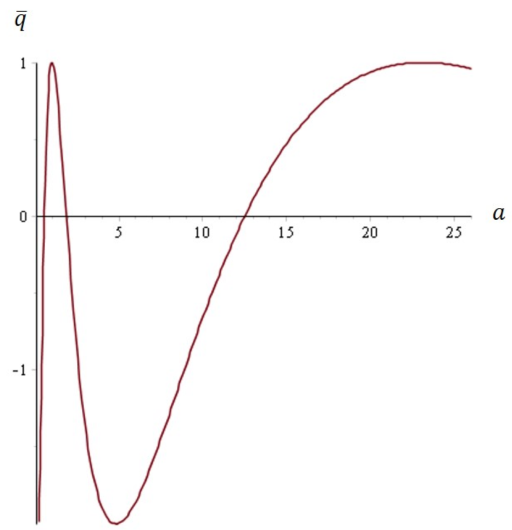

Figura 3: Gráfico do parâmetro de aceleração em função do fator de escala.

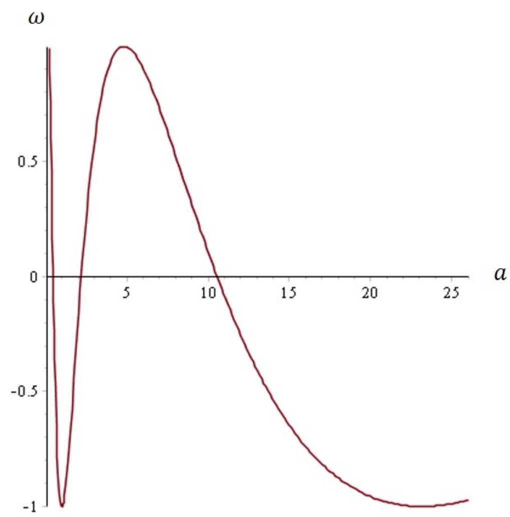

Figura 4: Gráfico da equação de estado em função do fator de escala.

As evoluções dos parâmetros de aceleração e da equação de estado estão expostas nas figuras 2 e 3, respectivamente. De acordo com os gráficos apresentados, o parâmetro $\bar{q}$ está variando entre -2 e 1, enquanto que ω assume valores entre -1 e 1, conforme exigido pelo modelo de quintessência. Além disso, diferentemente do MCP onde a expansão é desacelerada, as figuras mostram que o modelo ϕ-CDM, no qual $\phi = \sqrt{3}\cos(\ln a)$, descreve um Universo oscilante que, em alguns momentos, se expande de forma acelerada.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, fizemos uma abordagem sobre um modelo que justifica a expansão do Universo a partir da suposição da existência de um constituinte denominado energia escura, a qual é representada por um campo escalar.

Durante o desenvolvimento das equações que descrevem a dinâmica do Universo, percebemos que, mesmo no caso mais simples onde $k = 0$ (espaço plano) a resolução dessas equações não é algo simples. Diante disso, com o propósito de simplificar os cálculos e, consequentemente, encontrar o comportamento de $a(t)$, executamos um procedimento que busca reduzir a ordem das equações, conhecido como formalismo de primeira ordem. Feito isso, na busca por uma solução que possa prever uma expansão acelerada, assumimos que o campo escalar é dado por uma certa expressão. Porém, vimos que, mesmo após reduzirmos a ordem das equações, essa escolha não nos permite determinar a evolução de $a(t)$. Por conta disso, partimos para uma análise qualitativa através do parâmetro de aceleração, $\bar{q}$.

Diante dos resultados obtidos, vimos que o campo escolhido prevê um Universo que se expande, alternadamente, de forma acelerada e descelerada. Além disso, percebemos que os valores de $\bar{q}$ e ω estão de acordo com o que é exigido por um modelo de quintessência.

6 Referências

BATISTA, Carlos Eduardo M. **Modelos de matéria e energia escuras alternativos ao cenário padrão.** (2010).

BAZEIA, Dionisio, et al. **First-order formalism and dark energy.** Physics Letters B 633.4-5 (2006): 415-419.

CARMELI, M.**Classical Fields**: General Relativity and Gauge Theory, New York, John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S. **Spacetime and Geometry**. An Introduction to General Relativity. Chicago. Addison Wesley. University of Chicago. 2004.

FERRARO, R. **Einstein's Space-Time**. An Introduction to Special an General Relativity. Buenos Aires. Springer. Universidad de Buenos Aires. 2007.

ISLAM J. N.**An introduction to mathematical cosmology**, second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2002

LIMA, José Ademir Sales de. **"Cosmologia, quintessência e aceleração do universo."** Revista USP 62 (2004): 134-147.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **The Classical Theory of Fields**, Minnesota, Pergamon Press Ltd, 1971.

MAURER, Rodrigues, and Manuela Gibim. **"Acreçao de matéria exótica por bura-**

cos negros.” (2009).

PENZIAS, A.A. and WILSON, R.W. (1965) **Astrophysical Journal**, 142, 419-421.

SOUZA, Ronaldo E. De, **Introdução à cosmologia.** Edusp, 2004.

SANTOS, José Jamilton Rodrigues, **Tópicos em cosmologia com campos escalare**, 2011,Universidade Federal da Paraíba.

SANTOS, José Jamilton Rodrigues, **Formalismo de Primeira Ordem com Campos Escalares em Cosmologia**, 2007, Universidade Federal da Paraíba.

SYMON, K. R. **Mecânica**. Massachusetts. Addison Wesley. 3° edição. 1971.

VILENKIN, A. e SHELLARD, E. P. S., **Cosmic String And Other Topological Defects**, Cambridge: Cambridge University Press. 1994.

VIEIRA, Lucas Elias. **Campos escalares aplicados em cosmologia.** (2018).

WEINBERG, Steven. **The cosmological constant problem.** Reviews of modern physics 61.1 (1989): 1.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. Vol. 1. New York: Wiley, 1972.