



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS - CCT
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

DEIVYSON ANDERSON SILVA CANDIDO

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ

CAMPINA GRANDE - PB
2019

DEIVYSON ANDERSON SILVA CANDIDO

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

C217t Candido, Deivyson Anderson Silva.
Termodinâmica do Buraco negro BTZ [manuscrito] /
Deivyson Anderson Silva Candido. - 2019.
31 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva ,
Departamento de Física - CCT."
1. Termodinâmica. 2. Buraco negro. 3. Equações de
Einstein. 4. Métrica de BTZ. I. Título
21. ed. CDD 536.7

DEIVYSON ANDERSON SILVA CANDIDO

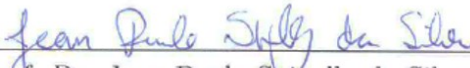
TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

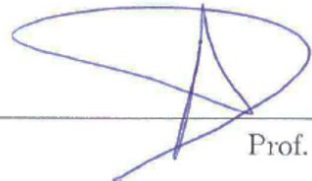
Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

Aprovado em 03 de dezembro de 2019.

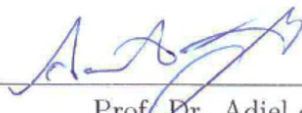
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador



Prof. Dr. Adiel da Silva Lemos
Examinador

À Deus.

”Inteligência não
é um privilégio, é um dom
que deve ser usado para o
bem da humanidade”.
Doutor Octopus

AGRADECIMENTOS

À Deus, o criador de todas as coisas, pela capacidade e iluminação nos estudos.

À minha mãe e irmãos que sempre me apoiaram do início ao fim.

À minha namorada Gyovanna Matias, por todas as palavras de incentivo, força e conforto.

Ao meu amigo Pedro Steinmüller, pelos momentos de descontração e parceria.

Ao meu orientador e amigo, Dr. Jean Spinelly, pelo companherismo e disposição em ajudar.

À Capes, pelo patrocínio das bolsas em que tive o prazer de participar

Ao professor Dr. Alessandro Frederico, por todo apoio durante esse curso, a professora Maria Ângela por todo suporte durante o início do curso e no geral, a todos os meus professores que contribuíram de alguma forma para com minha formação.

À todos os amigos da universidade: Alcimar, Joseildo, Jhons, Vinicius, Genilson, Filipe, Gúbio, Carlos, Mave, Renaly. Todos vocês contribuíram de alguma forma na minha formação, sou grato a todos.

TERMODINÂMICA DO BURACO NEGRO BTZ

DEIVYSON ANDERSON SILVA CANDIDO ¹

RESUMO

Em 1915, Einstein chegou a publicar a Teoria da Relatividade Geral (TRG), fundamentada nos princípios da equivalência e covariância geral, baseado nesses princípios Einstein chegou a concluir que a geometria do universo não é plana, como também o tempo não é absoluto, mas ambos se combinam em um espaço-tempo curvo em (3+1) dimensões, sendo três dimensões espaciais e uma temporal e de acordo com Einstein, a presença de matéria ou energia deforma o espaço-tempo a sua volta. Embora a TRG tenha sido proposta em um espaço em (3+1) dimensões, alguns autores obtiveram algumas soluções derivadas das equações de campo, considerando um espaço-tempo em (2+1) dimensões. Uma dessas soluções foram obtidas por Bañados, Teitelboim e Zanelli, considerando uma constante cosmológica negativa para um corpo esfericamente simétrico em rotação, onde foi encontrado uma solução conhecida como a métrica de BTZ, segundo alguns estudos apontam que, a métrica apresenta um horizonte de eventos, de tal modo que se o raio de distribuição de massa for menor que o raio do horizonte de eventos, se formará o chamado Buraco Negro BTZ. Neste trabalho, apropriando-se que toda massa se concentra em um único ponto, faremos um estudo sobre Termodinâmica do Buraco Negro BTZ, onde discutiremos alguns fenômenos importantes como temperatura Hawking e entropia, antes disso encontraremos a métrica de BTZ usando dois métodos, um deles chamado Algoritmo de Newman-Janis, e outro denominado “atalho de Giampieri”.

PALAVRAS-CHAVE: Termodinâmica. Buraco Negro. BTZ.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

BTZ BLACK HOLE THERMODYNAMICS

DEIVYSON ANDERSON SILVA CANDIDO ¹

ABSTRACT

In 1915 Einstein published the General Relativity Theory (TRG), based on the principles of equivalence and general covariance, based on these principles. Einstein came to the conclusion that the geometry of the universe is not flat, but time is not absolute, but both combine in a curved spacetime in $(3 + 1)$ dimensions, being three spatial and one temporal, and according to Einstein, the presence of matter or energy deforms the spacetime around them. Although TRG was proposed in a space in $(3 + 1)$ dimensions, some authors obtained some solutions derived from field equations, considering a spacetime in $(2 + 1)$ dimensions. One of these solutions was obtained by Bañados, Teitelboim and Zanelli, considering a negative cosmological constant for a spherically symmetrical rotating body, where a solution known as the BTZ metric was found, according to some studies, which point out that the metric presents an event horizon, such that if the mass distribution radius is less than the event horizon radius, the so-called Black Hole BTZ will form. In this paper, appropriating that all mass is concentrated in a single point, we will study BTZ Black Hole Thermodynamics, where we will discuss some important phenomena such as Hawking temperature and entropy, before that we will find the BTZ metric using two methods, one of them. called the Newman-Janis algorithm, and another called “ Giampieri shortcut ”.

KEYWORDS: Thermodynamics. Black Hole. BTZ.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

Conteúdo

1	Introdução	9
2	Equações de Einstein	10
3	Métrica de BTZ	12
3.1	Formulação original	13
3.2	O “atalho” de Giampieri	17
3.3	BTZ	19
4	Termodinâmica do buraco negro de BTZ	22
4.1	Variáveis termodinâmicas	22
4.2	Cálculo das variáveis termodinâmicas	24
5	Considerações Finais	28
6	Referências	29

1 Introdução

Em 1915, Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (TRG), a qual é fundamentada nos princípios da *equivalência* e *covariância geral* e é considerada como a teoria relativística da gravitação.

O princípio da equivalência afirma que, numa pequena região do espaço, o campo gravitacional é equivalente a um referencial não-inercial; já o princípio da covariância geral, buscando ajustar o postulado da covariância para os referenciais não-inerciais, previstos pelo princípio da equivalência, impõe que as leis da física devem ser invariantes para todos os referenciais. Baseado no princípio da equivalência, Einstein concluiu que a geometria do Universo não é plana, nem o tempo é absoluto, mas ambos se combinam em um espaço-tempo curvo de (3+1) dimensões, sendo três dimensões espaciais e uma temporal. Segundo ele, a presença da matéria deforma a estrutura do espaço-tempo à sua volta.

Para formalizar esta concepção matematicamente, Einstein dotou o espaço-tempo de uma estrutura métrica. De acordo com ele, a geometria do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado de tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, o qual é obtido a partir da resolução de um conjunto de equações diferenciais denominado *equações de Einstein* (BERGMANN, 1975; CARMELI, 1981; FERRARO, 2007; LANDAU e LIFCHITZ, 1974; RINDLER, 2006; WEINBERG, 1972).

Embora a TRG tenha sido proposta para um espaço de (3+1) dimensões, alguns autores obtiveram soluções das equações de campo considerando um espaço-tempo de (2+1) dimensões (DESER *et al*, 1984; GIDDINGS e KUCHAR, 1984; GOTT e ALPERT, 1984; BAÑADOS *et al*, 1992; SOURADEEP e SAHNI, 1992; BAÑADOS, TEITELBOIM e ZANELLI, 1993). Por exemplo, Máximo Bañados, Cláudio Teitelboim e Jorge Zanelli (1993) resolveram as equações de Einstein com uma constante cosmológica negativa, para um corpo circularmente simétrico em rotação, e encontraram uma solução que ficou conhecida como a métrica BTZ. Um estudo detalhado mostra que essa métrica apresenta um horizonte de eventos, de modo que se o raio da distribuição de massa for menor que

o raio do horizonte, teremos a formação do chamado *buraco negro BTZ*.

Nesse trabalho de conclusão, assumindo que toda massa se concentra em um “ponto”, faremos um estudo a cerca da Termodinâmica do Buraco Negro BTZ, onde discutiremos fenômenos importantes como temperatura Hawking e entropia. Antes, porém, apresentaremos as equações de Einstein e encontraremos a métrica BTZ por meio de dois métodos, um deles chamado Algoritmo de Newman-Janis (BTZ), e outro método chamado “atalho de Giampieri”.

2 Equações de Einstein

Diferentemente da teoria Newtoniana, em que os efeitos gravitacionais gerados por uma distribuição de massa, ρ , são especificados pelo campo escalar, Φ , o qual é solução da equação de Poisson,

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho , \quad (1)$$

a TRG precisa das 10 componentes do tensor métrico para descrever a gravitação. Isto significa que a relatividade geral necessita de 10 equações diferenciais satisfeitas pelo tensor $g_{\mu\nu}$, que, no limite em que o campo gravitacional é fraco, devem tomar a forma da equação de Poisson.

Uma vez que, na teoria da relatividade, a componente “00” do tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}$, é proporcional a densidade massa, ρ , o lado direito das equações da TRG deve ser proporcional a este tensor. Além disso, como (1) é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, o lado esquerdo precisa conter termos com derivadas segundas do tensor $g_{\mu\nu}$. Seguindo esses critérios e procurando satisfazer à condição de conservação da energia $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, Einstein concluiu, após várias tentativas, que as equações de campo da TRG são¹:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} , \quad (2)$$

¹No sistema natural de unidades, no qual $c = G = \hbar = 1$, temos que $k = 8\pi$. Esse valor é obtido quando aplicamos o limite newtoniano nas equações da TRG.

onde

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (3)$$

e

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (4)$$

são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, sendo

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right) \quad (5)$$

os símbolos de Christoffel.

Na teoria newtoniana, caso conheçamos a densidade da distribuição de massa, poderemos determinar o potencial gravitacional à partir da equação de Poisson. Na TRG, de posse do tensor energia-momento associado a uma determinada distribuição de matéria e energia, resolveremos as equações de Einstein [Eqs. (2)] e obteremos as componentes do tensor métrico.

Pouco tempo depois de apresentar suas equações, Einstein notou que essas levavam a um universo dinâmico, contrariando a crença de universo estático que existia na época. Sendo assim, com o intuito de evitar essa discrepância, inseriu a chamada *constante cosmológica*, Λ , e as reescreveu da seguinte forma²:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} . \quad (6)$$

Porém, mais tarde, observações realizadas por Edwin Hubble indicavam que, realmente, o universo estava em expansão, o que eliminava a necessidade de inserção da constante cosmológica. Por conta disso, Einstein chamou a inclusão de tal constante de maior erro da sua vida.

Embora a TRG tenha sido desenvolvida para um espaço quadridimensional, podemos utilizá-la em um espaço-tempo de (2+1) dimensões. Em tais dimensões, as equações de

²Conceitualmente, a constante cosmológica funciona como uma gravidade de repulsão para contrabalançar a atração da matéria no universo, evitando, assim, um colapso da mesma.

Einstein também são dadas por (6). Além disso, a métrica, os símbolos de Christoffel e o tensor de curvatura são definidos da maneira usual. Contudo, diferentemente do caso quadridimensional, em um espaço-tempo tridimensional as equações de campo não apresentam um limite newtoniano, isto é, não concordam com a equação de Poisson quando o campo é fraco. Por causa disso, nas dimensões reduzidas a constante k permanecerá arbitrária.

3 Métrica de BTZ

Em um artigo de 1965, Newman e Janis (1965) mostraram que a métrica de Kerr (KERR, 1963) poderia ser obtida da solução de Schwarzschild usando uma transformação complexa dentro da estrutura do formalismo de tetradas nulas de Newman-Penrose (NEWMAN e PENROSE, 1962), em um procedimento constituído por cinco passos que ficou conhecido com Algoritmo de Newman-Janis (ANJ). Esse algoritmo também foi aplicado à métrica de Reissner-Nordström para gerar a solução de Kerr-Newman, anteriormente desconhecida (NEWMAN et. al., 1965).

Um aspecto que causa estranhamento sobre a utilização do ANJ é que existe uma ambiguidade quanto a transformação complexa. Mesmo assim, outros autores também utilizaram esse algoritmo para soluções com rotação (HERRERA e JIMÉNEZ, 1982; DRAKE e TUROLLA, 1997; DRAKE e SZEKERES, 2000; YAZADJIEV, 2000; IBOHAL, 2005).

Em 1990, Giampieri (1990) propôs uma formulação, conhecida como “atalho de Giampieri”, que fornece uma maneira de executar o ANJ com muito mais simplicidade do que na formulação inicial. Na verdade, embora a ambiguidade na transformação complexa ainda permaneça, a vantagem da proposta de Giampieri reside no fato de que não é necessário encontrar uma base de tetradas nulas. Isso é particularmente útil quando se trabalha em um número arbitrário de dimensões.

Nesta seção, deduziremos a métrica BTZ a partir do ANJ. Antes, porém, faremos uma

breve abordagem sobre a formulação original desse algoritmo e apresentaremos a proposta de Giampieri.

3.1 Formulação original

O ANJ é um procedimento, constituído por cinco passos, que tem como finalidade gerar uma solução com rotação a partir de uma métrica estática e esfericamente simétrica, denominada “métrica semente”.

A seguir, assumindo que a métrica estática é do tipo

$$ds^2 = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (7)$$

descreveremos as etapas do ANJ e, ao mesmo tempo, o utilizaremos para obtermos a solução com rotação correspondente.

Os cinco passos desse algoritmo são:

1. **Escrever o elemento de linha semente em um sistema de coordenadas avançadas nulas de Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) , no qual a componente g_{rr} é eliminada e um termo cruzado é introduzido.**

Para cumprirmos as primeira exigência, devemos fazer a mudança de coordenadas

$$du = dt - f(r)^{-1} dr \quad (8)$$

Realmente, ao realizarmos essa transformação, obtemos:

$$ds^2 = f(r) du^2 + 2dudr - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (9)$$

Consequentemente, temos que as componentes covariantes e contravariantes do tensor métrico são dadas, respectivamente, por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -f(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

2. **Expressar a forma contravariante da métrica em termos de tetradas nulas, isto é, escrever $g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu$, onde as componentes devem obedecer as relações $l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0$, $l_\mu n^\mu = -l_\mu \bar{m}^\mu = 1$ e $l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0$, onde a “barra” denota o complexo conjugado.**

Neste caso, para executarmos o segundo passo, devemos escolher os vetores da base tetrada como

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (12)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}f(r)\delta_1^\mu, \quad (13)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) \quad (14)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right). \quad (15)$$

3. **Estender as coordenadas x^ρ para um novo sistema de coordenadas complexas \tilde{x}^ρ , $x^\sigma \mapsto \tilde{x}^\sigma$, e, simultaneamente, fazer com que os vetores da base tetrada Z_a^ν fiquem sujeitos a uma transformação do tipo: $Z_a^\nu(x^\sigma) \mapsto \tilde{Z}_a^\nu(\tilde{x}^\sigma, \bar{\tilde{x}}^\sigma)$, exigindo que a forma antiga da tetrada e, conseqüentemente, a métrica, sejam recuperadas quando $\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho$.**

Buscando satisfazer a esse requisito, faremos a seguinte extensão:

$$l^\mu \mapsto \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (16)$$

$$n^\mu \mapsto \tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2}\tilde{f}(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}})\delta_1^\mu, \quad (17)$$

$$m^\mu \mapsto \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}} \delta_3^\mu \right) . \quad (18)$$

e

$$\bar{m}^\mu \mapsto \tilde{\bar{m}}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left(\delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}} \delta_3^\mu \right) , \quad (19)$$

sob a condição que a função complexificada $\tilde{f}(\tilde{r}, \tilde{r})$ tome a forma de $f(r)$ no caso particular em que $\tilde{x}^\rho = \tilde{\bar{x}}^\rho$. Vale salientar que essa não é a única maneira de efetuarmos o terceiro passo. Por conta disso, alguns autores têm criticado o método de Newman-Janis.

4. **Fazer uma transformação complexa de coordenadas do tipo $\tilde{x}^\rho = x^\rho + i\gamma^\rho(x^\sigma)$, em que $y^\rho(x^\sigma)$ é uma função analítica das variáveis reais x^σ .**

As transformações complexas escolhidas por Newman e Janis (1965), para gerar a métrica de Kerr (KERR, 1963), foram

$$\tilde{u} = u + ia \cos \theta , \quad \tilde{r} = r - ia \cos \theta , \quad \tilde{\theta} = \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi . \quad (20)$$

Uma vez que estamos interessados em uma solução geral, que tenha como caso particular aquela obtida de por Kerr, é natural que utilizemos a transformação (20). Fazendo isso e levando em conta que os vetores \tilde{Z}_a^ρ se transformam como:

$$Z_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{Z}_a^\rho , \quad (21)$$

temos que as componentes da base tetrada nas coordenadas (u, r, θ, ϕ) tornam-se:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (22)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \tilde{f}(r, \theta) \delta_1^\mu , \quad (23)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left[ia \text{sen}\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right] \quad (24)$$

e

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left[-ia \text{sen}\theta (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right] . \quad (25)$$

Lembrando que as componentes contravariantes do tensor métrico podem ser escritas em termos das tetradas nulas, podemos mostrar que, nas coordenadas (u, r, θ, φ) ,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 1 + a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 0 & -a / \Sigma \\ 1 + a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & -\tilde{f}(r, \theta) - a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & 0 & a / \Sigma \\ 0 & 0 & -1 / \Sigma & 0 \\ -a / \Sigma & a / \Sigma & 0 & -1 / \Sigma \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (26)$$

onde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (27)$$

Logo, invertendo a matriz anterior chegamos à

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(r, \theta) & 1 & 0 & a \text{sen}^2 \theta \zeta \\ 1 & 0 & 0 & -a \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ a \text{sen}^2 \theta \zeta & -a \text{sen}^2 \theta & 0 & -\text{sen}^2 \theta \{r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta \zeta\} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

em que $\zeta \equiv 1 - \tilde{f}(r, \theta)$

Segue, então, que o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = \tilde{f}(r, \theta) du^2 + 2a \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] dud\phi + 2dudr - \Sigma d\theta^2 \\ - 2a \text{sen}^2 \theta dr d\phi - \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] \right\} \text{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (29)$$

5. Considerar uma mudança simples de coordenadas que levará a métrica à forma de Boyer-Lindquist.

Finalmente, para concluirmos a quinta etapa do ANJ, devemos fazer a seguinte transformação de coordenadas:

$$u = t - \int \frac{a^2 + r^2}{\xi} dr \quad \text{e} \quad \phi = \varphi - a^2 \int \frac{1}{\xi} dr, \quad (30)$$

em que

$$\xi \equiv \tilde{f}(r, \theta) \Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (31)$$

De fato, efetuando essa mudança, a métrica (29), toma a forma de Boyer-Lindquist:

$$ds^2 = \tilde{f}(r, \theta) dt^2 - \frac{\Sigma}{\xi} dr^2 + 2a \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] dt d\varphi - \Sigma d\theta^2 \\ - \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] \right\} \text{sen}^2 \theta d\varphi^2. \quad (32)$$

O elemento de linha (32) representa uma família completa de métricas que descrevem espaços-tempo exteriores a corpos com simetria esférica em rotação, escritas nas coordenadas de Boyer-Lindquist. Como caso particular, se considerarmos que a métrica de Reissner-Nördstrom é a métrica semente e, conseqüentemente, escolhermos $\tilde{f} = 1 - (2mr - Q^2) / \Sigma$, este resultado concordará com a solução de Kerr-Newmann.

3.2 O “atalho” de Giampieri

Aplicar o ANJ à métrica semente do tipo (7) é um procedimento relativamente simples. Porém, isso pode se tornar difícil quando aumentamos a complexidade da métrica ou o número de dimensões do espaço-tempo. Em um artigo não publicado (GIAMPIERI, 1990), Giampieri sugeriu uma nova receita para evitar cálculos trabalhosos. O “atalho de Giampieri” consiste em complexificar diretamente a métrica (9), fazer uma mudança de coordenadas e, finalmente, remover a contribuição complexa usando um *ansatz* específico. Essa nova abordagem foi revisada por Erbin (2015).

As etapas da proposta de Giampieri são as seguintes:

1. Escrever o elemento de linha semente em um sistema de coordenadas avançadas nulas de Eddington-Finkelstein.

Assim como na formulação original do ANJ, devemos escrever a métrica (7) da seguinte forma:

$$ds^2 = f(r) du^2 + 2dudr - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 . \quad (33)$$

2. Complexificar a métrica.

Esta etapa do algoritmo requer que estendamos as coordenadas x^ρ para um novo sistema \tilde{x}^ρ , onde \tilde{u} e \tilde{r} são complexas, e reescrevamos a métrica (33) como

$$ds^2 = \tilde{f}(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}}) d\tilde{u}^2 + 2d\tilde{u}d\tilde{r} - |\tilde{r}|^2 \left(d\tilde{\theta}^2 + \text{sen}^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi}^2 \right) , \quad (34)$$

de tal modo que a função complexificada $\tilde{f}(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}})$ tome a forma de $f(r)$ no caso particular em que $\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho$.

3. Realizar uma transformação complexa.

Este passo estabelece que devemos introduzir um novo ângulo χ e aplicar a mudança de coordenadas

$$\tilde{u} = u' + ia \cos \chi, \quad \tilde{r} = r' - ia \cos \chi, \quad \tilde{\theta} = \theta' \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi'. \quad (35)$$

Fazendo isso e retirando as “linhas”, encontramos:

$$ds^2 = \tilde{f}(r, \chi) (du - i a \text{sen} \chi d\chi)^2 + 2(du - i a \text{sen} \chi d\chi)(dr + i a \text{sen} \chi d\chi) - \Sigma (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (36)$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \chi$.

Esta etapa do pode ser interpretada como um imersão em uma teoria de 5 dimensões a partir da qual a métrica final será extraída.

4. Fixar a “fatia”.

Este passo exige que precisamos fixar o ângulo χ para recuperar uma solução em 4-dimensões. Então, para satisfazer a esse requisito, faremos um ajuste por meio do *Ansatz*

$$id\chi = \sin \chi d\phi, \quad (37)$$

seguido pela substituição

$$\chi = \theta. \quad (38)$$

Efetuada isso, ficamos com a seguinte expressão:

$$ds^2 = \tilde{f}(r, \theta) du^2 + 2a \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] dud\phi + 2dudr - \Sigma d\theta^2 - 2a \text{sen}^2 \theta dr d\phi - \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] \right\} \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (39)$$

que é o elemento de linha obtido após a execução da quarta etapa da forma original do ANJ.

5. Escrever a métrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist

Finalmente, assim como na formulação original do ANJ, o último requerimento da proposta de Giampieri é que devemos escrever a métrica (39) no sistema de coordenadas (t, r, θ, φ) onde a única componente cruzada do tensor métrico seja $g_{t\varphi}$. De acordo com o que desenvolvemos na seção anterior, a transformação que nos permite satisfazer essa exigência é aquela dada por (30). De fato, tal mudança de coordenadas nos leva à expressão

$$ds^2 = \tilde{f}(r, \theta) dt^2 - \frac{\Sigma}{\xi} dr^2 + 2a \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] dt d\varphi - \Sigma d\theta^2 - \left\{ r^2 + a^2 + a^2 \text{sen}^2 \theta \left[1 - \tilde{f}(r, \theta) \right] \right\} \text{sen}^2 \theta d\varphi^2, \quad (40)$$

onde ξ é a função dada por (31), que é o elemento de linha previsto pelo ANJ original.

3.3 BTZ

Seja na formulação original ou na proposta de Giampieri, o ANJ estabelece que, para obtermos a métrica BTZ, devemos partir da solução das equações de Einstein com uma constante cosmológica negativa, $\Lambda = -\mathcal{L}^{-2}$, que descreve o espaço-tempo exterior a uma distribuição de massa, M , circularmente simétrica e estática. Essa solução “semente”, a qual é denominada métrica AdS3, é dada por

$$ds^2 = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2, \quad (41)$$

onde

$$f(r) = -M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}. \quad (42)$$

Mas, conforme podemos observar, (41) é equivalente à (7), na situação particular em que $\theta = \pi/2$. Isso nos permite entender que encontraremos a solução de BTZ ao tomarmos $\theta = \pi/2$ no elemento de linha (32), no caso em que a função $f(r)$ é dada por (42).

De acordo com o ANJ, quando $\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho$, a função complexificada $\tilde{f}(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}})$ deve tomar a forma de $f(r)$. Então, para obedecer a esse critério, vamos escrever

$$\tilde{f}(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}}) = -M + \frac{\tilde{r}\bar{\tilde{r}}}{\mathcal{L}^2}. \quad (43)$$

Consequentemente, fazendo a transformação (20) em (43), temos:

$$\tilde{f}(r, \theta) = -M + \frac{\Sigma}{\mathcal{L}^2}. \quad (44)$$

Logo, substituindo (44) em (32) e considerando $\theta = \pi/2$, chegamos à

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt^2 + 2a \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt d\varphi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \left[r^2 + a^2 + a^2 \left(1 + M - \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right)\right] d\varphi^2, \quad (45)$$

em que

$$\Delta \equiv r^2(-M + r^2/\mathcal{L}^2) + a^2. \quad (46)$$

Podemos verificar, por meio de um cálculo direto, que o tensor métrico associado a (45) é solução das equações de Einstein para o espaço Anti De Sitter em (2+1) dimensões, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \mathcal{L}^{-2}g_{\mu\nu} = 0$. Por outro lado, a forma da expressão (45) não é compatível com aquela encontrada por Bañados, Teitelboim e Zanelli (1993):

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2}\right) dt^{*2} + 2adt^* d\varphi - r^2 d\varphi^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2, \quad (47)$$

o que, à princípio, nos levaria a pensar que (45) não seria a métrica BTZ. Contudo, essa incompatibilidade é apenas aparente, pois essas soluções estão relacionadas através de uma simples transformação de coordenadas. Realmente, efetuando a mudança

$$t^* = t - a\varphi \quad (48)$$

em (47) encontraremos a equação (45). Diante disso, somos capazes de afirmar que, realmente, as expressões (45) e (47) representam a solução de BTZ.

- **Buraco negro BTZ**

Apenas um ano depois da publicação da TRG, Karl Schwarzschild utilizou essa teoria para obter a solução que descreve o espaço-tempo exterior a um corpo esféricamente simétrico. Essa solução prevê que, se a densidade desse corpo fosse muito grande, a trajetória da luz seria perturbada em direção a ele e não conseguiria mais escapar do campo gravitacional, ficando “aprisionada” dentro de uma região ao atravessar uma espécie de fronteira denominada *horizonte de eventos*. Uma vez que nem mesmo a luz poderia escapar da gravidade emitida, quando a região em questão fosse observada da Terra, veríamos apenas um espaço escuro. Por esta razão, em 1969 o norte americano John Wheeler chamou essa configuração de *Buraco Negro*.

Além da solução acima descrita, existem outras que possuem horizontes de eventos e, por isso, prevêm a existência de buracos negros. Como exemplo, podemos citar as métricas de Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman. Em cada uma delas, o buraco negro será formado apenas quando a massa estiver concentrada em uma região menor que o raio dos horizontes.

Formalmente, o horizonte de eventos é determinado quando a componente radial do tensor métrico tende a infinito. Então, fazendo $\Delta = 0$, ou seja $g_{rr} \rightarrow \infty$, podemos observar que o espaço-tempo da solução de BTZ possui horizontes exterior, r_+ , e interior, r_- , os quais são dados por

$$r_{\pm} = \mathcal{L} \left\{ \frac{M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (49)$$

sendo que r_+ é o horizonte de eventos. Obviamente, isto nos garante que, se o raio da distribuição for menor que r_+ , haverá um buraco negro. Porém, segundo a equação (49), existe uma massa mínima $M_0 = 2a/\mathcal{L}$ para que um buraco negro com apenas um horizonte, $r_0 = \mathcal{L}\sqrt{M/2}$, seja encontrado. Dito de outra forma, se M for menor que M_0 não haverá a formação de um horizonte de eventos.

4 Termodinâmica do buraco negro de BTZ

Sem dúvida, um dos desenvolvimentos mais notáveis da física teórica que ocorreu nos últimos foi a descoberta de uma estreita relação entre certas leis da física dos buracos negros e as leis comuns da dinâmica. A existência dessa relação pode nos fornecer uma chave para o entendimento de alguns aspectos da natureza fundamental dos buracos negros em uma teoria quântica da gravitação, bem como para o entendimento de alguns aspectos da natureza da própria termodinâmica.

4.1 Variáveis termodinâmicas

Em 1971, Hawking enunciou o *teorema da área*, afirmando que a área da superfície de eventos de um buraco negro, A , nunca poderá diminuir em nenhum processo. Dois anos depois, Bekeinstein (1973) percebeu que esse teorema é análogo à segunda lei à segunda lei da termodinâmica, a qual estabelece que, em qualquer processo, a entropia, S , de um sistema fechado nunca será reduzida, e propôs que a área de um buraco negro poderia ser interpretada como sua entropia física.

Ainda em 1973, de forma análoga à lei zero da termodinâmica, a qual afirma que a temperatura sobre um corpo que está em equilíbrio térmico deve ser uniforme, Bardeen, Carter e Hawking (1973) mostraram que a gravidade de superfície, κ , de um buraco negro estacionário deve ser constante sobre o horizonte de eventos. Esses autores também demonstraram que, no vácuo, as diferenças entre a massa, M , área, A , e momento angular, J , de dois buracos negros estacionários próximos, devem se relacionar por

$$\delta M = \frac{1}{8\pi} \kappa \delta A + \Omega \delta J , \quad (50)$$

onde Ω denota a velocidade angular no horizonte de eventos. Esse último resultado é o análogo da primeira lei da termodinâmica, a qual propõe que as diferenças entre energia, E , e entropia, S , e outras variáveis de estado de dois estados de um sistema, que estão próximos e em equilíbrio térmico, se relacionam pela seguinte equação:

$$\delta E = T \delta S + \text{“termos de trabalho”} . \quad (51)$$

Se compararmos as leis zero, primeira e segunda da termodinâmica com as leis correspondentes dos buracos negros, vemos que as quantidades análogas são, respectivamente, $E \longleftrightarrow M$, $T \longleftrightarrow \alpha\kappa$ e $S \longleftrightarrow A/8\pi\alpha$.

A relação entre E e M se justifica pelo fato que, no contexto da TRG clássica, tais quantidades representam a mesma quantidade física, isto é, a energia total do sistema. Por outro lado, a teoria clássica prevê que a temperatura do buraco negro é nula, o que nos leva a acreditar que a associação entre T e κ não faz sentido. Por consequência, seria incoerente admitir que existe uma conexão entre S e A . Por esse motivo, no momento em que o trabalho de Bardeen, Carter e Hawking foi publicado, a maioria dos pesquisadores viu a analogia entre a buraco negro e leis termodinâmicas como apenas uma curiosidade matemática, sem qualquer significado físico.

Essa visão mudou dramaticamente com a descoberta de Hawking que, devido ao efeito de criação de partículas quânticas, um buraco negro irradia até o infinito espécies de partículas com um espectro de corpo negro perfeito, à temperatura (em unidades com $G = c = \hbar = 1$)

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} . \quad (52)$$

Isso mostra que $\kappa/2\pi$ não é apenas uma quantidade que desempenha um papel matemático análogo à temperatura nas leis do buraco negro, mas, de fato, representa a temperatura do buraco negro.

A emissão de radiação pode ser justificada como segue. A Mecânica quântica diz que todo o espaço é preenchido com pares de partículas “virtuais” e antipartículas que estão constantemente se materializando em pares, se separando e, em seguida, se unindo novamente e se aniquilando³. Agora, na presença de um buraco negro, a atração gravitacional poderá fazer um membro cair no buraco, deixando o outro membro sem um parceiro para se aniquilar. A partícula ou antipartícula abandonada pode cair no buraco negro após o seu parceiro, mas também pode escapar para o infinito, onde isto parece ser

³Estas partículas são chamadas virtuais porque, ao contrário de partículas “reais”, que não pode ser observada diretamente com um detector de partículas.

a radiação emitida pelo buraco negro.

4.2 Cálculo das variáveis termodinâmicas

• Temperatura

A métrica BTZ pode ser escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = hdt^2 - fdr^2 - r^2d\varphi^2 + 2adtd\varphi, \quad (53)$$

onde

$$h = -M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2} \quad \text{e} \quad f = \left(-M + \frac{r^2}{\mathcal{L}^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1}. \quad (54)$$

Neste caso, as componentes contravariantes e covariantes do tensor métrico são representadas, respectivamente, pelas matrizes

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} h & 0 & a \\ 0 & -f & 0 \\ a & 0 & -r^2 \end{pmatrix} \quad (55)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} r^2(hr^2 + a^2)^{-1} & 0 & a(hr^2 + a^2)^{-1} \\ 0 & -f^{-1} & 0 \\ a(hr^2 + a^2)^{-1} & 0 & -h(hr^2 + a^2)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Consequentemente, utilizando a equação (5), vemos que as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{rh'}{2(r^2h + a^2)}, & \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 &= -\frac{ar}{r^2h + a^2}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{h'}{2f}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{f'}{2f}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{f}, & \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 &= \frac{ah'}{2(r^2h + a^2)}, & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{hr}{r^2h + a^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

De acordo com Wald (1998), a gravidade de superfície é dada pela seguinte expressão:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}g_{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\nabla^\mu\chi_\nu\nabla^\alpha\chi_\beta \Big|_{r=r_+} \quad (58)$$

em que $\chi = (1, 0, \Omega)$ é o campo de Killing, sendo

$$\Omega \equiv -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \Big|_{r=r_+} \quad (59)$$

a velocidade angular no horizonte de eventos, r_+ .

Levando em conta que

$$\nabla^\mu \chi_\nu = g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \chi_\nu = g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial \chi_\nu}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \chi_\sigma \right) \quad (60)$$

e utilizando as equações (56) e (57), segue que

$$\nabla^\mu \chi_\nu = \begin{pmatrix} 0 & (rh' - 2a\Omega)/2r(hr^2 + a^2) & 0 \\ h'/2f & 0 & -r\Omega/f \\ 0 & (2hr\Omega + ah')/2(hr^2 + a^2) & 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Logo, substituindo esse resultado em (58), obtemos:

$$\kappa^2 = - \left[\frac{4hr^2\Omega^2 - r^2h'^2 + 4ah'r\Omega}{4f(hr^2 + a^2)} \right]_{r=r_+}. \quad (62)$$

Finalmente, utilizando as forma explícitas de f e h e o fato que $\Omega = a/r_+^2$, chegamos à temperatura Hawking do buraco negro BTZ, a qual é dada por

$$T_H = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{Ma^2\mathcal{L}^4 + r_+^6 - 3r_+^2a^2\mathcal{L}^2}{\mathcal{L}^4r_+^4} \right)^{1/2}. \quad (63)$$

Naturalmente, podemos substituir (49) na equação acima para reescrevermos T_H apenas em termos da massa, M , e do parâmetro de rotação, a . Seguindo esse procedimento, encontramos:

$$T_H = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{M^2\mathcal{L}^2 - 4a^2}{2\mathcal{L}^3 [M\mathcal{L} + (M^2\mathcal{L}^2 - 4a^2)^{1/2}]} \right\}^{1/2}, \quad (64)$$

e, fazendo uma expansão em potências de $2a/M\mathcal{L}$,

$$T_H = \sqrt{\frac{2a}{\pi^2\mathcal{L}^3}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M\mathcal{L}}{2a} \right)^{1/2} - \frac{3}{16} \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^{3/2} - \frac{17}{256} \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^{7/2} + \dots \right]. \quad (65)$$

Analisando a equação (64) vemos que, devido a emissão da radiação Hawking e a evaporação, o buraco negro esfriará e alcançará a temperatura zero quando sua massa atingir o valor mínimo, $M_0 = 2a/\mathcal{L}$. Por outro lado, $M \gg 2a/\mathcal{L}$, temos da equação (65) que $T_H \approx \sqrt{M}/2\pi\mathcal{L}$, o que nos permite concluir que a temperatura do buraco negro não sofrerá influência da rotação quando a massa for muito grande. Na verdade, quanto maior a massa, menor será a contribuição da rotação na emissão da radiação.

Para corroborar com esses apontamentos, traçamos, na figura 1, gráficos da temperatura em função da massa, considerando valores distintos para o momento angular, a . Mais um vez, fica evidente que, independentemente do valor de a , existirá sempre uma massa mínima que será atingida quando a temperatura se tornar igual a zero. Além disso, como as curvas se aproximam à medida que M aumenta, fica claro que, embora a temperatura aumente com a massa do buraco negro, no caso em que essa massa é muito grande, comparada com M_0 , a rotação praticamente não tem relevância na emissão da radiação.

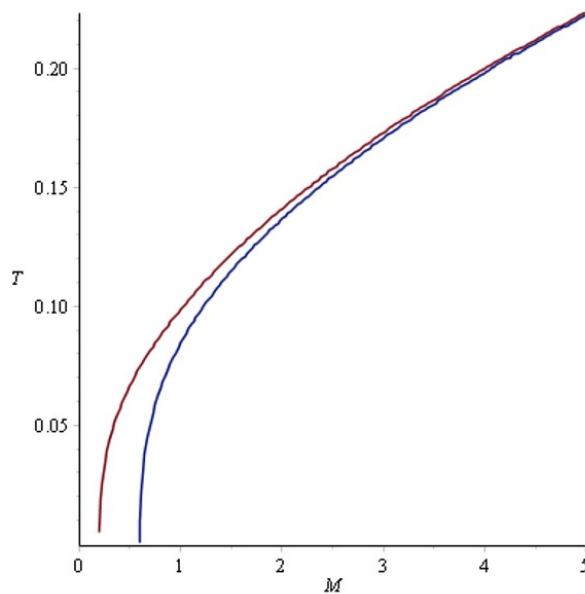


Figura 1: Gráficos da temperatura em função da massa do buraco negro BTZ, para os casos em que $a = 1$ e $a = 3$, com $\mathcal{L} = 10$.

• Entropia

Levando em conta a correspondência entre massa e energia, podemos escrever a entropia do buraco negro como

$$S = \int \frac{dM}{T_H}. \quad (66)$$

Usando a equação (49), temos que

$$M = \frac{a^2 \mathcal{L}^2 + r_+^4}{\mathcal{L}^2 r_+^2}. \quad (67)$$

Conseqüentemente, substituindo a equação acima em (63), obtemos:

$$T_H = \left(\frac{r_+^4 - a^2 l^2}{r_+^3 \mathcal{L}^2} \right) \frac{1}{2\pi}. \quad (68)$$

Dessa forma, utilizando (67) e (68) em (66), encontramos a entropia do buraco negro BTZ:

$$S = \int \frac{1}{T_H} \frac{\partial M}{\partial r_H} dr_H \Rightarrow S = 4\pi r_+. \quad (69)$$

Assim como fizemos no cálculo da temperatura, podemos usar (49) para expressarmos S em termos de M e a . Fazendo isso, encontramos:

$$S = 4\pi \mathcal{L} \left\{ \frac{M}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^2} \right] \right\}^{1/2} \quad (70)$$

e, também,

$$S = 4\pi \mathcal{L} \sqrt{M} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^2 - \frac{5}{128} \left(\frac{2a}{M\mathcal{L}} \right)^4 + \dots \right]. \quad (71)$$

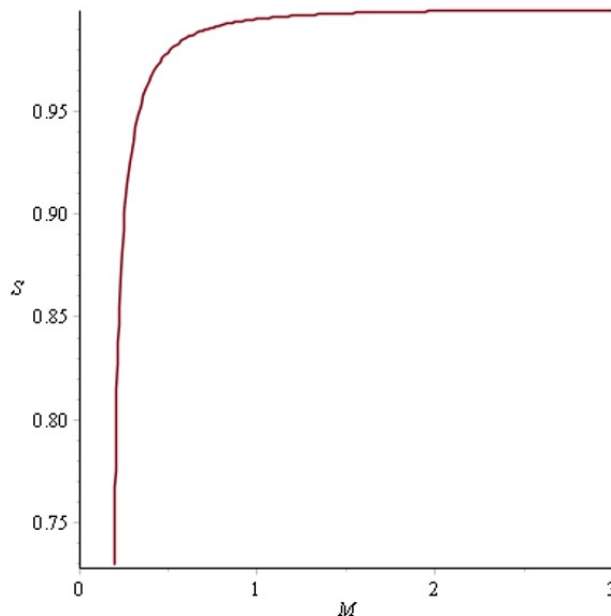


Figura 2: Razão entre as entropias dos buracos negros BTZ, S , e AdS3 (BTZ sem rotação), S_0 , em função da massa, considerando $a = 1$ e $\mathcal{L} = 10$.

A equação (70) mostra que o buraco negro evaporará até atingir uma massa mínima e que, quando isso acontecer, a entropia será dada pelo seu menor valor, $S_0 = 4\pi\mathcal{L}\sqrt{M/2}$. Já a expressão (71) nos permite concluir que, quanto maior for a massa, menor será importância da rotação na entropia. Esses aspectos também podem ser vistos através da figura 2, onde traçamos a curva da razão S/S_0 , sendo S_0 é a entropia do buraco negro sem rotação. De fato, nessa figura vemos que à medida em que a massa aumenta, a razão se aproxima de 1, indicando que contribuição da rotação é desprezível na situação em que a massa é muito grande. Além disso, o gráfico mostra que o crescimento e a redução da entropia estão associados ao aumento e a diminuição da massa e que, quando a massa for mínima, a entropia atingirá o seu menor valor.

5 Considerações Finais

Neste trabalho, fizemos uma abordagem sobre um procedimento, denominado algoritmo de Newman-Janis, que nos permite obter uma métrica gerada por uma distribuição esfericamente simétrica com rotação a partir de uma solução estática.

Então, usando esse método, encontramos a solução das equações de Einstein associada a uma distribuição circularmente simétrica em rotação, conhecida como a métrica BTZ, tomando como ponto de partida a métrica AdS3. Analisando o resultado obtido, observamos que tal solução é caracterizada por um horizonte de eventos. Esse aspecto garante que, caso o raio da distribuição seja menor que o horizonte de eventos, um buraco negro será formado.

Em seguida, considerando que a massa está concentrada num ponto, estudamos a termodinâmica do buraco negro BTZ. Dos resultados encontrados, vimos que o buraco negro emitirá radiação até que sua temperatura seja nula e suas entropia e massa atinjam valores mínimos. Também percebemos que, embora a rotação influencie nos comportamentos das variáveis termodinâmicas, quando a massa é muito grande tal contribuição se torna irrelevante.

6 Referências

- BAÑADOS, M. et al. **Geometry of the (2+1) Black Hole** Physical Review D, v. 48,ago.1993
- BAÑADOS, M.; TEITELBOM, C; ZANELLI, J. **The Black Hole in Three-dimensional Space-time**, Physical Review Letters, v. 69, set. 1992.
- BEKENSTEIN, J.; **Black Holes and Entropy** Physical Review D, v. 7,ago.1973
- BERGMANN, Peter Gabriel. **Introdução a Teoria da Relatividade**. New York: Dover Publicações, 1975.
- CARMELI, M.**Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**, New York, John Wiley and Sons, 1982.
- CARROL, S. **Spacetime and Geometry**. An Introduction to General Relativity. Chicago. Addison Wesley. University of Chicago. 2004.
- CARTEL, B. **Black hole electrodynamics and the carter tetrad**. Royal Astronomical Society, Cambridge, (1968), vol. 3. pag (457-472).
- CAVALCANTI, A. G., **Radiação Hawking de um Buraco Negro BTZ Não-Comutativo**.2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Campina Grande - PB.
- CHANDRASEKHAR, S. **The Mathematical Theory of Black Holes**. American Journal of Physics. Oxford Classic Texts. 1983.
- DESER, S. et al, **Three-dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space**, **Ann. Phys.**, vol. 152, (1984), pag. 220-235.
- DRAKE, S. P.; SZEKERES, P. **Uniqueness of the Newman-Janis algorithm in Generating the Kerr-Newman Metric**. General Relativity and Gravitation., vol. 32, (2000), pag. 445-457.
- FERRARO, R. **Einstein's Space-Time**. An Introduction to Special an General Relativity. Buenos Aires. Springer. Universidad de Buenos Aires. 2007.

FLAHERTY, E. J. **Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity**. Berlin; Nova York: Springer-verlag, 1976.

FLAHERTY, E. J. **Complex Variables in Relativity**. vol 2. Nova York (Plenum). pag (207).

GIDDINGS, S.; KUCHAR, K. **Einstein's Theory of Gravity in Three-dimensional Space-time**, Gen. Rel. Grav., vol16, (1984), pag. 751-775.

GOTT, J. Richard e ALPERT, Mark, **General Relativity in a (2+1) Dimensional Space-time**, Gen. Rel. Grav., vol. 16, (1984), pag. 751-775.

HALL, G. S; KEANE, A, J. **Some remarks on the symmetries of the kerr spacetime**. Classical and Quantum Gravity-(2000)-vol. 6. pag (3).

HAWKING, S. W. **Black Holes and Thermodynamics**. Physical Review D, vol. 13, n. 2, p. 191-197.

KIM, H. **Notes on Spinning AdS_3 Black Hole Solution**. arXiv preprint hep-th/9706008,1997.

IBOHAL, N. **Rotating metrics admitting non-perfect fluids in General Relativity**, Manipur, India. University of Manipur, 2005.

KERR, R. P. **GRAVITATIONAL FIELD OF A SPINNING MASS AS AN EXAMPLE OF ALGEBRAICALLY SPECIAL METRICS**. Physical Review Letters. Austin, Texas. University of Texas. 1963.

KERR, R. P. **Gravitational Field of Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics**-APS Physics-University of Texas, Austin, Texas-(1, Setember, 1965)- vol. 11. pag (237).

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **The Classical Theory of Fields**, Minnesota, Pergamon Press Ltd, 1971.

MEINEL. R. **Constructive proof of the Kerr-Newman black hole uniqueness including the extreme case**. Classical and Quantum Gravity-(2012)- vol. 3. pag (29).

NEWMAN, E, T; JANIS, A, I. **Note on the Kerr Spinning - Particule Metric-**

Journal of Mathematical Physics - American Institute of Physics-(19, june, 1965)-6. pag (915-917).

NEWMAN, E, T; PENROSE. P. **An Approach to Gravitational Radiation by a method of Spin Coeficients**-Journal of athemtical Physics - American Institute of Physics-(1962)-3. pag (565)

NEWMAN, E, T; COUCH. E; CHINNAPARED, A, K, E; PRAKASH, A; TORRENCE, R. **Metric of a rotating, charged mass**-Journal of mathematical Physics - American Institute of Physics-(1965)-6. pag (915-917).

NEWMAN, E, T. **Proof of Uniqueness of the Kerr-Newman Black Hole solution**-Journal of mathematical Physics - American Institute of Physics-(1973)-15. pag (10).

NEWMAN, E, T. **The remarkable efficacy of complex methods in general relativity**-Proceedings of the conference on Gravitational and Cosmology,(1987), Índia (Goa). pag (67).

RINDLER, W. **Relativity Special, General, and Cosmological**. 2 edition. Dallas, Texas: Oxford University. 2006.

SOURADEEP, Tarun e SAHNI, Varun. **Quantum Eects Near a Point Mass in (2+1)-dimensional Gravity**, Phys. Rev., vol. D, no 46, (1992), pag. 1616-1633.

WALD, R. M. **Black Holes and Relativistic Stars**. 3 edition. Chicago and London: The University of Chicago Press. 1997.

WALKER, M; PENROSE, R. **On quadratic first integrals of geodesic equations for type 22 spacetimes**. Commun. Math. Phys, vol. 18. pag. (265-274), 1970.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity**, Massachusetts Institute of Technology. 1 edition. 1972.