



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

EDSON FERREIRA FILGUEIRAS

**UMA ABORDAGEM PARA A UTILIZAÇÃO DE CONES DE GRAFENO NA
COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

**PATOS - PB
2019**

EDSON FERREIRA FILGUEIRAS

**UMA ABORDAGEM PARA A UTILIZAÇÃO DE CONES DE GRAFENO NA
COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Licenciatura Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito para a obtenção do título de licenciado em Física.

Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Everton Cavalcante.

**PATOS-PB
2019**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F481a Filgueiras, Edson Ferreira.
Uma abordagem para a utilização de cones de grafeno na computação quântica [manuscrito] / Edson Ferreira Filgueiras. - 2019.
21 p. : il. colorido.
Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Everton Cavalcante , Coordenação do Curso de Física - CCEA."
1. Grafeno. 2. Fases de holonomia. 3. Computação Quântica. I. Título

21. ed. CDD 004

Edson Ferreira Filgueiras

**UMA ABORDAGEM PARA A UTILIZAÇÃO DE CONES DE GRAFENO NA
COMPUTAÇÃO QUÂNTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Licenciatura Plena em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, em
cumprimento à exigência para obtenção do grau
de Licenciado em Física.

Aprovado em 01 de novembro de 2019

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr.. Everton Cavalcante (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Thiago Brito Gonçalves Guerra (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

“Equipado com seus cinco sentidos, o homem explora o universo ao seu redor e chama a aventura de ciência.”

Edwin P. Hubble

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	6
2.COMPUTAÇÃO QUÂNTICA	7
3.CONES NO GRAFENO.....	9
4.COMPUTAÇÃO QUÂNTICA NO CONE.....	16
5.CONCLUSÃO	17
6.REFERÊNCIAS.....	17

UMA ABORDAGEM PARA A UTILIZAÇÃO DE CONES DE GRAFENO NA COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

AN APPROACH TO THE USE OF GRAPHEN CONES IN QUANTUM COMPUTATION

Edson Ferreira Filgueiras*

RESUMO

Conforme se continua investindo em ciência, novas tecnologias são desenvolvidas, e, com os estudos em nanotecnologias, muitas empresas estão investindo em computadores quânticos. Neste trabalho, apresentaremos um possível método de utilização do grafeno na computação quântica. Discutiremos brevemente sobre o grafeno, desde a sua utilização para estudos teóricos até a descoberta experimental, evidenciando as principais características e propriedades singulares que fazem dele um material fascinante e que é amplamente estudado por pesquisadores ao redor do globo. Na sequência, uma introdução sobre a computação quântica é dada, fornecendo uma comparação importante entre os computadores clássicos e quânticos. Em seguida, a formação de cones de grafeno e os defeitos topológicos surgidos de desclinações são estudados. Trataremos ainda dos conceitos de conexões diferenciais e spinoriais e de fases de holonomia, fundamentais para a computação quântica holonômica. Por fim, mostraremos que a computação quântica pode ser implementada na folha de grafeno.

PALAVRAS-CHAVE: Grafeno. Fases de Holonomia. Computação Quântica.

ABSTRACT

As we continue to invest in science, new technologies are being developed, and with nanotechnology studies, many companies are investing in quantum computers. In this paper, we present a method of using graphene in quantum computing. We will briefly discuss graphene, from its use for theoretical studies to experimental discovery, highlighting the key features and unique properties that make it a fascinating material that is widely studied by researchers around the globe. In the following, an introduction to quantum computation is given, providing an important comparison between classical and quantum computers. Next, the formation of graphene cones and the topological defects arising from disclinations are studied. We will also deal with the concepts of differential and spinorial connections and holonomy phases, fundamental for holonomic quantum computing. Finally, we will show that quantum computation can be implemented on the graphene sheet.

Keywords: Graphene. Holonomy Phases. Quantum Computation.

* Graduado em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, edsonferreirafilgueiras@hotmail.com

1 INTRODUÇÃO

O carbono é um dos elementos químicos mais abundantes do universo, e a sua enorme versatilidade – sendo capaz de ser encontrado na natureza de diversas formas (por exemplo: grafite e diamante) – faz com que este material seja amplamente estudado pelos pesquisadores, que buscam em suas propriedades, maneiras de entendê-lo, para assim, possibilitar futuras aplicações na sociedade com avanços científicos e tecnológicos. O carbono também dá origem a várias outras formas singulares, incluindo o grafeno, que pode ser considerado como o progenitor de todos os outros materiais grafíticos .

Grafeno é o nome dado a uma camada única e plana de átomos de carbono comprimidos em uma estrutura hexagonal bidimensional (2D), também chamada de “honeycomb” ou “rede em favo-de-mel” [GEIM, A.K.; MACDONALD, A.H. 2007]. Podendo ser transformado em buckyballs (fulerenos) de zero dimensões (0D), nanotubos de carbono de uma dimensão (1D) ou até mesmo em grafite, um material tridimensional (3D). O que caracteriza a dimensionalidade de um material, (ou seja, se será zero-dimensional, unidimensional, bidimensional ou tridimensional) será sua espessura [GEIM, A. K.; KIM, P. 2008].

No dia primeiro de maio do ano de 1947, um artigo foi publicado na revista *Physical Review*, de nome “The Band Theory of Graphite” (Sobre a estrutura de banda do grafite), foi escrito pelo canadense Phillip Russel Wallace [WALLACE, P. R. 1947], que assim, abria as portas para o estudo teórico do grafeno.

O que Wallace fez em seu artigo foi notar a existência dessa fina forma bidimensional em seus estudos das propriedades eletrônicas do grafite. Na realidade, estudos teóricos sobre essas estruturas bidimensionais já haviam sido realizados mais de uma década antes por Lev Landau e Rudolph Peierls [PEIERLS, R. E. 1935; LANDAU, L. D. 1937], que defendiam que devido à instabilidade termodinâmica, ele só poderia existir como uma parte integrante de um material tridimensional, como Wallace veio a perceber com o grafite. No ano de 1962 o material foi observado separadamente por dois químicos alemães, Ulrich Hofmann e Hans-Peter Boehm. Foi Boehm [BOEHM, H. P.; SETTON, R.; STUMPP, E. 1964] quem o nomeou, criando a nomenclatura *grafeno*. Porém, embora comprovadamente existente, obter uma amostra experimental fora novamente considerada impossível de se fazer na época e o grafeno seguiu por mais de meio século como um material puramente teórico, excelente para estudos e nada mais.

A descoberta experimental se deu no ano de 2004, ao tentar fazer cada vez menores amostras de grafite, os pesquisadores Andre K. Geim e Konstantin Novoselov [NOVOSELOV et al. 2004] (com sua equipe) descobriram experimentalmente o grafeno, na Universidade de Manchester, na Inglaterra. Eles desenvolveram uma técnica conhecida como clivagem micromecânica. Essa técnica consistia na esfoliação do grafite, permitindo assim o isolamento dos seus cristais.

Após a publicação da descoberta experimental, a notícia se espalhou rapidamente, aumentando a popularidade do grafeno e fazendo com que muitos novos estudos fossem realizados em diversas partes do planeta. Essa empolgação com o derivado bidimensional do carbono é ocasionada pelas propriedades singulares (mecânicas, eletrônicas, ópticas e térmicas), ou seja, que outros materiais não possuem. O fato de uma única folha de grafeno absorver apenas dois por cento de toda a luz incidente em sua superfície [NAIR et al. 2008] pode também trazer muitas contribuições para a sociedade, através da sua utilização na produção de materiais ópticos. O grafeno, além de ser o mais fino de todos os materiais possíveis de serem encontrados na natureza, é também extremamente forte e resistente [KATSNELSON, M. I.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. 2006], em sua forma pura conduz elétrons mais rápido que qualquer outra substância à temperatura ambiente [GEIM, A. K.; KIM, P. 2008], possibilitando, no futuro próximo, a construção de aparelhos que revolucionarão o que conhecemos por tecnologias, criando materiais com alta capacidade de flexibilidade devido as suas propriedades mecânicas e eletrônicas.

2 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

Computadores são máquinas capazes de processar dados e fazer variados tipos de tratamento automático de informações. Além de processar, armazenar e analisar dados, um computador pode, nos dias de hoje, realizar diversas tarefas, tais como: cálculos que não seriam possíveis ou viáveis para os seres humanos; disponibilizar entretenimento para todos os gostos e idades; dar acesso à cultura de povos em qualquer parte do planeta; além de poder criar e manipular realidades virtuais [KEMPF, K. 1961].

Os primeiros computadores eletrônicos surgiram na década de 1940, eles pesavam toneladas e levavam vários segundos para a realização de uma multiplicação simples. Eles fazem parte da primeira geração de computadores.

Em seguida surgiu a segunda geração de computadores, datada da metade dos anos 1950. Essa geração é marcada pela invenção do transistor. Os computadores da primeira

geração utilizavam componentes enormes, chamadas válvulas, para guardar informação e fazer contas. O transistor conseguia fazer a mesma tarefa, mas era muito menor, mais barato e consumia menos energia elétrica. O primeiro transistor foi desenvolvido em 1947 nos laboratórios da Bell Telephone. Pouco tempo depois de anunciado e aperfeiçoado, os transistores substituíram as válvulas nas aplicações eletrônicas, por serem mais compactos, robustos e eficientes [KEMPF, K. 1961].

A terceira geração (1964-1970) ocorre com o surgimento dos circuitos integrados. Após a terceira geração de computadores, com a invenção dos chips, surge a quarta geração, que dura até os dias atuais. Porém, conforme os investimentos em pesquisas científicas e tecnológicas continuam, é possível vislumbrar uma quinta geração em um futuro próximo. Esta futura geração de computadores deve ter como base a produção em massa dos chamados computadores quânticos.

Os estudos com a computação quântica tiveram início na mesma década em que surgiram os primeiros computadores eletrônicos. Os computadores eletrônicos até a geração atual são chamados computadores clássicos, isto porque, eles utilizam os valores 0 e 1 (representação do código binário), a linguagem compreendida pelas máquinas [FISCHER, A.; GRODZINSKY, F. 1993].

Os computadores quânticos funcionam com uma lógica bastante diferente daquela presente nos computadores clássicos, podendo apresentar os bits quânticos (qubits) em uma superposição de estados 0 e 1, uma característica única da nova Física surgida nas primeiras décadas do século XX. A superposição de estados torna os computadores quânticos muito mais poderosos e velozes que os computadores ditos clássicos (Figura 01).

Uma das principais dificuldades na construção de computadores quânticos reside no problema da decoerência quântica, que é a distorção do estado quântico devido à interação com o ambiente. Esta interação “inevitável” entre esses sistemas e o ambiente que os cerca tem como principal resultado a aniquilação das características quânticas essenciais para a construção dos computadores quânticos [ALVES, F. L. 2003].

As pesquisadoras, Sina Khorasani e Akshay Koottandavida, da Escola Politécnica Federal de Lausanne, na Suíça, inovaram ao ter a ideia de explorar o uso de um capacitor como qubit, isto porque o princípio de funcionamento do bit quântico o torna mais resistente às interferências externas, já que, em vez de ser influenciado por partículas de fora do ambiente controlado, ele pode simplesmente guardá-las como energia. Elas descobriram que é mais fácil fabricar um nanocapacitor, que também fica menor, do que outras arquiteturas de

qubits até então pesquisadas. O componente gerado por Khorasani e Koottandavida consiste em camadas do isolante Nitreto de boro ensanduichadas entre duas camadas de grafeno [KHORASANI, S.; KOOTTANDAVIDA A. 2017]. A ideia para a utilização do grafeno no combate a decoerência se deve ao fato de que é possível criar qubits a partir de uma serie de camadas empilhadas do alótropo bidimensional do carbono. Esses qubits poderiam então ser utilizados da maneira proposta pelas pesquisadoras ou de formas semelhantes. A vantagem da utilização do grafeno é que o componente se mostrou muito estável, capaz de resistir às influências externas que fazem os qubits perderem os dados mais facilmente.

1 qubit = 1 bit	8 qubits = 256 bits
2 qubits = 4 bits	9 qubits = 512 bits
3 qubits = 8 bits	10 qubits = 1.024 bits
4 qubits = 16 bits	15 qubits = 32.768 bits
5 qubits = 32 bits	20 qubits = 1.048.576 bits
6 qubits = 64 bits	30 qubits = 107.373.568 bits
7 qubits = 128 bits	40 qubits = 109.950.533.632 bits

Figura 01 – Comparação entre bits quânticos e clássicos.

FONTE: Imasters, 2018 [SANTOS, L. 2018].

Artigos sobre pesquisas em computação quântica são publicados rotineiramente [PACHOS, J.; ZANARDI P.; RASETTI, M. 2000 - WEBBER et al. 2010]. Também é possível encontrar na literatura, pesquisas com o grafeno - geralmente associadas a defeitos topológicos na estrutura da rede hexagonal - que visam sua utilização em computadores quânticos [IIJIMA, S.; ICHIHASHI, T.; ANDO, Y. 1992; CARDENAS, S. 2014]. É com base nestes artigos, que se propõe aqui a utilização do grafeno no contexto da computação quântica.

3 CONES NO GRAFENO

Em 1992, pesquisadores japoneses [IIJIMA, S.; ICHIHASHI, T.; ANDO, Y. 1992] apresentaram a primeira observação experimental dos cones de grafeno. Eles obtiveram as

imagens a partir da microscopia eletrônica de transmissão, na qual o crescimento tipo-cone é transformado em um crescimento cilíndrico pela incorporação de um defeito que induz uma curvatura negativa na estrutura. Observe a figura 02 para ver observações experimentais de estruturas cônicas de átomos de carbono.

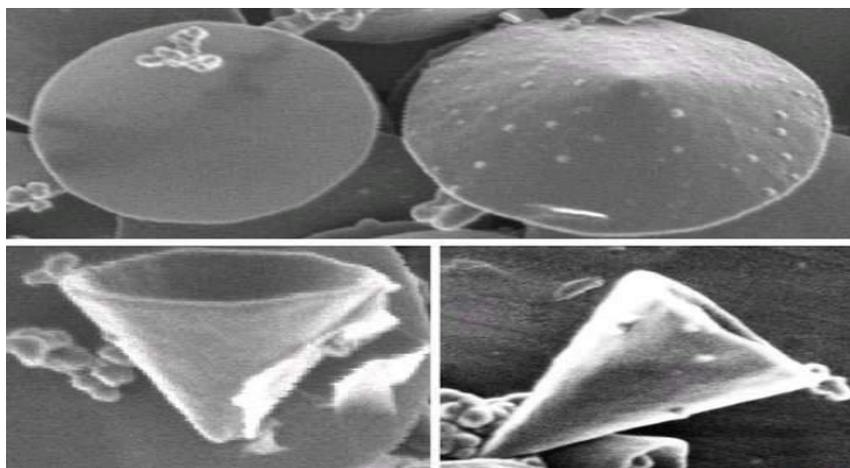


Figura 02 – Observação experimental de cones de grafeno.
FONTE: Research Gate, 2019 [CARDENAS, S. 2014].

Para construir um cone a partir de uma folha de papel, primeiramente faz-se um círculo com a folha. Desenha-se, então, uma fatia, cortando-a para fora do círculo logo em seguida (da mesma forma como se faz com uma pizza). Ao juntar as pontas recém-cortadas do disco, obtém-se um cone de papel.

Seguindo o raciocínio - válido para a criação de cones com quaisquer materiais com o qual se possa seguir a “receita” – é possível criar cones de grafeno a partir de um modelo conceitual (pois manipular o grafeno não é uma tarefa fácil, já que ele possui uma espessura de um átomo de carbono), através das folhas desse material. Construindo discos com folhas de grafeno, se consegue transformá-las em cones ao “cortar fatias” da estrutura hexagonal e juntar as pontas soltas do que restou no disco. Ao cortar essas fatias, ou de maneira mais precisa, ao remover setores da estrutura bidimensional da folha de grafeno, surgem as desclinações [FURTADO, C.; MORAES, F.; CARVALHO, A.M. 2008].

Estruturas bidimensionais de carbono com anéis que possuem um número variado de átomos são cheios de defeitos [BAKKE, K.; FURTADO C.; SERGEENKOV, S. 2009], o que não ocorre com o grafeno, que por ter um arranjo estrutural de anéis com átomos de carbono muito bem ordenados hexagonalmente, pode ser visto como um sistema livre destes defeitos. Porém, ao remover um setor da folha de grafeno, defeitos topológicos associados a estes

anéis de carbono aparecem, são as já referidas desclinações, que são responsáveis pela curvatura local que dobra o grafeno em seus vários formatos (Figura 02).

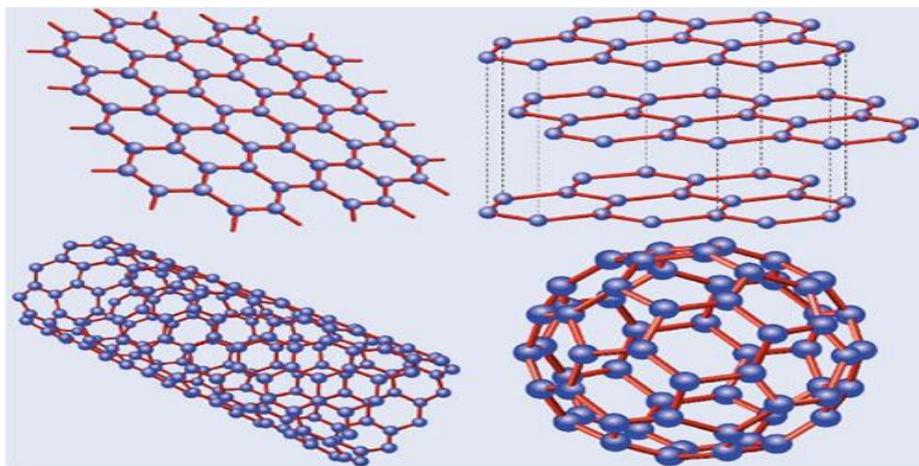


Figura 03 – A folha de grafeno (canto superior esquerdo) pode gerar fulerenos (inferior direito), nanotubos de carbono (inferior esquerdo) e grafite (superior direito).

FONTE: Infoescola, 2017 [LUZ, A.M. 2019].

Os defeitos topológicos são gerados quando se removem setores da folha de grafeno, o que pode ser entendido como a definição de desclinações. Todavia, os defeitos também podem ser gerados ao se inserir setores, processo chamado de deslocação. O ato de se inserir ou remover setores é conhecido como processo Volterra [KLEMAN, M. 1977]. A maneira mais comumente associada a esses defeitos, é removendo um setor de 60° ($\pi/3$) da folha circular de grafeno, ou inserindo um setor de mesmo ângulo. A remoção e inserção de setores gera uma curvatura negativa e positiva, respectivamente. Ao criar um cone, inserindo um setor de 60° , surge um heptágono onde antes havia apenas hexágonos. Ao fatiar a folha de grafeno com este ângulo, forma-se um pentágono no centro da estrutura geométrica (Figura 03).

Em 1991, os físicos Mikhail Katanaev e Igor Volovich publicaram um artigo em que demonstraram a equivalência entre defeitos topológicos na estrutura de sólidos e a gravidade tridimensional [KATANAEV, M.O.; VOLOVICH, I.V. 1992]. Assim, utilizando a abordagem que ficara conhecida na literatura como modelo de Katanaev e Volovich, é possível descrever defeitos topológicos no grafeno através de métricas de espaço-tempo. Então, em coordenadas cilíndricas, a métrica tridimensional (duas dimensões espaciais e uma dimensão temporal) que representa o cone de grafeno será dada pela seguinte equação:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 \quad (1)$$

Com α sendo o fator de correção angular após a formação do cone (lembre-se de que o círculo original - antes da remoção/inserção de um setor - tinha 360°). Também é possível relacionar α ao número de setores removidos (n_Ω) da folha de grafeno:

$$\alpha = 1 - \frac{n_\Omega}{6} \quad (2)$$

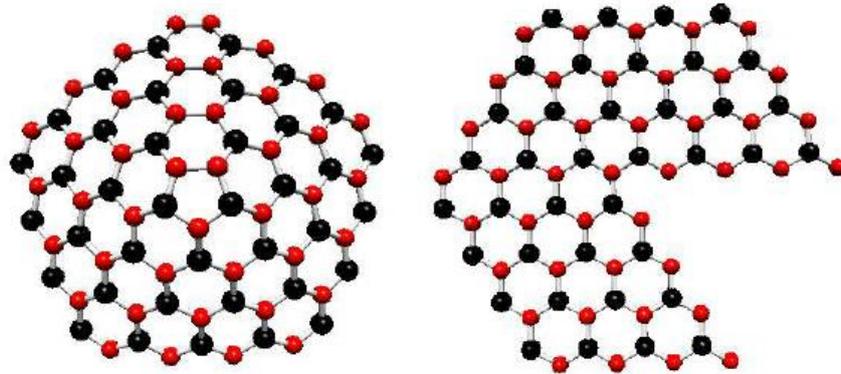


Figura 04 – Efeito de um setor removido de 60° na folha de grafeno
 FONTE: Cortijo e Vezmediano, 2007 [CORTIJO, A.; VEZMEDIANO, M. 2007].

Valores de α maiores que zero e menores que um, indicam que foi removido um setor da folha para originar um defeito. Já valores de α maiores do que um, indicam que inserimos um setor na folha de grafeno, o que também gera um defeito. Como estamos interessados apenas em defeitos surgidos através da remoção de setores, não mais citaremos as deslocções, ou seja, vamos trabalhar apenas com as desclinações.

Ao estudar a relatividade restrita einsteiniana, aprende-se que quando se transforma coordenadas espaciais e temporais para sistemas em movimento, tais coordenadas são alteradas. Mas outra grandeza, dada pelo produto escalar do deslocamento consigo mesmo é invariante com relação a mudanças de referenciais. Seja A um evento que ocorre em $(X_A^0, X_A^1, X_A^2, X_A^3)$ e B um evento que ocorrem em $(X_B^0, X_B^1, X_B^2, X_B^3)$, a diferença entre tais eventos será o chamado quadri vetor deslocamento, escrito em linguagem relativística como:

$$\Delta X^\mu = X_A^\mu - X_B^\mu \quad (3)$$

Desta maneira, o produto escalar de ΔX^μ consigo mesmo será:

$$I = \Delta X^\mu \Delta X_\mu = -(\Delta X^0)^2 + (\Delta X^1)^2 + (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2 \quad (4)$$

No produto escalar da relatividade restrita, chamado intervalo “I” entre dois eventos, as coordenadas espaciais têm sinais opostos aos sinais das coordenadas temporais, esta é a razão

da convenção de sinais da equação (1), que tratamos não por um intervalo entre eventos, mas como uma métrica que descreve um defeito topológico na folha cônica de grafeno (embora também seja um produto escalar de deslocamentos: $ds^2 = \langle d\vec{s}|d\vec{s} \rangle$). O produto escalar no espaço Euclidiano é invariante com relação a rotações, já no espaço-tempo de Minkowski, o produto escalar é invariante sob as transformações de Lorentz [GRIFFITHS, D. J. 2011]. A notação de índices sobrescritos e subscritos na eq. (4) surge da não compatibilidade dos sinais das coordenadas espaciais e temporais, sendo de fundamental importância na matemática tensorial necessária tanto para a teoria da relatividade quanto para o estudo de defeitos topológicos em sólidos. Assim, índices superiores (ΔX^μ) são designados para vetores contravariantes e índices inferiores (ΔX_μ) designam vetores covariantes. Por convenção, índices gregos (μ, γ, ν, \dots) são usados para referenciais de espaço-tempo, enquanto os índices ditos latinos (a, b, c, ...) são usados para referenciais locais, que são sistemas de referenciais inerciais que se transformam por Lorentz localmente, ou seja, em algum ponto do espaço tempo.

A equação (1) pode ser escrita através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou da métrica de Minkowski $\eta_{ab}(+, -, -)$:

$$ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} \theta^a \theta^b \quad (5)$$

Com θ^a e θ^b sendo referenciais locais.

Podendo ser reescrita em uma base não coordenada (local):

$$ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 \quad (6)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \theta^0 &= dt; \\ \theta^1 &= \cos(\phi)d\rho - \alpha\rho \text{sen}(\phi)d\phi; \\ \theta^2 &= \text{sen}(\phi)d\rho + \alpha\rho \cos(\phi)d\phi. \end{aligned} \quad (7)$$

Quando adentramos o universo da relatividade geral, é razoável assumir que a relatividade restrita seja válida localmente, quando isto ocorre, temos o princípio da equivalência, que nos diz que é sempre possível definir um referencial local em qualquer ponto do espaço-tempo [CAVALCANTE, E. 2015]. Os referenciais locais podem ser relacionados aos referenciais de Minkowski através do objeto matemático nomeado tetrada (e_μ^a):

$$\theta^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (8)$$

Essa notação vem a ser importante porque facilita o cálculo necessário para encontrar as conexões de forma diferencial, também chamadas de conexões afins ou conexões de 1-forma, que podem ser definidas, para o estudo dos cones de grafeno, como a regra que descreve como mover um vetor ao longo de uma curva na estrutura do cone sem mudar sua direção. Elas são obtidas da primeira equação de estrutura de Maurer-Cartan:

$$d\theta^a + \omega_b^a \wedge \theta^b = 0 \quad (9)$$

Onde “ \wedge ” é uma operação matemática conhecida como produto cunha ou produto exterior, sendo, assim como o produto vetorial, anticomutativo, ou seja, $u \wedge v = -(v \wedge u)$ [LIMA, E. L. 2010].

Como as conexões de 1-forma podem ser reescritas através da relação $\omega_b^a = \omega_{\mu\nu}^a dx^\mu$:

$$d\theta^a + \omega_{\mu\nu}^a e_\nu^b dx^\mu \wedge dx^\nu = 0 \quad (10)$$

Ou, reorganizando:

$$\omega_{\mu\nu}^a e_\nu^b dx^\nu \wedge dx^\mu = d\theta^a \quad (11)$$

Usando a expressão (8), montando a matriz tetrádica e_μ^a cujas componentes são dadas pelo conjunto de equações (7), pode-se calcular θ^0 , θ^1 e θ^2 . Derivando os resultados obtidos deste cálculo, temos:

$$\begin{aligned} d\theta^0 &= 0; \\ d\theta^1 &= \text{sen}(\phi)(1 - \alpha)d\rho \wedge d\phi; \\ d\theta^2 &= \text{cos}(\phi)(\alpha - 1)d\rho \wedge d\phi. \end{aligned} \quad (12)$$

Que podem ser inseridos na equação de Maurer-Cartan (11), nos dando duas conexões diferenciais (a componente temporal é nula), $\omega_{\phi 2}^1$ e $\omega_{\phi 1}^2$:

$$\begin{aligned} \text{Para } \theta^1: \quad \omega_{\phi 2}^1 e_\rho^2 dx^\rho \wedge dx^\phi &= d\theta^1 \\ \omega_{\phi 2}^1 \text{sen}(\phi) d\rho \wedge d\phi &= \text{sen}(\phi)(1 - \alpha)d\rho \wedge d\phi; \\ \omega_{\phi 2}^1 &= 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{Para } \theta^2: \quad \omega_{\phi 1}^2 e_\rho^1 dx^\rho \wedge dx^\phi = d\theta^2$$

$$\begin{aligned}\omega_{\phi_1}^2 \cos(\phi) d\rho \wedge d\phi &= \cos(\phi)(\alpha - 1) d\rho \wedge d\phi \\ \omega_{\phi_1}^2 &= -(1 - \alpha).\end{aligned}\quad (14)$$

Então, observa-se que $\omega_{\phi_1}^2 = -\omega_{\phi_2}^1$.

Encontrar essas conexões diferenciais é de fundamental importância, pois com elas calcularemos as conexões spinoriais que estão relacionadas às transformações de holonomia, que, por sua vez, estão intimamente ligadas à computação quântica holonômica. Holonomias são processos que atribuem a cada caminho fechado uma transformação linear que mede a rotação de um vetor quando transportado paralelamente (aqui surgem às conexões diferenciais) ao longo de uma curva. Ao estudar os cones de grafeno, a holonomia será a matriz responsável pelo transporte paralelo de vetores, tensores e spinores em caminhos fechados [CARVALHO, A.M. 2003]. A holonomia é definida pela seguinte expressão [BEZERRA, V.B. 1990]:

$$U(C) = \mathcal{P} \exp(-\oint \Gamma_\mu(x) dx^\mu) \quad (15)$$

Com $\Gamma_\mu(x)$ sendo as conexões spinoriais do sistema.

Com base na descrição de Lammert e Crespi [LAMMERT, P.E.; CRESPI, V.H. 2000], se pode notar que a função de onda que é solução de (15) é descrita por um spinor, uma grandeza não existente na mecânica quântica de Schrödinger. Para obter as conexões spinoriais – que descrevem o transporte paralelo de um spinor ao redor da curvatura – trabalhamos com a equação de Dirac num espaço-tempo curvo, pois na mecânica quântica (relativística) de Dirac, o spin surge naturalmente. Entretanto, neste caso, a curvatura na estrutura cônica é causada pelo defeito topológico. Partindo do pressuposto que temos um cone de grafeno resultante de uma desclinação, que pode ser descrito pela métrica dada por (1) – que também caracteriza, no estudo do universo em grandes escalas, a geometria de uma corda cósmica (utilizada em candidatas à “teoria de tudo” como o a teoria das cordas e a gravitação quântica em loop) [BAKKE, K.; FURTADO C.; SERGEENKOV, S. 2009] – as conexões spinoriais são dadas por [NAKAHARA, M. 1998]:

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{8} \omega_\mu^{ab} [\sigma_a, \sigma_b] \quad (16)$$

Ou, utilizando as conexões diferenciais já obtidas:

$$\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{8} 2\omega_\mu^{12} [\sigma_1, \sigma_2] \quad (17)$$

Com $[\sigma_1, \sigma_2]$ sendo o comutador das matrizes de Pauli. Resolvendo:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2i\sigma_3 \quad (18)$$

Substituindo os resultados das expressões (14) e (18) em (17), temos para o valor da conexão spinorial:

$$\Gamma_\mu(x) = -i \frac{(\alpha-1)}{2} \sigma_3. \quad (19)$$

4 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA NO CONE

Estamos interessados na ligação entre os cones de grafeno e a computação quântica. Essa ligação reside na resolução da equação de holonomia (15) que nos dará as fases de holonomia (ou fases geométricas), que como observado na seção anterior, são escritas em termos das conexões spinoriais dada por (19). Substituindo os valores em (15), resolvendo uma integral simples, obtém-se a seguinte solução:

$$U(C) = \cos [(\alpha - 1)\pi] + i\sigma_3 \text{sen}[(\alpha - 1)\pi] \quad (20)$$

Sabemos, de (2), que $\alpha = 1 - \frac{n_\Omega}{6}$, logo $\alpha - 1 = -\frac{n_\Omega}{6}$, e a equação (20) torna-se:

$$U(C) = \cos\left(-\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) + i\sigma_3 \text{sen}\left(-\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) \quad (21)$$

Como o cosseno é uma função par e o seno é uma função ímpar, podemos ainda escrever a holonomia ao longo de um caminho fechado C no cone de grafeno como:

$$U(C) = \cos\left(\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) - i\sigma_3 \text{sen}\left(\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) \quad (22)$$

Ou, em forma matricial:

$$U(C) = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{n_\Omega}{6}\pi\right) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Esta equação nos dá a fase quântica adquirida pela função de onda quando transportada ao redor do cone gráfico. Ela nos diz que a fase geométrica $U(C)$ gera uma matriz que muda as componentes do vetor de estado (que descreve o estado quântico do sistema):

$$\psi' = U(C)\psi \quad (24)$$

Essa mudança nas componentes é à base da computação quântica holonômica.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho vimos o que é o grafeno e como se deu a sua descoberta experimental, citando as principais propriedades surgidas da bidimensionalidade do material. Focamos nosso estudo nos cones de grafeno, pois eles apresentam características que os tornam elegíveis para a utilização na computação quântica holonômica. Posteriormente, depois de uma pequena e importante jornada matemática, chegamos à equação (24), que nos diz que as componentes do vetor de estado da função de onda original que é transportada ao redor do cone, são mudadas, tornando possível o uso da computação quântica holonômica no cone de grafeno.

Existem, essencialmente, dois tipos de computação quântica holonômica. Aquela que troca os pontos de Fermi - que são as componentes do dubleto. E a que não troca. E aqui notamos que nossa fase não troca os pontos de Fermi. O que deixa nosso sistema menos atraente para a aplicação de portas lógicas. No entanto, possibilita uma adição de fase as componentes do dubleto em termos do número de setores removidos ao redor do cone.

Veja que a equação (23) já é suficiente para a construção de uma porta lógica de 1-qubit. Isto devido ao fato de que é possível uma matriz 2×2 representar portas quânticas que atuam sobre um bit quântico; sem especificar o caminho percorrido pelo elétron. Contudo, o modelo pode ser expandido se considerarmos também os efeitos de rotação no espaço de fase. Ou ainda, a translação do spinor numa rede de multicones, respeitando o teorema de Bloch. Situações essas que entram como perspectivas para trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. L. **Computação Quântica: Fundamentos Físicos e Perspectivos**. UFLA (2003).

BAKKE, K.; FURTADO C.; SERGEENKOV, S. **Holonomic quantum computation associated with a defect structure of conical graphene**. Europhys. Lett. 87. 30002 (2009).

BENNETT, C.H.; BERNSTEIN, E.; BRASSARD, G. et al. **Strengths and Weaknesses of Quantum Computing**. SIAM Journal on Computing. Vol. 26, No. 5 : p.1510-1523 (1997).

BEZERRA, V.B. **On Some Classical and Quantum Effects Due to Gravitational Fields.** Ann. Phys. 203. 392 (1990).

BOEHM, H. P.; SETTON, R.; STUMPP, E. **Nomenclature and terminology of graphite intercalation compounds.** Pure and Applied Chemistry. 66 (1994).

CARDENAS, S. **Miniaturized sample preparation based on carbon nanostructures.** Sample Perp. 2014; 2: 21–30 (2014).

CAROLLO, A.C.M.; PACHOS, J.K. **Geometric Phases and Criticality in Spin-Chain Systems.** Phys. Rev. Lett. 95. 157203 (2005).

CARVALHO, A.M. **Transformações de Holonomia em Cordas Negras e Espaços Cônicos.** 2003. 145. Trabalho de conclusão de curso (tese). Curso de Física, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE. p.90-98 (2003).

CAVALCANTE, E. **Aspectos Geométricos da Molécula de Fulereo Em Referenciais Não-Inerciais.** 2015. 106. Trabalho de conclusão de curso (tese). Curso de Física, Universidade Federal da Paraíba, UFPB. p.16-38 (2015).

CORTIJO, A.; VEZMEDIANO, M. **Effects of topological defects and local curvature on the electronic properties of planar graphene.** Nuclear phys. B. p. 293-308. (2007).

FISCHER, A.; GRODZINSKY, F. **The Anatomy of Programming Languages.** Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. p. 3. (1993).

FURTADO, C.; MORAES, F.; CARVALHO, A.M. **Geometric phases in graphitic cones.** Phys. Lett. A. 372. 5368-5371 (2008).

GEIM, A. K.; KIM, P. **Carbon Wonderland.** Sci. Am., 90-97 (2008).

GEIM, A.K.; MACDONALD, A.H. **Graphene: Exploring carbon flatland.** Phys. Today. 60, 8, 35 (2007).

GRIFFITHS, D. J. **ELETRODINÂMICA.** Pearson, 3ª ed. p.353-355 (2011).

IJIMA, S.; ICHIHASHI, T.; ANDO, Y. **Pentagons, heptagons and negative curvature in graphite microtube growth.** Nature, 356, 776-778. (1992).

KATANAEV, M.O.; VOLOVICH, I.V. **Theory of defects in solids and three-dimensional gravity.** Ann. Phys. (N.Y.) 216. 1 (1992).

KATSNELSON, M. I.; NOVOSELOV, K. S.; GEIM, A. K. **Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene.** Nat. Phys. 2 (2006) 620.

KEMPF, K. **Historical Monograph: Electronic Computers Within the Ordnance Corps.** cap. 2, p. 19-39. (1961).

KHORASANI, S.; KOOTTANDAVIDA A. **Nonlinear graphene quantum capacitors for electro-optics**. npj 2D Materials and Applications. N°7, (2017).

KLEMAN, M. **Points, Lignes, Parois: dans les fluides anisotropes et les solides cristallins**. Editions de Physique, France (1977).

LAMMERT, P.E.; CRESPI, V.H. **Topological Phases in Graphitic Cones**. Phys. Rev. Lett. 85. 5190 (2000).

LANDAU, L. D. **Zue Theorie der phasenunwandlugen II**. Phys. Z. Sowjetunion 11, 26-35 (1937).

LEUENBERGER, M.N.; LOSS, D. **Quantum computing in molecular magnets**. Nature. Vol. 410, p.789–793 (2001).

LIMA, E. L. **Cálculo Tensorial**. Impa, 2ª ed. 248 (2010).

LUZ, A.M. Grafeno. **Infoescola, 2017**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/compostos-quimicos/grafeno/>> Acesso em: 01, out. (2019).

NAIR, R. R.; et. al., **Fine structure constant defines visual transparency of graphene**. Science 320. 1308. (2008).

NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics**. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2ª ed. 584. (1998).

NOVOSELOV, K. S.; et. al., **Electric Field Effect In Atomically Thin Carbon Films**. Science 306. 666-669 (2004).

PACHOS, J.; ZANARDI P.; RASETTI, M. **Non-Abelian Berry connections for quantum computation**. Phys. Rev. A 61. 010305 (2000).

PEIERLS, R. E. **Quelques proprietes typiques des corpses solides**. Ann. I. H. Poincare 5, 177-222 (1935).

SANTOS, L. Computação Quântica – Desvendando o futuro dos computadores. **Imasters, 2018**. Disponível em: <<https://imasters.com.br/desenvolvimento/computacao-quantica-desvendando-o-futuro-dos-computadores>> Acesso em: 30, set. (2019).

WALLACE, P. R. **The band theory of graphite**. Phys. Rev. 71, 622-634 (1947).

WEBBER, J.R.; KOEHL, W.F.; VARLEY, J.B. et al. **Quantum computing with defects**. PNAS. 107 (19) 8513-8518. (2010).

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e a minha irmã por todo o apoio durante minha trajetória acadêmica, em todos os momentos dessa jornada e aos meus amigos que sempre me incentivaram, nunca me deixando pensar em desistir.

Agradeço aos professores, todos os que de alguma maneira deixaram marcas com seus métodos de ensino, os quais levarei sempre comigo, na construção do profissional que serei no futuro. Cada professor, nesses últimos cinco anos teve um papel importante para minha formação.

Agradeço também aos “velhos professores”, aqueles da educação básica, por me motivarem a continuar estudando, sonhando sempre com um futuro melhor.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Everton Cavalcante, pelas conversas que tivemos dentro e fora da sala de aula sobre a natureza (o foco do nosso estudo como físicos), por ter me proporcionado a chance de ser aluno bolsista do CNPq por quase dois anos de graduação no projeto de iniciação científica-PIBIC. Durante este período, aprendi um pouco sobre a mecânica quântica, focando na Física da matéria condensada. O pouco que estudei neste curto período de tempo me fascinou, sendo este o meu primeiro contato com a pesquisa científica. Com essa base de pesquisa, fiz meu Trabalho de Conclusão de Curso, que vocês estão prestes a ler. Novamente, obrigado por ser além de um excelente professor, um mentor dedicado.

Muito obrigado aos meus amigos e colegas de curso - que não citarei nomes para não esquecer de ninguém - por ter compartilhado comigo cinco anos de descobrimentos, surpresas e as mais variadas emoções que se pode sentir nessa viagem extremamente louca e divertida que é estudar Física.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao Universo, que por ser tão fascinante, me faz querer estudar e descobrir seus mistérios, mesmo que às vezes eu seja mais preguiçoso do que gostaria.

Obrigado a todos!