UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

UM BREVE ESTUDO ACERCA DOS POLINÔMIOS

CLEDENILDO LEANDRO DE SOUSA

PATOS
2019

CLEDENILDO LEANDRO DE SOUSA

UM BREVE ESTUDO ACERCA DOS POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso, na modalidade Monografia, apresentado ao Corpo Docente do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – CCEA – UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura

Orientador: Prof. Me. José Elias da Silva

PATOS
2019

S725b Sousa, Cledenildo Leandro de.

Um breve estudo acerca dos polinômios [manuscrito] / Cledenildo Leandro de Sousa. - 2019.

34 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas , 2019.

"Orientação : Prof. Me. José Elias da Silva , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Números complexos. 2. Polinômios. 3. Equações polinomiais. I. Título

21. ed. CDD 515.55

Elaborada por José E. da S. Eugênio - CRB - 15/591 BSC7/UEPB

CLEDENILDO LEANDRO DE SOUSA

UM BREVE ESTUDO ACERCA DOS POLINÔMIOS

Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia) apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em 02/12/2019.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Me. José Elias da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____
Prof. Me. José Ginaldo de Souza Farias
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____
Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Aos meus filhos Guilherme Leandro de Sousa e João Pedro Leandro de Sousa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à Deus.

Aos meus pais, por todo o apoio dado durante toda essa jornada de estudos, sem eles certamente não teria chegado a esse momento tão importante para todos nós.

Aos meus filhos Guilherme Leandro de sousa e João Pedro Leandro de Sousa. Tendo a certeza que as minhas atitudes, meu comportamento diante de qualquer desafio, dos mais simples aos mais difíceis, estão sendo observados e compilados nos mínimos detalhes por eles, e isso, tem implicação direta na formação de cada um como ser agente e modelador de seu próprio futuro, luto a todo momento sempre mostrando, que a pesar das dificuldades, dos imprevistos ou qualquer que seja a força contrária a meus objetivos, podemos ir longe, vencer qualquer obstáculo, basta nunca desistir.

A minha esposa e companheira de todas às horas Lenilda Maria da Silva, apoiadora e incentivadora, importantíssima nessa minha caminhada.

Aos meus irmãos Cledeildo Leandro de Sousa, Kelis Leandro de Sousa, Claudia Thaysa Leandro de sousa, José Lima de Sousa, Abel lima de Sousa, Ysabel Cristina Lima de Sousa, pelo apoio, incentivo, e por estar sempre do meu lado nos momentos difíceis.

Ao orientador José Elias, pela orientação, paciência e amizade.

Aos meus colegas de graduação, com eles formei, com certeza, uma nova família. Obrigado a todos por tantos momentos e situações compartilhadas.

Em fim, a todos, que de uma forma direta ou indireta contribuíram para o meu sucesso.

Muito obrigado!

Sem sonhos, a vida não tem brilho. Sem metas,os sonhos não têm alicerces. Sem prioridades, os sonhos não se tornam reais. Sonhe, trace metas, estabeleça prioridades e corra riscos para executar seus sonhos.

(Augusto Cury)

RESUMO

É fato que, muitos alunos chegam ao curso de licenciatura em matemática, inclusive aqueles que tinham excelentes notas no ensino básico, com um défite significativo em relação a conceitos, propriedades e operações importantes nas mais diversas áreas da matemática. A partir disso, o presente trabalho foi voltado para sanar algumas indagações acerca de polinômios de uma variável complexa ou expressões algébricas. Serão apresentados conceitos, propriedades e operações polinomiais, com ênfase na divisão de polinômios. Em muitas das disciplinas acadêmicas, como por exemplo cálculo diferencial e integral, nos deparamos com situações, onde devemos manipular de alguma forma algum tipo de polinômio.

Então, surgem, entre outras, as seguintes perguntas: como se faz a soma de dois polinômios? e a subtração? a multiplicação?, a divisão, essa certamente, é a operação que traz maior dificuldade. Pois bem, nesse trabalho, o graduando terá as respostas para essas perguntas.

Palavras-chave: Números complexos. Polinômios de uma variável complexa. Equações polinomiais..

ABSTRACT

It is a fact that many students come to the mathematics degree course, including those who had excellent grades in elementary school, with a significant shortfall in important concepts, properties and operations in the most diverse areas of mathematics. From this, the present work was aimed at solving some questions about polynomials of a complex variable or algebraic expressions. Polynomial concepts, properties and operations will be presented, with emphasis on the division of polynomials. In many academic disciplines, such as differential and integral calculus, we come across situations where we must somehow manipulate some kind of polynomial.

Then the following questions arise, among others: How do two polynomials add up? and the subtraction? multiplication ?, division, this is certainly the operation that brings the greatest difficulty. Well, in this work, the student will have the answers to these questions.

Keywords:Complex numbers. complex variable polynomials. equations polynomials.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

UM POUCO DA HISTÓRIA

No decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de grandes matemáticos como Nicoló Fontana (Tartáglia), Ludovico Ferrari, Isaac Newton dentre muitos outros. Parte muito interessante dessa história envolve as equações polinomiais de 4º grau. Antigamente era comum disputas entre os matemáticos da época, nas quais se trocavam desafios. Numa dessas ocasiões um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu Gregori Cardano (grande escritor" de matemática da época) a uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Após várias tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para a solução das equações de grau 4, que foi publicado por Cardano no maior compendio algébrico (matemático) da época, Ars Magna. Há um intrigante episódio sobre grandes e, em vida, não reconhecidos matemáticos: Niels Henrik Abel e Évariste Galois. Ambos são grandes matemáticos de vida trágica, o primeiro aos 24 anos morreu de tuberculose, dois dias antes de chegar uma carta do amigo garantindo o emprego, tão esperado, em Berlim. O segundo em um duelo, travado por conta de uma coquette, morreu aos 20 anos após ter realizado grandes e marcantes contribuições à Teoria dos Grupos (nome primeiramente usado por ele). Desconhecidos um do outro desenvolveram raciocínio idêntico para provar a impossibilidade de um método geral para a resolução das equações polinomiais de grau maior que 4.

O ENSINO DE POLINÔMIOS

O estudo de matemática nos ensinos fundamental e médio é baseado na aritmética, geometria e álgebra. Polinômio, como conteúdo basicamente algébrico, é trabalhado na 6ªe7ª séries do ensino fundamental e muito utilizado a partir daí envolvendo outros conteúdos nas séries seguintes. Na verdade trata-se de um conteúdo onipresente em matemática, por isso é de suma importância que os alunos o dominem com segurança. Hoje em dia, muitas vezes, são deixadas de lado partes essenciais do estudo de polinômios, como o pleno domínio da fatoração, raízes racionais, somas e produtos de raízes, gráficos e polinômios irredutíveis. É comprovada a falta de compreensão do que vem a ser encontrar raízes de uma equação polinomial, além do abuso de fórmulas como a de Bháskara como relata Coxford. Os próprios livros didáticos expressam maior ênfase no processo/método que no conceito (utilizando exercícios maçantes e repetitivos), o que não propõe o PCN (Parâmetros curriculares nacionais) que sugere a ênfase no conceito e em sua importância e não em gravar métodos de resolução.

Na resolução de problemas matemáticos, é muito comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão de enunciado nos levam a formular expressões que permitam depois a resolução do problema, por meio de uma equação oriunda das expressões obtidas.

Imagine uma região retangular de dimensões x e $x + 3$, cujo perímetro é indicado pela expressão:

$$2x + 2(x + 3) \text{ ou } 4x + 6$$

E cuja área é indicada por:

$$x(x + 3) \text{ ou } x^2 + 3x$$

imagine agora um cubo de arestas x, cuja área é indicada por:

$$6x^2$$

E cujo volume é indicado por:

$$x^3$$

todas essas expressões são chamadas expressões polinomiais ou polinômios,

Os primeiros registros e conclusões sobre as relações existentes nas equações de primeiro e segundo grau foram apresentadas por Al-Khowarizmi, foi ele quem apresentou em suas obras o significado da palavra álgebra, que é " trocar de membros" no termo de uma equação. Quase quinhentos anos depois, grandes matemáticos como Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia e Ludovico Ferrari iniciaram os estudos sobre as equações de terceiro e quarto graus. Alguns matemáticos deram grandes contribuições com demonstrações de extrema importância, que são usadas até hoje.

2 CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Como nesse trabalho, apresentaremos o conjunto de polinômios com coeficientes complexos, se faz necessário apresentarmos, mesmo que de forma breve, as regras operatórias, os conceitos de módulo ou norma e de conjugado além de algumas propriedades que envolvem o conjunto dos números complexos.

Quando estudamos o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, percebemos a necessidade de novos números ao tentarmos efetuar subrações tais como $3 - 5$. Foi criado então o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros. Esse novo conjunto também se mostrou insuficiente para efetuar divisões como $3 : 2$. A partir dessa necessidade foi contruido o conjuto $\mathbb{Q}$, e, a seguir, para superar outro obstáculo, costruiu-se o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

Estamos mais uma vez em um ponto crítico. O conjunto dos reias não é suficiente para efetuarmos a radiciação, pois em $\mathbb{R}$ não existem raízes quadradas, quartas, sextas, etc, de números negativos. Para que esses resusltados sejam possíveis, devemos ampliar mais uma vez o conceito de número.

A unidade imaginária

Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não real, denominado **unidade imaginária**, que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

2.1 Número Complexo

Definição 2.1. Número complexo é todo número que pode ser escrito na forma $a + bi$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária.

A expressão $a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é denominada forma algébrica de um número complexo em que **a** e **b** são respectivamente parte real e parte imaginária do número complexo.

Número complexo real

Um número complexo $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, é **real** se, e somente se, $b = 0$

Número complexo imaginário

Um número complexo $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, é **imaginário** se, e somente se, $b \neq 0$

Número complexo imaginário puro

Um número complexo $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, é **imaginário puro** se, e somente se, $a = 0$ e $b \neq 0$

Igualdade entre números complexos

Sendo $a + bi$ e $c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, define-se:

$$a + bi = c + di \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = & c \\ b & = & d \end{cases}$$

2.2 Números complexos conjugados

Definição 2.2. O conjugado de um número complexo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ é o número $\overline{z}$ (lê-se "‘conjugado de z") tal que $\overline{z} = a - bi$.

Exemplo 2.1. $1) z = 2 + 5i \Longrightarrow \overline{z} = 2 - 5i$
$2) z = -1 - 3i \longrightarrow \overline{z} = -1 + 3i$
$3) z = -3i \longrightarrow \overline{z} = +3i$

2.3 Adição de números complexos

Dados dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, o número $z = z_1 + z_2$ será o número complexo, cuja parte real é a soma das partes reias das parcelas e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginária das parcelas. Isto é,
$z = (a + bi) + (c + di)$
$z = (a + c) + i(c + d)$

Exemplo 2.2. Sejam $z = 2 + i$ e $w = 1 + i$, números complexos;
$z + w$ = $(2 + i) + (1 + i)$ = $3 + 2i$

Propriedades da adição de números complexos

Associativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$$

Demonstração:
Sendo $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \ e \ z_3 = e + fi, \ com \ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \\
&= [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) \\
&= [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i \\
&= [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i \\
&= (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i] \\
&= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

■

Comutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2, \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Sendo $z_1 = a + bi\ e\ z_2 = c + di,\ com\ a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} z_2 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i \\ &= (c + di) + (a + bi) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

■

Elemento neutro

Existe $e, e \in \mathbb{C}$, tal que $z + e = e + z, \forall z \in \mathbb{C}$

Demonstração: Fazendo $z = a + bi$, provemos que existe $e = x + yi$ tal que $z + e = z$.

$$(a + bi) + (x + yi) = a + bi \Longleftrightarrow a + x = a\ e\ b + y = b \Longleftrightarrow x = 0\ e\ y = 0$$

Portanto, existe $e = 0 + 0i$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer complexo z dá como resultado o próprio z.

■

Elemento oposto

Para cada número complexo Z, existe o número complexo r tal que $z + r = w + r = 0 + 0i$
Demonstração: Fazendo $z = a + bi$, provemos que existe $r = x + yi$, tal que $z + r = e$
temos portanto:

$$a + bi + x + yi = 0 + 0i \Longleftrightarrow a + x = 0 \Longleftrightarrow x = -a\ e\ b + y = 0 \Longleftrightarrow y = -b$$

Logo, para todo complexo $z = a + bi$ existe o complexo $r = -a - bi$, $z + r = w + r = 0 + 0i$.

Os números $z = a + bi$ e $r = -a - bi$ são chamados **números opostos**.

■

Subtração de números complexos

Dados dois números complexos $z_1 = (a_1 + ib_1)$ e $z_2 = (a_2 + b_2)$, a subtração de $z_1 - z_2 =\ \ z_1 + (-z_2)$, ou seja:

$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1) + (-a_2 - ib_2)$

Exemplo 2.3. Dados os números complexos $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 + i$ então, a diferença $z_1 - z_2$ será dada por:

$z_1 - z_2 = (3 + i) - (1 + i) = (3 + i) + (-1 - i) = 2 + 0i = 2$

2.4 Multiplicação de números complexos

Definição 2.3. Sendo $a + bi$ e $c + di$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, define-se:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Propriedades da adição de números complexos

Associativa

$$(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3), \forall z_1, z_2, z_3, \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Sendo $z_1 = a + bi, z_2 = c + di\ e\ z_3 = e + fi,\ com\ a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a + bi) \cdot (c + di)] \cdot (e + fi) \\
&= [(ac - bd) + (ad + bc)i \cdot (e + fi) \\
&= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \\
&= [ace - bde - adf - bcf] + [acf - bdf + ade + bce]i \\
&= [a(ce - bd) - b(df + cf)] + [a(de + cf) + b(df + ce)]i \\
&= (a + bi) \cdot [(ce - df) + (cf + de)]i \\
&= (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] \\
&= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

comutativa

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Sendo $z_1 = a + bi\ e\ z_2 = c + di,\ com\ a, b, c, d, \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i \\
&= (ca - db) + (da + cb)i \\
&= (c + di) \cdot (a + bi) \\
&= z_2 \cdot z_1
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Elemento neutro

$$\text{Existe } e, e \in \mathbb{C}, \text{tal que } z + e = e + z, \forall z \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Fazendo $z = a + bi$, provemos que existe $e = x + yi$ tal que $z \cdot e = z$.

$$(a+bi)\cdot(x+yi) = (a+bi) \iff (ax-by)+(ay+bx)i = (a+bi) \begin{cases} ax - by = a & \iff & x = 1\ e\ y = 0 \\ ay + bx = b & \iff & x = 1\ e\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto existe $e = 1 + 0i$, chamado elemento neutro da multiplicação, que multiplicado por qualquer complexo z dá como resultado o próprio z.

$\blacksquare$

Elemento inverso

Para cada número complexo z, $z \neq 0 + 0i$, existe o número complexo w tal que

$$z \cdot w = w \cdot z = 1 + 0i$$

Demonstração: Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, Vamos mostrar que existe o número complexo $w = x + yi \in \mathbb{C}$, $x, y, \in \mathbb{R}$ tal que $z \cdot w = w \cdot z = 1 + 0i$

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = 1 + 0i \Longleftrightarrow (ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i \Longleftrightarrow \begin{cases} ax - by &= 1 \\ ay + bx &= 0 \end{cases}$$

Observe que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

pois, por hipótese, temos que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Assim, pelo teorema de Cramer, esse um teorema em álgebra linear, que dá a solução de um sistema de equações lineares em termos de determinantes, concluímos que o sistema nas incógnitas x e y, é possível e determinado.

Logo, existe um único complexo $w = x + yi$ tal que $z \cdot w = 1 + 0i$

Como já foi provado a propriedade comutativa, temos que $z \cdot w = w \cdot z = 1 + 0i$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$x = \frac{1 + by}{a} \tag{2.1}$$

substituindo na segunda equação temos:

$$\frac{b(1 + by)}{a} + ay = \frac{b + b^2 y}{a} + ay = y(b^2 + a) = -b$$

$$y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \tag{2.2}$$

substituindo (2.2) em , (2.1) obtemos:

$x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$

Portanto, $w = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$.

∎

2.5 Módulo ou norma de um número complexo

Definição 2.4. O módulo de um número complexo $z = x + yi$, $a, b \in \mathbb{R}$ é a distância do ponto (x, y) ao ponto $(0, 0)$.

$$z = x + yi \Longrightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplo 2.4. $z = 2 + 3i \rightarrow z = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$z = 3i \rightarrow z = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$

Teorema 2.1. *Para todo*$z \in C$ *temos:*

$i)\ \ z + \overline{z} = 2 \times Re(z)$

$ii)\ \ z - \overline{z} = 2 \times Im(z)$

$iii)\ \ z = \overline{z} \leftrightarrow z \in R$

3 POLINÔMIOS DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

3.1 Função polinomial

Comecemos lembrando que chamamos de polinômio complexo de uma variável complexa a toda função $P : A \longrightarrow \mathbb{C}$, em que o domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Assim, a menos que se mencione o contrário, sempre que considerarmos uma função $P : A \longrightarrow \mathbb{C}$, admitiremos implicitamente que $A \subset \mathbb{C}$. Aqui estamos interessados particularmente nas funções polinomiais complexa de uma variável complexa.

Definição 3.1. Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, ..., a_n)$, consideremos a função:

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

dada por

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \cdots + a_1 z + a_0,$$

onde

$$\{n, n-1, n-2, \cdots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$$

A função f é denominada função polinomial complexa de variável complexa.

• A expressão $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ é denominada polinômio complexo de variável complexa.

• A sequência de números $a_0, a_1, ..., a_n$ são denominados coeficiente do polinômio.

• As parcelas $a_0, a_1 z, ..., a_n z^n$,são chamados termos do polinômio.

• z é a variável do polinômio e a_0 é o termo independente da variável do polinômio.

Partindo da definição, as expressões que seguem são polinômios. Logo, podemos identificar suas sequências de números complexos ou coeficientes.

$P(x) = 1 - z + 2z^2 + 4z^3$ onde, $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = 4$
$H(x) = 3 \ + \ 4z^7$ onde, $a_0 = 3, \ a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0, \ a_7 = 4$
$G(x) = 5z\,\breve{}\,3z^3$ onde $a_0 = 0 \ a_1 = 1, \ a_2 = 0, \ a_3 = -3$

3.2 Polinômio Identicamente Nulo

Definição 3.2. O polinômio $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ na variável z é identicamente nulo se, e somente se ,

$$a_j = 0, \forall \ j \in \mathbb{N} \ \text{e} \ 0 \leq j \leq n$$

Indicamos que um polinômio $P(z)$ é identicamente nulo por $P(z) \equiv 0$, caso contrário $P(z) \not\equiv 0$.

3.3 Identidade de polinômios

Definição 3.3. Dizemos que dois polinômios P e D são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo z complexo. Em símbolos;

$$P = D \iff P(z) = D(z), \forall\ z \in \mathbb{C},$$

ou seja, os polinômios $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ e $D(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_0$ são identicos se, e somente se,

$$a_j = b_j, \forall j \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 0 \leq j \leq n$$

Teorema 3.1. *Dois polinômios P e D são iguais se, e somente se, os coeficientes de P e D forem, ordenadamente iguais. Em símbolos;*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 x^2 + ... + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

$$D(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$$

Temos:
$P = D \iff a_i = b_i, \ \forall \ i \ \ \in \{0, 1, 2, ..., n\}$

Demonstração 1. Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$a_i = b_i \iff a_i - b_i = 0 \iff$$
$$\iff (a_i - b_i) z^i = 0 \iff$$
$$\iff \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) z^i = 0 \iff$$
$$\iff \sum_{i=0}^{n} a_i z^i - \sum_{i=0}^{n} b_i z^i = 0 \iff$$
$$\iff \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i \iff$$
$$P(z) = D(z)$$

3.4 Operações com polinômios

Vamos nessa parte, apresentar as operações de adição, subtração e multiplicação para expressões algébricas ou polinômios, além da multiplicação de escalar por polinômio. Em seguida, estudaremos mais detalhadamente a divisão de polinômios.

3.4.1 Adição de polinômios

A soma de dois ou mais polinômios é feite a partir de soma coeficientes dos monômios de mesma parte literal. Caso aconteça de termos a soma de dois polinômios de graus diferentes ou em que um deles falte monômio (termos da soma) correspondente ao monômio de mesma parte literal no outro, devemos colocar zero como coeficiente e realizar a soma termo a termo. Se somarmos dois ou mais polinômios de graus iguais e que todos seus tenham coeficiente diferente de zero, o procedimento será genericamente realizado da seguinte forma:

Dados dois polinômios $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$

$D(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_n z^n = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$

Chama-se soma de P com D o polinômio $(P + D)(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + ... + (a_n + b_n)z^n$

Isto é: $(P + D)(z) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) z^i$

Exemplo 3.1. Vamos somar os polinômios

$P(z) = z^2 + 3z + 4$ e $D(z) = z^4 + 3z^2 + 5$

Segue:

$P(z) = 0z^4 + oz^3 + z^2 + 3z + 4$

$D(z) = z^4 + 0z^3 + 3z^2 + 0z + 5$

$(P + D)(z) = (0 + 1)z^4 + (0 + 0)z^3 + (1 + 3)z^2 + (3 + 0)z + (4 + 5)$

$= z^4 + 4z^2 + 3z + 9$

3.4.2 Subtração de Polinômios

Definição 3.4. Sejam os polinômios $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ e $Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_0$, chama-se diferença $P(z) - Q(z)$ o polinômio $P(z) + (-Q(z))$, ou seja, $P(z) - Q(z) = (a_n - b_n)z^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_0 - b_0)$. Podemos indicar a diferença $P(z) - Q(z)$ por $(P - Q)(z)$ ou $P - Q$.

3.4.3 Multiplicação de polinômios

Definição 3.5. Chama-se de **produto** de um polinômio P por um polinômio Q o polinômio obtido pela soma dos produtos de cada monômio de P por cada monômio de Q. Indicamos o produto do polinômio $P(z)$ pelo polinômio $Q(z)$ por $P(z) \cdot Q(z)$, ou por $P(z)q(z)$ ou simplismente por PQ.

Exemplo 3.2. Dados dois polinômios :

$P(z) = 3z^3 - 2z^2 + 7 \quad \text{e} \quad Q(z) = 3z^4 - 7z^3 + 2z + 1$

$$
\begin{aligned}
P(z) \cdot Q(z) &= (3z^3 - 2z^2 + 7) \cdot (3z^4 - 7z^3 + 2z + 1) \\
&= 3z^3 \cdot (3z^4 - 7z^3 + 2z + 1) - 2z^2 \cdot (3z^4 - 7z^3 + 2z + 1) + 7 \cdot (3z^4 - 7z^3 + 2z + 1) \\
&= (9z^7 - 21z^6 + 6z^4 + 3z^3) + (-6z^6 + 14z^5 - 4z^3 - 2z^2) + (21z^4 - 49z^3 + 14z + 7) \\
&= 9z^7 - 27z^6 + 14z^5 + 27z^4 - 50z^3 - 2z^2 + 14z + 7
\end{aligned}
$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE POLIÔMMIOS
Sendo P(z), Q(z) e T(z) polinômios quaisquer tem-se que:

Propriedade 1. M_1 Associativa;
$[P(z) \cdot Q(z)] \cdot T(z) = P(z) \cdot [Q(z) \cdot T(z)]$

Propriedade 2. M_2 Comutativa;
$P(z) \cdot Q(z) = Q(z) \cdot P(z)$

Propriedade 3. M_3 Elemento neutro;

Existe o polinômio $I(z)$ tal que;
$P(z) \cdot I(z) = I(z) \cdot P(z) = P(z)$

Propriedade 4. M_4 Distributiva em relação a adição;
$P(z) \cdot [Q(z) + T(z)] = P(z)Q(z) + P(z)T(z)$
$[Q(z) + T(z)] \cdot P(z) = P(z)Q(z) + P(z)T(z)$

3.4.4 Divisão de polinômios

Definição 3.6. Sejam os polinômios $P(z)$ e $Q(z)$ com $Q(z) \neq 0$, dividir $P(z)$ por $Q(z)$ é determinar dois outros polinômios $B(z)$ e $R(z)$, de modo que se verifique as duas condições seguintes:

1. $P(z) = B(z) \cdot Q(z) + R(z)$

2. $gr(R) < gr(Q)$ ou $R(z) = 0$, caso em que a divisão é exata.

Demonstra-se que um dos polinômios Q(z) e R(z) existem e são único. Os polinômios P(z), Q(z),B(z) e R(z), são chamados respectivamente dividendo, divisor, quociente e resto da divisão. Esse é o método da chave (também conhecido como divisão euclidiana)

Exemplo 3.3. Vamos obter a seguinte divisão $6z^4 - 10z^3 + 9z^2 + 9z\breve{\ }5 : 2z^{2\breve{\ }}4z + 5$.

Antes de iniciarmos o processo da divisão é preciso fazer algumas verificações:

1. Verificar se tanto o dividendo como o divisor está em ordem conforme as potências de z.

2. Verificar se no dividendo, não está faltando nenhum termo, se estiver é preciso completar.

Feita as verificações podemos iniciar a divisão, vamos enumerar o passo a passo do método de divisão Euclidiana.
O dividendo possui 5 monômios (termos) e o divisor possui 3 monômios (termos). $z^{4}\breve{}10z^{3} + 9z^{2} + 9z\breve{}5 : 2z^{2}\breve{}4z + 5$

1. Iremos dividir o 1^{o} termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor:
   $6z^{4} : 2z^{2} = 3z^{2}$

2. O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio $2z^{2}\breve{}4z + 5$(divisor).
   $(2z^{2}\breve{}4z + 5) \cdot (3z^{2}) = 6z^{4}\breve{}12z^{3} + 15z^{2}$

3. O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $6z^{4}\breve{}10z^{3} + 9z^{2} + 9z\breve{}5$ (dividendo).

4. Agora iremos levar em consideração o polinômio $2z^{3}\breve{}6z^{2} + 9z - 5$e iremos dividir seu 1^{o} termo pelo primeiro termo do dividendo$(2z^{2}\breve{}4z + 5)$.
   $2z^{3} : 2z^{2} = z$

5. O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio$2z^{2}\breve{}4z + 5$ (divisor)
   $(2z^{2}\breve{}4z + 5) \cdot (z) = 2z^{3}\breve{}4z^{2} + 5z$

6. O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $2z^{3}\breve{}6z^{2} + 9z\breve{}5$.

7. Agora iremos levar em consideração o polinômio $-2z^{2} + 4z - 5$ e dividir seu 1^{o} termo pelo primeiro termo do dividendo $(2z^{2}\breve{}4z + 5)$.
   $-2z^{2} : 2z^{2} = -1$

8. O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio $2z^{2}\breve{}4z + 5$ (divisor)
   $(2z^{2}\breve{}4z + 5) \cdot (-1) = -2z^{2} + 4z - 5$

9. O resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio $-2z^{2} + 4z\breve{}5$.

Portando, podemos dizer que $(6z^{4} - 10z^{3} + 9z^{2} + 9z - 5) : (2z^{2} - 4z + 5) = 3z^{2} + z - 1$, com resto igual a zero. Caso queira fazer a prova real, basta multiplicar $(3z^{2} + z - 1)$ por $2z^{2} - 4z + 5$ e verificar se a solução será $6z^{4} - 10z^{3} + 9z^{2} + 9z - 5$. Nesse caso, como o resto é zero, não é preciso somá-lo ao produto.

Divisão por binômio de 1^{o} grau

Vamos nesse tópico tratar da divisão de um polinômio $P(z)$ com $\delta(P) \geqslant 1$ por $D(z)$ $onde\delta(D) = 1$.
Veja o que ocorre quando dividimos polinômio $P(z) = 2z^{3} - 7z^{2} + 4z - 1$ por $D(z) = z - 4$

Resolvendo, respeitando a condição $\delta(R) < \delta(D)$, chegamos em $Q(z) = 2z^2 + z + 8$ e $R(z) = 31$, uma observação importante nesse é notar que o nosso $R(z)$ é um polinômio constante. pois, $\delta(D) = 1$ o que implica que $\delta(R) = 0$.

Teorema do Resto

O resto da divisão de um polinômio $P(z)$ por $z - a$ é igual ao valor númerico de $P(z)$ em a. Isto é, $R(z) = P(a)$.

Demonstração 2. De acordo com a definição de divisão,

$$Q(z) \cdot D(z) + R(z) = P(z)$$

,
onde $Q(z)$ e $R(z)$ são respectivamente,o quociente e o resto. Como $D(z) = z - a$ tem grau 1, o resto $R(z)$ ou é nulo ou tem grau zero, portanto, $R(z)$ é um polinômio constsnte, por isso denotaremos apenas por R.
Calculemos os valores dos polinômios acima em a:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R$$

note que teremos:

$$P(a) = Q(a) \cdot 0 + R$$

$$\Rightarrow R(a) = R$$

Exemplo 3.4. O resto da divisão de $P(z) = 5z^4 + 3z^2 + 11$ por $D(z) = z - 3$ é :
$P(3) = 5 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 11 = 405 + 27 + 11 = 443$
O resto da divisão de $P(z) = (z + 3)^7 + (z - 2)^2$ por $D(z) = z + 3$ é :
$P(-3) = (-3 + 3)^7 + (-3 - 2)^2 = 0^7 + (-5)^2 = 25$

Teorema de D'Alembert

Esse teorema diz que o resto da divisão de um polinômio $P(z)$ por um polinômio $G(z) = z - a$ é $P(a)$
Um polinômio $P(z)$ é divisível por $z - a$ se, somente se, a é raíz de $P(z)$.

Demonstração 3. De acordo com o teorema do resto, temos $R = f(a)$, então

$$R = 0 \Longleftrightarrow P(a) = 0$$

(divisão exata, a é raíz de $P(a)$)

Aplicações
Verificar que $P(z) = z^5 - 4z^4 - 3z^2 + 7z - 1$ é divisível por $D(z) = z - 1$.
Note que,
$P(1) = 1^5 - 4 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 1 = 0$
Portanto $P(z)$ é divisível por $D(z)$.

Método de Descartes

O matématico francês Renê Descartes $(1596 - 1650)$ desenvolveu um método para divisão de polinômios que leva seu nome, métododе Descartes. O que Descartes observou é que o quociente pode ter sua forma algébrica determinada através da equação:

$$\delta(Q) = \delta(A) - \delta(B)$$

, onde $A(z)$ é o dividendo e $B(z)$ é o divisor. Os coeficientes, sob a forma geral, são determinados através da identidade de polinômios.
Da mesma maneira, o resto deve obedecer a condição:

$$\delta(R) < \delta(B) \; ou \; \delta(R) \equiv 0$$

Exemplo 3.5. Determinar (Q) e $R(z)$ na divisão de $A(z) = 6z^4 - 10z^3 - z^2 + 5z + 4$ por $B(z) = 3z^2 - 2z + 2$, pelo método de Descartes.
solução:
$\delta(Q) = \delta(A) - \delta(B) \Longrightarrow gr(Q) = 4 - 2 \Longrightarrow gr(Q) = 2$.
Portanto a forma algébrica de $Q(z)$ é:
$Q(z) = az^2 + bz + c$. Para $R(z)$ temos $\delta(R) < \delta(B) ou \delta(R) \equiv 0$, como $\delta(B) = 2$, então o grau máximo de $R(z)$ é 1. O que determina sua expressão algébrica da seguinte maneira:
$R(z) = dz + e$
Por definição temos: $A(z) = B(z) \cdot Q(z) + R(z)$, substintuindo os valores temos:
$6z^4 - 10z^3 - z^2 + 5z + 4 = (3z^2 - 2z + 2) \cdot (az^2 + bz + c) + (dz + e)$
$6z^4 - 10z^3 - z^2 + 5z + 4 = 3az^4 + (3b - 2a)z^3 + (2a - 2b + 3)z^2 + (2b - 2c + d)z + (2c + e)$.
Pela igualdade de polinômios, temos que os coeficientes do primero termo devem ser iguais aos do segundo, portato:
$3a = 6 \Longrightarrow a = 2$
$3b - 2a = -10 \Longrightarrow 3b - 2 \cdot 2 = -10 \Longrightarrow 3b = -6 \Longrightarrow b = -2$
$2a - 2b + 3c = -1 \Longrightarrow 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 3c = -1 \Longrightarrow 3c = -9 \Longrightarrow c = -3$
$2b - 2c + d = 5 \Longrightarrow 2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) + d = 5 \Longrightarrow -4 + 6 + d = 5 \Longrightarrow d = 5 - 2 \Longrightarrow d = 3$
$2c + e = 4 \Longrightarrow 2 \cdot (-3) + e = 4 \Longrightarrow e = 4 + 6 \Longrightarrow e = 10$
Substituindo os valores de a, b, c, d e e nas formas algébricas $Q(z)$ e $R(z)$, temos:
$Q(z) = az^2 + bz + c$
$Q(z) = 2z^2 - 2z - 3$
$R(z) = dz + e$
$R(z) = 3z + 10$

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

É um método simples e prático para efetuar a divisão de um polinômio $P(z)$ por um binômio de primeiro grau da forma $az + b$. Vejamos como funciona, vamos dividir o polinômio $P(z) = z^3 + 3z^2 - 2z - 6$ e $B(z) = z - 2$.

1. Escrevemos a raíz de $B(z)$ e os coeficientes de $P(z)$, que devem está reduzidos e ordenados conforme o esquema a abaixo.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & & & \\ \hline \end{array}$$

2. Abaixamos o primeiro coeficiente do dividendo $P(z)$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

3. Multiplicamos o número abaixado pela raíz de $B(z)$ e somamos com o segundo coeficiente, colocando o resultado dessa operação logo abaixo.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & 5 & & \end{array}$$

4. Repetimos a ultima sequência para os coeficientes restantes.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline & 1 & 5 & 8 & \end{array}$$

5. Separamos o último número

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ & & 2 & 10 & 16 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 10 \end{array}$$

Pelo método de Descartes
$\delta(Q) = \delta(P) - \delta(B) = 3 - 1 = 2$
Ou seja, $Q(z)$ tem a forma $Q(z) = az^2 + bz + c$. Logo:
$Q(z) = z^2 + 5z + 8$ e $R(z) = 10$

3.5 Grau de um Polinômios

Definição 3.7. O grau de um polinômio P, na variável z, $P(z) \not\equiv 0$, denotado por $\delta(P)$, é dado pelo maior expoente de z com coeficiente diferente de zero. Dessa forma, o polinômio; $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, com $a_n \neq 0$, tem grau igual a n.

Exemplo 3.6. Tomemos $P(z) = 4 + 7z + 2z^3 - 6z^6 \quad \Rightarrow \quad \delta(P) = 6$ e $D(z) = -1 + 2z + 5z^2 \quad \Rightarrow \quad \delta(D) = 2$

Segue pela definição que se o grau de P é n, então o coeficiente a_n será chamado de **coeficiente dominante** de P. No caso do coeficiente dominante de P ser 1 dizemos que P é um polinômio unitário.

3.5.1 Grau do polinômio da soma

Teorema 3.2. *Se P, D e $(P + D)$ são polinômios não nulos, então o grau de $(P + D)$ é menor ou igual ao maior dos números $\delta(P)$ e $\delta(D)$.*

$$\delta(P + D) \leq max\{\delta(P), \delta(D)\}$$

Demonstração: Dados os polinômios $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ e $D(z) = b_m z^m + ... + b_0$
Vamos supor $m > n$. Então teremos:
$(P + D)(z) = (0 + b_m)z^m + ... + (a_0 + b_0)$
$(P + D)(z) = b_m z^m + ... + (a_n + b_n)z^n + ... + (a_0 + b_0)$
veja que $\delta(P + D) = m$

Para $m < n$, teremos:
$(P + D)(z) = (a_n + 0)z^n + ... + (a_m + b_m)z^m + ... + (a_0 + b_0)$
$(P + D)(z) = a_n z^n + ... + (a_m + b_m)z^m + ... + (a_0 + b_0)$, tendo dessa forma $\delta(P + D) = n$

Agora para o caso de o grau de $(P + D)$ ser menor que o maior dos números $\delta(P)$ e $\delta(D)$, temos que os coeficientes dominantes de P e D são simétricos e $\delta(P) = \delta(D)$, ou seja:
$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} ... + a_0$ e $D(z) = -b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} ... + b_0$; com $a_n = -b_n$
então;
$(P + D) = (a_n + (-b_n))z^n + ... + (a_{n-1} + b_{n-1}z^{n-1}) + ... + (a_0 + b_0)$
$(P + D) = (a_{n-1} + b_{n-1}z^{n-1}) + ... + (a_0 + b_0)$.
■

Exemplo 3.7. Dados os polinômios;
$P(z) = 2z^2 + z + 2 \Longrightarrow gr(P) = 2$
$g(D) = 2 + 2z + z^2 \Longrightarrow gr(D) = 2$
$(P + D) = 3z^2 + 3z + 4 \Longrightarrow gr(P + D) = 2$

3.5.2 Grau do polinômio do produto

Teorema 3.3. *Se P e D são polinômios não nulos,e tem graus m e n respectivamente, então o grau de (PD) é igual à soma dos graus de P e D.*

$$\delta(PD) = \delta(P) + \delta(D) = m + n$$

Demonstração 4. Sejam:

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1}z^{m-1} + ... + a_0;\ com\ a_m \neq 0$$

e

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_0;\ com\ a_n \neq 0$$

Multiplicando cada monômio de $P(z)$ por cada monômio de $Q(z)$ obtem-se um dos produtos igual a $a_m b_n z^{m+n}$ e todos os outros produtos iguais a $a_{m-r}b_{n-s}z^{n+m-r-s}$ em que pelos menos um dos números naturais r ou s é não nulo.

Temos que:

1. $a_m b_n \neq 0$, pois por hipótese $a_m \neq 0\ e\ b_n \neq 0$.

2. $m+n > m+n-r-s$, pois, pelo menos um dos naturais não é nulo.
   de (1) e (2) concluimos que $\delta(PQ) = m+n$

Exemplo 3.8. $P(z) = 4+3z \Longrightarrow \delta(P) = 1$
$D(z) = 1+2z+5z^2 \Longrightarrow \delta(D) = 2$
$(PD) = 4+11z+26z^2+15z^3 \Longrightarrow gr(PD) = 3$

3.5.3 Grau do polinômio quociente

Sejam os polinômios $P(z)$ e $D(z)$, com grau de P, denotado por $\delta(P)$, maior do que ou igual ao grau de Q, denotado por $\delta(Q)$, se $Q(z)$ é quociente da divisão de $P(z)$ por $D(z)$, então, $\delta(Q)$ = $\delta(P)$ - $\delta(D)$.

Demonstração 5. Sejam respectivamente $Q(z)$ e $R(z)$ o quociente e o resto da divisão de $P(z)$ por $D(z)$, por definição, temos que:
$Q(z)\cdot D(z)+R(z) = P(z)$, precisamos ter $\delta(R)$ < $\delta(D)$ ou $R(z) = 0$

Definição 3.8. Sejam dois polinômios $P(z)$ e $D(z)$, $\delta(P) \geqslant \delta(D)$. Se $Q(z)$ é quociente da divisão de $P(z)$ por $D(z)$, então :
$\delta(Q) = \delta(P) - \delta(D)$

Demonstração 6. Sejam respectivamente, Q(z) e R(z) o quociente e o resto da divisão de P(z) por Q(z), por definição temos que:
$Q(z)\cdot D(z)+R(z) = P(z)$, com $\delta(R) < \delta(D)\ ou\ R(z) = 0$,
Logo; $\delta(D+R) = \delta(P)$.
Como $\delta(R) < \delta(D)$ ou R(z) = 0, podemos afirmar que $\delta(QD) = \delta(P)$, $\delta(Q)+\delta(D) = \delta(P)$, $\delta(Q) = \delta(P) - \delta(D)$.

3.6 Valor numérico de um polinômio

Condiderando o polinômio $P(z)$ e um número complexo α. O valor numérico do polinômio $P(z)$ para $z = \alpha$ é o número que se obtém substituindo z por α e efetuando os cálculos necessários. Indica-se por $P(\alpha)$. Então $P(\alpha)$ é o valor númerico de $P(z)$ para $z = \alpha$.Assim de modo geral dado o polinômio :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0$$

O valor numérico para $z = \alpha$ é :

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1 \alpha + a_0$$

Observação 3.1. Se $P(\alpha) = 0$, o número α é denominado raíz de $P(z)$.

Exemplo 3.9. No polinômio $P(z) = z^2 - 6z + 8 = 0$, temos que $P(2) = 0$, portanto 2 é raíz de $f(z)$.

3.7 Fração Polinomial

Definição 3.9. Chama-se fração polinomial todo expressão do tipo $\frac{P(z)}{Q(z)}$em que $S(z)$ e $D(z)$ são polinômios complexos de variável complexa, com $Q(z) \not\equiv 0$.

3.8 Frações Polinomiais Idênticas

Definição 3.10. Duas frações polinomiais $\frac{P(z)}{Q(z)}$ e $\frac{P(z)}{Q(z)}$ são idênticas se, e somente se, $\frac{P(k)}{q(k)} = \frac{S(k)}{T(k)}, \forall\, k, k \in \mathbb{C}$ com $Q(k) \neq 0$ e $T(k) \neq 0$

4 EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

Neste capítulo, vamos falar do teorema fundamental da álgebra, suas consequências e também o método da relação entre coeficientes e raízes para a resolução de equações polinomiais.

Definição 4.1. Denomina-se equação polinômial ou algébrica toda equação que pode se escrita na forma:

$$a_n z^n + a_n - 1z^{n-1} + ... + a_2 n^2 + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

em que os $a_i(a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0)$ são números que pertencem ao conjunto dos números complexos, n é um inteiro positivo diferente de zero, dizemos também que o grau da equação é n.

Uma equação polinomial pode ser também chamada de equação algébrica.
O grau do polinômio $p(z)$ é também o grau da equação $p(z) = 0$.

As raízes do polin mio $p(z)$ são também raízes do polinômio $P(z) = 0$.
O conjunto formado pelas raízes da equação polinomial em que $p(x) = 0$ é o conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V) da equação.

Exemplo 4.1. $3z + 1 = 0$ é uma equação algébrica do 1º grau. $z^2 - 3z - 4 = 0$ é uma equação algébrica do 2º grau. $z^3 - 2z^2 + 2z - 2$ é uma equação do 3º grau.

4.1 Teorema Fundamental da Álgebra

Enunciado: Seja $P(z)$ um polinômio em $\mathbb{C}$, com grau de $P \geqslant 1$. Então $P(z)$ possui ao menos uma raíz.
A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ no ano de 1978, embora outros matemáticos já tivessem tentado essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.
Admitiremos o teorema da álgebra sem demonstração.
Uma consequência imediata do teorema fundamental da álgebra é o teorema da deconposição que nos garante:

4.2 Teorema da Decomposição

Toda equação polinomial de grau $n(n \geqslant 1)$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

pode ser decomposto em n fatores de primeiro grau, isto é:
$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$
onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, são raízes de P.

Demonstração 7. Sendo P um polinômio de grau n, $n \geqslant 1$ podemos aplicar o (T.F.A.) e p tem ao menos uma raiz real ou complexa α_1. Assim $P(\alpha_1) = 0$, isso implica em $(z - \alpha_1) \mid P$ portanto:

$$P(z) = (z - \alpha_1) \cdot Q_1(z) \tag{4.1}$$

onde Q_1 é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 1$, $n - 1 = 0$ e Q_1 é um polinômio constante. Portanto $Q_1 = a_n$ e $p = a_n(z - \alpha_1)$. Se $n \geqslant 2$ então $n - 1 \geqslant 1$ e o T.F.A. é aplicável ao polinômio Q_1. Isto é, Q_1 tem ao menos uma raiz real ou complexa α_2. Assim, $Q_1(\alpha_2) = 0$. Dessa forma, Q_1 é divisível por $z - \alpha_2$:

$$Q_1(z) = (z - \alpha_2) \cdot Q_2(z) \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.2),

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot Q_2(z)$$

onde $Q_2(z)$ é um polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 2$, isto é , $n - 2 = 0$, então $Q_2(z) = a_n$, e $p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$
Assim por diante, após n sucessivas repetições do T.F.A. chegamos na igualdade:

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) \cdot Q_n(z)$$

onde $Q_n(z)$ tem grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante a_n portanto, $Q_n = a_n$ e

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \cdots (z - \alpha_n)$$

CONSEQUÊNCIA DO TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Consideremos a equação na variável z:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

de grau n, $n \geq 1$, pelo teorema da decomposição essa equação pode ser apresentada na forma:

$$a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n) = 0$$

Temos que $r_1, r_2, \cdots, r_n$ são todas as raízes dessa equação. Assim sendo devemos concluir o seguinte:

Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

4.3 Multiplicidade de uma raíz

Definição 4.2. Dizemos que α é raiz de multiplicidade m,$m \geq 1$, da equação $p(z) = 0$ se, e somente se,

$$P(z) = (x - \alpha)^m \cdot Q(z) \;\; e \;\; Q(\alpha) \neq 0$$

isto é, α é raiz de multiplicidade m de $p(z) = 0$, quando o polinômio P é divisível por $(z - \alpha)^m$ e não é divisível por $(z - \alpha)^{m+1}$, ou melhor, a decomposição de p apresenta exatamente m fatores iguais a $z - \alpha$

Se uma raiz α_j comparece um única vez dentre os fatores do primeiro membro, então α_j é chamada de raiz simples da equação.

Se uma raiz α_j comparece k vezes $k > 1$ dentre os fatore do primeiro membro, então α_j é chamada de raiz de multiplicidade k da equação."

Quando $m = 1$ dizemos que α é raiz simples; quando $m = 2$ dizemos que α é raiz dupla; quando $m = 3$ dizemos que α é raiz tripla, etc.

Condideremos a equação polinomial $(z - 3)(z - 1)^2(z - 4)^3 = 0$ que apresenta seis raízes sendo: uma raíz igual a 3, 2 raízes igual a 1 e 3 raízes igual a 4.

Dizemos que 3 é raíz simples, 1 é raíz dupla, e 4 é raíz tripla da equação dada.

Exemplo 4.2.

1. A equação $z^4(z + 5)^7 = 0$ admite as raízes 0 com multiplicidade 4 e -5 com multiplicidade 7, portanto , embora seja equação do 11º grau , seu conjunto solução tem só dois elementos:

$$S = \{0, -5\}$$

2. A equação $(z - a)^n = 0$ admite só a raíz a com multiplicidade n, isto é, seu conjunto solução é :

$$S = \{a\}$$

4.4 Raízes complexas

Vamos estudar agora um teorema que diz respeito às raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais. Lembre-se de que número imaginário é todo número complexo z não real, isto é, $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 4.1. *Se um número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é raiz de uma equação polinomial P(x) = 0 com coeficientes reais, então o conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.*

Demonstração: falta fazer ■

4.5 Relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial

Albert Girard (1560 - 1633), flamengo, em sua obra Invention nouvelle en l'algèbre, apresentou um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Antes de estudar esse teorema em sua forma geral, vamos abordá-lo particularmente para equações do 2^0 e do 3^0 grau.

Consideremos o polinômio do 2^0 grau $P(x) = a_2z^2 + a_1z + a_0$, $a_2 \neq 0)$ cujas raízes são r_1 e r_2. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$a_2z^2 + a_1z + a_0 = a_2(z - r_1)(z - r_2) = 0$ com $a_2 \neq 0$

ao dividirmos tudo por a_2 temos:

$z^2 + \frac{a_1z}{a_2} + \frac{a_0}{a_2} = (z - r_1)(z - r_2)$

$z^2 + \frac{a_1z}{a_2} + \frac{a_0}{a_2} = z^2 - r_2z - r_1z + r_1r_2$

$z^2 + \frac{a_1z}{a_2} + \frac{a_0}{a_2} = z^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2$

Concluímos que:

$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ e $r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}$

temos então o seguinte:

As raízes r_1 e r_2. da equação polinomial do 2^0 grau $a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0)$, são tais que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 & = & \frac{-b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 & = & \frac{c}{a} \end{cases}$$

Consideremos, agora, o polinômio do 3^0 grau $P(x) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, a_3 \neq 0$, cujas raízes são r_1, r_2, r_3. Pelo teorema da decomposição de polinômio, podemos escrever:

$a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = a_3(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3) = 0$

mais uma vez se dividirmos tudo por a_3, ficamos com:

$z^3 + \frac{a_2z^2}{a_3} + \frac{a_1z}{a_3} + \frac{a_0}{a_3} = (z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$

donde

$z^3 + \frac{a_2z^2}{a_3} + \frac{a_1z}{a_3} + \frac{a_0}{a_3} = z^3 - (r_1 + r_2 + r_3)z^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)z - r_1r_2r_3 \; \forall z$

Portanto:

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3) & = & \frac{a_2}{a_3} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 & = & \frac{a_1}{a_3} \\ -r_1r_2r_3 = \frac{a_0}{a_3} \end{cases} \therefore \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 & = & -\frac{a_2}{a_3} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 & = & \frac{a_1}{a_3} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

são ralações entre raízes e coeficientes da equação. Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1, r_2 e r_3. da equação polinomial do 2^0 grau $a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$, $a_2 \neq 0)$, são tais que:

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3 & = & -\dfrac{a_2}{a_3} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3 & = & \dfrac{a_1}{a_3} \\ r_1r_2r_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Teorema 4.2. *Em toda equação polinomial de grau n, $n>1$, $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+ ... +a_1z+a_0=0$, $(a_n)\neq 0$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ tem-se que :*

• *a soma das raízes é igual a $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja, $r_1+r_2+r_3+...+r_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$;*

• *a soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas, é igual a $\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$, ou seja $r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+\cdots r_{n-1}r_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$*

• *a soma dos produtos das raízes, tomadas três a três, é igual a $-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$, ou seja, $r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_2r_5+\cdots+r_{n-2}rn-1r_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$*

:

• *o produto de todas as raízes é igual a $\dfrac{(-1)^na_0}{a_n}$, ou seja, $r_1r_2r_3\cdots r_n=\dfrac{(-1)^na_0}{a_n}$*

Demonstração: Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+...+a_1z+a_0 \equiv a_n(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)\cdot\ldots\cdot(z-r_n)$$

Dividindo por a_n ambos os membros dessa identidade, obtemos:

$$z^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1}+\frac{a_{n-2}}{a_n}z^{n-2}+...+\frac{a_1}{a_n}z+\frac{a_0}{a_n} \equiv (z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)\cdot\ldots\cdot(z-r_n)$$

Observe que, para efetuar o produto no segundo membro dessa igualdade, multiplicamos:

• todos os fatores iguais a z, obtendo z^n;

• os fatores z tomados $n-1$ a $n-1$ pelas raízes tomadas uma a uma, obtendo

$$-z^{n-1}r_1-z^{n-1}r_2-z^{n-1}r_3-\cdots-z^{n-1}r_n, \text{ ou seja, } -(r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n)z^{n-1}$$

• os fatores iguais a x tomados $n-2$ a $n-2$ pelas raízes tomadas duas a duas, obtendo:

$$z^{n-2}r_1r_2+z^{n-2}r_1r_3+z^{n-2}r_1r_4+\cdots+z^{n-2}r_{n-1}r_n, \text{ ou seja, } (r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+\cdots+r_{n-1}r_n)z^{n-2}$$

• os fatores iguais a z tomados $n-3$ a $n-3$ pelas raízes tomadas três a três, obtendo:

$-z^{n-3}r_1r_2r_3 - z^{n-3}r_1r_2r_4 - z^{n-3}r_1r_2r_5 - \cdots - z^{n-3}r_{n-2}r_{n-1}r_n$, ou seja, $-(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \cdots + rn$

$\vdots$

• todos os fatores iguais a $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$, obtendo $(-1)^r_1 r_2 r_3 \cdot \cdots \cdot r_n$

Logo, da identidade, temos:

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n) & = \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \cdots + r_{n-1}r_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ -(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \cdots + rn - 2r_{n-1}r_n) & = \dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots & \\ (-1)^n r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n & = \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n & = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \cdots + r_{n-1}r_n & = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \cdots + rn - 2r_{n-1}r_n & = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots & \\ r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n & = \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n} \end{cases}$$

■

$$\mid x - p \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(p) \mid < \epsilon$$

$f(c_1) < 0 \ ou \ f(c_1) \geqslant 0$.

5 CONCLUSÃO

Esta pesquisa foi de fundamental importância para meu crescimento como estudante, como profissional da educação e como pesquisador científico. Além disso, me proporcionou uma ampla visão acerca do tema abordado. Certamente estou melhor preparado para estudar e lecionar matemática sobretudo em si tratando de tópicos relacionados a álgebra.

O nosso trabalho servirá como base de estudos, para o aluno que tiver interesse no assunto, ou até mesmo, para um professor.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações.** 3.ed. Rio de Janeiro: LTC 2008.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

COXFORD, A. F; SHULT,A.P**. As Ideias da Álgebra.** São Paulo: Atual Editora,1997.

DANTE, L.R. **Matemática (Ensino Médio).** Volume Único. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, H. **Introdução à História da matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Volume 6. 2.ed. São Paulo: Atual Editora, 1977.