UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

ROSSANE GOMES NASCIMENTO

O Teorema de Lax-Milgram e Aplicações

Campina Grande/PB
2013

ROSSANE GOMES NASCIMENTO

O Teorema de Lax-Milgram e Aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de especialista.

Orientadora: **Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas**

Campina Grande - PB

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

N244t Nascimento, Rossane Gomes.

O teorema de Lax-Milgram e aplicações [manuscrito] / Rossane Gomes Nascimento. – 2013.

46 f. : il.

Monografia (Especialização em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.

“Orientação: Prof. Dr. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática”.

1. Equações diferenciais. 2. Análise funcional. 3. Teorema. I. Título.

21. ed. CDD 515.35

ROSSANE GOMES NASCIMENTO

O Teorema de Lax-Milgram e Aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de especialista.

Aprovada em 30/08/2013.

Luciana Roze de Freitas

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas/UEPB

Orientadora

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo/UEPB

Examinador

Joselma Soares dos Santos

Profa. Ms. Joselma Soares dos Santos/UEPB

Examinadora

Agradecimentos

A Deus, toda honra e glória! Gratidão, Senhor por vossa constante presença em minha vida; pelas chances que se renovam a cada manhã; pela coragem para persistir; por vosso amor e por vossa amizade.

Aos meus primeiros professores: meus pais, Antônia e Manuel. A eles devo a pessoa que sou hoje. Obrigada por toda doação incondicional. Agradeço ainda, aos meus irmãos que sempre se colocaram a disposição quando precisei. Obrigada por todos os momentos felizes, e até mesmos os tristes, que tivemos de enfrentar, mas sempre juntos. Em fim, a todos meus familiares e amigos.

Também não poderia deixar de agradecer a Professora Luciana, por quem, mais uma vez, tive a oportunidade de ser orientada. Um exemplo não só de profissionalismo, como de humildade; com quem, posso dizer que aprendi muito. Obrigada por toda atenção, conselhos e incentivos.

Ainda, a todos os professores da UEPB. Em particular, aos professores da especialização: Aldo, Isabelle, Joselma, Nathan e Thiciany os quais, mais recentemente, tive a chance de estudar e aos demais professores que passaram por minha formação, agradeço pelos ensinamentos e incentivos.

Resumo

O Teorema de Lax-Milgram estabelece que cada funcional linear definido num espaço de Hilbert, digamos H, está associado a um único elemento em H, de maneira que este funcional pode ser representado por uma forma sesquilinear limitada e coerciva. Neste trabalho, vamos utilizar o Teorema de Lax-Milgram para garantir a existência e unicidade de solução fraca para alguns problemas de equações diferenciais parciais.

Palavras-chaves: Teorema de Lax-Milgram; exitência e unicidade; equações diferenciais parciais.

Abstract

The Lax-Milgram Theorem states that every linear functional defined on a Hilbert space, say H, is associated with a single element in H, so that this functional can be represented by a limited and coercive sesquilinear form. In this work, we use the Lax-Milgram Theorem to guarantee the existence and uniqueness of weak solution for some problems of partial differential equations.

Keywords: Lax-Milgram Theorem; existence and uniqueness; partial differential equations.

Sumário

Introdução

Sendo uma das mais recentes áreas da Matemática, a Análise Funcional surgiu em meio a procura de soluções para muitos problemas de equações diferenciais e integrais. Neste contexto, um resultado de significativa contribuição foi o Teorema de Lax-Milgram, desenvolvido em 1954 pelos matemáticos Peter David Lax e Arthur Norton Milgram. Sob certas condições, ele garante a existência e unicidade de solução para problemas de equações diferenciais. Mais a frente, estudaremos alguns destes problemas.

Iniciamos o primeiro capítulo apresentando conceitos e resultados necessários ao desenvolvimento deste texto. Estudamos algumas caracterizações de espaços vetoriais, dando uma atenção maior à de um espaço de Hilbert, uma vez que, os principais resultados deste trabalho estão fundados neste espaço. Ainda neste capítulo, tratamos da teoria envolvendo limitação e continuidade de operadores lineares e da definição de ortogonalidade entre espaços vetoriais.

Já no Capítulo 2, tivemos como principal interesse estudar o Teorema de Lax-Milgram. Iniciamos provando o famoso Teorema Representação de Riesz, que de certo modo, pode ser considerado um caso particular do Teorema de Lax-Milgram. Ele mostra que todo espaço Hilbert está naturalmente identificado com o seu dual, de maneira que, cada funcional linear contínuo pode ser representado por um produto interno. Por sua vez, o Teorema de Lax-Milgram, o generaliza, para formas sesquilineares limitadas e coercivas.

Por fim, no último capítulo, usamos o Teorema de Lax-milgram para mostrar a existência e unicidade de solução fraca para alguns problemas de equações diferencias. Vamos admitir que o leitor possua familiaridade com a teoria dos espaços L^p e de espaços de Sobolev. Alguns resultados e conceitos, sobre tais teorias, serão apresentados no Apêndice, podendo, para as provas, ser consultadas as referências [1] e [2].

Capítulo 1

Resultados Preliminares

No presente capítulo tratamos dos conceitos e resultados que darão suporte ao nosso texto. Definimos as aplicações norma e produto interno, seguidas de algumas de suas propriedades, a fim de estudarmos o espaço de Hilbert, onde está caracterizado o Teorema de Lax-Milgram.

Também, fizemos um estudo sobre operadores lineares, ressaltando a equivalência entre ideia de limitação e continuidade de tais operadores, que é de grande importância no decorrer de todo trabalho.

No que segue vamos denotar por $\mathbb{K}$ o corpo dos reais ou dos complexos. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, simbolizaremos por $\overline{\alpha}$ o seu complexo conjugado e por $Re\alpha$ e $Im\alpha$, respectivamente, a parte real e a parte complexa de α.

Definição 1.1. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{K}$, satisfazendo:*

N_1. $\|x\| \geq 0$;

N_2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

N_3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

N_4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Observação 1.1. *Do item N_4 segue-se que*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X. \tag{1.1}$$

De fato, observe que

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \;\Rightarrow\; \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \tag{1.2}$$

Por outro lado,

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \;\Rightarrow\; \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|, \tag{1.3}$$

mas,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|-1(x - y)\| = |-1| \|x - y\| \;\Rightarrow\; \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|. \tag{1.4}$$

De (1.2) e (1.4)

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \;\Rightarrow\; |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Proposição 1.1. *A norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, devemos obter $\delta > 0$ tal que

$$y \in X \text{ e } \|y - x\| < \delta \;\Rightarrow\; |\|x\| - \|y\|| < \epsilon;$$

considerando $\delta = \epsilon$, então por (1.1), segue o resultado. $\square$

Definição 1.2. *Um **Espaço Normado** X é um espaço vetorial com uma norma definida sobre ele; denotamos $(X, \|\cdot\|)$ ou apenas por X, quando a norma utilizada estiver clara.*

Definição 1.3. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados. Diremos que $T : X \to Y$ é uma isometria quando*

$$\|T(x_1) - T(x_0)\|_Y = \|x_1 - x_0\|_X, \quad \forall x_1, x_0 \in X.$$

Definição 1.4. *Uma sequência (x_n) em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ é dita ser de Cauchy, quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0. \tag{1.5}$$

Definição 1.5. *Um espaço normado X é dito ser* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy em X converge para um elemento deste espaço.*

Definição 1.6. *Um* ***Espaço de Banach*** *é um espaço normado completo.*

Definição 1.7. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto interno em X é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes condições:*

P_1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *e* $\langle x, x \rangle = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

P_2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

P_3. $\langle \alpha x, y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$;

P_4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Observação 1.2. *Se $x = 0$ ou $y = 0$, então $\langle x, y \rangle = 0$. Realmente, para $x = 0$, tem-se*

$$\langle 0, y \rangle = \langle 0 + 0, y \rangle = \langle 0, y \rangle + \langle 0, y \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle 0, y \rangle = 0.$$

O caso em que $y = 0$ segue de modo análogo.

Definição 1.8. *Quando sobre um espaço vetorial X estiver definido um produto interno, dizemos que ele é um* ***espaço produto interno****, o que denotamos por $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ou apenas X, quando não for necessário explicitar o produto interno utilizado.*

Observação 1.3. *Seja X um espaço com produto interno. Se $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in X$, então $y = 0$.*

De fato, se $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in X$, em particular para $x = y$, tem-se

$$\langle y, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Observação 1.4. *O produto interno define uma norma em X, que é dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in X$$

e é chamada "norma induzida pelo produto interno".

Exemplo 1.1. *Considere o Espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$, *com o produto interno*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

onde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Segue-se pela Observação 1.4, que* $\mathbb{R}^n$ *é um espaço normado, com a norma*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Definição 1.9. *Um* ***espaço de Hilbert*** *é um espaço com produto interno completo na norma induzida pelo produto interno.*

Teorema 1.1. *Seja* X *um espaço produto interno. Então para quaisquer* $x, y \in X$ *valem*

a) ***Desigualdade de Cauchy-Schwarz:*** $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$; *a igualdade ocorre se, e somente se,* $\{x, y\}$ *é um conjunto linearmente dependente.*

b) ***Desigualdade triangular:*** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; *a igualdade ocorre se, e somente se,* $y = 0$ *ou* $x = \alpha y$ $(\alpha \geq 0)$.

Demonstração:

a) Se $\langle x, y\rangle = 0$, o resultado é imediato. Se $\langle x, y\rangle \neq 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $y \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \\ &= \|x\|^2 - \alpha \langle x, y\rangle - \overline{\alpha} \langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha} \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \alpha \langle x, y\rangle - \overline{\alpha}(\langle y, x\rangle - \alpha \|y\|^2), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Em particular, para $\alpha = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}$, segue-se que

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle - \overline{\alpha} \left(\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} \|y\|^2 \right) \;\Rightarrow\; \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2.$$

Como $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$, tem-se

$$\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \|x\|^2 \;\Rightarrow\; |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2,$$

consequentemente

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

Agora, a igualdade ocorre se, e somente se, $y=0$ ou $\|x-\alpha y\|^2=0$, e daí,

$$\|x-\alpha y\|^2=0 \;\Leftrightarrow\; x-\alpha y=0 \;\Leftrightarrow\; x=\alpha y,$$

isto é,

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \;\Leftrightarrow\; \{x,y\} \text{ é um conjunto linearmente dependente.}$$

b) Usando o fato de que $|\langle y,x\rangle| = |\langle x,y\rangle|$ e a desigualdade de Cauchy-Schawarz, note que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada, chega-se a desigualdade

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$$

Note que, na expressão acima, a igualdade é válida se, e somente se, $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2\,\|x\|\,\|y\|$, e como $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$, tem-se que $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = 2Re\,\langle x,y\rangle$, logo

$$|\langle x,y\rangle| \geq Re\,\langle x,y\rangle = \|x\|\,\|y\| \geq |\langle x,y\rangle|\,,$$

ou seja, $Re\,\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$, e pelo item anterior $x=0$ ou o conjunto $\{x,y\}$ é linearmente dependente, logo, $y=\alpha x$, para algum $\alpha\in\mathbb{K}$.

Vejamos que $\alpha \geq 0$. Realmente, sendo $Re\,\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$, devemos ter que $Im\,\langle x,y\rangle = 0$, consequentemente

$$\langle x,y\rangle = Re\,\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \geq 0,$$

segue-se que

$$0 \leq \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha x \rangle = \alpha \|x\|^2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \alpha \geq 0.$$

□

Proposição 1.2. *O produto interno é uma aplicação contínua.*

Demonstração: Sejam $(x_n), (y_n)$ em X, tais que que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Observe que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| , \end{aligned}$$

então, quando $n \to \infty$, tem-se $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \to 0$, ou seja,

$$\langle x_n, y_n \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle ,$$

pois $\|x_n\|$ é limitada e $\|y_n - y\| \to 0$. □

Proposição 1.3. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e $f : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in X. \tag{1.7}$$

Então:

a) $f(0, y) = 0, \forall y \in X$.

b) *Seja (x_n) uma sequência em X. Se $x_n \to x$, então $f(x_n, y) \to f(x, y)$.*

Demonstração:

a) Veja que

$$f(0, y) = \frac{1}{2}\left(\|0 + y\|^2 - \|0\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|y\|^2 - \|y\|^2\right) = 0, \quad \forall y \in X.$$

b) Usando a continuidade da norma temos que se $x_n \to x$, então $\|x_n + y\| \to \|x + y\|$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, logo

$$\begin{aligned} \lim f(x_n, y) &= \lim \frac{1}{2}\left(\|x_n + y\|^2 - \|x_n\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.4. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. A norma $\|\cdot\|$ é induzida por um produto interno se, e somente se, ela satisfaz a lei do paralelogramo:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in X. \tag{1.8}$$

Demonstração: Suponha que a norma $\|\cdot\|$ seja induzida por um produto interno. Das condições de produto interno, tem-se que para quaisquer $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle + \langle y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que seja válida a lei do paralelogramo. Provaremos que a norma considerada provém de um produto interno. Para isto, consideraremos o caso em que X é um espaço vetorial sobre os reais, e posteriormente o caso quando X estiver definido sobre os complexos.

1° caso - $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Mostraremos que f definida na Proposição 1.3 por

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in X,$$

define um produto interno que induz a norma $\|\cdot\|$. De fato, sejam $x, y, z \in X$.

i) $f(x, x) = \|x\|^2 \geq 0$ e $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) Aplicando a lei do paralelogramo aos dois pares de vetores $(x+z), (y+z)$ e x, y, sucessivamente, resulta que

$$\begin{aligned}
f(x, z) + f(y, z) &= \frac{1}{2}\left(\|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|z\|^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|y+z\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+y+2z\|^2 - \|y\|^2 - 4\|z\|^2\right) \\
&= 2f\left(\frac{1}{2}(x+y), z\right), \quad \forall x, y, z \in X.
\end{aligned}$$

Escolhendo $y = 0$, pela Proposição 1.3, segue-se que $f(y, z) = 0$, daí obtemos

$$f(x, y) = 2f\left(\frac{x}{2}, z\right), \ \ \forall x, z \in X$$

implicando que

$$2f\left(\frac{1}{2}(x + y), z\right) = f\left(x + y, z\right).$$

Logo

$$f(x, z) + f(y, z) = f\left(x + y, z\right), \quad \forall x, y, z \in X. \tag{1.9}$$

iii) Agora, escolhendo $y = -x$ e substituindo em (1.9), novamente pela Proposição 1.3, segue-se que $f(x, z) = -f(-x, z)$. Considerando as relações anteriores e usando indução sobre n, resulta que

$$f(nx, y) = nf(x, y), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Vamos generalizar esta expressão para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Inicialmente, veja que se $m \in \mathbb{Z}$ e $m \neq 0$, para $n \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$f\left(\frac{n}{m}x, y\right) = f\left(n\frac{x}{m}, y\right) = nf\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{n}{m}m\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{n}{m}f\left(x, y\right).$$

Sendo $\mathbb{Q}$ denso em $\mathbb{R}$, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos escolher uma sequência de racionais (q_n) convergindo para α e usando a Proposição 1.3 temos

$$f(\alpha x, y) = \lim f(q_n x, y) = \lim q_n f(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Portanto,

$$f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in X.$$

iv) $f(x, y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|y + x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\right) = f(y, x).$

2° caso - $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Neste caso, vamos definir $F : X \times X \to \mathbb{C}$ por

$$F(x, y) = f(x, y) - if(x, iy), \quad \forall x, y \in X,$$

onde f é a função definida no caso anterior. Afirmamos que F define um produto interno que induz a norma considerada. Provaremos apenas as condições (P_1) e (P_4), as demais condições podem ser mostradas com argumentos similares aos do caso real.

Sejam $x, y \in X$. Temos que

$$\begin{aligned} F(x,x) &= f(x,x) - if(x,ix) \\ &= \|x\|^2 - i\left[\frac{1}{2}\left(\|x+ix\|^2 - \|x\|^2 - \|ix\|^2\right)\right] \\ &= \|x\|^2 - i\left[\frac{1}{2}\|x\|^2\left(|1+i|^2 - 1 - |i|^2\right)\right] \\ &= \|x\|^2 - i\left[\frac{1}{2}\|x\|^2 .0\right]. \end{aligned}$$

Logo, $F(x,x) = \|x\|^2 \geq 0$ e $F(x,x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Agora, vamos verificar que $F(x,y) = \overline{F(y,x)}$. Primeiro, vejamos que valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} f(ix,iy) &= \frac{1}{2}\left(\|ix+iy\|^2 - \|ix\|^2 - \|iy\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}|i|^2\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = f(x,y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x,iy) &= f(x,y) - if(x,i^2y) = f(x,y) - if(x,-y) = f(x,y) + if(x,y) \\ &= i(f(x,y) - if(x,iy)) = iF(x,y). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F(x,iy) &= f(x,y) - if(x,iy) = f(y,x) - if(iy,x) = f(y,x) - if(iy,x) \\ &= f(y,x) - if(-y,ix) = f(y,x) + if(y,ix) = \overline{F(y,x)}. \end{aligned}$$

Portanto, a norma $\|\cdot\|$ é induzida por um produto interno. $\square$

Definição 1.10. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que $T : D(T) \subset X \to Y$ é um operador linear, onde $D(T)$ é subespaço vetorial de X, quando para todos $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se:*

a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$;

b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Observação 1.5. *Ao que segue, utilizaremos a Definição 1.10, em sua forma equivalente, isto é, $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$, onde $x, y \in D(T)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

Observação 1.6. *Se* $T : D(T) \subset X \to Y$ *é um operador linear, então* $T(0) = 0$*. Basta notar que*

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \ \Rightarrow \ T(0) = 0,$$

onde usamos a linearidade de T *e a existência do simétrico* $-T(0) \in Y$*.*

Definição 1.11. *Define-se o núcleo de um operador linear* T*, como sendo o conjunto*

$$\ker(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}.$$

Teorema 1.2. *Seja* $T : D(T) \subset X \to Y$ *um operador linear. Então,*

a) *A imagem* $R(T)$ *é um subespaço vetorial de* Y*;*

b) *O núcleo* $\ker(T)$ *é um subespaço vetorial de* $D(T)$*.*

Demonstração:

a) Sejam $y_1, y_2 \in R(T)$; neste caso, existem $x_1, x_2 \in D(T)$, tais que $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$. Como $D(T)$ subespaço vetorial de X, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Sendo T linear,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T).$$

b) Se $x_1, x_2 \in \ker(T)$, então $T(x_1) = T(x_2) = 0$. Note que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = 0.$$

Portanto, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker(T)$. □

Teorema 1.3. *Seja* $T : D(T) \subset X \to Y$ *um operador linear. Então*

a) *A inversa* $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ *existe, se, e somente se,* $T(x) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$*;*

b) *Se* T^{-1} *existe, ele é um operador linear.*

Demonstração:

a) Se $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe, é em decorrência de T ser injetiva. Daí, considerando $x \in D(T)$ tal que $T(x) = 0$, tem-se que

$$T(x) = 0 = T(0) \ \Rightarrow \ x = 0,$$

pois T é injetora. Reciprocamente, se $T(x) = 0$ implicar $x = 0$, então T é injetora. De fato,

$$T(x) = T(y) \;\Rightarrow\; T(x) - T(y) = 0 \;\Rightarrow\; T(x - y) = 0 \;\Rightarrow\; x - y = 0 \;\Rightarrow\; x = y.$$

Logo, $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe.

b) Suponha que $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ existe. Sendo T linear , o Teorema 1.2, garante que o domínio de T^{-1}, ou seja, $R(T)$ é subespaço vetorial.

Considerando x_1 e $x_2 \in D(T)$ e suas respectivas imagens $T(x_1) = y_1$ e $T(x_2) = y_2$, então $x_1 = T^{-1}(y_1)$ e $x_2 = T^{-1}(y_2)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, veja que

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

e aplicando a inversa T^{-1}, resulta

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2).$$

Portanto, T^{-1} é linear. $\square$

Definição 1.12. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $T : D(T) \subset X \to Y$ um operador linear. T é dito limitado se existe um número $c > 0$ tal que para todo x em $D(T)$*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X\,. \tag{1.10}$$

Observe que se $x = 0$, ocorre a igualdade em (1.10). Vamos considerar a menor constante c, a qual denotaremos por $\|T\|$, satisfazendo $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq c$, para todo $x \in D(T) - \{0\}$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.13. *A norma de um operador linear limitado T é definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{1.11}$$

Caso $D(T) = \{0\}$, define-se $\|T\| = 0$.

Podemos reescrever (1.10) como

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|\,. \tag{1.12}$$

Observação 1.7. *Ao longo deste texto, também utilizaremos a fórmula alternativa para a norma de um operador linear limitado T, dada por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|T(x)\|, \tag{1.13}$$

que é válida, pois se $x \in D(T)$ é tal que $\|x\| = a$ e considerando $y \in D(T)$, com $y = \frac{1}{a}x$, $x \neq 0$, segue que

$$\|y\| = \frac{1}{a}\|x\| = 1$$

e por (1.11), temos

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{1}{a}\|T(x)\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\|\frac{1}{a}T(x)\right\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \|T(y)\|.$$

Trocando y por x, obtemos o resultado.

Denotaremos por $B(X,Y)$, o conjunto dos operadores lineares limitados de X em Y, ou seja,

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y : \ T \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

Quando $X = Y$, escreveremos $B(X)$.

Definição 1.14. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $S : D(S) \subset X \to Y$ é dita antilinear (ou conjugada linear), quando para todos $x, y \in D(S)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se*

a) $S(x+y) = S(x) + S(y)$;

b) $S(\alpha x) = \overline{\alpha}S(x)$.

Observação 1.8. *Observe que **a)** e **b)** é equivalente à $S(\alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}S(x) + \overline{\beta}S(y)$, $x, y \in D(S)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.*

O próximo teorema garante a equivalência entre o conceito de limitação e continuidade de operadores lineares. Por esse motivo, daqui em diante, nos referiremos a um operador linear como limitado ou contínuo sem distinção.

Teorema 1.4. *Sejam X, Y espaços normados. Se $T : D(T) \subset X \to Y$ é um operador linear, então*

a) *T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*

b) *Se T é contínuo em um ponto, então T é contínuo.*

Demonstração:

a) Suponhamos T contínuo em um arbitrário x_0 no domínio de T. Dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in D(T) \text{ e } \|x - x_0\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|T(x) - T(x_0)\| \leq \epsilon. \tag{1.14}$$

Tomando qualquer $y \neq 0$ em $D(T)$ e fazendo

$$x = x_0 + \frac{\delta y}{\|y\|}, \text{ então } x - x_0 = \frac{\delta y}{\|y\|},$$

daí

$$\|x - x_0\| = \left\| \frac{\delta y}{\|y\|} \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|y\| = \delta.$$

Pela linearidade de T e por (1.14) segue-se que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta y}{\|y\|} \right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|T(y)\| \leq \epsilon,$$

logo,

$$\|T(y)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta} \|y\|,$$

e portanto T é limitado.

Agora, vejamos a recíproca, isto é, se T é limitado, então T é contínuo.

De fato, se $T = 0$, o resultado é imediato. Então, seja $T \neq 0$, logo $\|T\| \neq 0$. Considere $\epsilon > 0$ e qualquer x_0 em $D(T)$, suponha que para todo $x \in D(T)$

$$\|x - x_0\| < \delta, \text{ onde } \delta = \frac{\epsilon}{\|T\|},$$

então como T é linear, obtemos que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \, \|x - x_0\| < \epsilon.$$

Como tomamos $x_0 \in D(T)$ arbitrário, concluímos que T é contínuo.

b) Na primeira parte da prova do item anterior, a continuidade de T em um ponto implicou sua limitação, o que por **a)** implica em continuidade. $\square$

Corolário 1.1. *Seja T um operador limitado. Então*

a) *Se $x_n \to x$, onde $(x_n) \subset D(T)$ e $x \in D(T)$, então $T(x_n) \to T(x)$.*

b) *O núcleo* $\ker(T)$ *é um subespaço fechado.*

Demonstração:

a) O Teorema 1.4 garante que T é contínuo, logo $x_n \to x$, implica que $T(x_n) \to T(x)$.

b) Que o $\ker(T)$ é um subespaço, já vimos no Teorema 1.2. Agora, seja $x \in \overline{\ker(T)}$, assim, existe $(x_n) \in \ker(T)$, tal que $x_n \to x$; daí pelo item anterior $T(x_n) \to T(x)$. Note também que $T(x_n) \to 0$, pois $T(x_n) = 0$. Logo, pela unicidade do limite $T(x) = 0$, ou seja, $x \in \ker(T)$. Desde que $x \in \overline{\ker(T)}$ foi arbitrário, concluímos que $\ker(T)$ é um subespaço fechado. □

Agora trataremos de um caso particular de operadores lineares, os denominados funcionais lineares. Por isso, todos os conceitos e resultados vistos para operadores, também são válidos para funcionais.

Definição 1.15. *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um funcional linear f é um operador linear com domínio $D(f)$ em X e imagem em $\mathbb{K}$.*

Seja X um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e $f : D(f) \subset X \to \mathbb{K}$ um funcional linear limitado, ou seja, existe $c > 0$, tal que para todo $x \in D(f)$,

$$|f(x)| \leq c \|x\| . \tag{1.15}$$

A norma de f é definida por

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{1.16}$$

ou

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| . \tag{1.17}$$

Segue de (1.15) e (1.16) que

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| . \tag{1.18}$$

Exemplo 1.2. *Seja $f_x : X \to \mathbb{K}$, dada por $f_x(y) = \langle x, y \rangle$, para todo $y \in X$, onde $x \in X$ está fixo. Observe que f_x é um funcional linear limitado:*

De fato, se $y_1, y_2 \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então

$$f_x(\alpha y_1 + \beta y_2) = \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \langle x, \alpha y_1 \rangle + \langle x, \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle = \alpha f_x(y_1) + \beta f_x(y_2).$$

Logo, f_x é linear e pela desigualdade de Cauchy- Schwarz, temos que

$$|f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall y \in H;$$

ou seja, f_x é um operador linear limitado. Considerando o $\sup\limits_{\|y\|=1} |f_x(y)| = \|f_x\|$, segue-se que

$$\|f_x\| \leq \|x\|. \tag{1.19}$$

Uma versão especial para o Teorema 1.4 é dada por:

Teorema 1.5. *Um funcional linear f, com domínio $D(f)$ em um espaço normado, é contínuo se, e somente se, é limitado.*

O conjunto de todos os funcionais lineares contínuos, $B(X, \mathbb{K})$, será chamado dual de X e o denotaremos por X^*, isto é,

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} : \ f \text{ é um funcional linear contínuo}\}.$$

Definição 1.16. *Seja X um espaço munido de um produto interno. Dois elementos x, y em X são ditos ortogonais, o que denotamos por $x \perp y$, quando $\langle x, y \rangle = 0$.*

Se E, F são subconjuntos de X, então $E \perp F$ indica que $x \perp y$ sempre que $x \in E$ e $y \in F$; se além disso, E e F são subespaços, diz-se que eles são ortogonais.

Denota-se por $E^{\perp}$ o conjunto de todos os elementos de X ortogonais a E, ou seja,

$$E^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in E\}$$

Lema 1.1. *Num espaço com produto interno $x \perp y$ se, e somente se,*

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}. \tag{1.20}$$

Demonstração: Suponha que $x \perp y$. Observe que se $x=0$ ou $y=0$, o resultado é imediato. Suponha que x, y sejam ambos não-nulos. Tem-se que

$$\begin{aligned}
0 \leq \|x+\alpha y\|^2 &= \|x\|^2 + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha} \langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha} \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\overline{\langle x, y\rangle} + \alpha\overline{\alpha} \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha \langle x, y\rangle} + \alpha\overline{\alpha} \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2Re\alpha \langle x, y\rangle + |\alpha|^2 \|y\|^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K};
\end{aligned}$$

como $x \perp y$, então $Re(\alpha \langle x, y\rangle) = 0$, daí

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2 \ \Rightarrow\ \|x+\alpha y\| \geq \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Reciprocamente, supondo que a desigualdade (1.20) ocorra, então

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 \leq \|x+\alpha y\|^2 &= \|x\|^2 + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha} \langle y, x\rangle + \alpha\overline{\alpha} \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha}(\langle y, x\rangle + \alpha \|y\|^2), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Em particular, escolhendo $\alpha = -\dfrac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}$, temos

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} \langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\left(\langle y, x\rangle - \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} \|y\|^2\right)$$

daí,

$$-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \ \Rightarrow\ -|\langle x, y\rangle|^2 \geq 0 \ \Rightarrow\ \langle x, y\rangle = 0.$$

□

Lema 1.2. *Dado um subconjunto E de um espaço vetorial com produto interno X, então $E^{\perp}$ é um subespaço vetorial fechado, e se E é também subespaço vetorial, então $E \cap E^{\perp} = \{0\}$.*

Demonstração: Sejam $x, y \in E^{\perp}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Note que

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \langle \alpha x, z\rangle + \langle \beta y, z\rangle = \overline{\alpha} \langle x, z\rangle + \overline{\beta} \langle y, z\rangle = \overline{\alpha}0 + \overline{\beta}0 = 0, \quad \forall z \in E.$$

Assim, $\alpha x + \beta y \in E^{\perp}$, o que mostra $E^{\perp}$ é subespaço de X.

Vejamos que $E^{\perp}$ é fechado. De fato, suponha que $(x_n) \subset E^{\perp}$, seja uma sequência convergente, digamos $x_n \to x$. Temos que $\langle x_n, y\rangle = 0, \forall y \in E$ e $\forall n \in \mathbb{N}$; daí, tomando o limite e usando a continuidade do produto interno, segue que

$$0 = \lim \langle x_n, y\rangle = \langle \lim x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

para todo $y \in E$. Portanto, $x \in E^{\perp}$, ou seja, $E^{\perp}$ contém seu fecho.

Agora, se E é subespaço vetorial de X , então $0 \in E$ e $0 \in E^{\perp}$, isto é $E \cap E^{\perp} \neq \emptyset$ e $E \cap E^{\perp} = \{0\}$, pois se existisse $x \neq 0$ em $E \cap E^{\perp}$, então

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

o que seria uma contradição. $\square$

Definição 1.17. *Um espaço vetorial X é dito ser soma direta de dois de seus subespaços X_1 e X_2, o que se denota por*

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

se todo $x \in X$ possui uma representação única

$$x = x_1 + x_2,$$

com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$.

Teorema 1.6. *Seja E um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert H. Então*

$$H = E \oplus E^{\perp}.$$

$E^{\perp}$ é chamado complemento ortogonal do subespaço E em H.

Demonstração: Definamos $\delta = \inf_{y \in E} \|x - y\|$, onde $x \in H$ e seja $(z_n) \subset E$, tal que $\|x - z_n\| \to \delta$.

Mostremos que (z_n) é de Cauchy. Usando a lei do paralelogramo (1.8), observe que

$$\|(z_n - x) + (z_m - x)\|^2 + \|(z_n - x) - (z_m - x)\|^2 = 2\,\|(z_n - x)\|^2 + 2\,\|(z_m - x)\|^2$$

ou seja,

$$\|z_n + z_m - 2x\|^2 + \|z_n - z_m\|^2 = 2\,\|(z_n - x)\|^2 + 2\,\|(z_m - x)\|^2,$$

logo,

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 &= 2\,\|(z_n - x)\|^2 + 2\,\|(z_m - x)\|^2 - \|z_n + z_m - 2x\|^2 \\ &= 2\,\|(z_n - x)\|^2 + 2\,\|(z_m - x)\|^2 - 4\left\|\frac{z_n + z_m}{2} - x\right\|^2. \end{aligned}$$

Sendo E subespaço de H, então $\dfrac{z_n + z_m}{2} \in E$, daí para quaisquer naturais n, m, tem-se

$$\delta \leq \left\| \frac{z_n + z_m}{2} - x \right\| \;\; \Rightarrow \;\; -4\delta^2 \geq -4 \left\| \frac{z_n + z_m}{2} - x \right\|^2,$$

logo,

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\,\|(z_n - x)\|^2 + 2\,\|(z_m - x)\|^2 - 4\delta^2.$$

Como $\|x - z_n\| \to \delta$, então quando $n, m \to \infty$, segue que $\|z_n - z_m\| \to 0$. Logo, (z_n) é de Cauchy e portanto converge para um elemento $z \in H$. Uma vez que E é fechado, segue-se que $z \in E$.

Pela continuidade da norma $\|x - z_n\| \to \|x - z\|$, mas também $\|x - z_n\| \to \delta$; Assim, $\delta = \|x - z\|$.

Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{K}$ e $y \in E$, temos que $(\alpha y - z) \in E$, logo

$$\|(x - z) + \alpha y\| = \|x + (\alpha y - z)\| \geq \delta = \|x - z\|,$$

implicando, pelo Lema 1.1, que $(x - z) \perp y$, para todo $y \in E$, ou seja, $x - z \in E^{\perp}$. Então obtemos a seguinte decomposição

$$x = z + (x - z), \;\; z \in E \text{ e } (x - z) \in E^{\perp}.$$

Suponha que exista outra decomposição $x = u + v$, com $u \in E$ e $v \in E^{\perp}$, assim

$$x = z + (x - z) = u + v \;\; \Rightarrow \;\; \underbrace{u - z}_{\in E} = \underbrace{(x - z) - v}_{\in E^{\perp}}.$$

Mas, $u - z \in E$ e $(x - z) - v \in E^{\perp}$, então $u - z \in E \cap E^{\perp}$ e $(x - z) - v \in E \cap E^{\perp}$ e como o Lema 1.2 garante que $E \cap E^{\perp} = \{0\}$, concluímos que

$$u = z \text{ e } v = (x - z).$$

Portanto, existe uma única decomposição para cada elemento $x \in H$, com queríamos mostrar. $\square$

Capítulo 2

Teorema de Lax-Milgram

Iniciamos este capítulo demonstrando o Teorema da Representação de Riesz. Ele garante que cada elemento em um espaço de Hilbert pode ser identificado com um único funcional linear contínuo e este pode ser representado por um produto interno.

Mais adiante, veremos que o Teorema de Lax-Milgram generaliza o Teorema da Representação de Riesz. Provaremos que em um espaço de Hilbert existe um único elemento associado a cada funcional do dual deste espaço, e este funcional possui uma representação mais geral, a saber de uma forma sesquilinear limitada e coerciva dada.

Teorema 2.1 (**Teorema da Representação de Riesz**). *Sejam H um espaço de Hilbert e H^* seu dual e considere a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & H & \longrightarrow & H^* \\ & x & \longmapsto & f_x, \end{array}$$

onde f_x é o funcional dado por $f_x(y) = \langle x, y \rangle, \forall y \in H$. Então, γ é uma isometria, antilinear e bijetora em H^*.

Demonstração: Pelo Exemplo 1.2, f_x é um funcional linear limitado, isto é, $f_x \in H^*$.

Mostremos γ é uma isometria. Desde que

$$\|x\|^2 = f_x(x) \leq |f_x(x)| \leq \|f_x\| \, \|x\| \, ,$$

obtemos

$$\|x\| \leq \|f_x\| \, . \tag{2.1}$$

Logo, de (1.19) e (2.1), $\|f_x\| = \|x\|$, isto é, $\|\gamma(x)\| = \|x\|$.

Para antilinearidade de γ, considere $x_1, x_2 \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Observe que

$$\begin{aligned} f_{\alpha x_1+\beta x_2}(y) &= \langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle \\ &= \langle \alpha x_1, y\rangle + \langle \beta x_2, y\rangle \\ &= \overline{\alpha}\,\langle x_1, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x_2, y\rangle \\ &= \overline{\alpha} f_{x_1}(y) + \overline{\beta} f_{x_2}(y), \quad \forall y \in H. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_{\alpha x_1+\beta x_2} = \overline{\alpha} f_{x_1}(y) + \overline{\beta} f_{x_2},$$

ou seja,

$$\gamma(\alpha x_1 + \beta x_2) = \overline{\alpha}\gamma(x_1) + \overline{\beta}\gamma(x_2).$$

Por fim, mostraremos a bijetividade de γ. Vejamos que se $f \in H^*$, pela aplicação γ, existe um único elemento x em H, ao qual f está associado, isto é, f é da forma f_x.

Se $f \in H^*$ for o funcional nulo, basta considerar $x = 0$, então $f = f_x$.

Suponha $f \neq 0$. Sendo f contínuo, pelo Corolário 1.1 o $\ker(f)$ é um subespaço vetorial fechado, então segue do Teorema 1.6 que

$$H = \ker(f) \oplus \ker(f)^{\perp}.$$

Como $\ker(f)$ é subconjunto próprio de H, pois do contrário $\ker(f) = H$ e daí teríamos $f(x) = 0$ para todo x em H, contradizendo o que foi suposto, então podemos considerar $z \in \ker(f)^{\perp}$, com $\|z\| = 1$. Usando a linearidade de f, note que

$$f(f(y)z - f(z)y) = f(y)f(z) - f(z)f(y) = 0, \quad \forall y \in H,$$

ou seja,

$$f(y)z - f(z)y \in \ker(f)$$

e daí

$$\begin{aligned} \langle z, f(y)z - f(z)y\rangle = 0 \;&\Rightarrow\; \langle z, f(y)z\rangle - \langle z, f(z)y\rangle = 0 \\ &\Rightarrow\; f(y)\,\langle z, z\rangle = f(z)\,\langle z, y\rangle \\ &\Rightarrow\; f(y)\,\|z\|^2 = \left\langle \overline{f(z)}z, y\right\rangle \\ &\Rightarrow\; f(y) = \left\langle \overline{f(z)}z, y\right\rangle, \quad \forall y \in H, \end{aligned}$$

logo, $f = \gamma(\overline{f(z)}z)$, isto é, γ é sobrejetora em H^*.

Agora, pela linearidade de γ

$$\begin{aligned}\gamma(x_1) = \gamma(x_2) \ &\Rightarrow \ \gamma(x_1) - \gamma(x_2) = 0 \\ &\Rightarrow \ \gamma(x_1 - x_2) = 0\end{aligned}$$

e sendo γ uma isometria, temos

$$0 = \|\gamma(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \ \Leftrightarrow \ x_1 = x_2;$$

do que concluímos a injetividade de γ. $\square$

Considerando o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

temos como caso particular do Teorema de Riesz o seguinte:

Exemplo 2.1. *Para todo funcional linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existe um único vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(y) = \langle x, y\rangle\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

De fato, seja $\rho = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Dado $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, podemos reescrevê-lo como combinação linear dos vetores de ρ, ou seja,

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n.$$

Aplicando o funcional f e usando sua linearidade, temos

$$\begin{aligned}f(y) &= f(y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n) \\ &= y_1f(e_1) + y_2f(e_2) + \ldots + y_nf(e_n) \\ &= f(e_1)y_1 + f(e_2)y_2 + \ldots + f(e_n)y_n;\end{aligned}$$

agora, basta considerar $x_i = f(e_i)$, com $i = 1, 2 \ldots, n.$. Assim, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e portanto

$$f(y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \langle x, y\rangle\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

Além disso, $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo (2.2) é único, pois se exitisse $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(y) = \langle z, y\rangle\,, \ \forall y \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow \ \langle z, y\rangle = \langle x, y\rangle \ \Rightarrow \ \langle z - x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow \ z = x.$$

Definição 2.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. Uma forma sesquilinear é uma aplicação $b : X \times Y \to \mathbb{K}$, linear na segunda variável e antilinear na primeira variável, isto é, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se*

(a) $b(x_1, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha b(x_1, y_1) + \beta b(x_1, y_2)$;

(b) $b(\alpha x_1 + \beta x_2, y_1) = \overline{\alpha} b(x_1, y_1) + \overline{\beta} b(x_2, y_1)$

Observação 2.1. *Quando tivermos $b : X \times Y \to \mathbb{R}$, onde X, Y estão sobre $\mathbb{R}$, então dizemos que b é bilinear, ou seja, linear na primeira e na segunda variável.*

Observação 2.2. *Note que se $x = 0$ ou $y = 0$, então $b(x, y) = 0$. De fato, suponha $x = 0$, assim*

$$\begin{aligned} b(0, y) = b(0 + 0, y) \;&\Rightarrow\; b(0, y) = b(0, y) + b(0, y) \\ &\Rightarrow\; b(0, y) - b(0, y) = b(0, y) + b(0, y) - b(0, y) \\ &\Rightarrow\; b(0, y) = 0. \end{aligned}$$

O caso $y = 0$ mostra-se de maneira similar.

Definição 2.2. *Seja $b : X \times Y \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear sobre os espaços normados X e Y. Se existe um número real c, tal que para todo $x \in X$ e $y \in Y$ tem-se*

$$|b(x, y)| \leq c \, \|x\| \, \|y\| \, , \tag{2.3}$$

dizemos que b é limitada e o número

$$\|b\| = \sup_{\substack{x \in X - \{0\} \\ y \in Y - \{0\}}} \frac{|b(x, y)|}{\|x\| \, \|y\|} = \sup_{\substack{\|x\| = 1 \\ \|x\| = 1}} |b(x, y)| \tag{2.4}$$

é chamado a norma de b.

Exemplo 2.2. *O produto interno é uma forma sesquilinear limitada, pois é linear na segunda variável e antilinear na primeira variável e sua limitação segue da Proposição 1.1, na qual tem-se*

$$|b(x, y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Definição 2.3. *Seja X um espaço normado. Uma forma sesquilinear $b : X \times X \to \mathbb{K}$ é coerciva, quando existir uma constante $c > 0$ tal que*

$$|b(x,x)| \geq c\|x\|^2, \quad \forall x \in X.$$

Proposição 2.1. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Se $b : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear limitada, então existe um único operador $T \in B(H_1, H_2)$ satisfazendo*

$$b(x,y) = \langle T(x), y \rangle, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2.$$

Além disso, $\|T\| = \|b\|$.

Demonstração: Para cada x em H_1, considere o funcional $L_x : H_2 \to \mathbb{K}$, dado por $L_x(y) = b(x,y)$. Por definição, L_x é linear e como por (2.4)

$$\frac{|b(x,y)|}{\|x\| \|y\|} \leq \|b\|, \quad \forall x \in H_1 - \{0\}, y \in H_2 - \{0\},$$

tem-se que

$$|L_x(y)| = |b(x,y)| \leq \|b\| \|x\| \|y\|,$$

logo, L_x é contínuo, e portanto $L_x \in H_2^*$.

O Teorema da Representação de Riesz garante a existência de um único $z \in H_2$, tal que

$$L_x(y) = \langle z, y \rangle, \quad \forall y \in H_2.$$

Daí, definindo $T : H_1 \to H_2$, por $T(x) = z$, temos

$$b(x,y) = L_x(y) = \langle z, y \rangle = \langle T(x), y \rangle, \quad \forall x \in H_1, y \in H_2 - \{0\}.$$

Vejamos que $T \in B(H_1, H_2)$:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, w \in H_1$. Note que para todo $y \in H_2$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha x + \beta w), y \rangle &= b(\alpha x + \beta w, y) \\
&= \overline{\alpha} b(x,y) + \overline{\beta} b(w,y) \\
&= \overline{\alpha} \langle T(x), y \rangle + \overline{\beta} \langle T(w), y \rangle \\
&= \langle \alpha T(x), y \rangle + \langle \beta T(w), y \rangle,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\langle T(\alpha x+\beta w),y\rangle=\langle \alpha T(x)+\beta T(w),y\rangle &\Leftrightarrow \langle T(\alpha x+\beta w),y\rangle-\langle \alpha T(x)+\beta T(w),y\rangle=0\\ &\Leftrightarrow \langle T(\alpha x+\beta T(w)-\alpha T(x)-\beta T(w),y\rangle=0,\end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $x,w\in H_1$ e $y\in H_2$. Então, pela Observação 1.3 há apenas uma alternativa de que

$$T(\alpha x+\beta w)-\alpha T(x)-\beta T(w)=0 \;\Rightarrow\; T(\alpha x+\beta w)=\alpha T(x)+\beta T(w),$$

isto é, T é linear.

Agora, observe que, $T=0$ se, e somente se, $b=0$. Então, suponha $b\neq 0$, daí

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}=\sup_{\substack{x\neq 0\\ T(x)\neq 0}}\frac{\|T(x)\|^2}{\|x\|\,\|T(x)\|}=\sup_{\substack{x\neq 0\\ T(x)\neq 0}}\frac{\langle T(x),T(x)\rangle}{\|x\|\,\|T(x)\|}\\ &= \sup_{\substack{x\neq 0\\ T(x)\neq 0}}\frac{b(x,T(x))}{\|x\|\,\|T(x)\|}\leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ T(x)\neq 0}}\frac{\|b\|\,\|x\|\,\|T(x)\|}{\|x\|\,\|T(x)\|}=\|b\|\,.\end{aligned}$$

Logo, T é um operador linear limitado.

Por outro lado, temos que

$$\|b\|=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|b(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|}=\sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{|\langle T(x),y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}}\frac{\|T(x)\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|}=\|T\|\,.$$

Como temos que $\|T\|\leq\|b\|$ e $\|b\|\leq\|T\|$, segue $\|T\|=\|b\|$.

Por fim, suponha que exista outro operador $S\in B(H_1,H_2)$, satisfazendo

$$b(x,y)=\langle S(x),y\rangle\,,\qquad \forall x\in H_1, y\in H_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle S(x),y\rangle=\langle T(x),y\rangle &\Rightarrow \langle S(x),y\rangle-\langle T(x),y\rangle=0\\ &\Rightarrow \langle S(x)-T(x),y\rangle=0,\qquad \forall x\in H_1, y\in H_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$S(x)-T(x)=0 \;\Rightarrow\; S(x)=T(x).$$

$\square$

Teorema 2.2 (Lax-Milgram). *Seja H um espaço de Hilbert. Se $b : H \times H \to \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear, limitada e coerciva, então para todo $f \in H^*$ existe um único $x_f \in H$ com*

$$f(y) = b(x_f, y), \quad \forall y \in H. \tag{2.5}$$

Demonstração: Sendo b uma forma sesquilinear limitada, a Proposição 2.1 garante a existência de um único operador $T \in B(H)$ satisfazendo

$$b(x, y) = \langle T(x), y \rangle, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.6}$$

A aplicação T admite uma inversa T^{-1}, que também é um operador linear contínuo. De fato, pela coercividade de b, temos que

$$c \|x\|^2 \leq |b(x, x)| = |\langle T(x), x \rangle| \leq \|T(x)\| \|x\|,$$

assim, temos a seguinte desigualdade

$$c \|x\| \leq \|T(x)\|, \quad \forall x \in H. \tag{2.7}$$

Se $T(x) = 0$, então $0 = \|T(x)\| \geq c \|x\|$; daí, $x = 0$ e pelo Teorema 1.3, segue que T é invertível e sua inversa T^{-1} é um operador linear.

Pela desigualdade (2.7), note que

$$\begin{aligned} x = T^{-1}(z) \quad &\Rightarrow \quad c \left\|T^{-1}(z)\right\| \leq \left\|T(T^{-1}(z))\right\| = \|z\| \\ &\Rightarrow \quad \left\|T^{-1}(z)\right\| \leq \frac{1}{c} \|z\|, \end{aligned}$$

do que concluímos que T^{-1} é limitado.

Vamos mostrar que a imagem $R(T) = H$, isto é, T é um operador sobrejetor.

Seja $z \in \overline{R(T)}$. Neste caso, existe uma sequência $T(x_n) \subset R(T)$, tal que

$$\lim T(x_n) = z, \tag{2.8}$$

Como $T(x_n)$ é convergente, ela é de Cauchy; logo, dado $\epsilon > 0$, existe n_0, de modo que

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| < c\epsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Novamente, por (2.7), observe que

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_m - x_n)\| = \frac{1}{c}\|T(x_m) - T(x_n)\| < \frac{1}{c}c\epsilon = \epsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy e por isso converge, digamos, $\lim x_n = x$. Desde que T é contínuo, $\lim T(x_n) = T(x)$, contudo, por (2.8), $\lim T(x_n) = z$; então, pela unicidade do limite $T(x) = z$, ou seja, $z \in R(T)$, e portanto $R(T)$ é fechada.

Sendo $R(T)$ um subespaço fechado de um espaço H de Hilbert, o Teorema 1.6 permite que escrevamos

$$H = R(T) \oplus R(T)^{\perp}.$$

Afirmamos que $R(T)^{\perp} = \{0\}$. Realmente, observe que se $y \in R(T)^{\perp}$, então

$$0 = |\langle T(y), y\rangle| = |b(y, y)| \geq c\|y\|^2,$$

logo $y = 0$. Daí, segue

$$H = R(T) \text{ e } D(T^{-1}) = H.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, para todo $f \in H^*$, existe um único $x \in H$, tal que

$$f(y) = \langle x, y\rangle, \quad \forall y \in H;$$

mas, por (2.6) temos que

$$b(T^{-1}(x), y) = \left\langle T(T^{-1}(x)), y\right\rangle = \langle x, y\rangle$$

então

$$f(y) = b(T^{-1}(x), y), \quad \forall y \in H.$$

Portanto, para cada funcional linear contínuo $f : H \to \mathbb{K}$, existe um único $x_f \in H$, satisfazendo

$$f(y) = b(x_f, y), \quad \forall y \in H,$$

onde escolhemos $x_f = T^{-1}(x)$. $\square$

Capítulo 3

Aplicações

Tendo em mãos o Teorema de Lax-Milgram, vamos usa-lo para garantir a existência e unicidade de solução fraca para alguns problemas de equações diferenciais. Aqui, admitiremos que o leitor possua noções básicas dos espaços de Sobolev, assim como da teoria envolvendo os espaços L^p.

No que segue, vamos considerar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e o espaço $L^2(\Omega)$ munido com a norma

$$|f|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

induzida pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ for um conjunto aberto e conexo, então diremos que Ω é um domínio.

Definição 3.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u(x)), \ \ \textit{em } \Omega \\ u = 0, \ \ \textit{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, se

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observação 3.1. *Podemos entender a motivação para a Definição 3.1 pelo seguinte fato: Se uma função $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ for solução fraca para (P), então pela Identidade de*

Green (ver A.6), segue que para qualquer $v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, *devemos ter que*

$$\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = 0,$$

pois, por (P) $u = 0$ *em* $\partial\Omega$, *daí*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v dx.$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.1. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado e* $f \in L^2(\Omega)$. *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em\ \Omega \\ u = 0, & em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_1}$$

Temos que a definição de solução fraca para este problema é

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Exemplo 3.2. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio e* $f \in L^2(\Omega)$. *Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & em\ \Omega \\ u = 0, & em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

O problema (P_2) é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta u = f - u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\overline{P}_2$}$$

Chamando $g = f - u$, observe que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca para $(\overline{P}_2)$, então

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega g v dx = \int_\Omega (f - u) v dx = \int_\Omega f v dx - \int_\Omega u v dx$$

ou seja, a definição de solução fraca para o Exemplo 3.2 é

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Problema 3.1. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado. Para cada* $f \in L^2(\Omega)$, *o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & em\ \Omega \\ u = 0, & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_1}$$

tem única solução fraca.

Demonstração: Sendo Ω limitado, podemos considerar o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Definindo $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$b(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \tag{3.1}$$

ou seja, $b(u,v) = \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}$, então b é bilinear e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|b(u,v)| = \left|\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

isto é, b é limitada. Por outro lado, se em (3.1) fizermos $u = v$, então

$$|b(u,u)| = \left|\langle u, u\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right| = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

logo, b é coerciva.

Agora, vamos definir $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde

$$F(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Vejamos que F é um funcional linear contínuo. De fato, note que para quaisquer $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} F(\alpha v_1 + \beta v_2) &= \int_\Omega f[\alpha v_1 + \beta v_2] dx \\ &= \alpha \int_\Omega f v_1 dx + \beta \int_\Omega f v_2 dx \\ &= \alpha F(v_1) + \beta F(v_2). \end{aligned}$$

Logo, F é linear e como

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega f v dx\right| \leq \int_\Omega |f v| \, dx,$$

segue pela desigualdade de Hölder (ver A.5) que

$$|F(v)| \leq |f|_2 \, |v|_2 .$$

Por outro lado, a desigualdade de Poincaré (ver A.4), garante que existe $c > 0$, com c dependendo de Ω, tal que

$$|f|_2 \, |v|_2 \leq c \, |f|_2 \, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \, .$$

Logo,

$$|F(v)| \leq K \, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \, , \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde chamamos $K = c \, |f|_2$. Portanto, F é contínuo.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert e b uma forma bilinear, limitada e coerciva, pelo Teorema de Lax-Milgram, para $F \in (H_0^1(\Omega))^*$, existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando

$$b(u, v) = F(v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$u \in H_0^1(\Omega) \;\; \text{e} \;\; \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, existe única solução fraca este problema. $\square$

Problema 3.2. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio. Para cada $f \in L^2(\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \;\; em \; \Omega \\ u = 0, \;\; em \; \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_2}$$

tem única solução fraca.

Demonstração: Considere $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Vamos definir as seguintes aplicações: $b : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$b(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx, \tag{3.2}$$

e $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, por

$$F(v) = \int_\Omega f v dx.$$

Vejamos que b é uma forma bilinear, limitada e coerciva. De fato, temos que

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx,$$

logo b é bilinear e como no problema anterior, sua limitação segue por Cauchy-Schwarz, ou seja,

$$|b(u,v)| = \left|\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

e se, em (3.2), fizermos $u = v$ então

$$|b(u,u)| = \left|\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega)}\right| = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

concluímos que b é coerciva.

A seguir, provaremos que $F \in [H_0^1(\Omega)]^*$. Realmente, que F é linear vimos no problema anterior. Agora, vejamos sua continuidade. Novamente, usando a desigualdade Hölder A.5, observe que

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega fvdx\right| \leq \int_\Omega |fv|\, dx \leq |f|_2\, |v|_2 \leq |f|_2\, \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

chamando $k = |f|_2$, temos que

$$|F(v)| \leq k\, \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

como queríamos mostrar.

Assim, podemos concluir pelo Teorema de Lax-Milgram, que existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$, satisfazendo

$$b(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

ou ainda,

$$u \in H_0^1(\Omega) \;\text{ e }\; \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dx = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, existe única solução fraca para (P_2). $\square$

Problema 3.3. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Considere o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + au = f, \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_3}$$

onde $a \geq 0$ e $f \in L^2(\Omega)$. Para cada $f \in L^2(\Omega)$ o Problema (P_3) tem única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

Temos que a definição de solução fraca para (P_3) é

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + a\int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

No que segue, consideremos $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Defininamos

$$F(v) = \int_\Omega fv dx \quad \text{e} \quad b(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + a\int_\Omega uv dx.$$

Pela demonstração do Problema (P_1), temos que $F \in [H_0^1(\Omega)]^*$. Basta mostrarmos que b é uma forma bilinear limitada e coerciva.

Reescrevamos b como

$$b(u,v) = \langle \nabla u \cdot \nabla v \rangle_2 + a \langle u \cdot v \rangle_2 .$$

É imediato que b é bilinear. Agora, note que

$$|b(u,v)| = |\langle \nabla u \cdot \nabla v \rangle_2 + a \langle u \cdot v \rangle_2| \leq |\langle \nabla u \cdot \nabla v \rangle_2| + a |\langle u \cdot v \rangle_2| .$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue-se que

$$|b(u,v)| \leq |\nabla u|_2 \, |\nabla v|_2 + a \, |u|_2 \, |v|_2$$

Mas,

$$|\nabla u|_2 \, |\nabla v|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx\right)^{1/2} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

e pela desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned} |u|_2 \, |v|_2 &= \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx\right)^{1/2} \\ &\leq c \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx\right)^{1/2} \\ &= c \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

para algum $c > 0$ dependendo de Ω. Consequentemente,

$$|b(u,v)| \leq (1 + ac) \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} ,$$

ou seja, b é limitada e como $a > 0$ segue-se

$$|b(u,u)| = |\nabla u|_2^2 + a\,|u|_2^2 \geq |\nabla u|_2^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2\,,$$

o que nos mostra a coercividade de b.

Portanto, aplicando o Teorema de Lax-Milgram obtemos o resultado. $\square$

Apêndice A

Resultados Gerais

Agora, apresentamos algumas definições e resultados relacionados a teoria utilizada no capítulo anterior. Aqui não faremos a prova de tais resultados, mas estas podem ser encontradas nas referências [1], [2], [3] e [6].

Seja u uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e considere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Define-se o operador derivação por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ denota a ordem da derivada da função u. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, então define-se $D^\alpha u = u$.

Definição A.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se o suporte de u como sendo*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Definição A.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$ é definido por:*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ e } supp(u) \subset\subset \Omega\},$$

onde $\subset\subset$ significa que $supp(u)$ está compactamente contido em Ω.

Definição A.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Define-se o espaço $L^p_{loc}(\Omega)$ como sendo*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in L^p(K), \forall K \subset\subset \Omega\}$$

Definição A.4. *Dizemos que uma função $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ tem derivada fraca de ordem α, se existe $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx = \int_\Omega v\varphi dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Neste caso, $D^\alpha u = v$.

Definição A.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Define-se o Gradiente e o Laplaciano de u, respectivamente, por*

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$

onde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$.

Definição A.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Define-se o espaço $H^1(\Omega)$ por:*

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\right\}.$$

onde $\partial u/\partial x_i$ representa a derivada fraca.

O produto interno em $H^1(\Omega)$ é dado por:

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)dx, \tag{A.1}$$

e induz a norma

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{A.2}$$

Definição A.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O espaço $H_0^1(\Omega)$ é definido como sendo*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\|_{H^1(\Omega)}}.$$

O produto interno usual de $H_0^1(\Omega)$ é dado por:

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx. \tag{A.3}$$

Desigualdade de Poincaré. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Existe $c > 0$, onde c depende de Ω, tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{A.4}$$

Observação A.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, em alguma direção, então a função $\|\cdot\| : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde $u \mapsto \|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}$, determina uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a norma (A.2), a qual denotaremos por $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$.*

Teorema A.1. *O espaço $(H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1})$ é um espaço de Hilbert.*

Desigualdade de Hölder. *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ e $1 \leq p, q < \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \, dx \leq |f|_p \, |v|_q \, . \tag{A.5}$$

Identidade de Green. *Se $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ e $v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} dS. \tag{A.6}$$

Conclusão

Como geralmente ocorre na Matemática, podem existir várias possibilidades para se solucionar um problema. Alguns "caminhos" podem ser mais acessíveis, outros mais dificultosos. Levando em consideração todo estudo, aqui realizado, também não foi diferente. Pudemos observar como foi de extrema importância a existência do Teorema de Lax-Milgram para a resoluções dos problemas de equações diferenciais abordados; não descartando a hipótese de haver outros métodos, talvez até mais facilitadores, mas ressaltando como o Teorema de Lax-Milgram foi essencial para os fins desejados.

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, Robert G. *The Elements of Integration*. New York: John Wiley & Sons, 1965.

[2] BREZIS, Haim. *Analyse fonctionnelle-Théorie et applications*. Paris: Masson 1987.

[3] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. V. 2.

[4] LOURÊDO, Aldo Trajano et al. *Cálculo Avançado*. Campina Grande: Eduepb, 2010.

[5] KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[6] MEDEIROS, Luis Adauto da Justa; MIRANDA, Manuel Milla. *Espaços de Sobolev*. Rio de Janeiro:UFRJ, 2010.

[7] OLIVEIRA, César R. de. *Introdução à Análise Funcional*. 2 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008.