UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM FÍSICA

RENALY MARIA PEREIRA DE SOUSA

O MÉTODO DE DEFORMAÇÃO COMO FACILITADOR NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE GARDNER

CAMPINA GRANDE
2020

RENALY MARIA PEREIRA DE SOUSA

O MÉTODO DE DEFORMAÇÃO COMO FACILITADOR NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE GARDNER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alex da Silva

CAMPINA GRANDE
2020

S725m Sousa, Renaly Maria Pereira de.

O método de deformação como facilitador na resolução da equação de Gardner [manuscrito] / Renaly Maria Pereira de Sousa. - 2020.

31 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Alex da Silva , Coordenação do Curso de Física - CCT."

1. Sistemas não-lineares. 2. Método de deformação. 3. Equação de Gardner. 4. Sóliton. I. Título

21. ed. CDD 530

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

RENALY MARIA PEREIRA DE SOUSA

O MÉTODO DE DEFORMAÇÃO COMO FACILITADOR NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE GARDNER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Física.

Aprovada em: __14_/_09_/_2020__.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Alex da Silva (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Jean Paulo Spinelly da Silva
____

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Ivonete B dos Santos
____

Profa. Dra. Ivonete Batista dos Santos
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

A Deus, dono de todo conhecimento, por me permitir ser capaz.

Aos meus pais, por todo o apoio que sempre me deram em todos os aspectos e por serem grandes incentivadores nos estudos durante toda minha vida.

Ao meu noivo, Marcos Antonio, por todo o apoio e compreensão.

Ao meu orientador Alex da Silva, pela oportunidade em todos os projetos de pesquisa, pelos conhecimentos que me proporcionou e sua disposição em ajudar e orientar.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Física da UEPB, em especial, Antonio Pinto, Jean Spinelly, Ana Paula Bispo e Elialdo Andriola (*in memoriam)*, pela amizade e contribuição ao longo da minha jornada acadêmica.

Ao CNPq, pelo patrocínio dos projetos de pesquisa que participei, incluindo a pesquisa relacionada a este trabalho.

Aos meus amigos, que contribuíram para minha formação.

RESUMO

Grande parte dos avanços na ciência ocorreu devido as investigações de sistemas não-lineares, pois a maioria dos fenômenos são descritos a partir desses sistemas. No caso dos fenômenos físicos, temos algumas equações com solução tipo Sóliton: a equação Korteweg de Vries - KdV, que aparece em vários contextos da física; a equação modificada da KdV - mKdV e a Equação de Gardner, que tem uma vasta aplicação em diversos fenômenos físicos. A busca de uma solução para esta última durou quase meio século, pois é uma combinação das equações KdV e mKdV, com solução bastante complexa. Com isso, nos últimos anos, diversos autores sugeriram várias abordagens para resolver estas equações não-lineares, e também alguns métodos foram introduzidos para encontrar as soluções para a Equação de Gardner. São métodos eficientes e técnicos, mas de difícil compreensão. Um método proposto recentemente é bastante simples, útil e direto na obtenção de solução tipo Sóliton para sistemas não-lineares: o Método de Deformação, que consiste em gerar novos modelos a partir do potencial e da solução de um modelo conhecido, com o auxílio de uma função deformadora apropriada, gerando soluções analíticas sem precisar recorrer a métodos computacionais ou análise numérica. Desse modo, o objetivo desse trabalho foi encontrar a solução para a Equação de Gardner utilizando o Método de Deformação. Para isso, foram realizadas revisões bibliográficas de artigos e livros que abordam os conceitos necessários para o seu desenvolvimento. Em seguida, mostramos a eficácia do Método de Deformação aplicando-o nas equações KdV e mKdV e, a partir dele, foi possível encontrarmos a solução solitônica da Equação de Gardner de maneira simples e direta.

Palavras chave: Sistemas não-lineares. Equação de Gardner. Método de Deformação. Sóliton.

ABSTRACT

Most of the advances in science have been due to investigations of nonlinear systems, for the main of phenomena are taken from these systems. In the case of physical phenomena, we have some equations with solution type soliton: the equation Korteweg de Vries - KdV, which appears in various contexts of physics; modified KdV equation - mKdV and Gardner equation, which has wide application in various physical phenomena. The search for a solution to the latter lasted almost half a century, because it is a combination of the equations KdV and KdV, with a very complex solution. Thus, in recent years, several authors have suggested various approaches to solve these nonlinear equations, and also some methods were introduced to find the solutions to the Gardner equation. They are efficient and technical methods, but difficult to understand. A recently proposed method is quite simple, useful and straightforward in obtaining soliton-type solution for nonlinear systems: The Deformation Method, which consists in generating new models from the potential and solution of a known model, with the aid of an appropriate deforming function, generating analytical solutions without resorting to computational methods or numerical analysis. Thus, the objective of this work was to find the solution to the Gardner equation using the Deformation Method. For this, bibliographic reviews of articles and books were carried out that address the concepts necessary for its development. We then show the effectiveness of the Deformation Method by applying it to the equations KdV and mKdV, and from this method it was possible to find the solitonic solution of the Gardner equation simply and directly.

Keywords: Nonlinear systems. Gardner Equation. Deformation Method. Soliton.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, grande parte dos avanços na ciência ocorreu devido as investigações de sistemas não-lineares. Isto está relacionado ao fato que maioria dos fenômenos físicos, químicos e biológicos são descritos a partir de sistemas não-lineares.

No caso dos fenômenos físicos, podemos destacar algumas equações que possuem solução tipo Sóliton: a equação Korteweg de Vries - KdV, que aparece em vários contextos da física, sendo uma das mais importantes da teoria não-linear; a equação modificada da KdV - mKdV e a Equação de Gardner, que tem uma vasta aplicação em diversos fenômenos físicos, tais como: ondas de água em lugares rasos (WAZWAZ, 2010), ondas de água em lugares profundos (DAOUI9; TRIKI, 2014), em dinâmica de fluidos (JAWAD, 2012), em fenômeno de onda em plasma (HEREMAN; NUSEIR, 1997), etc.

A busca de uma solução para a Equação de Gardner durou quase meio século, isto porque, essa equação é uma combinação que envolve a Equação KdV e mKdV, assim sua solução é bastante complexa. Com isso, nos últimos anos, diversos autores sugeriram várias abordagens para resolver estas equações não-lineares, entre elas podemos destacar o Método de Hirota, o Método da Tangente hiperbólica, o método do seno e cosseno, entre outros. Dentro desse contexto, alguns métodos foram introduzidos para encontrar as soluções da Equação de Gardner. São métodos eficientes e técnicos, mas de difícil compreensão.

Um método proposto recentemente é bastante simples, útil e direto na obtenção de solução tipo Sóliton para sistemas não-lineares: o Método de Deformação (SILVA, 2008). Esse método tem gerado muitos resultados satisfatórios na busca de soluções analíticas tipo Sólitons para sistemas não-lineares como KdV, mKdV e Boussinesq, pois ele consiste em gerar novos modelos a partir do potencial e da solução de um modelo conhecido, com o auxílio de uma função deformadora apropriada, gerando soluções analíticas sem precisar recorrer a métodos computacionais ou análise numérica.

Desse modo, neste trabalho, mostramos a eficácia do Método de Deformação e, a partir dele, encontramos a solução solitônica para a Equação de Gardner. Para isso, o método foi aplicado para encontrar as soluções das equações KdV e mKdV, como feito por Silva (2008), assim, foi possível verificar como o método torna a resolução dessas equações mais simples. Em seguida, o método foi utilizado para encontrar a solução da Equação de Gardner de maneira simples e direta.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os sistemas não-lineares descrevem grande parte dos fenômenos químicos, físicos e biológicos. “Os sistemas não-lineares apresentam uma descrição mais realista dos fenômenos naturais do que os sistemas lineares” (SAVI, 2006, p. 25). Essas não-linearidades podem ser geométricas ou físicas e estão associadas ao movimento e comportamento de um sistema.

Sabe-se que as equações diferenciais podem ser divididas entre as Equações Diferenciais Parciais (EDP’s), que possuem características espaço-temporais de um sistema, e as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO’s), que descrevem as características temporais de um sistema. Desse modo, muitos sistemas físicos não-lineares são descritos por EDP’s.

Savi (2006) cita o Sistema de *Duffing*, o Sistema de *Van der Pol*, o Sistema com Memória de Forma, o Sistema Não-Suave e o Sistema de Lorentz, como exemplos desses sistemas não-lineares descritos por EDP’s. A importância da não-linearidade surge desde a equação de Navier-Stokes e tem uma aplicação muito ampla na área da física:

> Naturalmente a importância da não-linearidade começa com a equação de Navier-Stokes e passando para as teorias da gravitação e dos campos quantizados, com aplicações em física nuclear e em física de partículas, embora o tratamento destes efeitos fossem muito difíceis, exceto como perturbações da solução básica da teoria linear. (SILVA, 2008, p. 19)

Ainda, segundo Silva (2008), as não-linearidades podem resultar em novos fenômenos, os quais não podem ser obtidos via teoria da perturbação: como no caso das ondas tipo Sóliton.

2.1 Sólitons e Ondas solitárias

Em agosto de 1834, um engenheiro escocês J. S. Russel observava um barco sendo puxado por dois cavalos, um em cada margem do canal de Edimburgo, quando, de repente, a embarcação parou. O que aconteceu com a massa de água, deixou Russel curioso:

> A massa d’água que esta arrastava, no entanto, continuou, foi perseguida a galope, com velociddade constante de cerca de quinze quilômetros por hora, por mais de três quilômetros. O interesse de Russel nesta estranha onda que não se deformara por uma razoável distância não se esgotou nesse dia. [...] Com uma série de experimentos descobriu também uma interessante relação entre a altura da onda a (em relação ao nível de repouso da água), chamada de amplitude, em um canal de profundidade h, e sua velocidade de propagação c (CHALUB; ZUBELLI, 2001).

A equação proposta por Russel para descrever essas ondas era da forma:

$$c^2 = g(h + a) \tag{1}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Pela expressão de Russel podemos observar que, quanto maior for sua amplitude maior será sua velocidade de propagação.

Dessa forma, Russel descobriu e estudou as ondas solitárias. Porém, a equação proposta por Russel, de acordo com Chalub e Zubelli (2001), estava em contradição à outra encontrada por argumentos puramente teóricos por Airy. Assim, Lord Rayleigh e Boussinesq tentaram resolver de uma vez por todas o problema, o que só veio a ocorrer, de fato, em 1895, com o trabalho de Korteweg e de Vries.

Do ponto de vista matemático, as ondas solitárias podem ser classificadas como:

> Soluções especiais de certas equações em Derivadas Parciais (EDPs), que surgem de um balanço perfeito entre efeitos lineares dispersivos, e efeitos não-lineares; o que permite a propagação não dispersiva de perturbações localizadas de energia, através de meios contínuos sem modificar seu perfil (SILVA, 2008, p. 19).

Silva (2008), ainda cita que, no caso em que essas (EDP's) forem completamente integráveis, estas soluções são conhecidas como Sólitons e apresentam a importante característica de serem soluções não perturbativas (não podem ser obtidas por perturbação).

"Sóliton é o nome dado a certos tipos de fenômenos ondulatórios não lineares e altamente estáveis, também chamados de ondas solitárias" (CARDOSO JÚNIOR, 1980, p. 696).

Segundo Chalub e Zubelli (2001), a palavra Sóliton foi cunhada por M. Krustal ao estudar soluções periódicas da KdV. Com esse termo, fundiu-se o conceito de *onda solitária* com a terminação *on* - partícula. Dessa forma, muitas definições podem ser formuladas para Sólitons, como a solução de uma EDP não-linear que representa uma onda de forma permanente, é localizada e mantém sua identidade.

Os Sólitons ainda podem ser classificados a partir dos seguintes pontos de vista:

> Do ponto de vista físico, sólitons representam fenômenos que possuem características de serem não-lineares, localizados e interagem fortemente mantendo sua identidade. Esses sólitons são ondas solitárias em forma de pulsos que se deslocam de um local para outro com velocidade constante sem perder energia, e conserva seu formato quando interagem com outro sóliton, possuindo também comportamento de partícula. Do ponto de vista matemático, sólitons são soluções de uma classe de equações diferenciais não-lineares, cujo interesse se deve ao fato de muitos sistemas físicos complexos, poderem ser aproximadamente descritos por estas equações, e principalmente pelo fato de, apesar de serem não-lineares, possuírem soluções analíticas (SILVA, 2018, p. 3)

Chalub e Zubelli (2001) apontam que, além das ondas em canais rasos, já citadas, muitos outros Sólitons podem ser observados diretamente na natureza. Um exemplo particularmente grandioso é o da *pororoca*, no Rio Amazonas, que ocorre quando, devido a peculiaridades com a maré, a água do mar invade o rio, se propagando por alguns quilômetros foz adentro. Um exemplo em biofísica é dado pela propagação do pulso: a batida do coração propaga-se podendo ser sentida à distância, no punho ou no pescoço, por exemplo.

Alguns exemplos de equações que admitem solução tipo Sóliton, são as equações KdV e mKdV e a Equação de Gardner.

2.2 Equações com solução tipo Sóliton

2.2.1 A equação de Korteweg e de Vries – KdV e a equação modificada da KdV – mKdV

A Equação KdV recebe esse nome em homenagem aos dois estudiosos que a deduziram: Korteweg e de Vries. Segundo Chalub e Zubelli (2001), foi escrita originalmente para modelar a propagação de uma onda longa (amplitude muito menor que seu comprimento) em um canal raso. Foi deduzida pela dupla tomando a equação básica de dinâmica de fluidos, a equação de Navier-Stokes, e considerando uma expansão perturbativa para a propagação de uma onda com as características descritas acima.

Em primeira aproximação, encontra-se uma equação de onda unidirecional, onde as perturbações se propagam com velocidade constante c, dada por

$$c = \sqrt{gh} \tag{2}$$

Em segunda aproximação, em um referencial que se move paralelo à propagação da onda, a equação encontrada é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3}{2}\frac{c}{h}\, u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{ch^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{3}$$

onde *u* é a elevação da água, *x*, posição, e *t*, tempo, obtidos por um observador em movimento e os termos $u\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ descrevem respectivamente a não linearidade. Fazendo as devidas transformações, a Equação KdV fica escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{4}$$

ou ainda

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

A equação modificada da KdV conhecida como Equação mKdV, é aplicada em diversas áreas da física:

> Ela aparece no contexto das ondas eletromagnéticas, em filmes de tamanho quantizado, em colisões de plasmas, em redes de fônons harmônicos. Também encontramos aplicações da mKdV em interfaces de ondas entre dois líquidos com profundidades variando gradualmente, em linhas de transmissão, em barreira de Schottky, em íons (sólitons) acústicos, média elástica e por fim é aplicada também em problemas de fluxo de tráficos (SILVA, 2008, p. 34).

Esta equação possui o formato:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{5}$$

ou ainda

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

Tanto a equação KdV quanto a mKdV, como cita Silva (2008), admitem solução do tipo onda viajante, na forma

$$u(x,t) = u(z) = u(kx - \omega t) \tag{6}$$

e suas soluções tipo *onda solitária,* o *Sóliton* da equação KdV e o *Sóliton* da equação mKdV, *quando c*>0, serão, respectivamente:

$$u(x,t) = A\operatorname{sec}h^2(kx - \omega t) \tag{7}$$

$$u(x,t) = \pm k\tanh(kx - \omega t) \tag{8}$$

2.2.2 A Equação de Gardner e suas aplicações

A Equação de Gardner possui a seguinte forma

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 6(\mathrm{b}^2 v + a^2 v^2)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

Como cita Silva (2018), essa equação é chamada equação combinada da KdV-mKdV, pois quando (*a* = 0) reproduzimos a Equação KdV, e quando (*b* = 0) reproduzimos a Equação mKdV. É uma equação que tem uma vasta aplicação em diversos fenômenos físicos, tais como: ondas de água em lugares rasos (WAZWAZ, 2010), ondas de água em lugares profundos (DAOUI; TRIKI, 2014), em dinâmica de fluidos (JAWAD, 2012) e em fenômeno de onda em plasma (HEREMAN; NUSEIR, 1997).

A busca pela solução da Equação de Gardner durou bastante tempo devido a sua complexidade. Desse modo, como cita Silva (2018), vários métodos já foram introduzidos para encontrar suas soluções, tais como: o Método da Expansão (G'/G) (DARVISHI et al, 2012), o Método da Tangente (WAZWAZ, 2005), o Método em termo de Kink (WAZWAZ, 2007) e, ainda, alguns cientistas utilizam funções trigonométricas hiperbólicas (TAGHIZADE; NEIRAMEH, 2010) com a finalidade de amenizar as dificuldades para encontrar tais soluções. Evidentemente, outros métodos também são utilizados. Todos eles são métodos indiretos, eficientes, técnicos, mas de difícil compreensão.

3 O MÉTODO DE DEFORMAÇÃO

O Método de Deformação (SILVA, 2008) tem sido utilizado para encontrar soluções analíticas tipo Sólitons para sistemas não-lineares do tipo KdV, mKdV, pKdV, Boussinesq etc. Esse método é bastante simples, útil e direto na obtenção de solução tipo Sóliton para sistemas não-lineares a partir de uma equação linear. Assim, o Método de Deformação, como citam Souza e Rodrigues (2019), consiste em gerar novos modelos a partir do potencial e da solução de um modelo conhecido, com o auxílio de uma função deformadora apropriada, gerando soluções analíticas sem precisar recorrer a métodos computacionais ou análise numérica.

Tendo em vista que as equações a serem deformadas possuem um potencial associado a elas, utilizando uma função deformadora apropriada, será possível construir um novo potencial associado para cada uma dessas Equações. Se esse novo potencial associado for semelhante ao potencial associado visto anteriormente, isso significa que a função deformadora utilizada foi apropriada. Sendo apropriada, basta tomar a inversa dessa função deformadora, para encontrar a solução Solitônica da Equação que deformamos. A construção do modelo desse novo potencial associado, pode ser visto em seguida.

Como mostra Silva (2008), considerando a equação hamiltoniana em terceira ordem nas derivadas espaciais na seguinte forma:

$$u_t + (f(u))_x + \alpha u_{xxx} = 0, \tag{10}$$

onde α é uma constante e a função *f(u)* é um monômio da variável dinâmica *u(x,t)* que, dependendo da sua formação, é linear ou não-linear.

Assumindo que a Equação (10) admite solução do tipo ondas viajantes, como mostra a Equação (6), no caso da equação KdV, $f(u) = 3u^2$ e α =1, teremos:

$$\alpha u_{xxx} + [f(u)]_x - \frac{\omega}{k} u_x = 0, \tag{11}$$

que integrando, resulta em:

$$u_{xx} = \frac{\omega}{\alpha k} u - \frac{1}{\alpha} f(u) + \beta = V'(u), \tag{12}$$

onde β é uma constante de integração e *V'(u)* é dado por:

$$V'(u) = \frac{dV(u)}{du}, \tag{13}$$

e é denominado, em Teoria de Campos, como Potencial.

Supomos a seguir que exista outro sistema dinâmico em terceira ordem na variável dinâmica *v* e que o interesse é determinar sua solução tipo ondas viajantes na forma:

$$v(x,t) = v(kx - \omega t). \tag{14}$$

Semelhante as Equações (12) e (13), consideramos que o novo sistema dinâmico admita solução tipo ondas viajantes. Assim, sua equação em segunda ordem produz:

$$v_{xx} = \tilde{V}(v) = \frac{d\tilde{V}(v)}{dv}. \tag{15}$$

Considerando:

$$u = g(v), \tag{16}$$

o potencial associado para o novo modelo será:

$$\tilde{V}(v) = \frac{V[g(v)]}{\left[\frac{dg(v)}{dv}\right]^2} \tag{17}$$

Explicitamente, a Equação (16) é obtida partindo da equação de 2ª ordem, Equação (12), e multiplicando pelo fator integrante (du/dx), temos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] = \frac{dV}{dx}, \tag{18}$$

que, integrando, resulta em:

$$\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{2V(u).} \tag{19}$$

Analogamente, para o segundo modelo, visto na equação (15), quando multiplicado pelo fator integrante (dv/dx), temos

$$\frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{2\tilde{V}(v).} \tag{20}$$

Derivando Equação (16), temos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dv}\frac{dv}{dx}. \tag{21}$$

Substituindo as Equações (19) e (20) na Equação (21), temos:

$$\pm\sqrt{2V(u)} = \pm\sqrt{2\tilde{V}(v)}\frac{dg}{dv} \tag{22}$$

e, finalmente, tomando o quadrado de ambos os lados da Equação (22) obtemos a Equação (17). Desse modo, comparando os dois sistemas dinâmicos, se existir uma solução tipo onda viajante para o primeiro sistema dinâmico, então também haverá uma solução tipo ondas viajantes para o segundo:

$$v(x,t) = v(kx - \omega t) = g^{-1}[u(kx - wt)]. \quad (23)$$

3.1 Solucionando a Equação KdV

3.1.1 Solução da Equação KdV pelo método usual

Como visto, a equação KdV possui o formato:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (24)$$

onde

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{e} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Podemos perceber que equação KdV, Equação (24) possui um termo *não-linear ($6uu_x$)* e um termo *dispersivo* (u_{xxx}). Além disso, admite solução do tipo onda viajante na forma:

$$u(x,t) = u(z) = u(kx - \omega t), \quad (25)$$

onde $z = kx - \omega t$.

Assim, escrevendo a Equação (24) em função da sua solução $u(x,t) = u(z)$, temos

$$k^3 u_{zzz} - \omega u_z + 6kuu_z = 0 \quad (26)$$

A equação acima pode ser escrita como

$$k^2 u_{zzz} + 6uu_z - \frac{\omega}{k} u_z = 0. \quad (27)$$

Integrando a EDO em relação a variável *z*, ficamos com

$$k^2 u_{zz} = \frac{\omega}{k} u - 3u^2 + A = \frac{dV(u)}{du} \rightarrow V(u) = \frac{\omega}{2k} u^2 - u^3 + Au + B \quad (28)$$

onde é denominado por conveniência $V(u)$ por "*Potencial Associado*", já que não se trata do potencial do sistema no sentido usual, e sim de uma definição advinda dos estudos da Teoria de Campos. A é uma constante de integração.

Multiplicando a Equação (28) pelo fator integrante (du/dz), ficamos com:

$$k^2 u_{zz} u_z = \frac{dV(u)}{du} u_z, \tag{29}$$

onde o potencial $V(u)$ associado à KdV é dado pela relação:

$$\frac{dV(u)}{du} = \frac{\omega}{k} u - 3u^2 + A, \tag{30}$$

$A = 0$ e $u_{zz} u_z = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]$.

Assim, da Equação (29) ficamos com:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] = \frac{1}{k^2} V(u) \frac{du}{dz}. \tag{31}$$

Integrando a Equação (31), obtemos:

$$u_z = \pm \frac{1}{k}\sqrt{2V(u)}. \tag{32}$$

Após substituir $V(u)$ dada pela Equação (30) na Equação (32), temos:

$$u_z = \pm \frac{u}{k}\sqrt{\frac{\omega}{k} - 2u}. \tag{33}$$

Integrando a Equação (33), chamando $u_z = -\frac{1}{2} c sech^2\theta$ e sendo $c = \frac{\omega}{k}$, podemos escrever

$$u(z) = \frac{c}{2} sech^2\left[\mp \frac{\sqrt{c}}{2}\left(\frac{z}{k} - x_0\right)\right], \tag{34}$$

onde x_0 é um deslocamento de fase que indica a posição da onda no instante t = 0. Se fizermos x = 0 em t = 0, tomando $A = \frac{c}{2}$ e $k = \frac{\sqrt{c}}{2}$, a Equação (34) produz:

$$u(z) = Asech^2(kx - \omega t), \tag{35}$$

onde $\omega = 4k^2$ é a frequência angular. A solução acima do tipo onda solitária, é o Sóliton da equação KdV que só existe se c > 0.

3.1.2 Solução da Equação KdV pelo Método de Deformação

Da Equação (10), assumimos que $f(x) = 0$ e $\alpha = 1$. Desse modo, temos

$$u_t + u_{xxx} = 0, \tag{36}$$

que é uma equação linear de 3ª ordem e possui solução do tipo onda viajante na forma

$$u(x,t) = u(z) = Acos(kx - \omega t), \tag{37}$$

com $\omega = k^3$ e amplitude A sendo uma constante arbitrária.

Assim, a Equação (36):

$$u_t = \omega \frac{du}{dz} \quad \text{e} \quad u_{xxx} = k^3 \frac{d^3u}{dz^3} \tag{38}$$

Substituindo a Equação (38) na Equação (36), temos que:

$$\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\omega}{k}\frac{du}{dx} = 0 \tag{39}$$

e, integrando a Equação (39), obtemos:

$$u_{xx} = \frac{dV(u)}{du} = -\frac{\omega}{k}u + \beta. \tag{40}$$

Assim, integrando (40) e considerando $\beta = 0$, encontramos o Potencial associado à equação linear (36), que é dado por

$$V(u) = -\frac{\omega}{2k}u^2 + \gamma, \tag{41}$$

onde γ é uma constante de integração no potencial.

Por outro lado, queremos obter a solução não usual da equação KdV, Equação (24):

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0, \tag{42}$$

cuja forma é dada por:

$$v(x,t) = v(kx - \omega t) \tag{43}$$

e possui solução da forma:

$$v(x,t) = Asech^2(kx - \omega t), \tag{44}$$

onde $A = 2k^2$ e $\omega = 4k^3$.

Em $t = 0$, a solução da Equação (42) fica:

$$v = 2k^2 sech^2(kx), \tag{45}$$

que pode ser reescrita como:

$$kx = arcsech\sqrt{\frac{v}{2k^2}}. \tag{46}$$

Substituindo a Equação (46) na Equação (37) com $t = 0$, e da Equação (16), temos que:

$$u(x) = g(v) = Acos\left(arcsech\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right). \tag{47}$$

Logo, a função deformadora será da forma:

$$g(v) = Acos\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]. \tag{48}$$

A equação KdV que queremos obter por deformação possui a seguinte equação de 2ª ordem:

$$\frac{d^2v}{dx} = \frac{d\tilde{V}}{dv}, \tag{49}$$

onde $\tilde{V}(v)$ é o potencial associado do modelo deformado:

$$\tilde{V}(v) = \frac{V[u \to g(v)]}{[g'(v)]^2}. \tag{50}$$

Assim, integrando a EDO separável, Equação (49), temos que:

$$\int d\tilde{V} = \int \frac{d^2v}{dx} dv, \tag{51}$$

mas da Equação (40) temos que $\frac{d^2v}{dx} = -\frac{\omega}{k}u$ que, com a relação da Equação (16), se torna $\frac{d^2v}{dx} = -\frac{\omega}{k}g(v)$. Desse modo, resolvendo a integral e substituindo na Equação (50), obtemos

$$\tilde{V}(v) = \frac{-\frac{\omega}{2k}g(v)^2 + \gamma}{[g'(v)]^2}, \tag{52}$$

que é o potencial associado ao modelo deformado.

Tomando $\omega = k^3$ e $g(v)$ dado na Equação (48), substituindo-os na Equação (52), temos:

$$\tilde{V}(v) = \frac{-\frac{k^2}{2}A^2cos^2\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right] + \gamma}{\left\{\frac{d}{dv}\left[Acos\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]\right]\right\}^2}, \tag{53}$$

que nos leva a:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\gamma - \frac{k^2A^2}{2}cos^2\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]}{A^2sen^2\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]\frac{1}{4v^2\left(1-\frac{v}{2k^2}\right)}} \tag{54}$$

e, em seguida, a:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\left\{\gamma - \frac{k^2A^2}{2}cos^2\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]\right\}(2k^2v^2 - v^3)}{\frac{k^2A^2}{2}sen^2\left[arcsech\left(\sqrt{\frac{v}{2k^2}}\right)\right]}. \tag{55}$$

Considerando a constante $\gamma = \frac{k^2A^2}{2}$, chegamos ao potencial associado à equação KdV, obtido pelo Método de Deformação:

$$\tilde{V}(v) = 2k^2v^2 - v^3. \tag{56}$$

Comparando as Equações (28) e (56), notamos que se:

$$A = B = 0 \text{ e } \omega = 4k^3, \tag{57}$$

reproduzimos a forma do potencial associado à Equação KdV, que tem sua solução obtida tomando a inversa, como descrito na Equação (23). Assim, obtemos:

$$v(x,t) = g^{-1}[u(kx - wt)] = 2k^2sech^2[k(x - 4k^2t)]. \tag{58}$$

Sendo $A = 2k^2$ e $\omega = 4k^3$, temos:

$$v(x,t) = Asech^2(kx - \omega t), \tag{59}$$

que é o Sóliton da Equação KdV obtido pelo Método de Deformação.

3.2 Solucionando a Equação mKdV

3.2.1 Solução da Equação mKdV pelo método usual

Como visto, a equação mKdV possui o formato:

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \tag{60}$$

onde:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \;\; \text{e} \;\; u_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Admitindo que a mKdV também possui solução do tipo onda viajante, e escrevendo a Equação (36) em função da sua solução $u(x,t) = u(z)$, temos:

$$k^3 u_{zzz} - \omega u_z - 6ku^2 u_z = 0. \tag{61}$$

A Equação (61) ainda pode ser escrita da forma:

$$k^2 u_{zzz} - 6u^2 u_z - \frac{\omega}{k} u_z = 0. \tag{62}$$

Integrando a Equação (38) em relação a variável *z*, ficamos com

$$k^2 u_{zz} = \frac{\omega}{k} u + 2u^3 + \beta \tag{63}$$

onde β é uma constante de integração.

Multiplicando a Equação (39) pelo fator integrante (du/dz), ficamos com:

$$k^2 \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right] = \left(\frac{\omega}{k} u + 2u^3 + \beta\right)\frac{du}{dz}. \tag{64}$$

Integrando a Equação (40), obtemos:

$$k^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{\omega}{k} u^2 + u^4 + 2Bu + \gamma, \tag{65}$$

onde γ é outra constante de integração. Para essa equação, o Potencial Associado possui a seguinte forma:

$$V(u) = \frac{\omega}{2k}u^2 + \frac{u^4}{2} + 2\beta u + \gamma. \qquad (66)$$

Sendo $\gamma = 0$ e $\beta = 0$, a Equação (65) resulta em:

$$\frac{du}{dz} = \pm\frac{u}{k}\sqrt{\frac{\omega}{k} + u^2}, \qquad (67)$$

que é uma EDO separável, de modo que, integrando-a, produz:

$$\pm\int dz = \int \frac{du}{\frac{u}{k}\sqrt{\frac{\omega}{k} + u^2}}. \qquad (68)$$

Chamando $u(z) = atanh\theta$ e resolvendo a integral, obtemos:

$$u(x,t) = \pm k tanh(kx - \omega t), \qquad (69)$$

que é a solução tipo Sóliton da equação mKdV, onde $\omega = -2k^3$ é a frequência angular.

3.2.2 Solução da Equação mKdV pelo Método de Deformação

Se quisermos construir uma solução pelo Método de Deformação para a equação mKdV:

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \qquad (70)$$

que tem forma:

$$v(x,t) = v(kx - \omega t) \qquad (71)$$

e possui solução da forma:

$$v(x,t) = k tanh(kx - \omega t). \qquad (72)$$

Para $t = 0$, a solução da Equação (70) fica:

$$v = ktanh(kx), \tag{73}$$

que pode ser reescrita como:

$$kx = arctanh\left(\frac{v}{k}\right). \tag{74}$$

Como feito para a equação KdV, substituindo a Equação (74) na Equação (37) e utilizando da relação dada pela Equação (16), temos que:

$$u(x) = g(v) = Acos\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]. \tag{75}$$

Logo, a função deformadora será da forma:

$$g(v) = Acos\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]. \tag{76}$$

A Equação mKdV que queremos obter por deformação possui a seguinte equação de 2ª ordem:

$$\frac{d^2v}{dx} = \frac{d\tilde{V}}{dv}, \tag{77}$$

e, verificando o processo feito da Equação (49) a Equação (52), sabemos que o potencial associado à equação mKdV será também da forma:

$$\tilde{V}(v) = \frac{-\frac{\omega}{2k}g(v)^2 + \gamma}{[g'(v)]^2}. \tag{78}$$

Tomando $\omega = k^3$ e $g(v)$ dado na Equação (76), substituindo-os na Equação (78), temos:

$$\tilde{V}(v) = \frac{-\frac{k^2}{2}A^2cos^2\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right] + \gamma}{\left\{\frac{d}{dv}\left[Acos\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]\right]\right\}^2}, \tag{79}$$

que nos leva a:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\gamma - \frac{k^2A^2}{2}cos^2\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]}{k^2A^2sen^2\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]\frac{1}{2\left(\frac{k^4}{2} - k^2v^2 + \frac{v^4}{2}\right)}}, \tag{80}$$

e, em seguida, a:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\left\{\gamma - \frac{k^2A^2}{2}cos^2\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]\right\}\left(\frac{k^4}{2} - k^2v^2 + \frac{v^4}{2}\right)}{\frac{k^2A^2}{2}sen^2\left[arctanh\left(\frac{v}{k}\right)\right]}. \tag{81}$$

Considerando a constante $\gamma = \frac{k^2A^2}{2}$, chegamos ao potencial associado à equação mKdV, obtido pelo Método de Deformação:

$$\tilde{V}(v) = \frac{k^4}{2} - k^2v^2 + \frac{v^4}{2}. \tag{82}$$

Comparando as Equações (66) e (82), notamos que se:

$$\gamma = \frac{k^4}{2}, \beta = 0 \; e \; \omega = -2k^3, \tag{83}$$

reproduzimos a forma do potencial associado à equação mKdV, que tem sua solução tipo ondas viajantes obtida tomando a inversa, como descrito na Equação (23). Assim, obtemos:

$$v(x,t) = g^{-1}[u(kx - \omega t)] = \pm k tanh[k(x + k^2t)], \tag{84}$$

que é o Sóliton da equação mKdV, obtido pelo Método de Deformação.

3.3 Encontrando a solução da Equação de Gardner a partir do Método de Deformação

Como vimos na Equação (9), a Equação de Gardner possui o formato:

$$v_t - 6(b^2v + a^2v^2)v_x + v_{xxx} = 0, \tag{85}$$

onde *a* e *b* são constantes.

Admitindo que a Equação (85) possui solução do tipo ondas viajantes, na forma:

$$v(x,t) = v(kx - \omega t) = v(z), \tag{86}$$

com $z = kx - \omega t$. Assim, substituindo a Equação (86) na Equação (85) encontramos a equação em segunda ordem para a Equação de Gardner:

$$k^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\omega}{k} v + 3b^2 v^2 + 2a^2 v^3 + \tilde{A} = \frac{d\tilde{V}(v)}{dv}, \tag{87}$$

e, integrando (87), encontramos o potencial associado para a Equação de Gardner, que é da forma:

$$\tilde{V}(v) = \frac{\omega}{2k} v^2 + b^2 v^3 + \frac{1}{2} a^2 v^4 + \tilde{A} v + \tilde{\beta}, \tag{88}$$

onde *A* e β são constantes de integração no potencial.

Da solução de Gardner, temos que

$$v(x,t) = -\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c_3}{a} arctanh\left[c_3 x + c_3 \frac{(4a^2 c_3^2 - 3b^4)}{2a^2} t + c_1\right]. \tag{89}$$

Considerando $c_3 = k$ e $c' = \frac{3b^4 - 4a^4 k^2}{2a^2}$ (velocidade da onda), temos a solução da Equação de Gardner:

$$v(x,t) = -\frac{b^2}{2a^2} - \frac{k}{a} arctanh[(kx - kc't) + c_1], \tag{90}$$

onde $\omega = kc'$. Já para $c_1 = 0$, encontramos

$$(kx - \omega t) = arctanh\left[\frac{a}{k}\left(v + \frac{b^2}{2a^2}\right)\right], \tag{91}$$

com $\omega = \frac{c'}{k}$.

Substituindo a Equação (91) na Equação (37), com $u = v$, temos:

$$u(kx - \omega t) = v(kx - \omega t) = Acos\left\{arctan\left[\frac{a}{k}\left(v + \frac{b^2}{2a^2}\right)\right]\right\}, \tag{92}$$

que é a Função Deformadora para a Equação de Gardner.

Assim, aplicando a Equação (92) na Equação (52) transformamos o potencial associado na seguinte forma:

$$\tilde{V}(v) = \frac{-\frac{k^2}{2}A^2cos^2\left[arctanh\left(\frac{a}{k}\left(v+\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)\right]+\gamma}{\left\{\frac{d}{dv}\left[Acos\left(arctanh\left[\frac{a}{k}\left(v+\frac{b^2}{2a^2}\right)\right]\right)\right]\right\}^2} \tag{93}$$

e, considerando $\gamma = \frac{k^2A^2}{2}$, obtemos:

$$\tilde{V}(v) = \frac{1}{2}a^2v^4 + b^2v^3 + \left(\frac{3b^4}{4a^2} - k^2\right)v^2 + \left(\frac{b^6}{4a^4} - \frac{k^2b^2}{a^2}\right)v + \frac{k^4}{2a^2} - \frac{k^2b^4}{4a^4} + \frac{b^8}{32a^6}, \tag{94}$$

que é o potencial associado ao modelo deformado para a Equação de Gardner.

Comparando as Equações (94) e (88), observamos que:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{3}{2}\frac{b^4}{a^2} - 2k^2 \tag{95}$$

E sobre as constantes de integração, temos que

$$\tilde{A} = \frac{b^6}{4a^4} - \frac{k^2b^2}{a^2} \tag{96}$$

e

$$\tilde{\beta} = \frac{k^4}{2a^2} - \frac{k^2b^4}{4a^4} + \frac{b^8}{32a^6}. \tag{97}$$

Desse modo, podemos observar que as Equações (94) e (88) são iguais, ou seja: $\tilde{V}'(v) = V(v)$. Então, sabemos que a função deformadora utilizada na Equação (92) foi apropriada. Assim, reproduzimos a forma do potencial associado à Equação de Gardner, que tem sua solução tipo ondas viajantes obtida tomando a inversa, como descrito na Equação (23). Assim, obtemos:

$$v(x,t) = g^{-1}[u(kx-\tilde{\omega}t)] = v(x,t) = \frac{k}{a}tanh(kx-\omega t) - \frac{b^2}{2a^2}, \tag{98}$$

que é a solução solitônica para a Equação de Gardner.

4 METODOLOGIA

Com a finalidade de construir a solução para a Equação de Gardner utilizando o Método de Deformação, foram realizadas revisões bibliográficas de artigos e livros que abordam os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nessas revisões, fizemos um estudo aprofundado sobre alguns temas, tais como: soluções de equações diferenciais parciais; Sólitons; equações KdV, mKdV e de Gardner e o Método de Deformação. Desse modo, o trabalho desenvolvido trata-se de uma Pesquisa Bibliográfica, que é definida como sendo:

> A que se desenvolve tentando explicar um problema, utilizando o conhecimento disponível a partir das teorias publicadas em livros ou obras congêneres. Na pesquisa bibliográfica o investigador irá levantar o conhecimento disponível na área, identificando as teorias produzidas, analisando-as e avaliando sua contribuição para auxiliar a compreender ou explicar o problema objeto da investigação (KOCHE, 2006, p.122).

Assim, a Pesquisa bibliográfica é “feita com intuito de levantar um conhecimento disponível sobre teorias, a fim de analisar, produzir ou explicar um objeto sendo investigado” (CHIARA; KAIMEN et al., 2008 apud TYBEL, 2017).

Desta maneira, após levantar o conhecimento disponível na área, as equações KdV e mKdV foram solucionadas de maneira usual e, em seguida, verificamos como funciona o Método de Deformação, aplicando-o, como exemplo, para encontrar a solução das equações KdV e mKdV. Posteriormente, aplicamos o método para construir a solução solitônica da Equação de Gardner.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Verificamos que o Método de Deformação é eficaz para construir soluções tipo Sóliton, pois, quando aplicado nas equações KdV e mKdV, chegamos a soluções analíticas às já conhecidas na literatura para essas equações. Basta comparar o Potencial associado a cada uma dessas equações, com seus respectivos Potenciais associados obtidos pelo Método de Deformação. Assim, verificamos que a Função deformadora obtida foi apropriada e podemos construir a solução para as equações partindo da inversa dessa Função.

Utilizando este Método, também foi possível construir a solução solitônica para Equação de Gardner, que era o objetivo principal deste trabalho, partindo do Potencial Associado e solução tipo onda viajante de uma equação linear de terceira ordem.

O método possibilitou chegar à solução de uma maneira simples e eficaz, considerando que as soluções propostas para esta equação requerem uso de métodos computacionais ou técnicos e de difícil compreensão, como muitos dos que já foram propostos na literatura.

Tendo em vista que a Equação de Gardner tem uma vasta aplicação em diversos fenômenos físicos, mas que possui uma solução considerada complexa, o método se mostra bastante importante. Além disso, este método pode ser aplicado para solucionar equações de diversos sistemas não-lineares, seja partindo de equações lineares, como no caso deste trabalho, ou de equações não-lineares, que são os que descrevem grande parte dos fenômenos da natureza.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho propôs construir a solução solitônica da Equação de Gardner a partir do Método de Deformação, que consiste em gerar novos modelos a partir do potencial e da solução de um modelo conhecido, com o auxílio de uma função deformadora apropriada, gerando soluções analíticas sem precisar recorrer a métodos computacionais ou análise numérica.

Para adquirir os conhecimentos necessários para realizar a proposta, foi necessário realizar um estudo sobre os Sólitons e soluções do tipo ondas viajantes em sistemas não-lineares, que são estudados rigorosamente devido a suas soluções serem consideradas complexas, além de um estudo aprofundado sobre a Equação de Gardner e o Método de Deformação.

Mostramos a eficácia deste método, construindo as soluções tipo Sóliton das equações KdV e mKdV a partir da solução simples de uma equação linear. Essas equações possuem soluções conhecidas, por isso foram essenciais para mostrar que o método é simples e útil, já que foram solucionadas de forma usual e, em seguida, pelo Método de Deformação. O método foi, então, aplicado à Equação de Gardner, o que possibilitou construir sua solução tipo Sóliton de maneira simples e direta.

Uma outra forma de utilizar este método para encontrar a solução solitônica para a Equação de Gardner, pode ser partindo de uma equação não-linear, como a Equação KdV. O procedimento seria semelhante ao realizado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

CARDOSO JÚNIOR, Jarbas Lopes. Sólitons. **Revista Brasileira de Física**, Campinas - Sp, v. 10, n. 3, p.695-716, 29 abr. 1980.

CHALUB, Fabio A. C. C.; ZUBELLI, Jorge P.. Sólitons: Na Crista da Onda por mais de 100 anos. **Matemática Universitária**, [s. L.], n. 30, p.41-65, jun. 2001.

DAOUI, A.K., TRIKI, H., **Solitary waves, shock waves and singular solitons of Gardner equation for shallow water dynamics**. Acta Physica Polonica, B, 45(6), 1135 (2014).

DARVISHI, M.T., MALIHEH N., MOHAMMAD N., **Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional breaking soliton equation by (G'/G)-expansion method and modified F-expansion method**, International Journal of Computational and Mathematical Sciences, 6(2), 64 (2012).

HEREMAN, W., NUSEIR, A., **Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial di_erential equations, Mathematics and Computers in Simulation** 43, 13 (1997).

JAWAD, A.J.M., **New exact solutions of nonlinear partial diferential equations using Tan-Cot function method**. Studies in Mathematical Sciences, 5(2), 13 (2012).

KOCHE, José Carlos. Pesquisa Bibliográfica. **Fundamentos de Metodologia Científica:** Teoria da ciência e iniciação à pesquisa. Petrópolis, Rj: Vozes, 2011. p. 122. Disponível em: <https://pt.scribd.com/doc/192008010/Fundamentos-de-Metodologia-Cien-Jose-Carlos-Koche-pdf>. Acesso em: 25 maio 2019.

SAVI, Marcelo Amorim. **Dinâmica Não-linear e Caos.** Rio de Janeiro: E-papers, 2006. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=AlKIjK9zz0oC&printsec=frontcov-er&hl=ptBR#v=o-nepage&q&f=true>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SILVA, Alex da. **Método para gerar soluções do tipo ondas viajantes em equações diferenciais.** 2008. 92 f. Tese (Doutorado) - Curso de Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.

SILVA, Alex da. **Solução solitônica para Equação de Gardner utilizando o Método de Deformação.** Campina Grande - Pb, 11 mar. 2018.

SOUZA, M.a.m.; RODRIGUES, J.j.. O Método de Deformação como ferramenta didática na Teoria de Campos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, [s.l.], v. 41, n. 1, p.0-0, 30 jul. 2018. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2017-0402.

TAGHIZADE, N., NEIRAMEH, A., **The solutions of TRLWand Gardner equations by-expansion method.** Int. J. Nonlinear Sci, 9(3), 305 (2010).

TYBEL, Douglas. **O que é pesquisa bibliográfica?** 2017. Disponível em: <https://guiadamonografia.com.br/pesquisa-bibliografica/>. Acesso em: 24 jun. 19.

WAZWAZ, A.M., **A study on KdV and Gardner equations with time dependent coeficients and forcing terms.** Applied Mathematics and Computation, 217, 2277 (2010).

WAZWAZ, A.M., **The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Tzikhailov, Tzitzeica-Dodd-Bullough equations, Chaos, Solitons and Fractals**, 25, 55 (2005).

WAZWAZ, A.M. **New solitons and kink solutions for the Gardner equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 12(8), 1395 (2007).