UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE A COSMOLOGIA NEWTONIANA BASEADA NA ABORDAGEM DE MILNE

IRANILDO DO NASCIMENTO ARAÚJO

CAMPINA GRANDE - PB
2013

IRANILDO DO NASCIMENTO ARAÚJO

UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE A COSMOLOGIA NEWTONIANA BASEADA NA ABORDAGEM DE MILNE

Monografia referente a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título de Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva.

UEPB
Campina Grande - PB
Setembro - 2013

A663b Araújo, Iranildo do Nascimento.
Uma breve discussão sobre a cosmologia newtoniana baseada na abordagem de Milne [manuscrito] / Iranildo do Nascimento Araújo. – 2013.
54 f. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Física) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.
“Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física”.

1. Cosmologia. 2. Universo. 3. Equação de Friedmann. I. Título.

21. ed. CDD 523.1

UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE A COSMOLOGIA NEWTONIANA BASEADA NA ABORDAGEM DE MILNE

IRANILDO DO NASCIMENTO ARAÚJO

Aprovado em 16/09/2013

Banca Examinadora

Jean Paulo Spinelly da Silva
Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador

Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador

Elialdo Andriola Machado
Prof. Msc. Elialdo Andriola Machado
Examinador

À minha Família.

A tarefa é, não tanto para ver o que ninguém viu ainda,
Mas pensar o que ninguém ainda pensou,
Sobre o que todo mundo vê.

Erwin Schrödinger

Agradecimentos

A Deus por tudo que me proporcionou durante esta jornada, me ajudando a vencer as dificuldades, pois sem ele não teria conseguido.

Agradecimento especial ao meu orientador Jean Spinelly, pela grande contribuição ao meu aprendizado durante a graduação.

Aos colegas de graduação, pois nos momentos de dúvidas pude contar com o apoio deles.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram para a minha formação.

Resumo

Neste trabalho as equações que descrevem o Universo são obtidas mediante o uso da mecânica Newtoniana de acordo com a abordagem de Milne, as quais sem o termo de pressão são algebricamente equivalentes às da relatividade geral embora possa haver diferenças conceituais, enfatizando os conceitos de trabalho, energia e a gravitação de Newton. Neste contexto, discutimos os aspectos históricos anteriores ao estabelecimento da cosmologia moderna até a descoberta da expansão do Universo e o estabelecimento do princípio cosmológico. A observação da luminosidade das galáxias levará a conclusão que as mesmas se afastam de nós, fato que será explicitado pela lei de Hubble. A equação de Friedmann e a equação da aceleração são obtidas fazendo-se uso da dinâmica Newtoniana, equações muito úteis na descrição do Universo. Contudo, essas equações não são o bastante sendo necessário recorrer aos parâmetros cosmológicos, os quais descrevem a evolução do Universo, um Universo que pode ser dominado por matéria ou por radiação, considerando os casos de Universo com pressão desprezível ou não. Veremos que a geometria do Universo pode ser plana, fechada ou aberta, o que está relacionado à cosmologia relativística. Ainda no contexto da relatividade geral, a introdução da constante cosmológica nas equações de movimento nos leva à dificuldades teóricas ainda não explicadas pela cosmologia moderna, com a possibilidade de estar relacionada ao conceito de energia escura associada ao vácuo como uma forma alternativa de entender o Universo e explicar sua aceleração.

PALAVRAS-CHAVE: Cosmologia Newtoniana, Equação de Friedmann, Constante Cosmológica.

Lista de Figuras

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Os trabalhos de Nicolau Copérnico (1473-1543) foram muito importantes por mostrarem o papel que a gravitação exercia sobre os corpos celestes. Isaac Newton (1643-1727) apresentou suas ideias sobre o movimento desses corpos publicando suas leis do movimento, desenvolvendo também a *lei da gravitação universal* (NUSSENZVEIG, 2002).

A cosmologia moderna é a ciência que estuda a estrutura, a evolução e a composição do Universo, tendo sua origem nos trabalhos de Albert Einstein (1879-1955) sobre a Teoria da Relatividade Geral, quando foi finalizada em 1915 (RINDLER, 2006). A partir daí, diversos modelos cosmológicos surgiram, motivados principalmente pelos resultados observacionais. Em 1917, Einstein supôs um Universo estático, fechado, sem fronteiras, permeado de matéria de forma homogênea, mas ao colocar estes resultados em suas equações de campo constatou não haver soluções com tais características (WEINBERG, 1972; ROOS, 2003). Com isso, ele as modificou introduzindo um termo que ficou conhecido como a **constante cosmológica** que tinha o papel de impedir o colapso gravitacional do Universo devido à atração entre os corpos celestes, o que pouco tempo depois iria considerar o maior "erro" de sua vida.

Em 1922, Aleksander Friedmann (1888-1925) resolveu as equações de Einstein admitindo um Universo dinâmico, espacialmente homogêneo e isotrópico, mas sem a constante cosmológica (WEINBERG, 1972). Dizer que o Universo é homogêneo significa dizer que ele é o mesmo em todas as posições e isotrópico que todas as direções tem igual importância. Por outro lado, diversas soluções apareceram gradativamente, propiciando várias alternativas de descrição do Universo.

Em 1932, o matemático e astrofísico Edward Arthur Milne (1896-1950) adota um abordagem para descrever o Universo baseada na mecânica Newtoniana (RINDLER, 2006). Neste modelo, sem constante cosmológica, os efeitos gravitacionais são os responsáveis pela curvatura do espaço-tempo e as equações obtidas são menos complexas em comparação com as da cosmologia relativística. A abordagem de Milne foi denominada **cosmologia Newtoniana**, baseada no modelo homogêneo e isotrópico, onde as observações feitas por Hubble sobre um Universo em expansão foram introduzidas nas equações. Uma vantagem de se utilizar a cosmologia Newtoniana é que não há necessidade de se introduzir o espaço-tempo curvo como na cosmologia relativística, e que também ela reproduz as mesmas equações para a expansão do Universo que são obtidas no modelo de Friedmann.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma visão geral sobre a cosmologia e seus principais resultados do ponto de vista da teoria de Newton considerando-se a abordagem de Milne, inicialmente sem os efeitos de uma constante cosmológica e posteriormente considerando para esta constante um valor não nulo, para isso sendo necessário recorrer um pouco à relatividade geral.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 3 apresentamos uma revisão sobre a mecânica Newtoniana e a teoria da gravitação. No capitulo 4 falamos um pouco sobre alguns fatos históricos que culminaram no desenvolvimento da cosmologia moderna. Discutimos o princípio cosmológico, o qual será considerado no desenvolvimento das equações cosmológicas e também a lei de Hubble. No capítulo 5 fazemos uso da lei da conservação da energia para obter a equação de Friedmann e outras equações auxiliares. O capítulo 6 é basicamente construído considerando-se a relatividade geral onde será tratado as propriedades geométricas do Universo. Ainda neste contexto, acrescentamos a constante cosmológica às equações, resolvendo-as, encerrando o capítulo com o conceito de energia escura, o qual veremos estar relacionado a uma constante cosmológica. Finalmente, no capítulo 7, apresentamos as considerações finais.

Capítulo 2

Metodologia

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste trabalho foi a seguinte:

- Foi feita uma revisão bibliográfica buscando em livros e dissertações os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

- Em seguida, o estudo foi direcionado à mecânica Newtoniana, principalmente ao conceito de conservação de energia tão necessário para o desenvolvimento das equações no contexto newtoniano.

- Depois foi feita uma pesquisa sobre fatos históricos que contribuíram para o desenvolvimento da cosmologia.

- Posteriormente, aplicamos a mecânica Newtoniana ao Universo com o intuito de obter as equações que melhor o descreve.

- Obtidas as equações, discutimos as propriedades de algumas de suas soluções bem como as dificuldades teóricas que surgiram.

- Para encerrar, acrescentamos a constante cosmológica às equações, comparamos com os resultados anteriores procurando chegar a novas conclusões.

Capítulo 3

Mecânica Newtoniana

A mecânica Newtoniana descreve o movimento de corpos materiais onde um grande número de aplicações baseia-se diretamente nas três leis de Newton do movimento. Porém, ela não pode ser aplicada a todas as situações. Por exemplo, se os corpos se moverem com velocidades próximas à da luz, a mecânica Newtoniana deve ser substituída pela teoria da relatividade restrita de Einstein. Se as dimensões dos corpos forem muito pequenas, da ordem das dimensões atômicas, é substituída pela mecânica quântica (HALLIDAY, 2006). Outra restrição da mecânica Newtoniana é que ela não é válida em espaços infinitos.

Neste capítulo faremos uma breve discussão sobre as três leis de Newton. Chegaremos ao conceito de energia potencial, obtido a partir da definição usual de trabalho, até definirmos as condições necessárias para que se tenha sentido falar em energia potencial. Discutiremos forças que são conservativas e apresentaremos a teoria da gravitação.

3.1 Leis de Newton

Isaac Newton deu grande contribuição para a Física ao publicar no *Philosphiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural), em 1687, três leis básicas do movimento, que ficaram conhecidas como as Leis de Newton. Essas leis podem ser aplicadas a objetos de qualquer tamanho que estejam acima da escala atômica, e em fluidos. Contudo, esses corpos são tratados como partículas e elas são válidas apenas para referenciais inerciais (MARION, 2003).

- **Primeira Lei**

Se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula for nula então ela deve estar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, ou seja, tende a manter o seu estado de movimento. Essa lei é também chamada de lei da inércia. A implicação dessa lei é que a variação da velocidade de um corpo em relação a um referencial inercial deve estar associada à ação de forças.

- **Segunda Lei**

Se uma partícula interagir, seu estado de movimento se altera mediante a equação:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.1-1}$$

ou

$$\vec{F} = m\vec{a} \ , \tag{3.1-2}$$

onde $\vec{F}$ é a resultante das forças que atuam sobre a partícula e $\vec{p}$ o momento linear. Ou seja, a componente da força é igual a taxa de variação do momento linear na mesma direção.

Esta equação só pode ser aplicada se não houver variação de massa. Esta massa é chamada de massa inercial. A segunda lei de Newton nos diz que a variação do momento é proporcional à força, e tem a direção da força. A equação (3.1-1), ao contrário da equação (3.1-2), permanece válida na mecânica relativística. Outro ponto importante que vale destacar é que a primeira lei não é decorrente da segunda. Poderíamos concluir o contrário simplesmente fazendo $\vec{F} = 0$ e obter o momento linear constante como diz a primeira lei. O problema é que elas são somente válidas se o referencial for inercial, mas pode haver forças fictícias atuando na dinâmica da partícula fazendo com que o referencial não seja inercial (NETO, 2004).

- **Terceira Lei**

Na interação de duas partículas sempre há um par de forças de ação e reação, onde a força numa delas possui o mesmo módulo e direção mas sentido contrário à da força atuante na outra partícula. As forças de ação e reação atuam em corpos diferentes, nunca no mesmo corpo, definidas pela relação:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ . \tag{3.1-3}$$

Novamente, devemos ter um referencial inercial para aplicar essa lei, já que forças fictícias não possuem reação. Outra observação importante que devemos mencionar é que essa lei vale apenas para forças de contato e admitindo que as interações se processam instantaneamente. Não podemos, por exemplo, aplica-la à força magnética (SYMON, 1996; NETO, 2004).

3.2 Trabalho e Energia

As Leis de Newton nos permitem analisar vários tipos de movimentos. Contudo, em algumas situações, a aplicação direta dessas leis leva à equações que tornam tais análises mais difíceis do que aparentam. Para contornar essa dificuldade, podemos tratar os problemas a partir de um "método alternativo". Esse método usa os conceitos de trabalho e energia.

O termo energia é tão amplo que é difícil escrever uma definição clara para ele. Na verdade, podemos definir energia como uma quantidade escalar associada ao sistema de um ou mais objetos. Se uma força modifica o estado de um dos objetos, então o número associado ao sistema se modifica. Já o trabalho está relacionado à medida da energia (HALLIDAY *et al*, 2006).

Embora existam várias formas de energia, nesta seção trataremos apenas uma forma de energia, denominada energia cinética. Além disso, definiremos o conceito de trabalho e apresentaremos o *teorema trabalho-energia*.

- **Energia Cinética**

A energia cinética é a energia associada ao estado de movimento dos corpos, sendo diretamente proporcional à rapidez dos corpos. Para uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$, temos que a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{mv^2}{2} \ , \tag{3.2-4}$$

sendo v o módulo da velocidade.

- **Trabalho**

Trabalho W é a energia que se transfere para um objeto ou de um objeto por meio da ação de uma força que age sobre o objeto. o trabalho é positivo quando a energia é transferida para o objeto e negativa quando é retirada dele. Por exemplo, ao empurrarmos um móvel em repouso, sua energia aumenta (aumenta a energia cinética) e o trabalho é positivo porque foi transferida energia para o móvel.

De maneira geral, a força que atua sobre uma partícula, que se move no espaço, depende da posição, da velocidade e do tempo, isto é, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Quando essa força é aplicada entre os instantes t_1 e t_2, trabalho realizado é definido por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \ . \tag{3.2-5}$$

No caso particular em que a força depende apenas da posição, podemos reescrever a integral acima como a integral de linha

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ , \tag{3.2-6}$$

onde a integral deve ser tomada ao longo do percurso pela partícula entre os pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_1$.

- **Teorema trabalho-energia**

Consideremos uma partícula de massa m que se move sob a ação de uma força $\vec{F}$. Naturalmente, admitindo que a massa é constante, sua dinâmica será governada pela equação (3.1-2).

Tomando o produto escalar de cada um dos membros da equação (3.1-2) por $\vec{v}$, temos

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \ . \tag{3.2-7}$$

A equação (3.2-7) fornece a taxa de variação da energia cinética, podendo ser chamada de *teorema trabalho-energia* (diferencial). Para obtermos a forma integral do teorema, devemos multiplicar a equação acima por dt e integrar de t_1 a t_2. Fazendo isto, encontramos:

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \ . \tag{3.2-8}$$

A equação (3.2-8) mostra que a variação da energia cinética, devido à ação da força que atua sobre a partícula entre os instantes t_1 e t_2, é igual ao trabalho. Diante disso, podemos concluir que o trabalho W é a energia transferida para ou de um objeto por meio de uma força atuando no objeto. Além disso, vemos que quando a energia for transferida para o objeto o trabalho será positivo, enquanto que se a energia for retirada do objeto o trabalho será negativo.

3.3 Energia potencial e Forças Conservativas

Energia potencial é qualquer energia que pode ser associada à configuração de um sistema de objetos que exercem forças entre si. Entretanto, veremos que algumas condições devem ser satisfeitas para que esse conceito seja válido.

3.3.1 Definição de energia potencial

Se a força que atua sobre uma partícula depende apenas de sua posição, então podemos definir a energia potencial por:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \; . \tag{3.3-9}$$

A equação acima nos diz que a energia potencial é igual a menos o trabalho realizado sobre uma partícula para trazê-la da posição de referência $\vec{r}_s$ até a posição $\vec{r}$, sendo $V(\vec{r}_s) = 0$. O ponto de $\vec{r}_s$ é escolhido arbitrariamente e deve estar fixo. Na equação (3.3-9), a função $V(\vec{r})$ deve ser somente função das coordenadas do vetor $\vec{r}$ e de $\vec{r}_s$. Assim, para que a definição de energia potencial seja legítima, a integral não deve depender da trajetória.

Vamos supor uma força $F(\vec{r})$ tal que a integral de linha seja independente do caminho de integração. Então a integral vai depender apenas de $\vec{r}$ e $\vec{r}_s$. Essa é a condição para definição de $V(\vec{r})$. Então, temos que:

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \; . \tag{3.3-10}$$

Comparando a equação acima com a definição de gradiente

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \; , \tag{3.3-11}$$

temos que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \; . \tag{3.3-12}$$

Sabemos que o rotacional do gradiente de uma função escalar é zero. Levando isto em conta, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} V) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \; . \tag{3.3-13}$$

A condição acima representa a condição necessária que a força deve satisfazer para que a função $V(\vec{r})$ seja definida quando a força é dada como função da posição. Se isso não ocorre, não faz sentido falar em energia potencial (SYMON, 1996).

A equação (3.3-13) também é uma condição suficiente para a existência de um potencial, isto é, ela garante que a integral em (3.3-9) seja independente da trajetória de integração. De fato, usando o teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS \ , \tag{3.3-14}$$

onde C é qualquer caminho fechado no espaço e A é a superfície limitada pela curva C na figura 3.1, a equação (3.3-13) nos leva a

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \ , \tag{3.3-15}$$

ou seja, que o trabalho realizado por $\vec{F}$ para se ir de $\vec{r}_s$ até $\vec{r}$ será independente do caminho seguido.

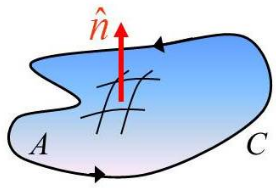

Figura 3.1: Uma superfície percorrida por um caminho fechado. O vetor unitário $\hat{n}$ é normal à superfície.

3.3.2 Forças conservativas

Quando $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, podemos representar o trabalho por:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_s} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \ . \tag{3.3-16}$$

Por outro lado, do teorema do trabalho-energia, temos:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1 \ . \tag{3.3-17}$$

Logo, combinando (3.3-16) com (3.3-17), obtemos:

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = T_2 - T_1 \Rightarrow T + V(\vec{r}) = E \ , \tag{3.3-18}$$

sendo E uma constante denominada energia mecânica total. Esse resultado mostra que, no caso em que a força é função apenas da posição e cujo rotacional é nulo, a energia mecânica se conserva. Este tipo de força é dita *conservativa*.

3.4 Gravitação

A lei da gravitação universal foi formulada por volta de 1666 por Newton motivado pela seguinte pergunta: o que impede a lua de sair de sua órbita em torno da terra, exatamente como acontece ao cortarmos a corda que prende uma bola que está sendo rodada? De todas as forças da natureza (existem apenas quatro forças) a gravitacional é a menos entendida, apesar de ter sido a primeira a ser pesquisada e estudada matematicamente. É a única que se manifesta com todas as coisas existentes no Universo e, portanto, é uma força universal. A teoria da gravitação de Newton descreve com eficiência os movimentos dos objetos que sofrem a influência da gravidade, mas não oferece qualquer explicação quanto a natureza da força gravitacional (HALLIDAY, 2006).

Nesta seção, faremos uma breve abordagem sobre a teoria da gravitação Newtoniana.

3.4.1 Lei da Gravitação Universal

Newton deduziu que as forças que mantém os planetas em suas órbitas devem variar inversamente com o quadrado de suas distâncias aos centros em torno dos quais as descrevem. Considerando a terra e a lua como massas pontuais, ele comparou a força necessária para manter a lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da terra, e encontrou que elas concordavam bem (NUSSENZVEIG, 2002). Então, ele formulou a seguinte lei: "*cada partícula de massa M atrai outra partícula de massa m no Universo com uma força que varia diretamente com o produto de suas massas e inversamente com o quadrado da distância entre elas*".

Matematicamente, temos:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \ , \tag{3.4-19}$$

onde $\hat{r}$ é um vetor unitário que aponta de M para m, o sinal negativo indica que a força é atrativa e $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ é uma constante.

Newton estava convencido de que suas descobertas demonstravam as maravilhas criadas po Deus. A presença divina agia como um "éter", material que não oferecia resistência aos corpos mas que poderia movê-los por meio da gravidade. Newton imaginava um Universo infinitamente grande no qual Deus tinha colocado as estrelas nas posições corretas de modo que a atração gravitacional entre elas fosse nula.

A equação (3.4-21) aplica-se apenas à partículas pontuais. Se tivermos uma distribuição contínua de matéria a força pode ser calculada pela expressão:

$$\vec{F} = -Gm \int_V \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{r^2} \hat{r} dv' \ , \tag{3.4-20}$$

onde $\rho\left(\vec{r'}\right)$ é a densidade de massa e dv' é o elemento de volume da posição definida pelo vetor $\vec{r'}$ da origem (arbitrária) ao ponto na distribuição de massa. Se ambos os corpos, o de massa M e o de massa m tem uma extensão finita, uma segunda integração sobre o volume de m será necessária para computar a força total (MARION, 2003).

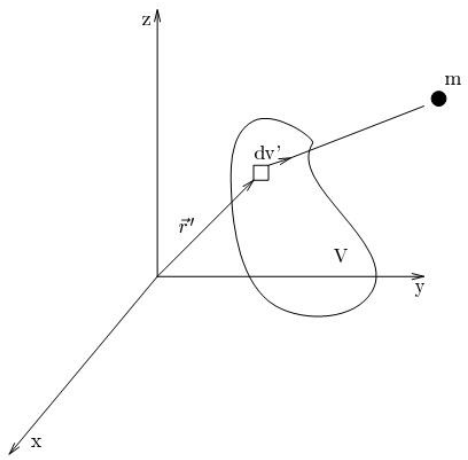

Figura 3.2: Para encontrar a força gravitacional entre uma massa pontual m e uma distribuição contínua de matéria, integramos a densidade de massa sobre o volume.

3.4.2 Campo e potencial gravitacionais

O vetor campo gravitacional $\vec{g}$ é o vetor representante da força por unidade de massa, exercida sobre a partícula no campo de um corpo de massa M. Assim, o potencial gerado por uma partícula de massa M, é

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r} \tag{3.4-21}$$

Logo, para uma distribuição contínua

$$\vec{g} = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{r^2} \hat{r} dv' \ . \tag{3.4-22}$$

O vetor campo gravitacional $\vec{g}$, dado por (3.4-21), pode ser representado como um gradiente de uma função escalar, pois ele varia com $1/r^2$ ($\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$). Com isso:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \ , \tag{3.4-23}$$

sendo ϕ é o *potencial gravitacional*. Como $\vec{g}$ varia apenas radialmente, o potencial ϕ também deve variar com $\vec{r}$. Assim, temos:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{d\phi}{dr}\hat{r} = G\frac{M}{r^2}\hat{r} \ . \tag{3.4-24}$$

Então, integrando, obtemos:

$$\phi = -G\frac{M}{r} \ , \tag{3.4-25}$$

onde a constante de integração foi omitida.

Para uma distribuição contínua de matéria, o potencial gravitacional é calculado por:

$$\phi = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{r} dv' \tag{3.4-26}$$

Como $\vec{g}$ é proporcional à força gravitacional, temos que o rotacional da força também é nulo. Como vimos, isso mostra que a força gravitacional é conservativa e permite-nos escrever

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \ . \tag{3.4-27}$$

Então, comparando (3.4-21) com (3.4-27), encontramos:

$$V = m\phi \ . \tag{3.4-28}$$

No caso de potencial gerado por uma partícula de massa M, a energia potencial torna-se

$$V = -\frac{GmM}{r} \ . \tag{3.4-29}$$

Dessa equação, vemos que a função potencial gravitacional pode ser interpretada num ponto, fazendo o potencial igual a zero no infinito, como sendo o trabalho por unidade de massa para trazer o corpo do infinito até aquele ponto (CARMELI, 1982).

3.4.3 Equações dos campos

Suponha que, de maneira similar a eletrostática, temos um fluxo gravitacional Φ_m emanando da massa m, situada numa superfície arbitrária, através dessa mesma superfície segundo a figura a seguir:

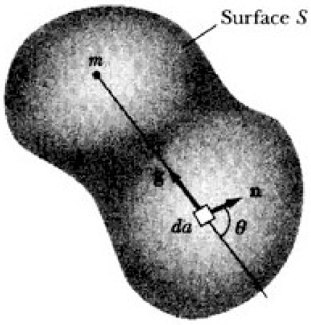

Figura 3.3: Uma superfície arbitrária com a massa m localizada dentro. O vetor unitário $\hat{n}$ é normal a superfície no ponto diferencial da.

O fluxo gravitacional é dado por

$$\Phi_m = \int_S \vec{n} \cdot \vec{g} da \ , \qquad (3.4\text{-}30)$$

onde a integral é sobre a superfície S e o vetor unitário $\vec{n}$ é normal a superfície.

Substituindo a expressão de $\vec{g}$ para um corpo de massa m, na equação acima, temos:

$$\Phi_m = -Gm \int_S \frac{cos\theta}{r^2} da \ , \qquad (3.4\text{-}31)$$

sendo θ o ângulo $\vec{n}$ e $\vec{g}$.

Integrando sobre o ângulo sólido da superfície arbitrária de valor 4π, o fluxo será.

$$\Phi_m = \int_S \vec{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi G m \ . \qquad (3.4\text{-}32)$$

Generalizando para as muitas massas m_i, já que a localização da massa na superfície é irrelevante, temos o somatório sobre todas as massas, isto é,

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi G \sum_i m_i \ . \qquad (3.4\text{-}33)$$

Por sua vez, para uma distribuição contínua temos:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} da = -4G\pi \int_V \rho dv \ , \tag{3.4-34}$$

ou ainda

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} da = -4\pi GM, \tag{3.4-35}$$

onde V é o volume envolvido pela superfície S, ρ é a densidade de massa e M é a massa contida no volume V. A equação (3.4-35), a qual é a lei de Gauss para o campo gravitacional, mostra que o fluxo do campo através de uma superfície fechada é proporcional a massa contida no volume delimitado por tal superfície.

Aplicando o teorema da divergência de Gauss ao primeiro membro da equação (3.4-34), encontramos:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dv = \int_V (-4\pi G) \rho dv \ . \tag{3.4-36}$$

Pela arbitrariedade da superfície e do volume, os integrandos das integrais da equação devem ser iguais, isto é,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4G\pi\rho \tag{3.4-37}$$

Logo, aplicando (3.4-23):

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \ . \tag{3.4-38}$$

Esta é conhecida como *equação de Poisson*.

A teoria de Newton para a gravitação é atualmente uma teoria que trabalha com um campo tridimensional. O campo assume uma descrição de campo escalar $\phi_{\vec{r}}$, onde esse escalar é função das coordenadas espaciais. A equação (3.4-38), a qual é conhecida como *equação de Poisson*, associa a densidade da distribuição de matéria, ρ, com o campo gravitacional criado (MARION, 2003).

Capítulo 4

Cosmologia: Primeiros Princípios

O desenvolvimento da cosmologia é sem dúvida um dos mais importantes triunfos da ciência no século XX. Uma das grandes questões da astronomia no início do século XX era saber a natureza das nebulosas espirais. Alguns astrônomos argumentavam serem elas um sistema de estrelas que nos circundam, enquanto outros defendiam a tese de que as nebulosas espirais eram sistemas semelhantes à nossa própria galáxia e situadas bem mais distantes que as estrelas usuais (COLES; LUCCHIN, 2002; ROOS, 2003). A existência de nebulosas já era conhecida há centenas de anos. O fato é que o estudo do Universo sempre esteve entre as preocupações centrais da humanidade, desde os tempos antigos.

Neste capítulo, apresentaremos um breve resumo histórico sobre as origens da cosmologia, desde Platão (427-347 a.C.), com a teoria do Geocentrismo, passando por Copérnico, quando propõe a teoria do Heliocentrismo, até chegarmos aos dias atuais com o estabelecimento do princípio cosmológico. Discutiremos alguns aspectos filosóficos da cosmologia dos antigos gregos ao longo do processo de construção da cosmologia moderna. Abordaremos o princípio cosmológico e a expansão do Universo. Veremos que o comprimento de onda da luz emitida pelas galáxias levam à conclusão que as mesmas estão se afastando de nós, fato explicado pela lei de Hubble.

4.1 Aspectos Históricos

As ideias dos antigos gregos foram fundamentais para o desenvolvimento da cosmologia. Podemos separar o desenvolvimento da cosmologia em três períodos históricos: o período antigo, de Platão até Descartes (1596-1650), o período clássico, que se prolonga até Einstein e o período moderno, de Einstein até os dias de hoje. A cosmologia Newtoniana se deu início quando Newton publicou a Teoria da Gravitação no *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* em 1687, e com isso ele pode explicar as três leis empíricas de Kepler (NUSSENZVEIG, 2002).

A ideia de geocentrismo é creditada a Platão, a qual diz que as estrelas estão presas a uma esfera celeste que executada um movimento de rotação em torno da terra, sendo esta o centro de todo o Universo, ou seja, o Universo como um todo gira em torno da terra (NUSSENZVEIG, 2002). Para Platão, a natureza foi criada por uma mente cósmica: Deus, e que também era governada por ele. Também desenvolveu a concepção de que a natureza era constituída de quatro elementos fundamentais: terra, ar, água e fogo. Esses elementos estariam distribuídos na esfera celeste da seguinte forma: como a terra é mais pesada ocuparia o círculo mais interno e acima dela o círculo da água. O ar, por ser mais leve, ocuparia o círculo externo e o fogo estaria acima do ar. Esses dois últimos elementos formariam camadas concêntricas em torno. A esfera celeste se encontraria bem mais afastada destes círculos e as estrelas seriam orifícios na esfera. Os astros mais próximos, como a lua, não estariam presos à esfera mas se movimentariam graças a um fluido, a *quintessência* ou *éter*, o qual preencheria a esfera. Essa foi a explicação sobre o fato de a lua não se precipitar sobre a terra já que não estava presa à esfera (SOUZA, 2004).

Aristóteles (384-322 a.C.) acreditava numa natureza eterna e imutável. Também acreditava no modelo onde cada constituinte do Universo possuía seu lugar próprio, ocupando posição privilegiada, como está descrito no parágrafo anterior. Aristarco de Samos (310-230 a.C.) tentou quebrar o modelo geocêntrico. Para ele, era a terra que deveria estar orbitando em torno do sol. Hiparco (190-120 a.C.) fez importantes

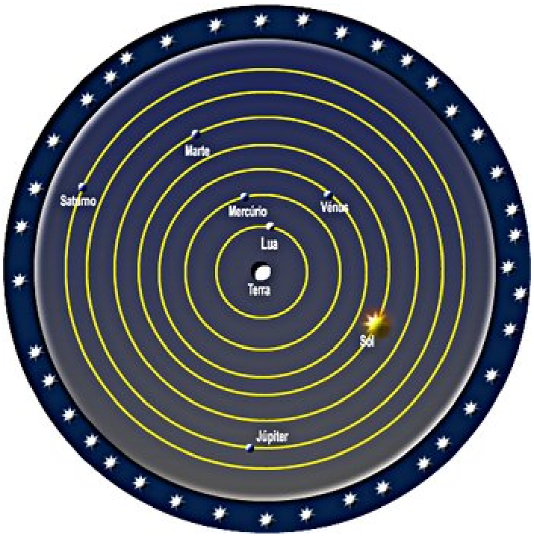

Figura 4.1: Modelo geocêntrico

observações sobre o brilho e posição das estrelas e planetas, propondo que a Lua e o Sol se movimentavam em órbitas circulares e realizavam um movimento de epiciclo. Mais tarde, esse modelo foi aperfeiçoado por Ptolomeu (87-150 d.C.) acrescentando órbitas compostas em torno dos planetas, as quais eram um círculo principal e um círculo menor, sobreposto pelo primeiro, reforçando o movimento de epiciclo e explicando o movimento retrógrado dos planetas (NUSSENZVEIG, 2002; SOUZA, 2004).

O período heliocêntrico tem seu inicio no final do Renascimento com Nicolau Copérnico (1473-1543) propondo que o Sol é o centro de todo o sistema planetário, enquanto a Terra e outros planetas giravam ao seu redor, mas ainda matinha a ideia de um Universo finito, fechado por esferas, onde os planetas descreviam órbitas circulares perfeitas. Também esse novo modelo não foi suficiente para quebrar o modelo geocêntrico, até porque a Igreja Católica ofereceu forte resistência a esse modelo considerando-o como uma heresia, e também faltavam evidências observacionais. Em 1609, Johannes Kepler provou que Marte girava em trono do Sol percorrendo uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos dessa elipse, generalizando para os outros planetas e formulando assim as três leis de Kepler. Outro impacto muito forte foi causado por Galileu Galilei (1564-1642) no mesmo ano, quando ele construiu o primeiro telescópio da história que possibilitou realizar observações de Júpiter e descobrir as suas luas, e assim o modelo heliocêntrico finalmente foi adotado (NUSSENZVEIG, 2002).

A partir daí o modelo de esfera celeste, contendo todas as estrelas girando em torno da Terra, passou a ser rejeitado, com a hipótese formulada por Galileu de que todas as estrelas são astros semelhantes ao Sol. Entretanto, os planetas mais próximos se movimentam em relação ao fundo dos planetas mais distantes, o que não acontece com as estrelas. Isto é conhecido como *efeito de paralaxe*[1]. Então, medir as distâncias das estrelas era um problema considerável. Mesmo assim, telescópios cada vez mais poderosos foram sendo construídos permitindo a descoberta de nebulosas e galáxias (SOUZA, 2004). Posteriormente, Imannuel Kant (1724-1804) juntamente com Thomas Wright (1711-1786) classificariam a Via Láctea como um sistema composto de uma miríade de estrelas distribuídas em uma estrutura semelhante a discos, apresentando também o conceito de *Universos-ilha*, os quais seriam esses discos e definindo as nebulosas identificadas na época como sistemas semelhantes à Via Láctea (WEINBERG, 1972; ROOS, 2003). Em 1755, Kant publicou o *livro História Geral da Natureza* e *Teoria dos Céus*, no qual afirmou que nós vivemos numa região típica e comum do Universo, que o Sol é uma estrela como todas as outras, e que a Via Láctea era mais uma galáxia entre tantas outras, assim como as nebulosas.

Outro cientista que deu sua contribuição para um melhor entendimento da galáxia foi William Herschel (1738-1822). Dentre suas contribuições, podemos destacar o reconhecimento de Urano como sendo um planeta, estimou distâncias de estrelas baseadas em seu brilho aparente e propôs que a Via Láctea deveria ter a forma aproximada de um disco elíptico (ROOS, 2003). Em 1838, Friedrich W. Bessel (1784-1846) conseguiu detectar o efeito de paralaxe de algumas estrelas, dando base sólida para o estabelecimento da escala de distâncias astronômicas.

O modelo de Universos-ilha era muito controverso na época e os astrônomos não o

[1]O efeito de paralaxe se deve à mudança na posição aparente das estrelas próximas em relação às estrelas de fundo, as quais parecem estar paradas devido às suas enormes distâncias.

aceitavam devido ele ser contrário às observações feitas até então. Consideravam que as nebulosas deveriam ser galácticas. Somente em 1925, quando Edwin P. Hubble (1889-1953) descobriu que a nebulosa de Andrômeda não podia ser um objeto galáctico (ROOS, 2003), os Universos-ilha de Kant foram finalmente aceitos. Observando as Cefeidas[2] em Andrômeda, mostrou que a nebulosa estava a cerca de 930 mil anos-luz, o que é metade da distância aceita atualmente. Com isso, ele estabeleceu que muitas nebulosas eram sistemas estelares fora da Via Láctea. Faltava ainda resolver o problema do Universo estático, mas logo após Hubble provou que o Universo não é estático e que está de fato em expansão, onde as galáxias se afastam entre si com velocidades crescentes estabelecendo assim a lei de expansão do Universo. Isso será tratado com mais detalhes adiante.

4.2 O Princípio Cosmológico e a Expansão do Universo

O principio cosmológico foi originalmente introduzido por Albert Einstein em 1917, particularmente motivado pelas ideias de Ernst Mach (1838-1916), o qual afirmava que as leis da física são determinadas pela distribuição de matéria a grandes escalas. No contexto newtoniano, é essencialmente uma interpretação das ideias de Copérnico, o qual afirmava não haver pontos privilegiados no Universo, onde não se pode colocar por exemplo, o sistema solar ou a nossa galáxia como centro do Universo (RAINE; THOMAS, 2001; COLES; LUCCHIN, 2002; MUKHANOV, 2005). Isso garante que as leis físicas que descobrimos na Terra podem ser aplicadas por todo o Universo. Então para a cosmologia moderna o Universo não tem centro, todas as posições tem igual importância. Segundo o principio cosmológico, o Universo é *homogêneo* e *isotrópico* a grandes escalas. Ele pode ser enunciado da seguinte forma:

- Em cada época o Universo não muda de ponto para ponto, isto é, apresenta o mesmo aspecto em cada posição, com exceção das irregularidades locais. As quantidades

[2]São estrelas variáveis, amarelas, muito grandes e de grande luminosidade, cuja luz emitida varia em períodos de 1 a 70 dias. Um exemplo de Cefeida é a estrela Polar ou estrela do Norte.

cósmicas não dependem da posição, mas apenas do tempo (característica homogênea). Entretanto, a homogeneidade não implica em uniformidade;

- Além de pontos não há direções privilegiadas. Diversos observadores, independentes entre si, em cada instante, terão a mesma interpretação de Universo, mesmo que olhem em todas as direções (característica isotrópica);

O principio cosmológico só é valido em escalas maiores que 100 Mpc ($1Mpc \simeq 3,26 \times 10^{24}$ anos-luz) (MUKHANOV, 2005; FERRARO, 2007). Em escalas menores o Universo tem uma estrutura não homogênea. Podemos afirmar também através de observações que o Universo está em expansão e se expande de acordo com a lei de Hubble (essa lei será detalhada mais adiante). Isto não quer dizer que ocorre uma expansão das galáxias no espaço e sim uma expansão do próprio espaço. Também, não significa dizer que o Universo sempre esteve em expansão acelerada. Sabe-se hoje que o Universo entrou em fase de aceleração num passado recente. Num passado mais remoto a expansão era desacelerada. A descoberta de expansão do Universo e o principio cosmológico levaram à construção de um modelo conhecido como modelo do Big Bang.

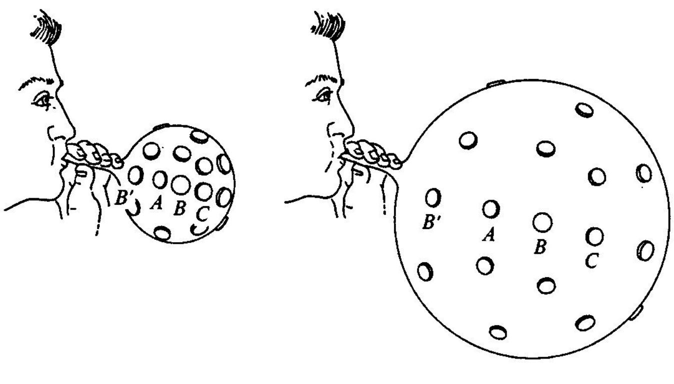

Figura 4.2: O modelo de expansão do Universo: um balão coberto por moedas sendo inflado.

A figura acima representa uma idealização da expansão do Universo onde as moedas representam as galáxias. Cada moeda pode ser considerada o centro da expansão onde elas próprias não se expandem (caso contrário a distância terra-sol, por exemplo, não permaneceria constante!), com a configuração do sistema permanecendo a mesma.

Uma versão mais forte do principio cosmológico foi formulada por Bondi, Gold e Hoyle em 1948. Segundo eles, o Universo não é somente o mesmo em todos os lugares e todas as posições, mas também em todos os tempos. Essa teoria implica numa continua criação de matéria a fim de manter a densidade do Universo em expansão constante, não podendo ser aplicada as equações de Einstein. Ela também confrontava a teoria do Big Bang e foi abandonada nos anos 1960 (RINDLER, 2006).

4.3 As Galáxias e o Desvio para o Vermelho

A velocidade radial das galáxias em relação ao observador pode ser facilmente estimada através do efeito Doppler[3]. Os comprimentos de ondas das linhas espectrais, que observamos numa estrela individual numa galáxia, são diferentes dos comprimentos de onda das linhas espectrais observadas em laboratório, porque a velocidade de afastamento das galáxias provoca um deslocamento nessas linhas (SOUZA, 2004). Hubble estabeleceu, em 1929, que muitas nebulosas eram sistemas estelares fora da Via Láctea, quando descobriu variáveis Cefeidas na Nebulosa de Andrômeda, usando o telescópio de 2,5 m no Monte Wilson (RINDLER, 2006). A luz das estrelas, quando analisadas por um espectrógrafo, permite a medida do deslocamento espectral das linhas devido ao movimento da fonte em relação ao observador. Analisando a intensidade da luz emitida das Cefeidas, determinava-se a distância em que se encontrava a nebulosa em que estava a Cefeida. As linhas espectrais apresentavam um comportamento tendencioso para o vermelho ou o azul por uma quantidade que dependia da velocidade da estrela observada em relação à Terra (RAINE; THOMAS, 2001).

Muitos dos espectros observados produziam um desvio para o vermelho, também chamado de *redshift*, o qual foi interpretado como o efeito Doppler, isto é, como desvios

[3]Consiste uma variação de frequência das ondas relacionada ao movimento da fonte.

de velocidades indicando um movimento real de recessão. "A determinação da distância e da velocidade de recessão nos permite verificar que as galáxias mais distantes se afastam sistematicamente de nós com velocidades proporcionalmente maiores, conforme anunciou Hubble em 1927" (SOUZA, 2004, p.50). O deslocamento na posição das linhas espectrais em relação ao padrão de laboratório permite a obtenção experimental do *redshift* z, baseando-se no efeito Doppler da radiação (MUKHANOV, 2005). A distância entre duas cristas de uma onda (comprimento de onda) medida por um observador é menor (deslocamento para o azul) quando a fonte emissora aproxima-se do observador do que quando a fonte está parada. Quando a fonte afasta-se do observador o comprimento de onda medido por ele é maior (deslocamento para o vermelho). Para a radiação eletromagnética, considerando baixas velocidades, temos:

$$\frac{\lambda_{observado} - \lambda_{emitido}}{\lambda_{emitido}} = \frac{v}{c} \; . \tag{4.3-1}$$

O *redshift* z de uma fonte luminosa é então definido por:

$$z = \frac{\lambda_{observado} - \lambda_{emitido}}{\lambda_{emitido}} = \frac{v}{c} \; , \tag{4.3-2}$$

que, com a correção da relatividade restrita, fica:

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \tag{4.3-3}$$

A proporção entre o comprimento de onda observada e o comprimento de onda emitida é:

$$\frac{\lambda_{observado}}{\lambda_{emitido}} = 1 + z \; , \tag{4.3-4}$$

onde um z negativo corresponde a um desvio para o azul (RESNICK, 1968).

4.4 A Lei de Hubble

Algumas observações mostraram que muitas galáxias estavam se afastando de nós, pois a análise das linhas espectrais das estrelas indicavam um desvio para o vermelho.

Contudo, outras a uma distância mais próxima mostravam um desvio para azul com um *redshift* negativo $z = -0,001$, por exemplo, a nebulosa de Andrômeda M3, indicando que ela está se aproximando. Essa observação foi feita em 1922 por Vesto Melvin Slipher (1875-1969). Além disso, ele descobriu que outras quatro apresentavam um z negativo e 36 com um z positivo (WEINBERG, 2008)

Em 1929, Hubble, observando o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias detectadas por Milton La Salle Humason (1891-1972) e medindo suas distâncias, descobriu que as velocidades de recessão das galáxias distantes aumentavam linearmente com a distância (DODELSON, 2003; RINDLER, 2006). Essa afirmação ficou conhecida como a *Lei de Hubble* e é descrita pela equação:

$$v = H_0 d \ , \tag{4.4-5}$$

sendo H_0 a constante de Hubble. O valor exato dessa constante é incerto. Atualmente estima-se um valor entre 50 e 100 $Km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$. Contudo, alguns astrônomos comumente escrevem a constante como sendo (RAINE; THOMAS, 2001):

$$H_0 = 100hKm \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1} \ , \tag{4.4-6}$$

onde $0,5 \leq h \leq 1$ é um fator de correção.

As observações de Hubble nos permitem concluir que o Universo está em expansão. Se o Universo está se expandindo, podemos imaginar que, no passado, ele deve ter começado como um ponto. Essa é a ideia original do "Big Bang". A expansão pode ter ocorrido num instante do passado e esse instante é chamado de *tempo de Hubble* (t_H), dado pela expressão:

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9,7778 \times 10^9 h^{-1} anos \tag{4.4-7}$$

Portanto, a grande explosão pode ter começado a cerca de 10 bilhões de anos.

Capítulo 5

Descrição Matemática da Cosmologia Newtoniana

A cosmologia Newtoniana é baseada na teoria da gravitação de Newton e na conservação da energia. Além disso, leva em conta o princípio cosmológico. O uso da mecânica Newtoniana para achar uma cosmologia sem o recurso da teoria de Einstein é útil, principalmente, porque as equações são mais simples. Por outro lado, essa formulação pode ser derivada da teoria de Einstein no limite para campos gravitacionais fracos (MUKHANOV, 2005).

Como veremos, para construirmos o nosso modelo, vamos considerar um Universo homogêneo, isotrópico e infinito, ou seja, que não possua centro e bordas, ocupado por um fluido chamado *fluido cosmológico*, que pode se expandir ou se contrair, onde as partículas desse fluido seriam as galáxias.

Acredita-se hoje que o Universo se encontra em fase de expansão acelerada. Contudo, as equações que vamos obter não contemplam esta possibilidade e um termo a mais terá que ser acrescentado a elas, a *constante cosmológica*, para que essa descrição seja válida, o que será feito no capítulo 6.

A expansão (ou contração) do Universo é inerente à equação de Friedmann, a qual foi desenvolvida em 1922, sete anos após a descoberta de Hubble. Nesta equação, um aumento da densidade de massa do Universo contribui em sua expansão. Por outro lado, outra equação muito útil, a equação da aceleração, pode nos mostrar a desaceleração da expansão do Universo, certamente dentro de algumas condições. A equação de Friedmann e a equação da aceleração são consistentes com a conservação da energia local (RAINE; THOMAS, 2001; ROOS, 2003).

Qualquer modelo que obedeça ao princípio cosmológico pode ser descrito por alguns parâmetros cosmológicos. Consideraremos o parâmetro de densidade e o parâmetro de desaceleração, o qual depende dos componentes presentes no Universo e seu valor pode indicar uma diminuição ou um aumento da expansão. Também, diferentes formas de geometria nos fornecem modelos para a sua representação do Universo, consequências da homogeneidade e da isotropia.

5.1 Cosmologia Newtoniana

Como sabemos, a gravitação exerce um papel fundamental na dinâmica do Universo, pois, devido ao seu longo alcance, contribui decisivamente para aglutinar e dessa forma desacelerar a expansão cosmológica. Acontece que esse processo não é bem compreendido pela teoria Newtoniana, pois em um Universo finito e Newtoniano, observadores, situados nos limites da distribuição de massa, perceberiam uma distribuição de galáxias diferente daquela observada a partir de uma região central, o que violaria o princípio cosmológico. Por outro lado, em um Universo infinito, uniformemente preenchido com matéria, todos os pontos a uma mesma distância de uma dada posição contribuiriam igualmente para a aceleração gravitacional e, em consequência disso, ela deveria ser nula (SOUZA, 2004). Se $\vec{g}$ é nulo, pela equação de Poisson [Eq. (3.4-38)], temos $\phi = 0$ e, consequentemente, $\rho = 0$. Portanto, o único modelo cosmológico Newtoniano seria um Universo vazio[1].

Naturalmente, este fato nos leva a pensar que a aplicação da teoria da gravitação, na descrição da cosmologia, é completamente inadequada. Entretanto, o *teorema de Birkhoff* (1884-1944) permite-nos aplicar esse formalismo a todo o Universo, mesmo que infinito. Este teorema consiste numa modificação da lei de Gauss, imaginando que somente a massa

[1]Vale salientar que chegaríamos as mesmas conclusões se tivéssemos utilizado a Lei de Gauss [Eq. (3.4-35)].

interior a um dado raio r é que determina o movimento de uma camada esférica centrada em torno de um ponto arbitrário (SOUZA, 2004, p.61).

Aplicando o teorema de Birkhoff para uma galáxia de massa m, a uma distância r do centro, qualquer que seja ele, porque qualquer ponto pode ser o centro, será atraída pela massa interior ao volume considerado, a qual é dada por:

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \ , \tag{5.1-1}$$

onde ρ_0 é a densidade de massa atual.

Na ausência de criação de massa a expansão é dada pela energia total:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \ , \tag{5.1-2}$$

onde v é a velocidade de expansão do volume, dada pela lei de Hubble $v = H_0 r$.

Dependendo das condições iniciais, a energia pode total pode ser positiva, negativa ou nula, determinando três submodelos:

$E < 0$ - **Universo FECHADO**, a expansão do Universo vai decrescendo até que ele atinge um máximo. A partir daí o Universo inicia uma contração;

$E = 0$ - **Universo CRÍTICO**, modelo de Einstein-de Sitter, indicando uma expansão indefinida. O Universo pode se expandir eternamente, mas somente com a energia mínima necessária para tal;

$E > 0$ - **Universo ABERTO**, indicando um Universo que encontra-se em expansão eterna.

O que distingue os três casos é a quantidade de matéria no Universo. Os termos *aberto* e *fechado* servirão para caracterizar a densidade de energia do Universo (WEINBERG, 1972). Para o caso de $E = 0$, a densidade total de massa deve ter hoje um valor ρ_c, acima da qual o Universo vai paralisar sua expansão e iniciar um processo de contração e abaixo dela o Universo se expande para sempre. O caso intermediário (Universo plano) define a densidade crítica. Da equação (5.1-2), temos:

$$\frac{1}{2}mH_0^2 r^2 - \frac{4\pi}{3}Gm\rho_{0c}r^2 = 0 \ . \tag{5.1-3}$$

Assim, a densidade crítica, expressa em termos da constante de Hubble, fica:

$$\rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,8788 \times 10^{-29} h^2 g \cdot cm^{-3} \ . \tag{5.1-4}$$

A densidade crítica é uma função do tempo e decresce à medida que H_0 diminui. Um Universo com uma densidade igual ou menor que a densidade crítica se expande para sempre (Universo aberto). Por outro lado, um Universo com densidade maior que a densidade crítica tenderá a se colapsar (Universo fechado) (RAINE; THOMAS, 2001; ROOS, 2003).

Para que a energia total se mantenha constante no tempo, a variação da densidade, a qual é inevitável durante a expansão, deve ser compensada com uma variação na constante de Hubble (SOUZA, 2004). Concluímos que essa constante é variável no tempo, e a lei de Hubble fica na forma:

$$v(t) = H(t)r(t) \tag{5.1-5}$$

5.2 A Equação de Friedmann

A equação de Friedmann, no contexto da física Newtoniana, é obtida a partir do princípio cosmológico, admitindo que a posição de cada partícula presente no Universo muda com o tempo, de modo que a densidade de matéria também depende do tempo. “A equação de Friedmann descreve a expansão do Universo, e é portanto a equação mais importante da cosmologia” (LIDDLE, 2003, p.18). Para formular esta equação, usaremos a conservação da energia, calculando a energia potencial gravitacional e a energia cinética de uma partícula no Universo (não importa a qual já que pelo principio cosmológico não há posições privilegiadas no Universo).

Quando se trata da expansão do Universo, podemos pensar que as coordenadas espaciais das galáxias estão fixas e que apenas os espaços entre elas aumentam. Com isso, podemos introduzir um novo sistema de coordenadas, as coordenadas co-móveis, as quais não se alteram com a contração ou com a expansão do Universo. Numa expansão uniforme, a relação entre a distância real $r(t)$ e a distância co-móvel, denotada por x, pode ser escrita como:

$$r(t) = a(t)x \tag{5.2-6}$$

onde as galáxias permanecem em locais fixos no sistema de coordenadas $\vec{x}$. A quantidade $a(t)$ é conhecida como *fator de escala* ou *parâmetro de escala* do Universo, cujo valor atual tende pra 1 (DODELSON, 2003). Ela é a medida da taxa de expansão do Universo e nos mostra o quão rápido as separações físicas entre as galáxias crescem com o tempo, onde $\vec{x}$ é definido por definição (LIDDLE, 2003).

Para entender melhor a equação (5.2-6), considere a grade da figura abaixo que se expande uniformemente à medida que o tempo evolui. Os pontos na grade mantém suas coordenadas, então a distância co-móvel entre dois pontos permanece constante. Contudo, a distância física é proporcional ao fator de escala, a qual aumenta com o tempo.

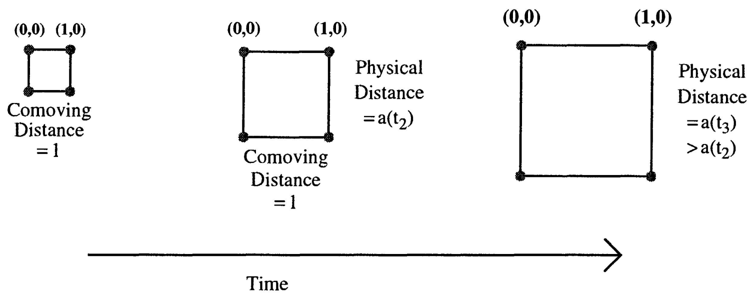

Figura 5.1: Expansão do Universo. A distância física é proporcional à distância co-móvel vezes o fator de escala.

O processo de expansão é igual em todos os pontos do espaço, então o parâmetro de escala é suficiente para descrever a expansão do Universo (SOUZA, 2004). Nessas condições, a velocidade local de expansão de uma camada qualquer depende da taxa de variação do parâmetro de escala e da massa total no interior da região

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 x^3 \; . \tag{5.2-7}$$

Por outro lado, normalizando a energia, associada a camada, em relação a energia de repouso de uma galáxia, temos:

$$E = -mc^2\frac{1}{2}k, \qquad (5.2\text{-}8)$$

em que k é uma constante.

Substituindo (5.2-7) em (5.2-8) na equação de expansão (5.1-2), usando o fato que $\dot{x} = 0$[2], já que por definição as galáxias estão fixas em coordenadas co-móveis, e multiplicando o resultado por $2/ma^2x^2$, encontramos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{a^2}\ . \qquad (5.2\text{-}9)$$

Essa é a forma padrão da **equação de Friedmann**. Todos os termos devem ser independentes de x para que a homogeneidade seja mantida.

Podemos fazer uma interpretação Newtoniana da equação de Friedmann. Para isso, vamos dividir todos os termos da equação acima por $2a$. Fazendo isso e arranjando os termos, encontramos a equação da conservação da energia total:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - G\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\rho a^3\right)}{a} = -\frac{1}{2}kc^2 \qquad (5.2\text{-}10)$$

Na linguagem Newtoniana $\frac{\dot{a}^2}{2}$ é a energia cinética por unidade de massa de uma partícula com velocidade $\dot{a}$. O segundo termo desta equação é a energia potencial por unidade de massa devida a uma esfera de massa interior à uma partícula a um raio a. O terceiro termo representa a energia total constante.

A constante k é independente do tempo. Contudo, seu significado é obscuro na formulação Newtoniana. Se considerarmos a relatividade geral, seu sinal irá determinar o comportamento do Universo, mais precisamente a sua curvatura, e pode ter três valores possíveis: +1, 0 e -1 (RAINE; THOMAS, 2001; SOUZA, 2004; MUKHANOV, 2005).

5.3 A Equação do Fluido Cosmológico

Vamos agora obter uma equação que descreve como a densidade ρ de matéria no Universo está evoluindo com o tempo, uma equação que envolva a pressão de matéria.

[2] O "ponto" representa derivada com respeito ao tempo.

Devemos considerar que os diferentes tipos de materiais existentes no Universo possuem pressões diferentes que influenciam no comportamento da densidade (LIDDLE, 2003).

Para encontrar a equação do fluido cosmológico iremos fazer uso da *primeira lei da termodinâmica* aplicada a um volume V em expansão:

$$dE + pdV = TdS \ . \tag{5.3-11}$$

O volume possue um raio físico r dependente do tempo e sua energia é dada por $E = mc^2$. Então:

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 c^2 \ . \tag{5.3-12}$$

Derivando a expressão acima vamos ter:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi\rho r^2 c^2 \frac{dr}{dt} + \frac{4\pi}{3} r^3 c^2 \frac{d\rho}{dt} \ . \tag{5.3-13}$$

Por sua vez, a variação do volume $V = 4\pi r^3/3$ em relação ao tempo será:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \ . \tag{5.3-14}$$

Supondo que a expansão seja reversível, $TdS = 0$, temos, de (5.3-11), que:

$$\frac{dE}{dt} = -p\frac{dV}{dt} \ . \tag{5.3-15}$$

Logo, substituindo (5.3-13) e (5.3-14) em (5.3-15), e usando (5.2-6), chegamos a:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \ . \tag{5.3-16}$$

Essa é a equação do fluido cosmológico. É importante ressaltar que num Universo homogêneo não existem forças associadas à pressão. Então a pressão não pode contribuir na expansão do Universo, onde p é a pressão devida aos diversos componentes presentes no fluido cosmológico.

5.4 Soluções da Equação do Fluido Cosmológico

Para resolver a equação do fluido cosmológico, devemos analisar dois casos: a expansão dominada pela matéria e a expansão dominada pela radiação. Para o caso da matéria, assumiremos que a matéria presente no Universo exerce pressão desprezível, não sendo capaz de interferir na expansão do Universo. Isto é uma suposição simples que podemos fazer, onde as galáxias exercerão somente interações gravitacionais entre si. Para o caso da radiação, consideraremos que as partículas têm uma pressão de radiação, oriunda da energia cinética que elas possuem (LIDDLE, 2003). Vamos admitir um Universo plano ($k = 0$) nas equações.

- **Caso dominado pela matéria**

Considerando a equação do fluido cosmológico, fazendo $p = 0$, temos:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \ . \tag{5.4-17}$$

Esta é uma equação diferencial que pode ser resolvida pelo método padrão de separação de variáveis, mas podemos simplificar sua solução. Para isto, note que a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0 \ . \tag{5.4-18}$$

Para que isto seja verdade, $(\rho a^3) = cte$, então:

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \ , \tag{5.4-19}$$

ou seja, a densidade cai em proporção ao volume do Universo. Se não houver criação ou aniquilação de massa dentro do volume de raio r, temos:

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho a^3 r^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \ , \tag{5.4-20}$$

que resulta na relação

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} \ , \tag{5.4-21}$$

que é a equação da conservação da massa em coordenadas co-móveis.

Podemos descobrir como a varia com o tempo usando a equação de Friedmann. Substituindo a relação acima e considerando $k = 0$, temos:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3a} \ . \tag{5.4-22}$$

Essa equação diferencial pode ser resolvida pelo método padrão. Uma forma alternativa é supor uma solução do tipo $a \propto t^q$. Fazendo essa substituição, o primeiro membro da equação (5.4-22) tem dependência com o tempo t^{2q-2} e o segundo membro t^{-q}. Portanto, $q = 2/3$ e a solução fica $a \propto t^{2/3}$. Dadas as condições iniciais $a = 1$ no tempo atual $t = t_0$, a solução é então:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \tag{5.4-23}$$

e

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \ . \tag{5.4-24}$$

A solução (5.4-23) mostra que o Universo deve se expandir para sempre. Vejamos como fica o parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\frac{2}{3}t^{-1/3}t_0^{-2/3}}{t^{2/3}t_0^{-2/3}} = \frac{2}{3t} \ , \tag{5.4-25}$$

ou seja, $H(t)$ está se tornando lento à medida que o Universo envelhece.

- **Caso dominado pela radiação**

Para este caso a pressão obedece a relação $p = \frac{\rho c^2}{3}$. Com este resultado a equação do fluido cosmológico nos dá:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \ . \tag{5.4-26}$$

Utilizando o mesmo procedimento usado para resolver a equação (5.4-17) e as suposições tomadas à respeito da solução, vamos encontrar que:

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4} \ , \tag{5.4-27}$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \tag{5.4-28}$$

e

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \ . \tag{5.4-29}$$

Vemos que para o caso da radiação o Universo se expande mais lento do que o caso da matéria, consequência da pressão (LIDDLE, 2003). Para os dois casos, a densidade de matéria permanece invariável.

5.5 A Equação da Aceleração

As equações de Friedmann e do fluido cosmológico dão origem a uma terceira equação, a qual descreve a aceleração do fator de escala. Para obtê-la, vamos inicialmente derivar com respeito ao tempo a equação (5.2-9). Fazendo isso, obtemos:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3} \ . \tag{5.5-30}$$

Substituindo $\dot{\rho}$ da equação (5.3-16) na equação acima nos dá:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2} \ . \tag{5.5-31}$$

Então, usando (5.2-9) a após um pequeno trabalho algébrico, chegamos a equação da aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \ . \tag{5.5-32}$$

Esta equação nos diz que se a matéria possuir pressão a força gravitacional aumenta devido à esse fato, tendo como consequência a desaceleração da expansão do Universo (LIDDLE, 2003).

5.6 Parâmetros Cosmológicos

Para decidirmos o melhor modelo que descreve o Universo é necessário discutir alguns parâmetros. Abordaremos agora o *parâmetro de densidade* e o *parâmetro de desaceleração*.

- **Parâmetro de densidade**

O parâmetro de densidade é útil para descrever a densidade do Universo. Considere que $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble (porque ele não é constante com o tempo) (MUKHANOV, 2005). Então, a equação de Friedmann nos diz que:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{a^2} \; . \tag{5.6-33}$$

Para que o Universo seja crítico devemos ter $k = 0$. Fazendo isso, chegamos a equação da densidade crítica, a qual já foi discutida anteriormente:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \; . \tag{5.6-34}$$

Note que a densidade crítica muda com o tempo, assim como H. Como vimos antes, $\rho_c(t) = 1,8788 \times 10^{-29} h^2 g \cdot cm^{-3}$ ou $\rho_c(t) = 1,88h^2 \times 10^{-26} Kg \cdot m^{-3}$. Ela não é necessariamente a densidade real do Universo (LIDDLE, 2003). É mais útil determinar um valor relativo para a densidade crítica. Esse valor é adimensional e é conhecido como **parâmetro de densidade** Ω, que é a razão entre a densidade real do Universo e sua densidade crítica em qualquer instante de tempo:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \; . \tag{5.6-35}$$

O valor do parâmetro de densidade atual é:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} \tag{5.6-36}$$

Substituindo (5.6-35) em (5.6-33) em considerando a equação (5.6-34), vamos ter:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c(t)\Omega - \frac{kc^2}{a^2} = H^2\Omega - \frac{kc^2}{a^2} \; , \tag{5.6-37}$$

o que nos dá:

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2H^2} \; , \tag{5.6-38}$$

que é a equação de Friedmann escrita de outra forma, sendo útil para analisar a evolução da densidade.

Nosso Universo contém diferentes tipos de matéria, e essa notação pode ser usada para cada componente individual de densidade como, por exemplo, Ω_{mat}, Ω_{rad}, os quais se referem ao parâmetro de densidade da matéria e da radiação respectivamente. Além disso, costuma-se associar o parâmetro de densidade com o termo de curvatura, escrevendo:

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2H^2} \tag{5.6-39}$$

ou

$$\Omega + \Omega_k = 1 \; . \tag{5.6-40}$$

- **Parâmetro de Desaceleração**

Não somente o Universo está se expandindo, mas também, a taxa com a qual ele se expande, dada pelo parâmetro de Hubble, muda com o tempo (ROOS, 2003). Uma forma de representar isso é através do **parâmetro de desaceleração**. Para obtê-lo, expandimos em série de Taylor o fator de escala no tempo atual (t_0), considerando apenas os três primeiros termos da expansão (o resto é desprezível). Fazendo isso, temos:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)\,[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)\,[t - t_0]^2 \; . \tag{5.6-41}$$

Dividindo todos os termos por $a(t_0)$ e considerando $H = \frac{\dot{a}}{a}$, escrevemos:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0\,[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2\,[t - t_0]^2 \; , \tag{5.6-42}$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração dado por:

$$q_0 = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \; , \tag{5.6-43}$$

que é uma medida da desaceleração do Universo. O sinal de menos foi introduzido porque foi suposto que a força gravitacional, sendo uma força atrativa, estaria retardando a expansão do Universo (RAINE; THOMAS, 2001; RINDLER, 2006). Quanto maior for o valor de q, mais rápida é a desaceleração.

O caso mais simples de Universo é o dominado por matéria, considerando que "matéria" seja qualquer material sem pressão, ou seja, $p = 0$ (LIDDLE, 2003). Considerando isto na equação da aceleração, vamos ter:

$$-\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{4\pi G\rho}{3} \ , \tag{5.6-44}$$

e da definição de densidade crítica

$$\frac{1}{H^2} = \frac{3}{8\pi G\rho_c} \ . \tag{5.6-45}$$

Com estes resultados, substituindo em (5.6-43) achamos:

$$q = \frac{\Omega}{2} \ , \tag{5.6-46}$$

o onde $q > 0$, indicando uma desaceleração do Universo qualquer que seja o modelo adotado. Entretanto, observações recentes indicam que o Universo parece estar acelerado, $q < 0$. Esta conclusão será firmada quando incluirmos um termo extra na equação de Friedmann conhecido como a constante cosmológica, a qual provoca uma aceleração do Universo (SOUZA, 2004).

Capítulo 6

A Constante Cosmológica e a Energia Escura

Ao formular a teoria da relatividade geral, Einstein acreditava num Universo estático. No entanto, essa teoria não cogitava essa possibilidade porque ao aplicar o princípio cosmológico nas equações, verificou que o Universo iria expandir-se infinitamente ou contrair-se para um ponto, mas Einstein não observou tais consequências. Com o intuito de corrigir isso, em 1917, propôs a introdução da constante cosmológica nas equações, representando uma componente adicional à densidade, o que mais tarde consideraria o maior erro de sua vida. Na verdade, ele achava que sua teoria não poderia dar conta de um Universo homogêneo e isotrópico. Foi Friedmann quem mostrou que a teoria da relatividade geral permite que o Universo seja homogêneo e isotrópico, mesmo que não seja estático. Contudo, a presença da constante cosmológica é completamente compatível com a teoria da relatividade geral, e dependendo do seu valor, a natureza da expansão cosmológica tem uma mudança drástica.

As estimativas recentes sugerem que o Universo está sofrendo uma fase de aceleração, tendo o vácuo a capacidade de prover a fonte dessa aceleração. Podemos entender isso considerando que na teoria da relatividade geral há a possibilidade da gravitação ser repulsiva, considerando-se um meio com pressão suficientemente negativa para gerar a repulsão, havendo a possibilidade para que a energia do vácuo seja um fator determinante para a taxa atual de expansão do Universo (SOUZA, 2004).

A noção de que o vácuo pode ser uma fonte de energia pode parecer contra-intuitivo. Mas as teorias atuais de partículas elementares e forças não só permitem uma densidade não-nula de energia do vácuo, como também sugerem fortemente que ela deva ter um valor grande. O fato é que a densidade de energia do vácuo não é tão grande quanto o que essas teorias parecem sugerir (SOUZA, 2004). A estrutura geométrica do Universo é extremamente sensível ao valor da densidade de energia do vácuo. Este valor é tão importante que uma constante proporcional à densidade de energia do vácuo foi definida. Ela se chama constante cosmológica.

Este capítulo se propõe a abordar os efeitos de uma constante cosmológica nas equações que obtemos anteriormente. Para isso, é importante discutirmos inicialmente um pouco sobre cosmologia relativística, já que a introdução da constante cosmológica é objeto de estudo da relatividade geral, onde também a constante k que aparece na equação de Friedmann tem um significado mais preciso. Ainda dentro dessa teoria, utilizaremos o conceito de energia escura associada ao vácuo como uma forma alternativa de entender a aceleração do Universo.

6.1 Cosmologia Relativística

Em 1915, Einstein propôs a teoria da relatividade geral que é a generalização da teoria da gravitação de Newton.

A analogia entre o movimento dos corpos num campo gravitacional com movimento dos corpos num referencial não-inercial, é conhecido como o princípio da equivalência. Este princípio é um dos pontos de partida da teoria da relatividade geral, postulada por Einstein em 1915. Entretanto, essa equivalência só é satisfeita localmente, isto é, sobre pequenas regiões do espaço, nos quais o campo pode ser considerado uniforme. Baseado nesse princípio, Einstein estabeleceu que a matéria e energia curvam o espaço-tempo à sua volta. Isto é, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo.

Do ponto de vista formal, enquanto a gravitação Newtoniana assume a possibilidade de apenas um potencial que descreve o campo gravitacional, a Relatividade Geral assume dez potenciais, que são identificados como as dez componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, do espaço-tempo curvo da geometria Riemanniana. Assim, devemos ter dez equações que, quando aplicadas a um certo limite, devem concordar com a equação de Poisson (3.4-38), que é a equação de campo para a gravitação Newtoniana (WEINBERG, 1972; LANDAU, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

A cosmologia relativística é construída apoiada sobre os aspectos e conceitos da teoria da relatividade geral e no princípio cosmológico. A métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker ou modelo FLRW é uma solução exata das equações de campo de Einstein da relatividade geral, descreve um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico. De acordo esta solução, as equações que descrevem a evolução do Universo são as mesmas obtidas na formulação Newtoniana. Contudo, a diferença é que são as condições iniciais que determinam a constante k que aparece na equação de Friedmann. Na verdade, o valor dessa constante está associada à curvatura e, portanto, trata-se de uma propriedade geométrica do Universo (SOUZA, 2004). Existem três tipos de geometria para o Universo: um espaço plano, com constante de curvatura nula, uma esfera tridimensional com constante de curvatura positiva e um espaço hiperbólico com constante de curvatura negativa.

As três possibilidades geométricas podem ser melhor entendidas considerando duas partículas livres viajando paralelamente entre si. Num Universo plano as partículas permanecem paralelas contanto que elas viajem livremente. Para um Universo fechado, as partículas gradualmente começam a convergir e para um Universo aberto suas trajetórias divergem como se fossem bolas de gude rolando numa cela (DODELSON, 2003). Por outro lado, o Universo é considerado plano quando sua densidade de energia é igual ao valor crítico, dado por aproximadamente $10^{-29} g/cm^3$. Se a densidade for maior que esse valor o Universo é fechado, análogo a superfície de uma esfera, e uma baixa densidade corresponde a um Universo aberto.

A *geometria plana* (Euclidiana) é o modelo mais simples que se aplica muito bem ao Universo. Dela se extrai as seguintes conclusões:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

- O comprimento da circunferência de um círculo de raio r é $2\pi r$.

Para que esse modelo possa ser aplicado, devemos considerar que o Universo é infinito em extensão, senão o princípio de que ele parece o mesmo visto de todos os pontos é violado.

Uma *geometria esférica* é considerada uma geometria não-Euclidiana também aplicada ao Universo, já que se considerarmos uma esfera perfeita todos os pontos de sua superfície parecem o mesmo (condição de isotropia), mas diferentemente do caso plano, a superfície esférica é finita em extensão. As propriedades geométricas do espaço Euclidiano ($k = 0$) são bem conhecidas mas as propriedades de um esfera são bem complexas. Este espaço fechado tem volume finito mas não tem limites ou bordas e todos os pontos são equivalentes (COLES; LUCCHIN, 2002; LIDDLE, 2003). A soma dos ângulos internos de um triângulo nessa superfície é maior que 180°. Tal modelo de Universo corresponde a uma quantidade $k > 0$ que aparece na equação de Friedmann, normalmente referido como um Universo fechado por causa de seu tamanho finito.

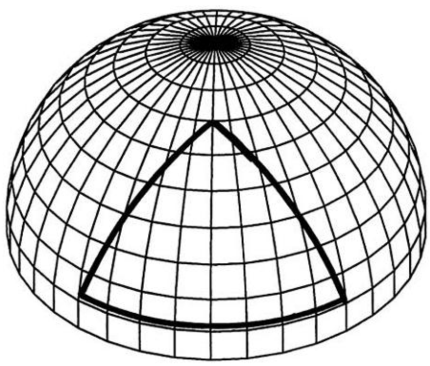

Figura 6.1: Universo fechado, correspondendo a uma curvatura positiva.

O caso $k < 0$ corresponde a uma geometria conhecida como *hiperbólica*, a qual é muito menos familiar que a geometria esférica. Ela é normalmente representada por uma superfície parecida com uma cela como na figura 6.2. A soma dos ângulos internos de um triângulo nessa superfície é menor que 180°. É difícil de ver que essa geometria é consistente com a isotropia mas o fato é que ela é.

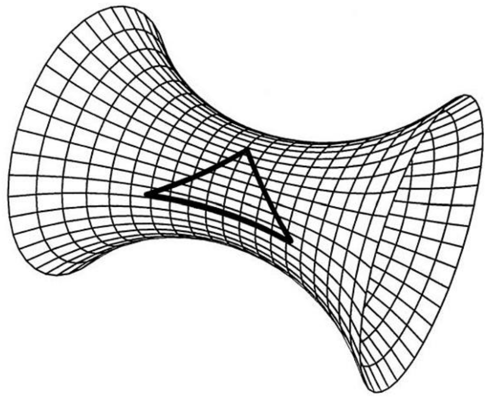

Figura 6.2: Universo aberto, correspondendo a uma curvatura negativa.

Na figura acima vemos que as linhas paralelas nunca vão se encontrar e por causa disso o Universo deve ser infinito em extensão, assim como o caso plano (LIDDLE, 2003). Tal modelo com curvatura negativa corresponde a um Universo aberto.

6.2 Introdução da Constante Cosmológica

A introdução da constante cosmológica Λ é vista como um dos objetos mais importantes e enigmáticos da cosmologia, a qual foi proposta por Einstein na tentativa de associar uma inércia ao vácuo. Essa constante aparece na equação de Friedmann como um termo extra.

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \ . \tag{6.2-1}$$

Em princípio, Λ pode ser positiva ou negativa, sendo mais frequentemente discutida num contexto de Universo com geometria plana, $k = 0$. Considerando a equação da aceleração, vamos ter:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \ . \tag{6.2-2}$$

Consideremos o caso $\Lambda < 0$. Para $k = 1$, o termo da constante cosmológica na equação (6.2-1) tem o mesmo sinal do termo de curvatura, atuando para parar a expansão. Para $k = -1$, a mesma coisa acontecerá porque a constante cosmológica vai eventualmente dominar o termo de curvatura positiva. O caso $k = 0$ sofre da mesma propriedade. Analisando a equação da aceleração, vemos que $\ddot{a}/a$ será sempre negativo desde que os dois termos do lado direito da equação também sejam (RAINE; THOMAS, 2001). Então um Universo com $\Lambda < 0$ tem que colapsar qualquer que seja o modelo adotado.

Agora vamos considerar o caso $\Lambda > 0$. Para $k = -1$ ou $k = 0$ a expansão continuará indefinidamente. Para ambos os casos no limite quando $t \gg t_0$ o termo de curvatura é insignificante (RAINE; THOMAS, 2001). Este modelo é chamado de *modelo de de Sitter*, o qual aponta para um Universo plano e sem matéria ($\rho = 0, k = 0$). Willem de Sitter (1872-1934) foi um matemático, físico e astrônomo holandês. Ele obteve uma solução para as equações de campo de Einstein da relatividade geral descrevendo a expansão do Universo. Considerando isto, a equação de Friedmann pode ser reescrita como:

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} \; . \qquad (6.2\text{-}3)$$

Lembrando que $H = \dot{a}/a$, então:

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}a \; . \qquad (6.2\text{-}4)$$

Como Λ é uma constante, a solução desta equação é:

$$a(t) = \exp\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t \; . \qquad (6.2\text{-}5)$$

Essa solução é uma inflação exponencial. Então, em um Universo dominado pela constante cosmológica a taxa de expansão é muito grande, tal que $\Lambda \gg 1$. Contudo, esse modelo não pode ser encarado como um modelo realista do Universo, apesar de que todos os outros modelos cosmológicos tendem para o modelo de de Sitter para $a \to \infty$.

Mencionamos antes que a matéria com pressão contribui para aumentar a força gravitacional, desacelerando a expansão do Universo. Mas, observe que, se a constante cosmológica for positiva isso dá uma contribuição positiva a $\ddot{a}$ resolvendo o problema da desaceleração, como queremos (FERRARO, 2007). "Se a constante cosmológica for suficientemente grande, ela pode superar a atração gravitacional e conduzir a um Universo acelerado" (LIDDLE, 2003, p.51). Considerando a equação (5.6-37) acrescida da constante cosmológica, temos:

$$H^2 = H^2\Omega - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{6.2-6}$$

ou

$$\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2H^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} \Longrightarrow \Omega + \Omega_\Lambda + 1 = \frac{kc^2}{a^2H^2} \ , \tag{6.2-7}$$

onde $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$ é definido como parâmetro de densidade para a constante cosmológica, representando a contribuição do vácuo. Para um Universo plano, $k = 0$, obtemos:

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \ . \tag{6.2-8}$$

A introdução da constante cosmológica tem consequências importantes no que diz respeito ao comportamento do Universo. Por exemplo, um Universo plano não mais necessariamente tem que colapsar, ou um Universo aberto tem que se expandir para sempre, nem tampouco possa ter havido um Big Bang (LIDDLE, 2003). Podemos parametrizar isso melhor através do parâmetro densidade da matéria e do parâmetro de densidade do vácuo. Os modelos de Universo possíveis são mostrados na figura 6.3.

A linha $\Omega_0 + \Omega_{0\Lambda} = 1$, onde Ω_0 é o parâmetro de densidade da matéria atual, nos dá um Universo plano com $\Lambda = 0$ e divide o plano entre Universo aberto e Universo fechado. Para identificar no plano onde temos um Universo acelerado, precisamos saber a taxa de expansão recente q_0. Basicamente, a constante cosmológica afeta o parâmetro de desaceleração que, nesse caso, é dado por:

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_{0\Lambda} \ , \tag{6.2-9}$$

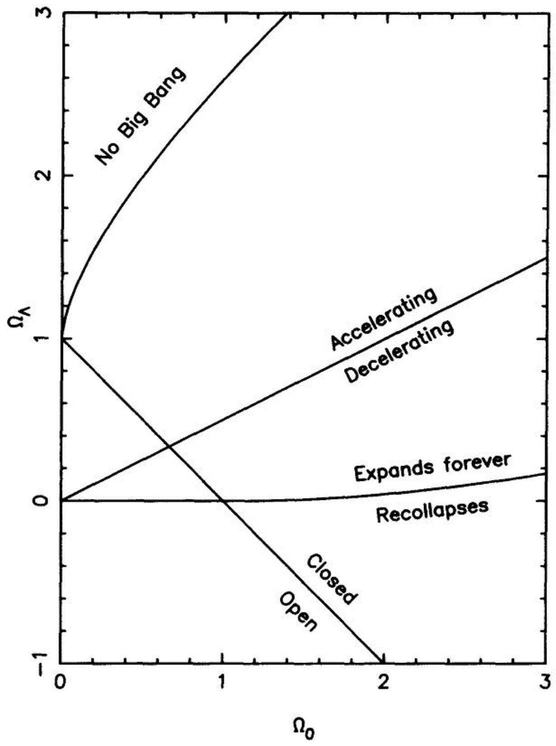

Figura 6.3: Os diferentes modelos de Universo de acordo com os parâmetros de densidade.

e no caso de um Universo plano, para que a relação $\Omega_0 + \Omega_{0\Lambda} = 1$ seja satisfeita, devemos ter:

$$q_0 = \frac{1 - 3\Omega_{0\Lambda}}{2} \ , \tag{6.2-10}$$

mostrando que, se esperamos um Universo plano acelerado ($q_0 < 0$), a aceleração só pode ser alcançada se $\Omega_{0\Lambda} > \Omega_0/2$, o que implica em $\Omega_{0\Lambda} > 1/3$ (LIDDLE, 2003; SOUZA, 2004).

A relação entre os parâmetros de densidade e a geometria é:

i) Universo aberto: $0 < \Omega + \Omega_\Lambda > 1$.

ii) Universo plano: $\Omega + \Omega_\Lambda = 1$.

iii) Universo fechado: $\Omega + \Omega_\Lambda > 1$.

Há a possibilidade de que a constante cosmológica tenha a ver apenas com um fenômeno transitório, o qual desaparecerá no futuro. Uma outra linha de pensamento aponta para uma constante cosmológica que não é perfeita, apresentando variações pequenas (LIDDLE, 2003). Seja o que for, a constante cosmológica é a hipótese mais simples que explica a natureza da energia escura, mas ela é problemática. Observações recentes, relativas às supernovas do tipo Ia, são consistentes com um valor muito pequeno e positivo para a constante cosmológica, da ordem de $10^{-29} g/cm^3$, um valor que corresponde cerca de 120 ordens de magnitude menor do que os resultados teóricos. Contudo, é previsto, de acordo com as teorias quânticas de campo, um valor muito maior para esta constante, a partir do cálculo da energia do vácuo. Se a densidade do vácuo ρ_Λ for ligeiramente grande, a força repulsiva faria com que o Universo se expandisse tão rápido que não daria tempo para que as galáxias se formassem ou outros sistemas gravitacionais (ROOS, 2003). Isso é chamado de o *problema da constante cosmológica.*

Outro problema é que ela levanta uma dúvida do porquê a soma $\Omega_0 = \Omega_{0m} + \Omega_{0\Lambda}$ ser precisamente 1. A densidade da matéria decresce de acordo com a equação (5.4-19), enquanto que Ω_Λ permanece constante. No Universo primordial a energia do vácuo era desprezível em comparação com a matéria enquanto que recentemente a situação se inverteu e é a energia do vácuo que começou a dominar. Então, o fato da constante cosmológica vir a dominar a soma justamente na nossa época e não em outra, justamente quando esse efeito pode ser observado, conduzindo a uma expansão acelerada do Universo[1] é uma incógnita. Como foi mencionado acima, se ela dominasse em outra época não se formariam as estruturas do Universo!. Este problema é denominado de *problema da coincidência cósmica.*

6.3 Energia Escura

Em um tempo relativamente recente, o Universo parece estar sendo dominado não pela matéria, mas por alguma forma inexplicada de energia escura, cuja densidade permanece constante com o tempo (DODELSON, 2003). No entanto, são apenas evidências que ainda não foram comprovadas, sendo um problema ainda a ser resolvido pela cosmologia

[1]Esse efeito é observado a cerca de 5 bilhões de anos.

moderna. Então, uma possibilidade para justificar a aceleração do Universo aceita pelos cosmólogos é através da energia do vácuo, uma energia intrínseca ou fundamental de um certo volume de espaço "vazio".

O conceito de energia escura associada ao vácuo nos permite entender de forma alternativa o Universo. De acordo com a teoria da relatividade geral, a pressão também atua como fonte de gravidade e a equação de Poisson tem a forma:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) \ , \tag{6.3-11}$$

onde foi incluso o termo de pressão. Se existir uma componente cuja pressão seja negativa, temos $\rho + 3p/c^2 < 0$, implicando num fluido no qual a gravidade é repulsiva, que é o que se imagina para o vácuo (SOUZA, 2004).

Das equações de Einstein da relatividade geral, o valor da constante cosmológica é determinado através da relação:

$$\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G} \ , \tag{6.3-12}$$

que nos dá a equação de Friedmann na forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\left(\rho + \rho_v\right) - \frac{kc^2}{a^2} \ . \tag{6.3-13}$$

Se considerarmos a equação do fluido para o vácuo, temos:

$$\dot{\rho_v} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_v + \frac{p_v}{c^2}\right) = 0 \ . \tag{6.3-14}$$

Como a densidade de energia do vácuo se mantém constante, devemos ter:

$$p_v = -\rho_v c^2 \ . \tag{6.3-15}$$

Portanto, o vácuo tem mesmo um efeito negativo de pressão. Com o Universo em expansão, trabalho é realizado sobre o vácuo, permitindo que sua densidade permaneça constante à medida que o volume no Universo aumenta (LIDDLE, 2003). Poderíamos ter chegado a esse mesmo resultado apenas usando o conceito de energia e trabalho considerando a expansão de um volume de vácuo. Com a expansão, estaremos ganhando uma energia dada por $E = mc^2 = \rho_v dV c^2$ que pela conservação da energia é igual a o trabalho realizado $-p_v dV$ (negativo porque o trabalho é realizado pelo vácuo), o que nos dá a equação (6.3-15).

Para que a energia escura possa ser compatível com as observações, deve satisfazer às seguintes condições (SOUZA, 2004):

1. Não deve emitir luz, já que toda a radiação presente no Universo é explicada pela matéria bariônica[2] presente nas estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias (MUKHANOV, 2005).

2. Deve ter pressão negativa $\rho + 3p/c^2 < 0$ para justificar sua utilização como fator de aceleração do Universo.

3. Tem que ser homogênea em grandes escalas, caso contrário a sua presença causaria dificuldades nas estimativas de massa dos aglomerados de galáxias.

O que difere a matéria normal da energia escura é que para a primeira a pressão é praticamente nula, enquanto que a segunda é dominada pelo termo de pressão. Na verdade, acredita-se que a energia escura é que esteja dominando a pressão cosmológica. Usualmente costuma-se parametrizar esta pressão através de uma equação de estado na forma:

$$p_X = \omega \rho_X c^2, \tag{6.3-16}$$

onde ω é uma constante.

Consideremos um parâmetro de densidade para a energia escura, dado por $\Omega_X = \rho_X/\rho_c$. Se substituirmos a equação (6.3-16) na equação da aceleração vamos ter

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \rho_X (3\omega + 1)\ , \tag{6.3-17}$$

[2]Se refere a todo material composto principalmente de prótons, nêutrons e elétrons. No contexto cosmológico, é comumente atribuída à poeira cósmica de onde nascem novas estrelas. Sua composição química é cerca de 75% de hidrogênio, 25% de hélio além da presença de alguns materiais mais pesados.

e, fazendo uso das equações (5.6-43) e (5.6-45), chegamos a:

$$q = \frac{\Omega_X}{2}(3\omega + 1) \ . \tag{6.3-18}$$

Se considerarmos que o Universo é composto por uma mistura de densidades $\rho = \rho_m + \rho_X$, a da matéria comum e a da energia escura, então o parâmetro de desaceleração fica:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} + \frac{\Omega_X}{2}(3\omega + 1) \tag{6.3-19}$$

Nesta equação um q negativo requer que a pressão seja negativa e $\omega < -1/3$. À medida que o Universo evolui Ω_X cai menos rápido que Ω_m e com isso o segundo termo do segundo membro deve dominar o primeiro resultando numa desaceleração negativa (RAINE, THOMAS, 2001). A energia escura pode ser dinâmica, tal como um campo escalar variante com o tempo (este tipo de energia é classificado como quintessência) capaz de conduzir o Universo à uma expansão acelerada, ou uma constante cosmológica, que corresponde a $\omega = -1$ (observe que fazendo isso na equação (6.3-19) obtemos uma equação análoga à equação (6.2-9)) implicando numa densidade de energia que se mantém constante ao longo da evolução cósmica. Na verdade, a energia escura contribui para a aceleração do Universo desde que $-1 \leq \omega < -1/3$ (SOUZA, 2004; FERRARO, 2007).

Contudo, a natureza da energia escura é incerta até o momento. Se a energia escura for uma constante cosmológica a aceleração do Universo continuará para sempre até que o Universo se torne vazio. Se for um campo escalar dinâmico, este campo pode decair resultando no preenchimento do Universo com matéria e energia (MUKHANOV, 2005). Isto é uma dificuldade teórica que ainda não foi contornada. Também não se sabe de que consiste a energia do vácuo, apenas sabemos que ela modifica a energia do Universo como se fosse matéria com uma forte pressão negativa, atuando como uma força anti-gravitacional (ROOS, 2003).

Capítulo 7

Considerações Finais

Toda a formulação apresentada neste trabalho foi construída baseada principalmente no princípio cosmológico e na expansão do Universo, o qual pode ser aplicado em escalas maiores que algumas centenas de Mpc ($1Mpc \simeq 3,26 \times 10^{24}$ anos-luz). Nesse limite, o Universo evolui de acordo com a lei de Hubble. No caso em que a pressão é desprezível, os resultados obtidos pela cosmologia Newtoniana são os mesmos da cosmologia relativística.

É oportuno discutir que equivalência algébrica entre as equações da cosmologia Newtoniana e as equações da cosmologia relativística não implica em equivalência conceitual. Mesmo que as duas teorias cheguem a equações iguais, elas partem de pontos de vistas bastante distintos e interpretam os termos dessas mesmas equações de forma diferente. Por exemplo, na teoria Newtoniana a constante k está associada à energia do sistema com um significado obscuro, enquanto que em cosmologia relativística esse termo designa a curvatura do espaço. Outro ponto importante é que a teoria Newtoniana fornece menos equações do que a relativística.

Concluímos também que um Universo com pressão nula e constante cosmológica descreve satisfatoriamente a evolução atual do Universo, já que em 1997 trabalhos de observação foram divulgados apontando para a existência de uma constante cosmológica com um parâmetro de densidade $\Omega_\Lambda \approx 0,7$. Contudo, em tempos remotos a constante cosmológica parece ter sido um termo desprezível.

Os cosmólogos ainda precisam provar a existência da energia escura e de onde vem esta energia, embora seus efeitos sobre o Universo como um todo sejam observados. A possibilidade mais conhecida é a de que essa energia é inerente ao espaço. Se um volume de espaço for totalmente vazio, ainda assim contém essa energia. Diferentemente da matéria, a energia escura não se concentra mais em alguns lugares do que em outros. Qualquer que seja a localização ela possui a mesma densidade. Também, questões como por que o Universo é tão uniforme e homogêneo em ampla escala e porque ele se apresenta desta forma e com estas leis precisam ser respondidas. Na verdade,alguns cosmólogos questionam sua própria existência e exploram a possibilidade de que a aceleração cósmica é fruto de uma nova teoria de gravitação. Enquanto os problemas persistirem, todas as soluções devem ser consideradas.

O Universo visível está a se expandir, mesmo que no passado ele possa ter sofrido um período de freamento da expansão. Também podemos afirmar que o Universo é aproximadamente espacialmente plano com baixa densidade de matéria ($\Omega_m \approx 0,3$).

As consequências para um Universo em expansão são um mistério. Se realmente a constante cosmológica domina a expansão, então o número de objetos visíveis no espaço diminuirá com o tempo, ou seja, galáxias no futuro deixarão de ser vistas. O Universo irá se expandir para sempre e não ocorrerá um colapso no futuro. Contudo, há modelos que sugerem que esta fase de aceleração é passageira e que em algum tempo a expansão será desacelerada.

Bibliografia

[1] BERGMANN, P. G. **Introduction to the Theory of the Relativity**. New York: Dover Publicações, 1975.

[2] CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

[3] COLES, P.; LUCCHIN, F.**Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure**. 2.ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2002.

[4] DODELSON, Scott. **Modern Cosmology**. Elsevier: Academic Press, 2003.

[5] FERRARO, Rafael. **Einstein's Space-time: An introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer, 2007.

[6] HALLIDAY, D.; RESNICK, R. e WALKER, J. **Fundamentos de Física vol. 1: Mecânica**. São Paulo: Editora LTC, 7ª edição, 2006.

[7] LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

[8] LIDDLE, Andrew. **An Introduction to Modern Cosmology**. 2. ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.

[9] MARION, J. B. e THORNTON, S. T. **Classical Dynamics: of the particles and systems**. 5.ed. Thomson Brooks/Cole, 2003.

[10] MUKHANOV, Viatcheslav. **Physical Foundations of Cosmology**. New York: Cambridge University Press, 2005.

[11] NETO. J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana Hamiltoniana**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

[12] NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica, vol. 1**. 4. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2002.

[13] RAINE, D. J.; THOMAS, E. G. **An Introduction to the Science of Cosmology**. Bristol: Institute of Physics Publishing, 2001.

[14] RESNICK, Robert. **Introduction to Special Relativity**. New York: John Wiley and Sons, 1968.

[15] RINDLER, Wolfgang. **Relativity Special, General, and Cosmological**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2006.

[16] ROOS, Matts. **Introduction to Cosmology**. 3.ed. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.

[17] SOUZA, R. E. **Introdução à Cosmologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

[18] SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro: Campus, 1996.

[19] WEINBERG, Steven. **Cosmology**. New York: Oxford University Press, 2008.

[20] WEINBERG, Steven. **Gravitation and Cosmology: Principles and Aplications of the General Theory of Relativity**. New York: John Wiley and Sons, 1972.